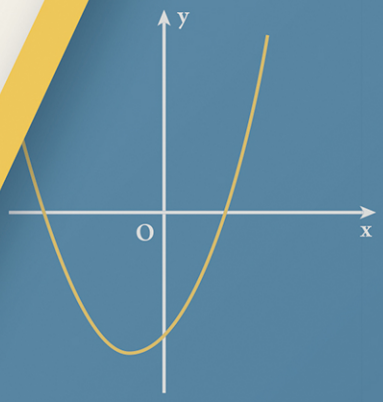
# Επανάληψη στην ΑΛΓΕΒΡΑ

## Γ΄ ΕΠΑ.Λ.

- Επανάληψη βασικών εννοιών
- Πλήρης θεωρία
- Παραδείγματα
- Γενικά θέματα
- Λύσεις




$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

ΘΑΝΑΣΗΣ Π. ΞΕΝΟΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

*Στη μνήμη των γονιών μου*
*Παναγιώτη και Ευσταθίας*

# Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους τελειόφοιτους της Γ΄ τάξης Επαγγελματικών Λυκείων που πρόκειται να συμμετάσχουν στις Πανελλαδικές Εξετάσεις.

Επίσης, απευθύνεται και στους συναδέλφους μαθηματικούς με τη βεβαιότητα ότι θα συνδράμει ουσιαστικά στην οργάνωση της δουλειάς τους.

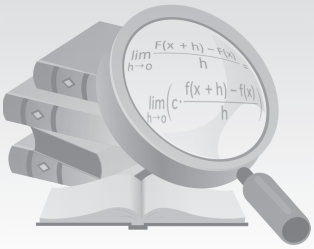
Το βιβλίο περιέχει:

- Τη θεωρία με πλήρεις απαντήσεις.
- Ερωτήσεις τύπου «Σωστό – Λάθος» με τις απαντήσεις τους.
- Προαπαιτούμενες γνώσεις.
- Παραδείγματα με υποδειγματική λύση.
- Ασκήσεις και προβλήματα με σύντομες λύσεις.

Θανάσης Ξένος
Οκτώβριος 2026

# Περιεχόμενα

**Κεφάλαιο 1.** Η θεωρία ..... 11
**Κεφάλαιο 2.** Προαπαιτούμενες γνώσεις ..... 23
**Κεφάλαιο 3.** Παραδείγματα με υποδειγματική λύση ..... 31
**Κεφάλαιο 4.** Ασκήσεις και προβλήματα για λύση ..... 57
**Κεφάλαιο 5.** Σύντομες λύσεις ..... 91



*Κεφάλαιο*

# 1

# Θεωρία

## (Ορισμοί, αποδείξεις και ερωτήσεις «Σωστού – Λάθους»)

**1.** Τι ονομάζουμε συνάρτηση;

**Απάντηση**

Συνάρτηση ονομάζουμε μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου Β.

**2.** Πώς ορίζονται οι πράξεις δύο συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού;

**Απάντηση**

Αν δύο συναρτήσεις f και g έχουν και οι δύο κοινό πεδίο ορισμού Α, τότε ορίζονται οι συναρτήσεις:

i) Το άθροισμα $S = f + g$ με $S(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A$.

ii) Η διαφορά $D = f - g$ με $D(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A$.

iii) Το γινόμενο $P = f \cdot g$ με $P(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A$.

iv) Το πηλίκο $R = \frac{f}{g}$ με $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in A$ και $g(x) \neq 0$.

**3.** Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης;

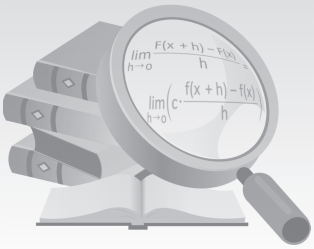
**Απάντηση**

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α.
Γραφική παράσταση ή καμπύλη της f σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy ονομάζεται το σύνολο των σημείων M(x, f(x)) για όλα τα $x \in A$.

**4.** Πότε μια συνάρτηση ονομάζεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της;

**Απάντηση**

- Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.



