

Δρ Παναγιώτης Κακαβάς-Παπανιάρος

# ΑΝΤΟΧΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ & ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ  
ΤΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Επίλυση προβλημάτων κάμψης δοκών με τη μέθοδο Myosotis «12 23 68»

- Ανάλυση και σχεδιασμός κατασκευών • Εφελκυσμός
- Σκληρότητα και κόπωση μεταλλικών υλικών
- Κάμψη • Στρέψη • Λυγισμός

ISBN 978-960-456-624-2

© Copyright Αύγουστος 2024, Εκδόσεις ΖΗΤΗ, Παναγιώτης Κακαβάς-Παπανάρος

---

*Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις του ελληνικού νόμου (Ν.2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής άδειας του εκδότη κατά οποιοδήποτε τρόπο ή μέσο αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή (ηλεκτρονική, μηχανική ή άλλη) και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.*

---

**Φωτοστοιχειοθεσία** Π. ΖΗΤΗ & Σια ΙΚΕ  
**Εκτύπωση** 18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας  
**Βιβλιοδεσία** Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19  
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr



**ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:**  
Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη  
Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

**ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΛΙΑΝΙΚΗ-ΧΟΝΔΡΙΚΗ:**  
Χαριλάου Τρικούπη 22, 106 79 Αθήνα  
Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

**ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ:** [www.ziti.gr](http://www.ziti.gr)

## Πρόλογος

Ο σκοπός του μαθήματος της *αντοχής των υλικών* είναι: (1) να αναπτύξει τη γνώση που απαιτείται μεταξύ των φορτίων που εφαρμόζονται σε ένα στερεό αποτελούμενο από ένα ή περισσότερα υλικά και της παραμόρφωσης που προκαλείται λόγω της φόρτισης· (2) να αναπτύξει ενδεδειγμένη κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των εφαρμοζόμενων φορτίων σε ένα σώμα και των τάσεων που αναπτύσσονται μέσα στο στερεό· (3) να αναπτύξει μια καθαρή σχέση ανάμεσα στην τάση και παραμόρφωση για μια μεγάλη ποικιλία συνθηκών και υλικών και (4) να αναπτύξει επαρκείς διαδικασίες για να προσδιορίσουμε τις απαιτούμενες διαστάσεις ενός μέλους, κάποιου καθορισμένου υλικού, για να μεταφέρει ένα δεδομένο φορτίο που υπόκειται σε καθορισμένη κατάσταση τάσης/παραμόρφωση. Αυτοί οι στόχοι συνεπάγονται τις έννοιες και δεξιότητες οι οποίες σχηματίζουν τη βάση όλων των κατασκευών και σχεδιασμό μηχανολογικών εφαρμογών.

Οι αρχές και οι μέθοδοι χρησιμοποιούνται για να καλύψουν τις βασικές έννοιες έχουν σχεδιαστεί, κατά κύριο λόγο, από τα προ-απαιτούμενα μαθήματα στη μηχανική, φυσική και μαθηματικά μαζί με τις βασικές έννοιες της θεωρίας ελαστικότητας και των ιδιοτήτων των κατασκευαστικών υλικών. Αυτό το βιβλίο έχει σχεδιαστεί για να δώσει έμφαση στις απαιτούμενες βασικές αρχές, με πολλές εφαρμογές για να επιδείξει και αναπτύξει λογική, για την επίδειξη μεθόδων διαδικασιών. Αντί να εξάγουμε πολλούς τύπους για όλα τα είδη των προβλημάτων έχουμε τονίσει τη χρήση των *διαγραμμάτων ελευθέρου σώματος* και τις *εξισώσεις ισορροπίας* μαζί με τη γεωμετρία του παραμορφωμένου σώματος και τις εξισώσεις τάσης και παραμόρφωσης για την ανάλυση του συστήματος δυνάμεων που ενεργούν στο σώμα.

Το βιβλίο αυτό έχει σχεδιαστεί για το αρχικό μάθημα της μηχανικής των παραμορφώσιμων σωμάτων. Λόγω των πολλών υποδιαίρεσεων σε διαφορετικά θέματα, το βιβλίο θα παρέχει ευελιξία στην επιλογή των ασκήσεων - εφαρμογών για να καλύψει την ύλη σε βάθος και περιεχόμενο. Η ανάπτυξη των κατασκευαστικών εφαρμογών συμπεριλαμβάνει την ελαστική και ανελαστική περιοχή των τάσεων, το υλικό όμως της διδασκαλίας έχει οργανωθεί να παρέχει ικανοποιητικές πληροφορίες για την ελαστική περιοχή. Προχωρημένες έννοιες σε θέματα ανελαστικής συμπεριφοράς υλικών και μη γραμμικών υλικών θα δημοσιευτούν σε επόμενο βιβλίο.

Στόχος του βιβλίου είναι να χρησιμοποιηθεί στο μάθημα στην *αντοχή* των κατασκευαστικών και μηχανολογικών εφαρμογών, στα τμήματα Πολιτικών και/ή Μηχα-

νολόγων Μηχανικών. Καλύπτει τις ενότητες που απαιτεί το περίγραμμα του μαθήματος της *μηχανικής των υλικών* και πρέπει να διδαχθεί σε δεκατρείς εβδομάδες εντός του εξαμήνου. Περιλαμβάνει το θεωρητικό και το πειραματικό μέρος που πρέπει να διδαχθούν οι φοιτητές σύμφωνα με το πρόγραμμα σπουδών. Οι φοιτητές πρέπει, ως προ-απαιτούμενα να έχουν διδαχθεί και να έχουν κατανοήσει καλά το μάθημα της *Στατικής* και *Δυναμικής* των κατασκευών ή μηχανολογικών εξαρτημάτων. Εκτός των τυπικών θεμελιωδών εννοιών και μαθηματικών τύπων, όπου όλα τα βιβλία *Αντοχής των Υλικών* διαπραγματεύονται, εισάγουμε την *μέθοδο Myosotis* την οποία για πρώτη φορά γνώρισα μέσα από το βιβλίο του καθηγητή J.P. Den Hartog<sup>1</sup>, Η μέθοδος *Myosotis*<sup>2</sup> είναι πολύ χρήσιμη για τη μελέτη προβλημάτων κάμψης δοκών όταν απομονοποιήσουμε τον εξαψήφιο αριθμό 12 23 68, ακόμη έναν αριθμό όπως του κινητού μας και την ταυτότητά μας! Αυτή τη μέθοδο εξ' άλλου χρησιμοποιούσαμε τακτικά και με τον Μέντορά μου Paul J. Blatz<sup>3</sup> στην Καλιφόρνια κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών στο Πανεπιστήμιο της Νότιας Καλιφόρνιας, ΗΠΑ.

Στο πρώτο κεφάλαιο περιγράφουμε την ανάλυση και σχεδιασμό των κατασκευών και των μηχανολογικών εξαρτημάτων που χρησιμοποιούνται από τους Πολιτικούς Μηχανικούς στην κατασκευή έργων και από τους Μηχανολόγους για μηχανολογικές εφαρμογές. Στο στάδιο αυτό ο Μηχανικός πρέπει να γνωρίζει τις φορτίσεις που εξασκούνται πάνω στην κατασκευή και/ή μηχανολογικά εξαρτήματα και με την κατάλληλη μελέτη να υπολογίσει τις τάσεις που αναπτύσσονται εσωτερικά. Πρέπει να εφαρμόσει τα κατάλληλα κριτήρια αστοχίας για να διερευνήσει εάν το υλικό μπορεί να αντέξει την επιβαλλόμενη φόρτιση. Από πίνακες βρίσκει τους κατάλληλους συντελεστές ασφαλείας για να προφυλάξει την κατασκευή από αστοχία.

Το δεύτερο κεφάλαιο πραγματεύεται τη θεωρία του εφελκυσμού και θλίψης, η οποία εφαρμόζεται κατά τη διάρκεια φόρτισης ενός υλικού. Αμφότεροι οι τρόποι φόρτισης ακολουθούν τον νόμο του Hooke, για μικρές παραμορφώσεις, ενώ για μεγάλες παραμορφώσεις εφαρμόζονται οι μη γραμμικές θεωρίες. Εκτός από τις τάσεις και παραμορφώσεις που αναπτύσσονται εντός του υλικού, πρέπει ο Μηχανικός να εξετάσει και το πρόβλημα της *ευστάθειας*, πολύ σημαντικό στοιχείο για τον σχεδιασμό. Από το διάγραμμα τάσης-παραμόρφωσης του υλικού, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στην κατασκευή, αντλούμε πληροφορίες για το *μέτρο ελαστικότητας*, το *όριο αναλογίας*, *όριο διαρροής* εάν υπάρχει (εξαρτάται από το εάν το υλικό είναι ψαθυρό ή όλκιμο), τη *μέγιστη τάση (όριο θραύσης)* και *μέγιστη παραμόρφωση*. Όλα αυτά τα δεδομένα, που εξάγονται πειραματικά πρέπει να χρησιμοποιηθούν κατά τον σχεδι-

1. J.P. Den Hartog, *Strength of Materials*, Dover, 1949

2. Έλληνας αρχαίος επιστήμων.

