Προετοιμάζομαι

για τα ΠΡΟΤΥΠΑ και ΩΝΑΣΕΙΑ ΓΥΜΝΑΣΙΑ

στα Μαθηματικά

Θανάσης Ξένος

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Στους αγαπημένους μου
Θεοφύλακτο και Γιώργο

Περιεχόμενα

Λίγα λόγια για το βιβλίο

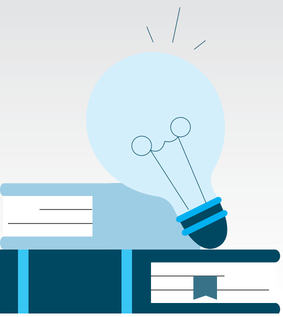
Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους τελειόφοιτους του Δημοτικού που επιθυμούν να συμμετάσχουν στους διαγωνισμούς για τα Πρότυπα και Ωνάσεια Γυμνάσια.

Περιέχει την ύλη των Μαθηματικών των δύο τελευταίων τάξεων του Δημοτικού.

Αρχικά, γίνεται συνοπτική παρουσίαση της θεωρίας, ακολουθούν λυμένα παραδείγματα με υποδειγματικό τρόπο και προτείνονται ασκήσεις και προβλήματα για λύσεις, για τα οποία υπάρχουν υποδείξεις-απαντήσεις ή και σύντομες λύσεις στο τέλος του βιβλίου.

Γενικώς, γίνεται ουσιαστική εμβάθυνση της ύλης και η επιλογή των προβλημάτων έγινε με βάση τις απαιτήσεις του διαγωνισμού.

Θανάσης Ξένος
Χορτιάτης, 2025



1

Συνοπτική παρουσίαση της θεωρίας

1.1 Ποια είδη αριθμών πρέπει να γνωρίζω

- Οι **φυσικοί αριθμοί** είναι οι 0, 1, 2, 3, 4, ..., 100, 101, ... Από αυτούς οι 0, 2, 4, 6, ... ονομάζονται ***άρτιοι*** και είναι αυτοί που διαιρούνται με το 2.

  Οι 1, 3, 5, 7, ..., που δεν διαιρούνται· με το 2, ονομάζονται ***περιττοί***.
- Οι **δεκαδικοί αριθμοί**, που χωρίζονται σε απλούς δεκαδικούς (όπως οι 1,5, 2,37 και 0,123) και σε περιοδικούς δεκαδικούς (όπως οι 1,333... και 0,272727...).
- Τα **κλάσματα**. Αυτά που δεν απλοποιούνται (όπως $\frac{5}{7}, \frac{13}{25}$) ονομάζονται ***ανάγωγα***.

  Τα κλάσματα με αριθμητή μεγαλύτερο από τον παρονομαστή (όπως $\frac{7}{3}, \frac{21}{5}$) ονομάζονται ***καταχρηστικά***.
- Οι **μικτοί αριθμοί** που είναι άθροισμα ενός φυσικού αριθμού και ενός μη καταχρηστικού κλάσματος, όπως $2\frac{1}{3}$, $4\frac{3}{4}$ και $7\frac{3}{8}$.

  Οι μικτοί αριθμοί μετατρέπονται σε κλάσματα ως εξής: Πολλαπλασιάζουμε το φυσικό με τον παρονομαστή και προσθέτουμε στο γινόμενο τον αριθμητή. Το αποτέλεσμα θα είναι ο αριθμητής, ενώ παρονομαστής παραμένει ο ίδιος.

  Π.χ.
  $$3\frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{7}{2}$$
  $$5\frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{17}{3}$$
- **Πρώτοι αριθμοί** είναι οι φυσικοί που διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους και τη μονάδα, όπως οι 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...
- **Σύνθετοι αριθμοί** είναι οι φυσικοί που έχουν τρεις τουλάχιστον διαιρέτες, όπως οι 0, 4, 6, 8, 9, 10, 12, ...

Το 1 δεν είναι πρώτος, ούτε σύνθετος. Ο μόνος άρτιος που είναι πρώτος είναι το 2.