Κεφάλαιο

# 2

# Προαπαιτούμενες γνώσεις

## Ταυτότητες

**1.** $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

**2.** $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

**3.** $\alpha^2-\beta^2 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)$

**4.** $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

**5.** $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

**6.** $\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

**7.** $\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

## Ιδιότητες δυνάμεων

**1.** $\alpha^\mu\cdot\alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$

**2.** $\dfrac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$

**3.** $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\cdot\nu}$

**4.** $(\alpha\cdot\beta)^\nu = \alpha^\nu\cdot\beta^\nu$

**5.** $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \dfrac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$

**6.** $\alpha^0 = 1$

**7.** $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^\nu}$

**8.** $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$

## Ιδιότητες ριζών

**1.** $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$

**2.** $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

**3.** $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

**4.** $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha$

**5.** $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

## Απόλυτη τιμή

**1.** $|x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x\geq 0 \\ -x, & \text{αν } x<0 \end{cases}$

**2.** $|x\cdot y| = |x|\cdot|y|$

**3.** $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

**4.** $|x+y|\leq|x|+|y|$

**5.** $|x|\leq\theta \Leftrightarrow -\theta\leq x\leq\theta \quad (\theta>0)$

**6.** $|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \geq \theta \quad$ ή $\quad x \leq -\theta \quad (\theta > 0)$

**7.** $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \quad$ ή $\quad x = -\theta \quad (\theta > 0)$

**8.** $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \quad$ ή $\quad x = -y$

### Παραγοντοποίηση τριωνύμου

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

όπου $x_1, x_2$ οι ρίζες του $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

### Εξισώσεις

**1.** $\boldsymbol{\alpha x = \beta} \Leftrightarrow x = \dfrac{\beta}{\alpha}$ όταν $\alpha \neq 0$.

Αν $\alpha = 0$, τότε είναι αδύνατη (αν $\beta \neq 0$) ή αόριστη (αν $\beta = 0$).

**2.** $\boldsymbol{x^\nu = \alpha}$, ν θετικός ακέραιος και $\alpha \in \mathbb{R}$.

**i)** Αν ν άρτιος και $\alpha > 0$, τότε $x = \pm \sqrt[\nu]{\alpha}$

π.χ. $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$

**ii)** Αν ν άρτιος και $\alpha < 0$, τότε είναι αδύνατη

π.χ. $x^4 = -1$ αδύνατη.

**iii)** Αν ν περιττός και $\alpha > 0$, τότε $x = \sqrt[\nu]{\alpha}$

π.χ. $x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$

**iv)** Αν ν περιττός και $\alpha < 0$, τότε $x = -\sqrt[\nu]{-\alpha}$

π.χ. $x^3 = -2 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{2}$

**3.** $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0}$

Αν $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, τότε έχει δύο άνισες ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Αν $\Delta = 0$, τότε έχει μία (διπλή) ρίζα, την $x = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$

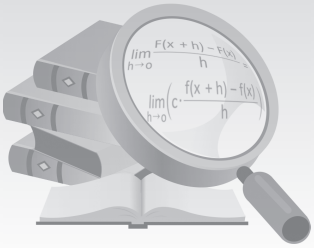
Αν $\Delta < 0$, τότε είναι αδύνατη.

**4.** $\boldsymbol{\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0}$

Θέτουμε $x^2 = y$ και γράφεται $\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$

**5.** $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta |x| + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0}$

Θέτουμε $|x| = y$ και γράφεται $\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$



*Κεφάλαιο*

# 3

# Παραδείγματα με υποδειγματική λύση

**1.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x}{x - 1}$

**α)** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f και να αποδειχθεί ότι $f(x) = x(x+4)$

**β)** Να βρεθεί ο αριθμός α ώστε η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 1 \\ \alpha & x = 1 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

**γ)** Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f.

**δ)** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(-1, f(-1))$.

**Λύση**

**α)** Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $x - 1 \neq 0$, δηλαδή $x \neq 1$.

Άρα, πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο

$$A = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

Ισχύει $$f(x) = \frac{x(x^2 + 3x - 4)}{x - 1}$$

και το τριώνυμο $x^2 + 3x - 4$ έχει

$$\Delta = 9 + 16 = 25 \text{ και ρίζες } x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$$

Επομένως, $$f(x) = \frac{x(x-1)(x+4)}{x-1} = x(x+4), \quad x \neq 1$$

**β)** Έχουμε τη συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} x(x+4), & x \neq 1 \\ \alpha & x = 1 \end{cases}$

Στο σύνολο $\mathbb{R} - \{1\}$ η $g(x) = x(x+4)$, ως πολυωνυμική, είναι συνεχής.