3. Καθηγητής στο CALTECH (California Institute of Technology)

ασμό και ανάλυση της κατασκευής. Συνήθως ο σχεδιασμός και ανάλυση της κατασκευής (έργα Πολιτικού ή Μηχανολόγου Μηχανικού) απαιτεί την εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων, όπως για παράδειγμα, Πεπερασμένα ή Συνοριακά Στοιχεία, Πεπερασμένων Διαφορών. Αυτές οι μέθοδοι απαιτούν από τον σχεδιαστή να εισάγει τα ανωτέρω δεδομένα για την ανάλυση.

Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφουμε τις *θεωρίες αστοχίας* που εφαρμόζονται στα μέλη των κατασκευών και/ή μηχανολογικών εφαρμογών. Στην περίπτωση ομοαξονικών φορτίσεων η μελέτη της αστοχίας του υλικού είναι απλή αλλά στην περίπτωση διαξονικής ή τριαξονικής φόρτισης το θέμα γίνεται πολύπλοκο και απαιτεί ειδικές θεωρίες, όπως περιγράφονται αναλυτικά σε αυτό το κεφάλαιο. Οι διάφορες θεωρίες αστοχίας αναγράφονται σε πίνακα, στους ειδικούς κώδικες που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση π.χ. ANSYS, ABAQUS... από τους μηχανικούς που ασχολούνται με τον σχεδιασμό και ανάλυση κατασκευών.

Στο τέταρτο κεφάλαιο περιγράφουμε τις σχετικές θεωρίες κάμψης δοκών υπό φόρτιση συγκεντρωτική και/ή ομοιόμορφη κατανομή, ή υπό την επίδραση ροπής και υπό την επίδραση συνδυασμού των ανωτέρων φορτίσεων. Η μελέτη του προβλήματος ανάλυσης δοκών απαιτεί τη γνώση των διαγραμμάτων εγκάρσιας και οριζόντιας φόρτισης και καμπτικών ροπών, για να προσδιορίσουμε τις μέγιστες αναπτυσσόμενες τάσεις (ορθές και διατμητικές) εντός του υλικού. Δι' εφαρμογής των κριτηρίων αστοχίας, όπως αναφέραμε στο τρίτο κεφάλαιο, μπορούμε να διασφαλίσουμε την μη αστοχία του υλικού. Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφουμε αναλυτικά τον τρόπο εφαρμογής της μεθόδου *Mysotis*, για τον υπολογισμό της ελαστικής γραμμής της δοκού. Η μέθοδος αυτή είναι απλή και μπορούμε να επιλύσουμε προβλήματα κάμψης με απλό τρόπο χωρίς πολλά μαθηματικά (διαφορικές εξισώσεις), όπου η πιθανότητα να κάνουμε λάθη είναι μεγάλη. Ο μηχανικός θέλει και απαιτείται να φθάσει στην επίλυση του προβλήματος με απλό και ασφαλή τρόπο.

Στο πέμπτο κεφάλαιο περιγράφουμε τη στρέψη δοκών υπό την επίδραση ζεύγους ίσων δυνάμεων στα άκρα της. Η αναπτυσσόμενη διατμητική τάση εντός του υλικού είναι γραμμική συνάρτηση της γωνίας στρέψης και ο συντελεστής αναλογίας καλείται μέτρο διάτμησης του υλικού της δοκού. Παρέχουμε πληροφορίες για τον υπολογισμό της *ολικής γωνίας στρέψης*  $\phi$ , η οποία είναι ανάλογη της *ροπής στρέψης*  $M_r$  του αρχικού μήκους της δοκού και αντίστροφη ανάλογη του μέτρου διάτμησης  $G$ , και της *πολικής ροπής αδρανείας* της διατομής  $I_p$ . Η μέγιστη διατμητική τάση υπολογίζεται από τη ροπή στρέψης  $M_t$  και την ακτίνα  $R$  της κυκλικής διατομής και είναι αντίστροφη ανάλογη του  $I_p$ . Για την εμπέδωση της θεωρίας στρέψης κυκλικών και μη δοκών, παρέχονται λυμένες ασκήσεις και προτείνονται άλυτες για την κατ' οίκον εργασία των φοιτητών.



Στο έκτο κεφάλαιο περιγράφουμε τον λυγισμό μεταλλικών ράβδων υπό την επίδραση αξονικής θλιπτικής φόρτισης. Αναγράφεται ο βασικός τύπος υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού υποστρωμάτων, τύπος του Euler, το οποίο είναι ανάλογο της καμπτικής στιβαρότητας EI, και αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου του ύψους του I. Εισάγεται επίσης στον παρονομαστή ο συντελεστής k ο οποίος παίρνει διαφορετικές τιμές ανάλογα με τις οριακές συνθήκες του προβλήματος. Παρέχονται πληροφορίες για να αποτραπεί η εμφάνιση λυγισμού σε πλάκες, το οποίο αποτελεί σημαντικό στοιχείο για τον σχεδιασμό των κατασκευών μεταλλικών, ξύλινων ή πλακών από οπλισμένο σκυρόδεμα. Σήμερα η προχωρημένη τεχνολογία μηχανών και έργων πολιτικού μηχανικού χρησιμοποιεί *σύνθετα υλικά* των οποίων το κύριο χαρακτηριστικό είναι ο μεγάλος λόγος αντοχής προς βάρος. Παρατίθενται πολλές εφαρμογές για την εξάσκηση των φοιτητών σε θέματα λυγισμού.

Το έβδομο κεφάλαιο πραγματεύεται τη σκληρότητα μεταλλικών υλικών, σημαντικό στοιχείο για τον σχεδιασμό και ανάλυση των κατασκευών. Η μέτρηση της σκληρότητας των μεταλλικών κυρίως υλικών παρέχει στον μηχανικό σημαντικές πληροφορίες, για παράδειγμα, την φύση του υλικού και ιδιαιτέρως των κραμάτων, την αντοχή του υλικού με την πάροδο του χρόνου, το οποίο θα καθορίσει και τη διάρκεια ζωής του υλικού. Περιγράφονται οι διάφορες μέθοδοι-τεχνικές, Brinell, Rockwell, Vickers, Knoop και Shore & Leeb, για τον προσδιορισμό του συντελεστή σκληρότητας του υλικού. Για κάθε μέθοδο παρέχονται οι κατάλληλοι τύποι για τον προσδιορισμό της σκληρότητας του υλικού. Δίδονται οι κατάλληλοι μαθηματικοί τύποι και οι σχετικοί πίνακες για την συσχέτιση της *σκληρότητας* με την *αντοχή* του υλικού.

Στο όγδοο κεφάλαιο περιγράφεται η σχετική θεωρία για την *κόπωση* των μεταλλικών υλικών και οι συνθήκες για την αστοχία λόγω κόπωσης. Περιγράφονται επίσης οι συνθήκες κόπωσης που επηρεάζουν την αντοχή του υλικού. Η κόπωση είναι πολύ σημαντικός παράγοντας που πρέπει να γνωρίζει ο μηχανικός για τον σχεδιασμό ενός κατασκευαστικού έργου και/ή μηχανολογικού εξαρτήματος. Επί πλέον δίδεται η μέθοδος για τη βελτίωση των επιδόσεων *κόπωσης* ενός υλικού και τα χαρακτηριστικά μεγέθη μιας *δυναμικής καταπόνησης* τα οποία μας ενδιαφέρουν κατά τη διεξαγωγή της δοκιμής κόπωσης. Όταν έχουν μετρηθεί οι κύκλοι κόπωσης, χρησιμοποιούμε τον κανόνα του Miner για να προσδιορίσουμε την αστοχία από κόπωση. Αναγράφονται πληροφορίες για τη δοκιμή κόπωσης από τον προσδιορισμό της τάσης από τον αριθμό επαναλήψεων της φόρτισης, γνωστή ως καμπύλη σ-N ή όπως είναι επίσης γνωστή ως καμπύλη Wöhler ενός υλικού.