- **Συμμιγείς αριθμοί**. Συχνά οι τιμές διαφόρων μεγεθών εκφράζονται με κάποιες μονάδες, αλλά και με υποδιαιρέσεις τους, όπως π.χ.
  1. Μια απόσταση είναι 7 μέτρα και 15 εκατοστά (7 μ. 15 εκ.).
  2. Το βάρος ενός πράγματος είναι 5 κιλά και 250 γραμμάρια (5 κ. 250 γρ.)
  3. Η διάρκεια ενός αγώνα τένις είναι 3 ώρες, 15 λεπτά και 27 δευτερόλεπτα (3 ωρ. 15 λ. 27 δ.).

1.2 Πώς κάνω πράξεις μεταξύ κλασμάτων

- Για την πρόσθεση και την αφαίρεση, τα κάνω ομώνυμα, αφού βρω το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.
  $\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$ και $\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma}$
- Για τον πολλαπλασιασμό, πολλαπλασιάζω αριθμητές και παρονομαστές.
  $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}$
- Για την διαίρεση, πολλαπλασιάζω το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.
  $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$
  Η διαίρεση αυτή μπορεί να γραφεί και ως **σύνθετο κλάσμα**.
  $$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\text{γινόμενο ακραίων}}{\text{γινόμενο μεσαίων}}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$$

1.3 Πώς βρίσκω το Ε.Κ.Π. δύο αριθμών

Γενικά βρίσκουμε τα κοινά πολλαπλάσια των αριθμών και παίρνουμε το μικρότερο από αυτά.

1 Αν οι αριθμοί είναι διαδοχικοί, τότε το Ε.Κ.Π. είναι το γινόμενό τους.
Π.χ. Ε.Κ.Π. (5, 6) = 30, Ε.Κ.Π. (100, 101) = 10100.

2 Αν οι αριθμοί είναι διαδοχικοί περιττοί, τότε το Ε.Κ.Π. είναι το γινόμενό τους.
Π.χ. Ε.Κ.Π. (7, 9) = 63, Ε.Κ.Π. (11, 13) = 143.

3 Αν ο ένας αριθμός διαιρεί τον άλλο, τότε το Ε.Κ.Π. είναι ο μεγαλύτερος.
Π.χ. Ε.Κ.Π. (4, 12) = 12, Ε.Κ.Π. (12, 48) = 48.

4 Μπορούμε να πάρουμε τον μεγαλύτερο, να τον διπλασιάσουμε, να τον τριπλασιάσουμε κ.ο.κ. μέχρι να βρούμε πολλαπλάσιο αυτού που διαιρείται με τον μικρότερο.
Π.χ. ας βρούμε το Ε.Κ.Π. (12, 27).
Το 27 δεν διαιρείται με το 12.

Το $2 \cdot 27 = 54$ δεν διαιρείται με το 12.
Το $3 \cdot 27 = 81$ δεν διαιρείται με το 12.
Το $4 \cdot 27 = 108$ διαιρείται με το 12, και άρα Ε.Κ.Π. (12, 27) = 108.

5 Γενικά, μπορούμε να αναλύουμε τους αριθμούς σε γινόμενα πρώτων παραγόντων και τότε το Ε.Κ.Π. είναι το γινόμενο όλων των παραγόντων με τον μεγαλύτερο εκθέτη.
Π.χ. θα βρούμε το Ε.Κ.Π. (42, 56, 162)

$$\begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $\quad 56 = 2^3 \cdot 7$ και $162 = 2 \cdot 3^4$
Άρα, Ε.Κ.Π. (42, 56, 162) $= 2^3 \cdot 3^4 \cdot 7 = 8 \cdot 81 \cdot 7 = 4536$.

Η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί και πιο σύντομα:

$$\begin{array}{rrr|l} 42 & 56 & 162 & 2 \\ 21 & 28 & 81 & 2 \\ 21 & 14 & 81 & 2 \\ 21 & 7 & 81 & 3 \\ 7 & 7 & 27 & 3 \\ 7 & 7 & 9 & 3 \\ 7 & 7 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

Ε.Κ.Π. (42, 56, 162) $= 2^3.3^4.7$

1.4. Πώς βρίσκω τον Μ.Κ.Δ. δύο αριθμών

1 Βρίσκουμε τους κοινούς διαιρέτες των αριθμών και από αυτούς παίρνουμε τον μεγαλύτερο. Π.χ. κοινοί διαιρέτες των 16 και 36 είναι οι 1, 2, 4 και άρα Μ.Κ.Δ. (16, 36) = 4.