Για να είναι συνεχής και στο σημείο $x_0 = 1$, αρκεί να ισχύει $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = g(1) = \alpha$.

Όμως, έχουμε $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} x(x+4) = 1\cdot(1+4) = 5$

Άρα, $\alpha = 5$.

**γ)** Η $f(x) = x(x+4) = x^2 + 4x$, $x \neq 1$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f'(x) = 2x + 4 = 2(x+2),$$

η οποία μηδενίζεται για $x = -2$.

Το πρόσημο της $f'(x)$ φαίνεται στον διπλανό πίνακα και έτσι συμπεραίνουμε ότι:

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| f(x) | ↘ | | min | ↗ | | ↗ | |

$f \downarrow (-\infty, 2]$, $f \uparrow [-2, 1)$ και $f \uparrow (1, +\infty)$

Επίσης, η f έχει τοπικό ελάχιστο το

$f(-2) = (-2)^2 + 4\cdot(-2) = 4 - 8 = -4$.

**δ)** Η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο της $A(-1, f(-1))$ έχει κλίση

$$f'(-1) = 2\cdot(-1+2) = 2 \text{ και εξίσωση } y = 2x + \beta.$$

Ισχύει $f(-1) = (-1)^2 + 4\cdot(-1) = 1 - 4 = -3$.

Το σημείο επαφής $A(-1, -3)$ ανήκει στην ευθεία $y = 2x + \beta$, οπότε

$$-3 = 2\cdot(-1) + \beta \Leftrightarrow -3 = -2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -1.$$

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι $y = 2x - 1$.

**2.** Δίνεται ότι η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 4, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει τοπικό ακρότατο το $f(1) = 2$.

**α)** Να αποδειχθεί ότι $\alpha = -8$ και $\beta = 13$.

**β)** Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο της με τετμημένη 2.

**γ)** Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της $C_f$ με την ελάχιστη κλίση.

**δ)** Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της $f'(x)$ ως προς x, όταν $x = -\frac{1}{2}$.

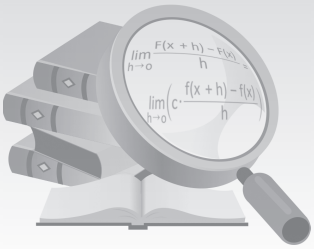
**ε)** Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f'(x)}{x^3 - 1}, & x \neq 1 \\ -\dfrac{10}{3}, & x = 1 \end{cases}$$

**στ)** Να βρεθούν τα όρια:

(i) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$, (ii) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f'(-1) - f'(-1+h)}{h}$,

(iii) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - 2}{h}$ και (iv) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f'(x) - f''(x) - 10}{\sqrt{x} - 1}$



*Κεφάλαιο*

# 4

# Ασκήσεις και προβλήματα για λύση

**1.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + \alpha x + \beta$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία έχει ακρότατο το $f(1) = 2$.

**α)** Να αποδειχθεί ότι $\alpha = -4$ και $\beta = 5$.

**β)** Να αποδειχθεί ότι $x^4 - 4x + 5 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**γ)** Να υπολογιστούν τα όρια

(i) $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{f(-1+y) - f(-1)}{y}$ και (ii) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f'(x) + 8}{\sqrt{x+2} - 1}$.

**δ)** Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της $f'(x)$ ως προς x, όταν $x = -\dfrac{1}{2}$.

**ε)** Αν $x_1 < x_2 < 1 < x_3 < x_4$, να βρεθεί το πρόσημο του αριθμού $A = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_3) - f(x_4)}$.

**2.** Η συνάρτηση $f(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta$, $x \in \mathbb{R}$ έχει τοπικό ακρότατο το $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{27}{16}$.

**α)** Να αποδειχθεί ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 0$.

**β)** Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f.

**γ)** Σε ποιο από τα σημεία της $C_f$, με θετική τετμημένη, η εφαπτομένη έχει ελάχιστη κλίση;

**δ)** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο της $A(1, f(1))$.

**ε)** Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ ως προς x, όταν $x = -\dfrac{1}{2}$.

**στ)** Να υπολογιστούν τα όρια

(i) $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{f(1) - f(1+u)}{u}$ και (ii) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f'(x) - f''(x) + 34}{x^3 + 1}$

**3.** Για τη συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $x \in \mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι:

- Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$.
- Η ευθεία $y = x$ εφάπτεται της $C_f$ στην αρχή $O(0, 0)$ των αξόνων.