Στο κεφάλαιο εννέα παραθέτουμε πληροφορίες για την τεχνική Myosotis, η οποία προσδιορίζει με απλά βήματα την ελαστική γραμμή σε δοκούς υπό κάμψη. Η

τεχνική αυτή απαιτεί να γνωρίζουμε την απομνημόνευση του αριθμού 12 23 68 και όλα τα προβλήματα κάμψης δοκών αποδεικνύονται σε μια μόνο γραμμή χωρίς πολύπλοκα μαθηματικά, επίλυση διαφορικών εξισώσεων με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Καλό είναι ο φοιτητής και ο εκπαιδευτικός να κατανοήσει τη μέθοδο Myosotis, η οποία μπορεί να τον βοηθήσει και στην επαγγελματική του σταδιοδρομία. Μόνο ένα και μοναδικό βιβλίο (J. P. Den Hartog, *Strength of materials*, Dover, 1949) περιγράφει αναλυτικά την μέθοδο.

Στο δεύτερο μέρος του βιβλίου περιγράφονται τα βασικά πειράματα που απαιτούνται για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων των υλικών που χρησιμοποιούνται για τον σχεδιασμό και κατασκευή διαφόρων εξαρτημάτων και δομικών στοιχείων. Το πρώτο πείραμα περιγράφει τον εφελκυσμό και θλίψη, όπου εξάγονται πληροφορίες από το διάγραμμα τάσης-παραμόρφωσης, για το μέτρο ελαστικότητας, αντοχή, όριο αναλογίας και διαρροής και άλλα χρήσιμα στοιχεία. Επί πλέον παρέχονται πληροφορίες για τα *όλκιμα* και *ψαθυρά* υλικά. Στο δεύτερο πείραμα περιγράφουμε την κάμψη μεταλλικών δοκών. Αρχικά, αποδεικνύεται ο τύπος προσδιορισμού του βέλους κάμψης δοκού σε κάμψη, όταν εφαρμόζονται συμμετρικά συγκεντρωτικά φορτία. Η πειραματική διάταξη γι' αυτό το πείραμα παρουσιάζεται στο πείραμα κάμψης. Για την απόδειξη του τύπου για το βέλος κάμψης με τις συμμετρικές φορτίσεις αποδεικνύεται και με τη μέθοδο Myosotis (12 23 68), όπως περιγράφεται στο κεφάλαιο εννέα. Από το πείραμα κάμψης προσδιορίστηκε το μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα, όπως ήδη υπολογίστηκε και στο πρώτο πείραμα εφελκυσμού. Στο τρίτο πείραμα περιγράφεται η στρέψη μεταλλικών δοκών. Υπολογίζεται η ροπή αδρανείας της διατομής κυκλικού δοκιμίου και οι διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται στο υλικό. Περιγράφεται επίσης η μηχανή INSTRON για το πείραμα στρέψης και τα χαλύβδινα δοκίμια τα οποία προετοιμάζονται με βάση τους κανονισμούς ASTM (American Standards for Testing Materials).

Το τέταρτο πείραμα μελετάει πειραματικά τον λυγισμό μεταλλικών ράβδων και δίδει όλες τις απαραίτητες πληροφορίες για την εκτέλεση του πειράματος. Χρησιμοποιείται ο τύπος του Euler για τον προσδιορισμό του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Ελέγχονται δοκίμια από χάλυβα και αλουμίνιο με τα χαρακτηριστικά τους στοιχεία, μήκος διατομή μέτρου ελαστικότητας. Υπολογίζεται και ο συντελεστής λυγιρότητας εκάστου δοκιμίου. Από τα πειράματα λυγισμού μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο ελαστικότητας  $E$ , όπως κάναμε στα πειράματα εφελκυσμού και κάμψης. Το μέτρο διάτμησης  $G$ , υπολογίζεται από τα πειράματα στρέψης. Στο πέμπτο πείραμα προσδιορίζεται η σκληρότητα υλικών με τις μεθόδους, Brinell και Rockwell. Περιγράφονται οι συσκευές που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό του συντελεστή σκληρότητας, όπου από τα αποτελέσματα των πειραμάτων υπολογίζουμε και την αντοχή

των αντίστοιχων υλικών. Στο πείραμα έξι προσδιορίζεται η κόπωση των μεταλλικών υλικών και περιγράφεται η μηχανή για την κόπωση. Από το διάγραμμα τάσης αριθμού κύκλων φόρτισης παρέχεται πληροφορία για την τάση ή όριο κόπωσης. Στο παράρτημα δίδονται προβλήματα για την εξάσκηση των φοιτητών σε θέματα πειραματικών μετρήσεων.

*Π. Κακαβάς-Παπανιάρος, Ph.D.  
2024*



## Περιεχόμενα

### Μέρος Α Θεωρία Αντοχής Κατασκευαστικών Υλικών

Ιστορικά στοιχεία εξέλιξης της «Αντοχής των Υλικών» .....	3
<b>Κεφάλαιο 1</b> .....	23
<b>Ανάλυση και σχεδιασμός κατασκευών – Κύκλος του Mohr</b>	
1.1. Αρχές σχεδιασμού .....	23
1.2. Ανάλυση κατασκευών .....	29
1.3. Κύκλος του Mohr .....	36
1.4. Ανάλυση τάσεων σε κεκλιμένα επίπεδα υπό την επίδραση αξονικής φόρτισης .....	43
<b>Κεφάλαιο 2</b> .....	49
<b>Εφελκυσμός και θλίψη υλικών</b>	
2.1. Εισαγωγικά .....	49
2.2. Νόμος του Hooke .....	54
2.3. Απλές περιπτώσεις υπολογισμού τάσεων .....	59
2.3.1. Τάσεις λόγω αξονικής φόρτισης.....	59
2.3.2. Διαμητικές τάσεις.....	62
Εφαρμογές .....	65
2.4. Απλές και σύνθετες ράβδοι.....	68
2.4.1. Εξάρτηση της ορθής παραμόρφωσης από τη μεταβολή της θερμοκρασίας.....	72
2.5. Ασκήσεις προβλημάτων εφαρμογής φορτίου σε εφελκυσμό και/ή θλίψη .....	73
2.6. Θλίψη κατασκευαστικών υλικών.....	78
2.6.1. Θλίψη ξύλου.....	78
2.6.2. Μονοαξονική θλίψη πετρωμάτων.....	82
2.6.3. Επίδραση της λυγιρότητας .....	86

2.6.4. Πολυαξονική θλίψη.....	86
2.6.5. Διαξονική θλίψη .....	87
2.6.6. Τριαξονική θλίψη.....	88

## Κεφάλαιο 3

49

### Θεωρίες αστοχίας των υλικών

3.1. Εισαγωγικά .....	91
Α. Θεωρία μέγιστης κύριας ή ορθής τάσης (θεωρία Rankine) .....	92
Β. Θεωρία μέγιστης ενέργειας παραμόρφωσης (Θεωρία Hencky και Von Mises).....	92
Γ. Θεωρία μέγιστης διατμητικής τάσης (Θεωρία Guest ή Tresca).....	93
Δ. Θεωρία μέγιστης ενέργειας παραμόρφωσης (Θεωρία Haigh) .....	93
Ε. Θεωρία μέγιστης κύριας παραμόρφωσης (Θεωρία του Saint Venant).....	93
3.2. Αστοχία λόγω υπερβολικής ελαστικής παραμόρφωσης .....	95
3.3. Αστοχία λόγω πλαστικής ροής ή υπερβολικής πλαστικής παραμόρφωσης...	95
3.4. Αστοχία λόγω θραύσης.....	96
3.5. Κριτήρια αστοχίας σε δομικά κατασκευαστικά έργα και/ή μηχανο λογικά μέλη.....	98
3.5.1. Κριτήριο της μέγιστης ορθής τάσης.....	99
3.5.2. Θεωρία της μέγιστης διατμητικής τάσης (Tresca) .....	99
3.5.3. Θεωρία του μέγιστου έργου στροφικής παραμόρφωσης .....	100
3.5.4. Ισοδύναμη τάση (von Mises).....	100
3.6. Hashin's κριτήριο αστοχίας για σύνθετα υλικά.....	105
3.7. Ερωτήσεις στα κριτήρια αστοχίας .....	106
3.8. Θεωρία της μέγιστης κύριας τάσης (Lame) .....	107
3.9. Θεωρία της μέγιστης διατμητικής τάσης (Tresca ~1900) .....	108
3.10. Θεωρία Von Mises (1913).....	111
3.11. Κριτήριο για ψαθυρά υλικά κατά Rankine: Μέγιστης κύριας τάσης .....	114
3.12. Θεωρία μέγιστης ορθής παραμόρφωσης.....	114