2 Δύο διαδοχικοί ακέραιοι έχουν Μ.Κ.Δ. το 1, π.χ. Μ.Κ.Δ. (5, 6) = 1 και Μ.Κ.Δ. (63, 64) = 1.

3 Δύο διαδοχικοί περιττοί έχουν Μ.Κ.Δ. το 1, ενώ δύο διαδοχικοί άρτιοι έχουν Μ.Κ.Δ. το 2, π.χ. Μ.Κ.Δ. (11, 13) = 1 και Μ.Κ.Δ. (24, 26) = 2.

4 Μπορούμε να αναλύουμε τους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και να παίρνουμε το γινόμενο των κοινών παραγόντων με το μικρότερο εκθέτη, π.χ. Μ.Κ.Δ. $(2.3^2, 2^3 \cdot 3 \cdot 5^4, 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5) = 2.3 = 6$.

5 Αν ο ένας αριθμός διαιρεί τον άλλο, τότε ο μικρότερος είναι ο Μ.Κ.Δ., π.χ. Μ.Κ.Δ (12, 24) = 12 και Μ.Κ.Δ. (3, 9, 24) = 3.

6 Αν διαιρέσουμε το γινόμενο δύο αριθμών με τον Μ.Κ.Δ., τότε βρίσκουμε το Ε.Κ.Π.

Π.χ. Ε.Κ.Π. $(8, 10) = \dfrac{8 \cdot 10}{\text{Μ.Κ.Δ. } (8, 10)} = \dfrac{80}{2} = 40$.

Ε.Κ.Π. $(15, 24) = \dfrac{15 \cdot 24}{\text{Μ.Κ.Δ. } (15, 24)} = \dfrac{360}{3} = 120$.

1.5 Πως απλοποιώ ένα κλάσμα

Διαιρώ τους όρους του κλάσματος με τον Μ.Κ.Δ. τους.

Π.χ. $\dfrac{24}{36} = \dfrac{24:12}{36:12} = \dfrac{2}{3}$

Η απλοποίηση μπορεί να γίνει και σταδιακά, διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με κάποιον κοινό διαιρέτη τους.

Π.χ. $\dfrac{24}{36} = \dfrac{24:2}{36:2} = \dfrac{12}{18} = \dfrac{12:6}{18:6} = \dfrac{2}{3}$

1.6 Πως συγκρίνω δύο κλάσματα

1 Αν δύο κλάσματα είναι ομώνυμα, τότε μεγαλύτερο είναι αυτό που έχει μεγαλύτερο αριθμητή, π.χ. $\dfrac{5}{7} > \dfrac{3}{7}$.

2 Αν δύο κλάσματα έχουν ίδιο αριθμητή, τότε μεγαλύτερο είναι αυτό που έχει μικρότερο παρονομαστή, π.χ. $\dfrac{2}{7} > \dfrac{2}{9}$.

3 Τα κλάσματα $\dfrac{\alpha}{\beta}$ και $\dfrac{\gamma}{\delta}$ είναι ίσα, όταν τα χιαστί γινόμενα $\alpha \cdot \delta$ και $\beta \cdot \gamma$ είναι ίσα.
$\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta}$ όταν $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$, π.χ. $\dfrac{2}{3} = \dfrac{26}{39}$, διότι $2 \cdot 39 = 3 \cdot 26 = 78$.

4 Αν έχουμε να συγκρίνουμε δύο ετερώνυμα κλάσματα (και δεν έχουμε τις περιπτώσεις 2 και 3), τότε τα κάνουμε ομώνυμα, π.χ. $\dfrac{3}{7} < \dfrac{5}{8}$, διότι $\dfrac{3}{7} = \dfrac{3 \cdot 8}{7 \cdot 8} = \dfrac{24}{56}$ και $\dfrac{5}{8} = \dfrac{5 \cdot 7}{8 \cdot 7} = \dfrac{35}{56}$.

5 Μπορούμε να συγκρίνουμε τα κλάσματα με κάποιον ακέραιο αριθμό ή με ένα τρίτο κλάσμα, π.χ.

α) $\frac{2}{3} < \frac{7}{6}$, διότι $\frac{2}{3} < 1$ και $\frac{7}{6} > 1$.