**α)** Να αποδειχθεί ότι $\alpha = \beta = 1$ και $\gamma = 0$.

**β)** Να αποδειχθεί ότι $f(x) \geq -\dfrac{1}{4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**γ)** Αφού αποδειχθεί ότι $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, να χαραχθεί η γραφική παράσταση της f.

**δ)** Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) + f'(x) + 1}{x^3 + 1}, & x \neq -1 \\ 1, & x = -1 \end{cases}$$

**4.** Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.

**α)** Να αποδειχθεί ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 0$.

**β)** Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

**γ)** Να βρεθεί η εφαπτομένη της $C_f$ με τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

**δ)** Να εξετασθεί αν η εφαπτομένη του ερωτήματος (γ) έχει και άλλο κοινό σημείο με την $C_f$, εκτός από το σημείο επαφής.

**5.** Ένας ασθενής πήρε x mgr αντιπυρετικού και η μείωση της θερμοκρασίας του δίνεται από τις τιμές της συνάρτησης

$$T(x) = x^2 - 0{,}25 \cdot x^3, \quad x \in [0, 3)$$

**α)** Να μελετηθεί η συνάρτηση T ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**β)** Για ποια ποσότητα αντιπυρετικού η μείωση της θερμοκρασίας γίνεται μέγιστη;

**γ)** Για ποια ποσότητα αντιπυρετικού ο ρυθμός μείωσης της θερμοκρασίας γίνεται μέγιστος;

**6.** Με ένα σύρμα μήκους 4 m κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς x m και ένα τετράγωνο πλευράς y m.

**α)** Να αποδειχθεί ότι (i) $y = 1 - \frac{3}{4}x$ και (ii) $x \in \left(0, \frac{4}{3}\right)$.

**β)** Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων δίνεται από τις τιμές της συνάρτησης.

$$E(x) = \frac{1}{16}(9 + 4\sqrt{3})x^2 - \frac{3}{2}x + 1, \quad x \in \left(0, \frac{4}{3}\right).$$

**γ)** Για ποιο x η E(x) ελαχιστοποιείται;

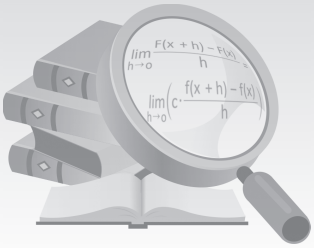
**7.** Η ναύλωση μιας κρουαζιέρας απαιτεί συμμετοχή τουλάχιστον 100 ατόμων. Αν δηλώσουν συμμετοχή ακριβώς 100 άτομα, το αντίτιμο είναι 1000 ευρώ το άτομο. Για κάθε επιπλέον άτομο το αντίτιμο μειώνεται κατά 5 ευρώ.

Έστω ότι συμμετέχουν x άτομα στην κρουαζιέρα.

**α)** Να βρεθεί συναρτήσει του x το αντίτιμο για κάθε άτομο.

**β)** Να αποδειχθεί ότι τα έσοδα δίνονται από τις τιμές της συνάρτησης

$$E(x) = 1500x - 5x^2, \quad x \geq 100$$



*Κεφάλαιο*

# 5

# Σύντομες λύσεις των ασκήσεων

**1. α)** Οι ισότητες $f(1)=2$ και $f'(1)=0$ δίνουν $\alpha=-4$ και $\beta=5$.

**β)** Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=2$, οπότε $f(x)\geq 2>0$

**γ)** (i) $f'(-1)=-8$

(ii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4(x^3+1)(\sqrt{x+2}+1)}{x+1}=$

$\lim\limits_{x\to -1}\left[4(x^2-x+1)(\sqrt{x+2}+1)\right]=24.$

**δ)** $f''\left(-\dfrac{1}{2}\right)=3$

**ε)** $f(x_1)<f(x_2)$ και $f(x_3)>f(x_4)$, οπότε $A<0$.

**2. α)** Οι ισότητες $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{27}{16}$ και $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)=0$ δίνουν $\alpha=-2$ και $\beta=0$.