## Κεφάλαιο 4

117

### Κάμψη δοκών

4.1. Διαγράμματα καμπτικών ροπών.....	117
4.2. Εφαρμογές .....	123

4.3. Η μέθοδος Myosotis “12 23 68” για τον υπολογισμό του βέλους κάμψης δοκών .....	127
4.3.1. Ασκήσεις προς επίλυση .....	141
4.4. Τάση καθαρής κάμψης.....	143
4.4.1. Ασκήσεις προς λύση «Κάμψης» δοκών .....	147

## Κεφάλαιο 5

### Στρέψη δοκών

5.1. Διατμητική τάση .....	149
5.2. Στρέψη στερεάς ράβδου με κυκλική διατομή .....	151
5.3. Εφαρμογές .....	158
5.4. Ενέργεια παραμόρφωσης σε προβλήματα στρέψης.....	163
5.5. Στρέψη λεπτότοιχων σωληνωτών διατομών .....	173
Ασκήσεις προς επίλυση .....	176
5.6. Δοκοί σε στρέψη με ανομοιόμορφες κυκλικές διατομές .....	178

## Κεφάλαιο 6

### Λυγισμός μεταλλικών ράβδων

6.1. Θεωρία του EULER για λυγισμό ράβδων .....	181
6.2. Επίδραση άλλων στηριξων .....	185
6.3. Πρακτικός σχεδιασμός στύλων (υποστυλωμάτων) .....	189
6.3.1. Εφαρμογή στον νόμο Gordon-Rankine για κόπωση υλικών .....	196
6.3.2. Εφαρμογές.....	196
6.4. Τι είναι ο λυγισμός πάνελ;.....	199
6.4.1. Πώς να αποτρέψουμε τον λυγισμό πλακών/πάνελ .....	200
6.4.2. Τι είναι ροπή αδράνειας;.....	201
6.4.3. Εφαρμογές.....	202
6.5. Πρόγραμμα υπολογισμού λυγισμού υποστυλωμάτων.....	207
6.6. Λυγισμός στύλου/υποστυλώματος .....	207
6.6.1. Λόγος λεπτότητας.....	208
6.6.2. Τύποι υπολογισμού της ροπής αδράνειας .....	208
6.6.3. Πώς υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας περίξ οποιονδήποτε άξονα.....	209
6.6.4. Υπολογισμός της ροπής αδράνειας επιφανείας ενός σύνθετου σχήματος .....	210

6.6.5. Υπολογισμός της ροπής αδράνειας δακτυλίου .....	210
6.7. Προηγμένο θέμα στον λυγισμό στύλων .....	210
6.8. Καμπτικός λυγισμός στην ελαστική περιοχή – Φορτίο λυγισμού κατά Euler .....	216
6.9. Καμπτικός λυγισμός στην πλαστική περιοχή .....	222

## Κεφάλαιο 7

### Προσδιορισμός της σκληρότητας μεταλλικών υλικών

7.1. Εισαγωγικά .....	235
7.2. Μέθοδος Brinell.....	236
7.3. Μέθοδος Rockwell.....	243
7.4. Μέθοδος Rockwell Superficial .....	249
7.5. Μέθοδος Vickers .....	253
7.6. Μέθοδος Knoop.....	256
7.7. Μέθοδος Shore και Leeb.....	260

## Κεφάλαιο 8

### Κόπωση μεταλλικών υλικών

8.1. Ορισμός της κόπωσης .....	267
8.2. Δοκιμή κόπωσης .....	269
8.3. Κανόνας του Miner .....	272
8.4. Η καμπύλη $\sigma$ -N .....	274

## Κεφάλαιο 9

### Μυοσotis τεχνική (Μυοσώτης τεχνική)

9.1. Εισαγωγικά .....	277
Βασικές εξισώσεις εκτροπής δοκού .....	277
9.2. Εφαρμογές της μεθόδου Myosotis .....	279
Υπολογισμος των τάσεων στη δοκό .....	285
9.3. Στατικά απροσδιόριστοι δοκοί.....	293

**Μέρος Β****Πειραματικές Μέθοδοι Προσδιορισμού της  
Αντοχής των Υλικών**

<b>Εισαγωγικά στοιχεία</b> .....	301
<b>Πείραμα 1<sup>ο</sup></b>	
<b>Εφελκυσμός κατασκευαστικών υλικών</b> .....	305
Π1.1. Θεωρητικό υπόβαθρο για το πείραμα εφελκυσμού .....	305
Βασικές αρχές .....	310
Όλκιμα και ψαθυρά υλικά .....	313
Ολκιμότητα .....	313
Πραγματική τάση και παραμόρφωση .....	314
Κράτνυση (Strain Hardening) .....	315
Π1.2. Πειραματική διαδικασία .....	318
Δοκίμια .....	320
Π1.3. Πειραματικές μετρήσεις .....	321
Π1.3.1. Αβεβαιότητες στις μετρήσεις .....	321
Π1.3.2. Εκτέλεση του πειράματος .....	322
Π1.3.3. Ανάλυση αποτελεσμάτων .....	323
<b>Πείραμα 2<sup>ο</sup></b>	
<b>Κάμψη μεταλλικών δοκών</b> .....	325
Π2.1. Θεωρητικός υπολογισμός του βέλους κάμψης δοκού με φόρτιση σε δύο συμμετρικά σημεία περίξ του κέντρου .....	325
Μέγιστη ορθή τάση .....	326
Θεώρημα ροπών - εμβαδών .....	327
Π2.2. Πειραματικά δεδομένα .....	329
Π2.2.1. Γεωμετρικά στοιχεία .....	329
Π2.2.2. Πειραματικές μετρήσεις .....	329
Π2.2.3. Υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας E, της υπό κάμψη χαλύβδινης δοκού .....	330
Συμπεράσματα .....	332

**Πείραμα 3<sup>ο</sup>**

<b>Στρέψη μεταλλικών δοκών</b> .....	333
Π3.1. Εισαγωγικά στοιχεία .....	333
Π3.1.1. Παραδείγματα στρέψης .....	333
Υπολογισμός της πολικής ροπής αδρανείας.....	334
Διατμητικές τάσεις.....	335
Περιορισμοί για τη στρέψη δοκών .....	337
Δοκός σε στρέψη.....	337
Π3.2. Πειραματική διαδικασία.....	339
Δοκίμια.....	340
Διαδικασία λειτουργίας της μηχανής δοκιμής στρέψης .....	340
Αποτελέσματα για την εργαστηριακή έκθεση δοκιμών στρέψης.....	341
Γραφήματα για έκθεση εργαστηρίου δοκιμών στρέψης .....	341
Υπολογισμοί .....	343
Συζήτηση επί των αποτελεσμάτων του πειράματος στρέψης.....	344
Πειραματική καμπύλη του δικού μας πειράματος.....	345
Υπολογισμοί .....	346
Συμπέρασμα.....	346

**Πείραμα 4<sup>ο</sup>**

<b>Λυγισμός μεταλλικών δοκών</b> .....	347
Π4.1. Εισαγωγικά .....	347
Παράδειγμα μελέτης λυγισμού μεταλλικής ράβδου.....	348
Θεωρία λυγισμού-εξισώσεις.....	350
Κρίσιμη τάση λυγισμού.....	353
Άσκηση προς επίλυση σε λυγισμό ράβδων.....	355
Σχεδιασμός δομικών στοιχείων; Δεν ξεχνάμε τον λυγισμό! .....	357
Προσδιορισμός εάν ο λυγισμός είναι ρυθμιζόμενη λειτουργία αστοχίας .....	358

**Πείραμα 5<sup>ο</sup>**

<b>Πειραματική μελέτη της σκληρότητας υλικών</b> .....	359
A. Μέθοδος Brinell .....	359
I. Χάλυβας.....	359
II. Μπρούτζος.....	359
B. Μέθοδος Rockwell.....	360
Συσχέτιση αριθμών σκληρότητας .....	364



**Πείραμα 6<sup>ο</sup>**

<b>Πειραματική διαδικασία κόπωσης μεταλλικών υλικών</b> .....	358
Εισαγωγικά.....	365
Περιγραφή του δοκιμίου.....	366
Διεξαγωγή της δοκιμής.....	367