β) $\frac{52}{105} < \frac{23}{45}$, διότι $\frac{52}{105} < \frac{52}{104} = \frac{1}{2}$ και $\frac{23}{45} > \frac{23}{46} = \frac{1}{2}$.

6 Αν τα κλάσματα είναι μεγαλύτερα του 1 (καταχρηστικά κλάσματα) και τα μετατρέψουμε σε μεικτούς αριθμούς, τότε είναι δυνατόν να είναι εύκολη η σύγκρισή τους, π.χ. $\frac{15}{13} = 1\frac{2}{13}$ και $\frac{19}{17} = 1\frac{2}{17}$, οπότε $\frac{15}{13} > \frac{19}{17}$, διότι $\frac{2}{13} > \frac{2}{17}$.

1.7 Ποια κριτήρια διαιρετότητας πρέπει να γνωρίζω

1 Με το 2 διαιρούνται οι άρτιοι αριθμοί.

2 Με το 5 διαιρούνται οι αριθμοί που λήγουν σε 0 ή 5.

3 Με το 3 διαιρούνται οι αριθμοί που το άθροισμα των ψηφίων τους διαιρείται με το 3.

4 Με το 9 διαιρούνται οι αριθμοί που το άθροισμα των ψηφίων τους διαιρείται με το 9.

5 Με το 4 ή το 25 διαιρούνται οι αριθμοί που το τελευταίο διψήφιο τμήμα τους διαιρείται με το 4 ή το 25 αντίστοιχα.

6 Με το $6 = 2 \cdot 3$ διαιρούνται οι αριθμοί που διαιρούνται με το 2 και το 3.

7 Με το $30 = 5 \cdot 6 = 5 \cdot 2 \cdot 3$ διαιρούνται οι αριθμοί που διαιρούνται με το 5 και το 6, δηλαδή με το 5, το 2 και το 3 (ή αυτοί που διαιρούνται με το 3 και το 10).

8 Με το $45 = 5 \cdot 9$ διαιρούνται οι αριθμοί που διαιρούνται με το 5 και το 9.

Οι περιπτώσεις 6, 7 και 8, όπως και πολλές άλλες, ισχύουν με την προϋπόθεση οι παράγοντες του αριθμού να έχουν Μ.Κ.Δ. το 1. Για παράδειγμα, αν έχουμε το 18 δεν πρέπει να το αντιμετωπίσουμε ως $3 \cdot 6$, αλλά ως $2 \cdot 9$.

1.8 Τι πρέπει να γνωρίζω για τις δυνάμεις

$$\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha,\ \alpha^3 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$$

και γενικά

$$\alpha^\nu = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha \text{ (ν παράγοντες)}$$

Το σύμβολο α^ν ονομάζεται **δύναμη** του α, ο αριθμός α ονομάζεται **βάση** της δύναμης και ο φυσικός αριθμός ν ονομάζεται **εκθέτης** της δύναμης.

1.9 Πως πολλαπλασιάζω και πως διαιρώ με 10, 100, 1000, … και 0,1, 0,01, 0,001, …

1 Ο πολλαπλασιασμός με το 10 ή 100 είναι ίδιος με διαίρεση με το 0,1 ή 0,01, …,
π.χ. $10 \cdot 37 = 370$, $37 : 0{,}1 = 370$
$2{,}1 \cdot 100 = 210$, $2{,}1 : 0{,}01 = 210$

2 Ο πολλαπλασιασμός με 0,1, 0,01, 0,001, … είναι ίδιος με διαίρεση με 10, 100, 1000, …
Π.χ. $27 \cdot 0{,}1 = 2{,}7$ και $27 : 10 = 2{,}7$
$320 \cdot 0{,}1 = 32$ και $320 : 10 = 32$
$16{,}23 \cdot 0{,}01 = 0{,}1623$ και $16{,}23 : 100 = 0{,}1623$

1.10 Πως υπολογίζω αριθμητικές παραστάσεις

Η προτεραιότητα των πράξεων στις αριθμητικές παραστάσεις είναι η εξής:

1 Υπολογίζουμε τις δυνάμεις.

2 Κάνουμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις (αν υπάρχουν).

3 Κάνουμε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις.

4 Κάνουμε προσθέσεις και αφαιρέσεις.