**β)** $f'(x)=2x^2(2x-3)$

| x | $-\infty$ | | 0 | | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | − | 0 | − | 0 | + |
| f(x) | | ↘ | | ↘ | O.E. | ↗ |

**γ)** Η $f'(x)$ για $x>0$ έχει ελάχιστο στο σημείο $x_0=1$ και το σημείο είναι $A(1,-1)$.

**δ)** $y=-1$.

**ε)** $g'(x)=3x^2-4x$ και $g'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{11}{4}$.

**στ)** (i) $-\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(1+u)-f(1)}{u}=-f'(1)=2.$

(ii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(4x^2-22x+34)}{(x+1)(x^2-x+1)}=20.$

**3. α)** Ισχύει $f(1)=2$, $f(0)=0$ και $f'(0)=1$.

**β)** Η $f(x)$ έχει ελάχιστο το $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$.

**γ)** $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}=x^2+x=f(x)$

Κατασκευάζουμε την παραβολή $y=x^2$ και τη μετατοπίζουμε κατά $\dfrac{1}{2}$ αριστερά και μετά $\dfrac{1}{4}$ κάτω.

**δ)** $\lim\limits_{x\to -1}g(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+2}{x^2-x+1}=\dfrac{1}{3}\neq g(-1)$

και άρα είναι ασυνεχής στο $-1$.

**4. α)** Ισχύει $f'(-1)=0$ και $f'(1)=0$.

**β)** Είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty,-1]$, $[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$. Έχει τοπικό μέγιστο το $f(-1)=3$ και τοπικό ελάχιστο το $f(1)=-1$.

**γ)** Η $f'(x)$ γίνεται ελάχιστη για $x=0$ και η εφαπτομένη στο $(0,f(0))$ έχει εξίσωση $y=-3x+1$.

**δ)** Η εξίσωση $f(x)=-3x+1$ έχει ρίζα μόνο την $x=0$, οπότε δεν υπάρχει άλλο κοινό σημείο.

**5. α)** $T'(x)=x\left(2-\dfrac{3}{4}x\right)$ με ρίζες 0 και $\dfrac{8}{3}$.

$T\uparrow\left[0,\dfrac{8}{3}\right]$ και $T\downarrow\left[\dfrac{8}{3},3\right)$.

Έχει μέγιστο το $T\left(\dfrac{8}{3}\right)=\dfrac{64}{27}$.

**β)** $\dfrac{8}{3}$ mg r **γ)** $\dfrac{4}{3}$ mg r

**6. α)** (i) $3x+4y=4$ και λύνουμε ως προς y.

(ii) $x>0$ και $y>0$.

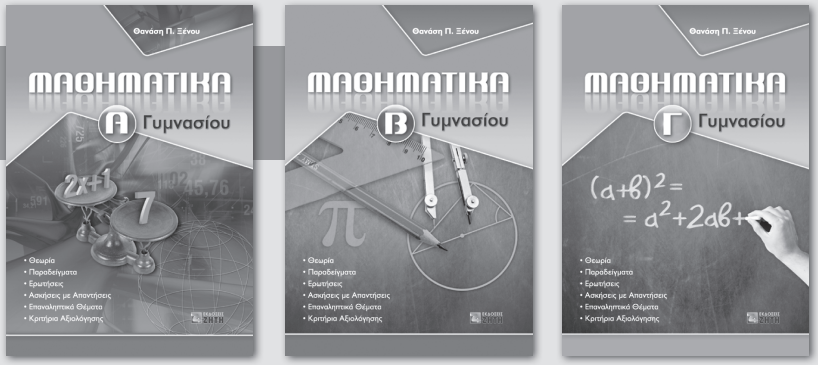
**β)** Το τετράγωνο έχει εμβαδόν $y^2$. Στο ισόπλευρο τρίγωνο, με το Πυθαγόρειο θεώρημα, βρίσκουμε το ύψος $\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$ και το εμβαδόν $\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