**Ειδικό κεφάλαιο 1**

373

**Θέματα επί των πειραμάτων**

ΘΕΜΑ 1 <sup>ο</sup> . Πείραμα Εφελκυσμού.....	373
ΘΕΜΑ 2 <sup>ο</sup> . Εφελκυσμός .....	374
ΘΕΜΑ 3 <sup>ο</sup> . Πείραμα κάμψης τριών σημείων .....	375
ΘΕΜΑ 4 <sup>ο</sup> . Πείραμα κάμψης με συμμετρική φόρτιση ως προς το κέντρο της δοκού .....	376
ΘΕΜΑ 5 <sup>ο</sup> . Πείραμα στρέψης χαλύβδινων δοκών .....	377
ΘΕΜΑ 6 <sup>ο</sup> . Πείραμα κόπωσης .....	378
ΘΕΜΑ 7 <sup>ο</sup> . Συντελεστής σκληρότητας μεταλλικών υλικών .....	379
ΘΕΜΑ 8 <sup>ο</sup> . Πείραμα λυγισμού .....	383
Πίνακας Α. Συσχέτιση συντελεστών σκληρότητας.....	380
Πίνακας Β – Γενικό τυπολόγιο .....	388

**Ειδικό κεφάλαιο 2**

391

**Πίνακες**

Πίνακας 1. Διαγράμματα ιδιοτήτων κατασκευαστικών υλικών.....	391
1.1. Μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας κατασκευαστικών υλικών vs πυκνότητας.....	391
1.2. Αντοχή αστοχίας (MPa) vs Πυκνότητα ( $Mg/m^3$ ) .....	392
1.3. Μέτρο ελαστικότητας (Young's modulus), E vs Αντοχή, $\sigma_f$ .....	393
1.4. Ανθεκτικότητα σε θραύση (επίπεδη παραμόρφωση), $K_{IC}$ vs Αντοχής αστοχίας, $\sigma_{f\omega\omega}$ .....	394
Πίνακας 2. Τυπική εφελκυστική αντοχή μερικών υλικών .....	395
Πίνακας 3. Μετατροπή Μονάδων μέτρησης φυσικών μεγεθών .....	398
Πίνακας 4. Μετατροπή μονάδων για τάση, πίεση, μέτρο ελαστικότητας, ενέργειας, ισχύος .....	399

Πίνακας 5. Φυσικές σταθερές σε μονάδες SI.....	400
<b>Βιβλιογραφία</b> .....	401
<b>Ευρετήριο όρων</b> .....	403

Μέρος

A

# Θεωρία Αντοχής Κατασκευαστικών Υλικών

## Εφελκυσμός και θλίψη υλικών

### 2.1 Εισαγωγικά

Γενικά τα βιβλία με τίτλο *Αντοχή των Υλικών* μελετούν τις δυνάμεις τις οποίες διάφορα υλικά φέρουν πριν την αστοχία των αλλά αυτό το αντικείμενο καλείται *ιδιότητες των υλικών* ή *πειραματική μηχανική*. Το παραδοσιακό περιεχόμενο στην *Αντοχή των υλικών* μπορεί κάλλιστα να περιγραφεί ως *Στατική των Παραμορφωμένων Ελαστικών Στερεών*. Εδώ όμως θα υπολογίσουμε τις τάσεις και παραμορφώσεις σε δοκούς, άξονες, σωλήνες ή άλλες κατασκευές σαν συνάρτηση των φορτίων που εφαρμόζονται πάνω τους. Αυτές οι τάσεις συνήθως είναι ανεξάρτητες από το υλικό. Μια χαλύβδινη δοκός και μια ξύλινη δοκός των ιδίων διαστάσεων, υπό ίδια φόρτιση, θα έχει τις ίδιες τάσεις. Η ερώτηση των *συνθηκών αστοχίας* τέτοιων δοκών υπό την επίδραση της φόρτισης είναι δευτερευούσης σημασίας σ' αυτό το αντικείμενο μελέτης. Σε τυπικούς υπολογισμούς σχεδόν όλη η εργασία, ας πούμε το 95%, θα είναι απλά *στατική*, ανεξάρτητα από το υλικό που χρησιμοποιείται, και μόνο στο τέλος θα αντικαταστήσουμε αριθμητικές τιμές για μια *επιτρεπτή* τάση και για *μέτρο ελαστικότητας* του υπό μελέτη υλικού.

Η αιτία γι' αυτή την ονοματολογία είναι κυρίως ιστορική. Η ανάπτυξη της επιστήμης της αντοχής των υλικών οφείλεται κυρίως σε Γάλλους μαθηματικούς, π.χ. Poisson, Lamé, Navier, Saint-Venant, Boussinesq κ.λ.π.

Οι περισσότεροι από τους αναφερθέντες επιστήμονες ήταν Μαθηματικοί οι οποίοι θεωρούσαν ότι κάποιο πρόβλημα μηχανικής είχε επιλυθεί όταν είχε βρεθεί η σχέση της τάσης με τη φόρτιση σε πρακτικό επίπεδο. Έδωσαν σ' αυτό το αντικείμενο το όνομα «Αντίσταση των Υλικών» (resistance of the materials) ή στα Γαλλικά «resistance de materiaux».

**Εφαρμογή 2-2**

Ποια είναι η μετατόπιση σύρματος αλουμινίου/ανοξειδωτου χάλυβα/δομικού χάλυβα, διατομής  $A = 6,45 \text{ mm}^2$  και αρχικού μήκους  $5,08 \text{ m}$  όταν υποβαστάζει βάρος  $444,8 \text{ N}$ . Το μέτρο ελαστικότητας εκάστου υλικού δίδεται στον κάτωθι πίνακα.

Πίνακας: Ιδιότητες συμβατικών δομικών υλικών<sup>5</sup>.

Υλικό	E, μέτρο ελαστικότητας (GPa)	Τάση διαρροής (MPa)	Τελική αντοχή (MPa)
Αλουμίνιο	68,95	240 -310	370-440
Ανοξειδωτος χάλυβας	200	275-344	540-680
Δομικός χάλυβας	210	206-240	380-450

**Λύση****A. Αλουμίνιο (Al)**

(α) Υπολογισμός της μετατόπισης  $\Delta L_{Al}$

Αρχικά, μετατρέπουμε τις μονάδες σε mm, N και MPa.

$$L = 5,08 \text{ m} = 5.080 \text{ mm},$$

$$E = 68.950 \text{ (MPa} = \text{N/mm}^2\text{)},$$

$$P = 444,8 \text{ N}$$

Κατόπιν, εφαρμόζουμε τον εναλλακτικό τύπο του νόμου του Hooke:

$$\Delta L_{Al} = \frac{PL}{AE} = \frac{444,8 \text{ N} (5.080 \text{ mm})}{68.950 \text{ N/mm}^2 (6,45 \text{ mm}^2)} = 5,1 \text{ mm}$$

(β) Υπολογισμός της ορθής τάσης

$$\sigma_{Al} = \frac{P}{A} = \frac{444,8 \text{ N}}{6,45 \text{ mm}^2} = 68,96 \text{ MPa} .$$

Ελέγχουμε εάν η αναπτυσσόμενη τάση είναι μικρότερη της τάσης διαρροής του υλικού,

Πράγματι,  $\sigma_{Al} = 68,96 \text{ MPa} < \sigma_{\text{Διαρροής}, \text{min}}^{Al} = 240 \text{ MPa} .$

Εάν η αναπτυσσόμενη ορθή τάση εντός του υλικού ήταν μεγαλύτερη της

5. Οι τιμές αυτές βρίσκονται εύκολα στο internet.

$\sigma_{\text{Διαρροής, min}}^{\text{Al}}$  τότε θα έπρεπε να αυξήσουμε τη διατομή της ράβδου. Ο αναγνώστης μπορεί να ελέγξει μέχρι πόσο φορτίο αντέχει η υπάρχουσα διατομή του σύρματος.