Π.χ. $3^3 - (5 + 2^2) : 3^2 + 21 \cdot 0{,}1 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) \cdot 6^2 =$

$= 27 - (5 + 4) : 9 + 2{,}1 + (\frac{3}{6} - \frac{2}{6}) \cdot 36 =$

$= 27 - 9 : 9 + 2{,}1 + \frac{1}{6} \cdot 36 =$

$= 27 - 1 + 2{,}1 + 6 = 26 + 8{,}1 = 34{,}1.$

1.11 Τι πρέπει να γνωρίζω για τα ποσοστά

1 Τα κλάσματα με παρονομαστή το 100 τα λέμε **ποσοστά** στα εκατό (ή αλλιώς ποσοστά).

$3\% = \frac{3}{100}$, $50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{\alpha\% = \frac{\alpha}{100}}$

2 Μερικές φορές χρησιμοποιούμε και ποσοστά στα χίλια.

Π.χ. $20‰ = \frac{20}{1000} = \frac{2}{100} = 2\%$

$5‰ = \dfrac{5}{1000} = \dfrac{0,5}{100} = 0,5\%$

$\boldsymbol{α‰ = \dfrac{α}{1000}}$

3 Το ποσοστό α% ενός ποσού β ισούται με $\dfrac{α}{100} \cdot β$.

Π.χ. το 20% των 1200 € είναι: $\dfrac{20}{100} \cdot 1200 = 20 \cdot 12 = 240$ €.

4 Αν γνωρίζω ότι το α% ενός ποσού ισούται με β, τότε το ποσό ισούται $β : \dfrac{α}{100}$.
Π.χ. αν το 30% μιας τιμής είναι 108 €, τότε η τιμή ισούται με
$108 : \dfrac{30}{100} = 108 \cdot \dfrac{100}{30} = \dfrac{1080}{3} = 360$ €.

1.12 Τι πρέπει να γνωρίζω για τη μέθοδο αναγωγής στη μονάδα

1 Αν γνωρίζουμε ότι μερικές μονάδες ενός προϊόντος στοιχίζουν ένα συγκεκριμένο ποσό, τότε με μια διαίρεση βρίσκουμε την τιμή μιας μονάδας προϊόντος. Π.χ. έστω ότι τα 8 κιλά μπανάνες στοιχίζουν 9,6 €, τότε το ένα κιλό στοιχίζει $9,6 : 8 = 1,2$ €, ενώ τα 5 κιλά στοιχίζουν $5 \cdot 1,2 = 6$ €.

2 Αν γνωρίζουμε ένα κλασματικό μέρος ενός ποσού, τότε μπορούμε να βρούμε το ποσό. Π.χ. έστω ότι τα $\dfrac{3}{4}$ ενός χρηματικού ποσού είναι 900 €, τότε:
Το $\dfrac{1}{4}$ του ποσού είναι $900 : 3 = 300$ € και το ποσό είναι $300 \cdot 4 = 1200$ €.
Μπορούμε και πιο σύντομα να το βρούμε: $900 : \dfrac{3}{4} = 900 \cdot \dfrac{4}{3} = 300 \cdot 4 = 1200$ €.

3 Αν γνωρίζουμε ένα ποσό, τότε με έναν πολλαπλασιασμό μπορούμε να βρούμε κάποιο κλασματικό μέρος του. Π.χ. αν ο μισθός ενός υπαλλήλου είναι 1200 €, τότε τα $\dfrac{3}{5}$ του μισθού είναι $\dfrac{3}{5} \cdot 1200 = \dfrac{3600}{25} = 720$ €.
Αλλιώς, μπορούμε και ως εξής:
Το $\dfrac{1}{5}$ του μισθού είναι $1200 : 5 = 240$ €.
Τα $\dfrac{3}{5}$ του μισθού είναι $3 \cdot 240 = 720$ €.
Έτσι, έχουμε τα παρακάτω σημαντικά συμπεράσματα:

α. Αν η τιμή ενός ποσού είναι α, τότε τα $\dfrac{κ}{λ}$ του ποσού είναι $\dfrac{κ}{λ} \cdot α$.

β. Αν τα $\dfrac{κ}{λ}$ της τιμής ενός ποσού είναι α, τότε η τιμή του ποσού είναι $α : \dfrac{κ}{λ}$.