**γ)** Η $E(x)$ ελαχιστοποιείται όταν

# Βιβλία Μαθηματικών του Θανάση Ξένου




## Μαθηματικά
**για το ΔΗΜΟΤΙΚΟ και το ΓΥΜΝΑΣΙΟ**




## Επαναληπτικά
**για όλες τις τάξεις & για διαγωνισμούς**



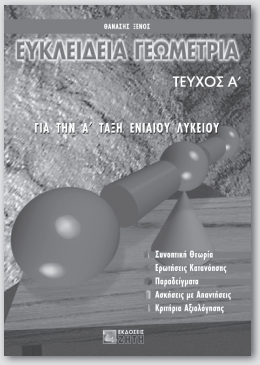


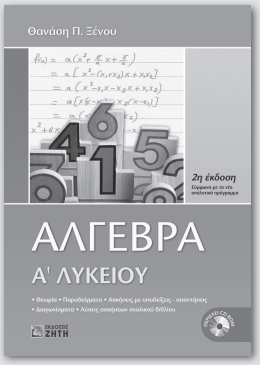


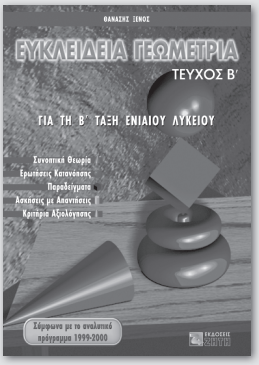
**για την εισαγωγή στα Πρότυπα και Ωνάσεια Γυμνάσια και Λύκεια**

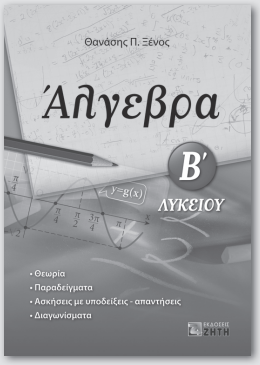
- **Προετοιμάζομαι για τα Πρότυπα και Ωνάσεια Γυμνάσια στα Μαθηματικά**
- **Προετοιμάζομαι για τα Πρότυπα και Ωνάσεια Λύκεια στα Μαθηματικά**

## Μαθηματικά
## για το ΛΥΚΕΙΟ



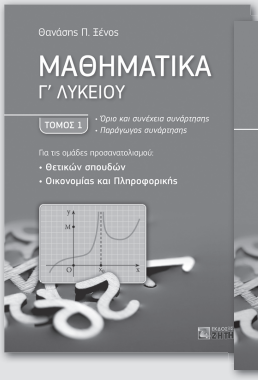



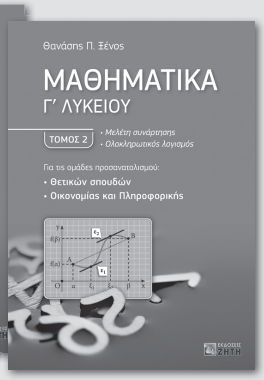



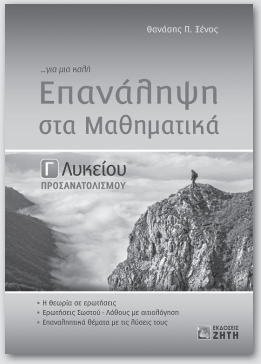










**ΕΠΑΛ** **Επανάληψη στην ΑΛΓΕΒΡΑ Γ' ΕΠΑΛ**

## Μαθηματικά
## για το ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

**Αναλυτική Γεωμετρία**
**Γραμμική Άλγεβρα**
**Πιθανότητες**
**Διαφορικές Εξισώσεις**
**Αριθμητική Ανάλυση**
**Μιγαδικές Συναρτήσεις**
**Θεωρία Αριθμών**
**Μαθηματική Ανάλυση** *Τόμος 1*
**Μαθηματική Ανάλυση** *Τόμος 2*

## Κυκλοφορούν επίσης
## από τις εκδόσεις ΖΤ

**Άλγεβρα Α' Λυκείου**
**Γεωμετρία Α' Λυκείου**
**Επαναληπτικά Θέματα**
**στα Μαθηματικά Α', Β', Γ' Λυκείου**
**Στοχαστικά Μαθηματικά**
**Μαθηματικά για Διαγωνισμούς**

## Κυκλοφορούν επίσης
## από τις εκδόσεις Γράφημα

**Απειροστικός Λογισμός μιας Μεταβλητής** *για φοιτητές ΑΕΙ - ΤΕΙ*
**Τυπολόγιο στα Ανώτερα Μαθηματικά**

**ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ**
Χαριλάου Τρικούπη 22
Τηλ.-Fax: 210 3816650
e-mail: athina@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ziti.gr

**ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ**
Αρμενοπούλου 27
Τηλ.: 2310 203720
e-mail: sales@ziti.gr