### **B. Ανοξειδωτος χάλυβας - stainless steel (ss)**

Ισχύει,

$$\Delta L_{\text{ss}} = \frac{PL}{AE_{\text{ss}}} = \frac{444,8 \text{ N} (5080 \text{ mm})}{(6,45 \text{ mm}^2) 200 (1000) \text{ N/mm}^2} = 1,75 \text{ mm}$$

Η ορθή τάση είναι ανεξάρτητη από το υλικό, εξαρτάται από το φορτίο και τη διατομή της ράβδου,

$$\sigma_{\text{ss}} = \frac{P}{A} = \frac{444,8 \text{ N}}{6,45 \text{ mm}^2} = 68,96 \text{ MPa} < \sigma_{\text{Διαρροής, min}}^{\text{ss}} = 275 \text{ MPa}$$

### **Γ. Δομικός χάλυβας - carbon steel (cs)**

Ισχύει,

$$\Delta L_{\text{carbonsteel(cs)}} = \frac{PL}{AE_{\text{cs}}} = \frac{444,8 \text{ N} (5.080 \text{ mm})}{(6,45 \text{ mm}^2) 210 (1000) \text{ N/mm}^2} = 1,67 \text{ mm}$$

Η ορθή τάση είναι ανεξάρτητη από το υλικό, εξαρτάται από το φορτίο και τη διατομή της ράβδου,

$$\sigma_{\text{cs}} = \frac{P}{A} = \frac{444,8 \text{ N}}{6,45 \text{ mm}^2} = 68,96 \text{ MPa} < \sigma_{\text{Διαρροής, min}}^{\text{cs}} = 206 \text{ MPa}$$

Αναγράφουμε τα αποτελέσματα σε πίνακα ως κάτωθι:

Υλικό	$\Delta L$ (mm)	$\sigma$ (MPa)	$\sigma_{\text{Διαρροής, min}}^{\text{cs}}$ (MPa)
Αλουμίνιο	5,1	68,96	240
Ανοξειδωτος χάλυβας	1,75	68,96	275
Δομικός χάλυβας	1,67	68,96	206

Σημ.: Η ανάλυση στατικών απλών προβλημάτων γίνεται, στο internet, με τα προγράμματα:

<https://mechanical.com/calculators/beam-analysis/>

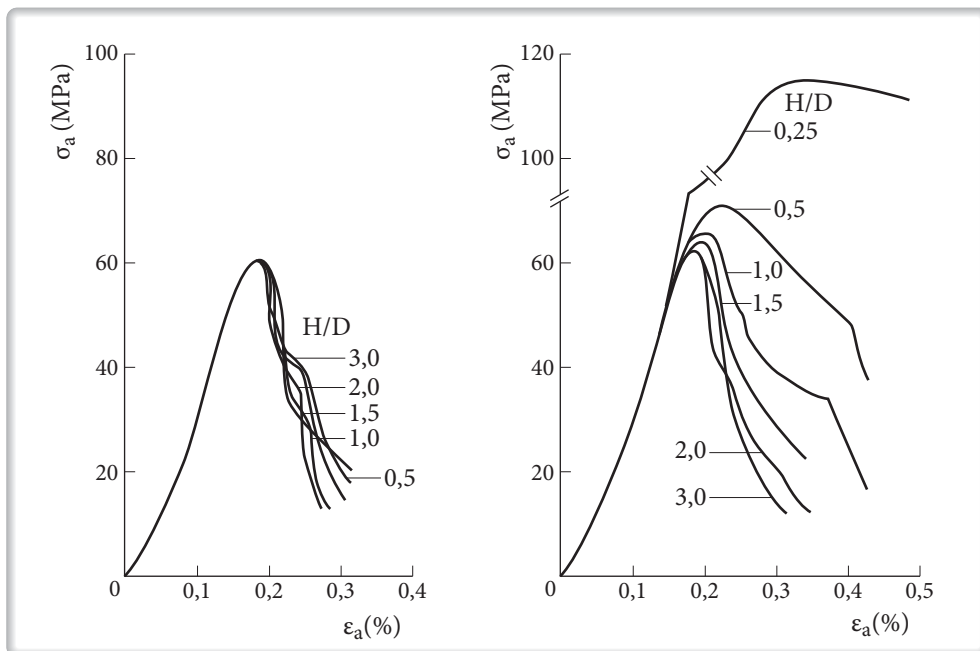
<https://engineeringlibrary.org/reference/properties-of-metals-doe-handbook>

(ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους φοιτητές να επιλύσουν διαφορετικά προβλήματα με τη χρήση των ανωτέρω προγραμμάτων).



### 2.6.3 Επίδραση της λυγιρότητας<sup>14</sup>

Στο αριστερό διάγραμμα στο Σχήμα 2-28 παρατηρούμε τη μικρή επίδραση της λυγιρότητας στην απόκριση του δοκιμίου σε θλίψη, στην περίπτωση χρήσης πλακών φόρτισης με ακίδες. Αντίθετα στο δεξιό διάγραμμα παρατηρούμε τη σημαντική αύξηση της αντοχής στην περίπτωση κοντών δοκιμίων.



Σχ. 2-28. Επίδραση της λυγιρότητας στις καμπύλες τάσεων-παραμορφώσεων.

### 2.6.4 Πολυαξονική θλίψη

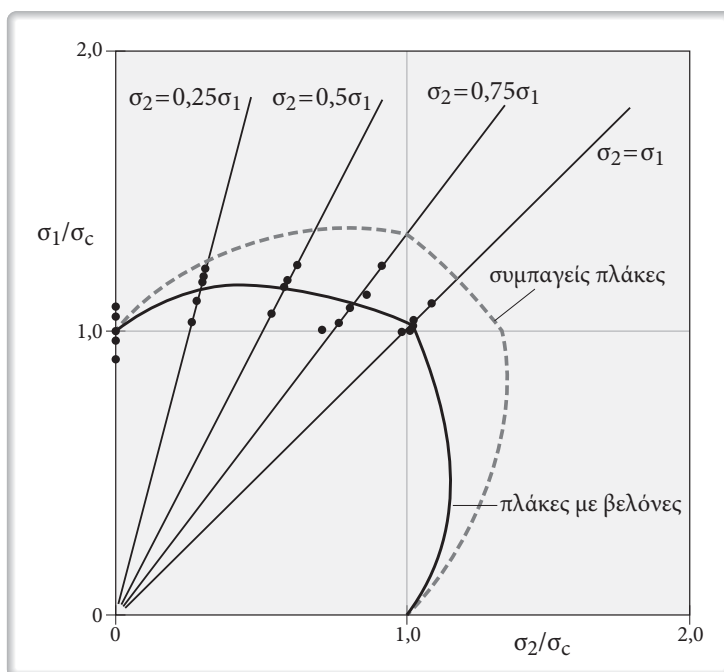
Η βασική αρχή των εργαστηριακών δοκιμών σε πετρώματα, για απόκτηση δεδομένων και την χρήση τους σε αναλύσεις σχεδιασμού, είναι ότι οι οριακές συνθήκες που εφαρμόζονται στο δοκίμιο θα πρέπει να προσομοιώνουν τις συνθήκες του επί τύπου πετρώματος. Στη γενική περίπτωση, θα υφίσταται μία κατάσταση πολυαξο-

14. Brown ET and Gonand BE, An analysis of size effect behavior in brittle rock. 2<sup>nd</sup> AUS-N. Z .Conf . Geomech Brisbase, 1975, Inst. Engs, AUS .NAT .CONF .PUBL. NO.75/4, P139-143

νικής ή πραγματικής τριαξονικής έντασης, δηλαδή με κύριες τάσεις  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ . Ειδικότερες περιπτώσεις αποτελούν η κατάσταση τριαξονικής έντασης, όπου  $\sigma_2 = \sigma_3$ , και διαξονικής έντασης, όπου  $\sigma_1 \geq \sigma_2$ ,  $\sigma_3 = 0$ . Σημασία έχει επίσης και η διαδρομή των τάσεων μέχρι τη θραύση.

### 2.6.5 Διαξονική θλίψη

Η δοκιμή διαξονικής θλίψης πραγματοποιείται με την εφαρμογή διαφορετικών ορθών τάσεων σε δύο ζεύγη εδρών ενός κυβικού, ορθογωνικού ή πλακοειδούς δοκιμίου πετρώματος. Τα αποτελέσματα της δοκιμής διαξονικής θλίψης μαρμάρου φαίνονται στο Σχήμα 2-29. Τα αποτελέσματα αυτά υποδεικνύουν τη μικρή επίδραση της ενδιάμεσης κύριας τάσης στην τιμή της μέγιστης αντοχής.



Σχ. 2-29. Αποτελέσματα δοκιμής διαξονικής θλίψης για μάρμαρο.

### 2.6.6 Τριαξονική θλίψη

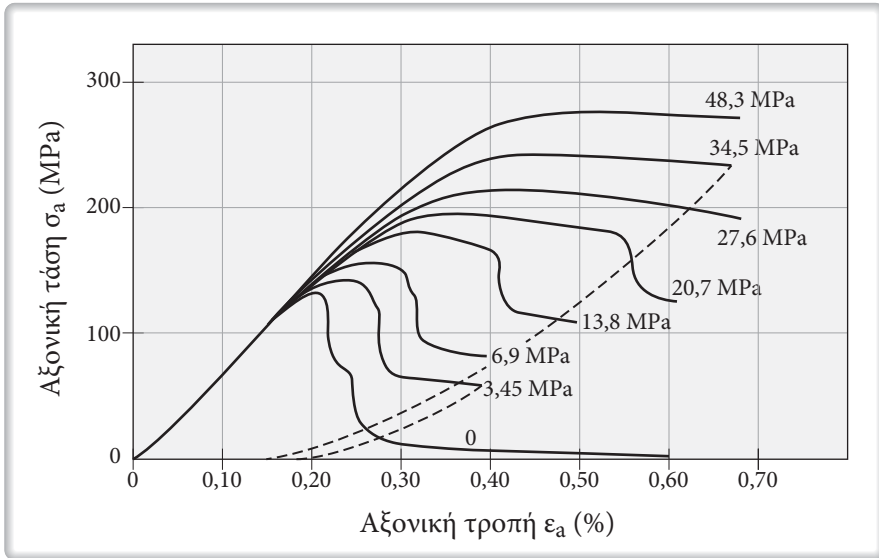
Κατά τη δοκιμή αυτή κατάλληλα διαμορφωμένα κυλινδρικά δοκίμια, παρόμοια με αυτά που παρασκευάζονται για τη δοκιμή μονοαξονικής θλίψης, υποβάλλονται σε *τριαξονική θλίψη*. Το δοκίμιο τοποθετείται μέσα σε ειδικό κελί (Εικ. 2-5) μέσω του οποίου εφαρμόζεται πλευρικά υδραυλική πίεση  $\sigma_3$  σε διάφορες τιμές. Ένα πλαστικό περίβλημα απομονώνει συνήθως το δοκίμιο από το πλευρικό υγρό που συνήθως είναι έλαιο. Η αξονική τάση  $\sigma_1$  επιβάλλεται στο δοκίμιο μέσω εμβόλου που διέρχεται μέσα από το κελί, με σκοπό να υπολογιστεί κάθε φορά η αντοχή του πετρώματος σε *αξονική θλίψη* για δεδομένη τιμή πλευρικής πίεσης. Από τα αποτελέσματα της δοκιμής αυτής και σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα των δοκιμών έμμεσου εφελκυσμού (Brazilian test) και μονοαξονικής θλίψης μπορεί να χαραχθεί η *περιβάλλουσα* μέγιστης αντοχής του πετρώματος.

Στο Σχήμα 2-30 δίνονται οι καμπύλες τάσης παραμόρφωσης δοκιμών σε μάρμαρο του Tennessee, για διάφορες τιμές της πλευρικής πίεσης. Παρατηρείται, η μετατροπή της αρχικά ψαθυρής συμπεριφοράς του πετρώματος για χαμηλές τιμές της πλευρικής πίεσης, σε όλκιμη για μεγαλύτερες τιμές αυτής. Στο Σχήμα 2-31 παρατηρούμε για πολύ υψηλές τιμές της πλευρικής πίεσης την κράτνυση του δοκιμίου του πετρώματος<sup>15</sup>.

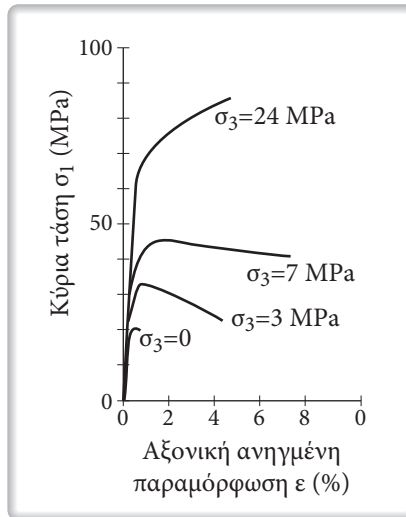


Εικόνα 2-5. Δοκίμιο υποβαλλόμενο σε τριαξονική θλίψη.

15. [https://tunnelling.metal.ntua.gr/wp-content/uploads/2018/06/A02\\_Laboratory.pdf](https://tunnelling.metal.ntua.gr/wp-content/uploads/2018/06/A02_Laboratory.pdf)



Σχ. 2-30. Πλήρεις καμπύλες αξονικής τάσης-αξονικής παραμόρφωσης από δοκιμές σε μάρμαρο.



Σχ. 2-31. Διαγράμματα κύριας τάσης  $\sigma_1$ - παραμόρφωσης.

Η μέση οριακή αντοχή σε θλίψη και εφελκυσμό ορισμένων κατασκευαστικών υλικών δείχνεται στον κάτωθι πίνακα<sup>16</sup>

16. Π.Α. Κακαβάς-Παπανιάρος, και Π.Α. Λέμης-Πετρόπουλος, Τεχνολογία Δομικών Υλικών, εκδ. Ζήτη 2023.

## Κάμψη δοκών

### 4.1 Διαγράμματα καμπτικών ροπών

Ο προσδιορισμός των διαγραμμάτων της *διατμητικής* δύναμης και των *καμπτικών* ροπών για δοκούς είναι ένα πρόβλημα το οποίο θα μπορούσε να επιλυθεί από τη θεωρία της *στατικής* των στερεών σωμάτων και όχι από τη θεωρία της *αντοχής* των υλικών. Η *καμπτική* ροπή σε δοκούς εξαρτάται μόνο από τα φορτία που ενεργούν στη δοκό και από τις αντιδράσεις στα σημεία στήριξης της δοκού και είναι η ίδια ανεξάρτητα εάν η δοκός είναι στερεή ή παραμορφωμένη ελαστική ή πλαστική. Ωστόσο, τα περισσότερα βιβλία στατικής δεν αναφέρονται σ' αυτό το αντικείμενο έτσι ώστε τώρα θα συζητήσουμε αυτό το θέμα σύντομα σαν εισαγωγικό στο πραγματικό πρόβλημα στην αντοχή των υλικών να υπολογίσουμε τις τάσεις και παραμορφώσεις στη δοκό ως αποτέλεσμα της υπάρχουσας *ροπής κάμψης* και *διατμητικής δύναμης*.

Αρχίζουμε με μια *στατικά ορισμένη* δοκό, δηλαδή μια κατασκευή η οποία είναι ευθεία και μεγάλου μήκους, της οποίας οι διαστάσεις της διατομής είναι μικρές συγκριτικά με το μήκος της. Η δοκός στηρίζεται σε τέτοια σημεία καθώς είναι απλά αναγκαία να αποτρέψει την πτώση της δοκού. Οι αντιδράσεις υπολογίζονται γράφοντας τις *εξισώσεις ισορροπίας* της συνολικής κατασκευής. Η *διατμητική δύναμη* και η *καμπτική ροπή* σε αυθαίρετη τομή της δοκού προσδιορίζεται απομονώνοντας τμήμα της (είτε δεξιά ή αριστερά της τομής) και γράφοντας τις *συνθήκες στατικής ισορροπίας* σ' αυτό το στοιχείο. Σε αυτή τη διαδικασία δεν αναφέρθηκε καθόλου ο νόμος του Hooke ή άλλος νόμος τάσης-παραμόρφωσης.

Ως παράδειγμα θεωρούμε μια απλά στηριζόμενη δοκό (Σχήμα 4-1) στην οποία τα αξονικά  $P$  και εγκάρσια  $Q$  φορτία είναι γνωστά και οι αντιδράσεις στις στηρίξεις άγνωστες.

**Προσδιορισμός των αντιδράσεων στα άκρα της δοκού:** Η ισορροπία των δυνάμεων στην εγκάρσια κατεύθυνση δίδει:

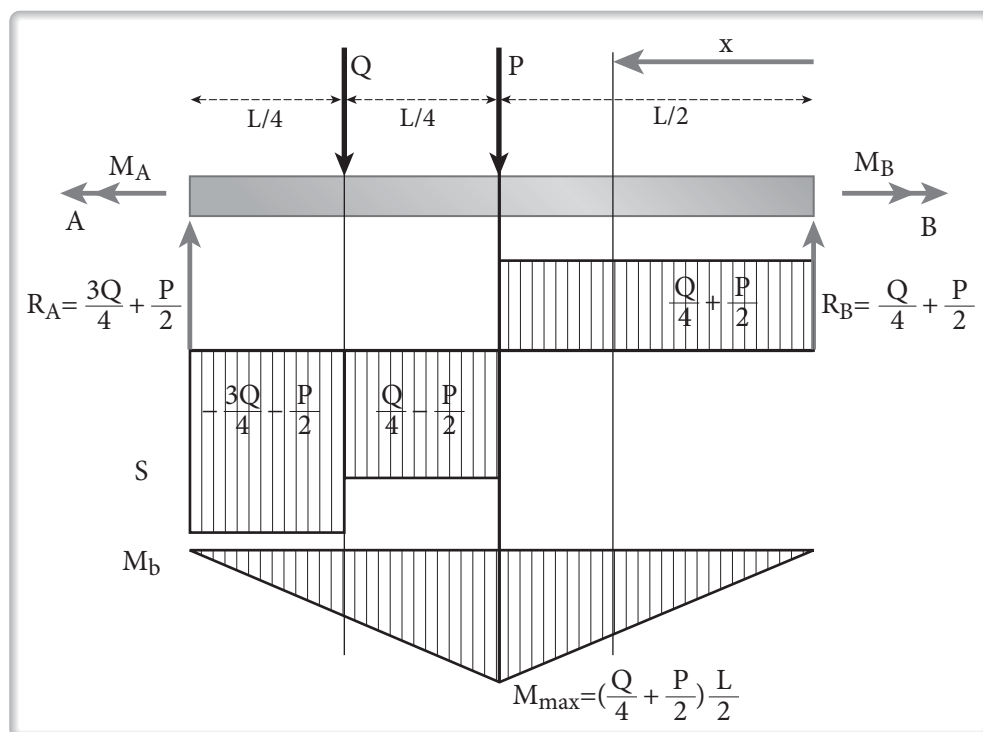
$$R_A + R_B = P + Q.$$

Η ισορροπία των ροπών στο σημείο A δίδει:

$$Q \frac{L}{4} + P \frac{L}{2} = R_B L \rightarrow R_B = \frac{Q}{4} + \frac{P}{2}.$$

Οπότε,  $R_A = \frac{3Q}{4} + \frac{P}{2}.$

Επαλήθευση:  $R_A + R_B = \frac{P}{2} + \frac{P}{2} + \frac{Q}{4} + \frac{3Q}{4} = P + Q!$



Σχ. 4-1. Διαγράμματα διατμητικής δύναμης και καμπτικής ροπής δοκού στηριζόμενη στα δύο άκρα και φορτιζόμενη με δυνάμεις  $P$  και  $Q$ .



Γράφοντας τις εξισώσεις ισορροπίας των δυνάμεων και ροπών για όλη τη δοκό, αναφορικά με τα σημεία στήριξης, μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε τις δυνάμεις στα σημεία αυτά (Σχ. 4-1). Για να προσδιορίσουμε τη *διατμητική δύναμη* και την *καμπτική ροπή* σε αυθαίρετο τμήμα το οποίο απέχει απόσταση  $x$ , από τη δεξιά στήριξη, γράφουμε τις εξισώσεις ισορροπίας σε αυτό το τμήμα της δοκού. Για κατακόρυφη ισορροπία η *διατμητική δύναμη* ισούται με  $\left(\frac{P}{2} + \frac{Q}{4}\right)$  και η εξίσωση ισορροπίας των ροπών περίξ οποιοδήποτε σημείου δίδει ότι η *καμπτική ροπή* ισούται με  $\left(\frac{P}{2} + \frac{Q}{4}\right)x$ .

Απομονώνουμε το δεξίο τμήμα της δοκού, διότι έτυχε να είναι το απλούστερο, το ίδιο αποτέλεσμα θα προέκυπτε εάν απομονώναμε το αριστερό τμήμα της δοκού. Η κατακόρυφη εξίσωση ισορροπίας είναι:

$$S = P + Q - \left(\frac{P}{2} + \frac{3Q}{4}\right) = \frac{P}{2} + \frac{Q}{4}$$

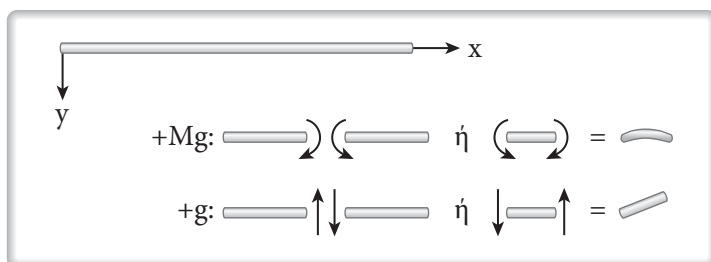
και η εξίσωση των ροπών περίξ της τομής δίδει:

$$M_b = \left(\frac{P}{2} + 3\frac{Q}{4}\right)(L - x) - Q\left(\frac{3L}{4} - x\right) - P\left(\frac{L}{2} - x\right).$$

**Σημ.** Το σύμβολο  $b$  δηλώνει κάμψη από τον Αγγλικό όρο “bending” ενώ το σύμβολο  $S$  δηλώνει Shear = διάτμηση.

Εάν στην τελευταία εξίσωση το  $x$  θεωρηθεί μεταβλητό, από  $x=0$  μέχρι  $x=L/2$ , προκύπτουν μεταβλητές εκφράσεις για το  $S$  και  $M_b$  όπως φαίνεται στο Σχ. 4-1. Για την εύρεση των  $S$  και  $M_b$  σ' άλλο τμήμα της δοκού πρέπει να γραφούν εκ' νέου οι εξισώσεις ισορροπίας. Ο αναγνώστης θα πρέπει να κάνει αυτό για το Σχήμα 4-1 και να επαληθεύσει όλα τα τμήματα σε αμφότερα τα διαγράμματα.

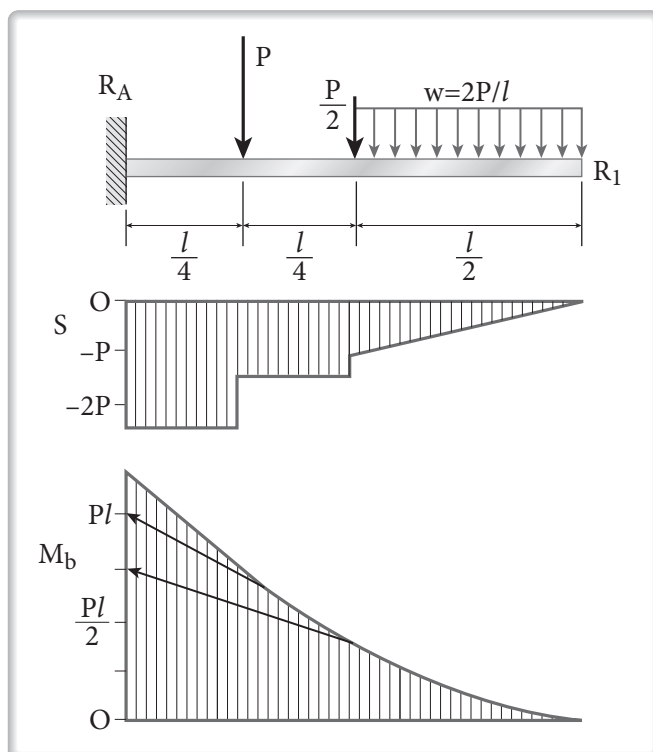
Πριν προχωρήσουμε στην επόμενη εφαρμογή είναι χρήσιμο να συμφωνήσουμε στα πρόσημα, τα οποία θα ακολουθηθούν στο υπόλοιπο του βιβλίου, τα οποία θα θεωρήσουμε ως θετικά ή αρνητικά στη *ροπή κάμψης* και *διατμητική δύναμη*. Οι ορισμοί δείχνονται στο Σχήμα 4-2. Πάντα θα υπολογίζουμε την απόσταση κατά μήκος της δοκού από αριστερά προς τα δεξιά, η μετακίνηση θα θεωρηθεί θετική προς τα κάτω και η *ροπή κάμψης* θα είναι θετική όταν τείνει να κάμψει τη δοκό με τα κοίλα προς τα άνω και η *διατμητική δύναμη* είναι θετική όταν η *διατμητική δύναμη* που ενεργεί στη δοκό είναι προς τα άνω δεξιά. Για τις επόμενες εφαρμογές πάντα θα αναφερόμαστε στο Σχ. 4-2.



Σχ. 4-2. Ορισμοί των σημείων σε προβλήματα δοκών.

Στο δεύτερο παράδειγμα θεωρούμε δοκό με διαφορετικές στηρίξεις: *πρόβολο* ο οποίος φορτίζεται ομοιόμορφα (Σχ. 4-3). Για το τμήμα της δοκού σε απόσταση  $a$ , αριστερά από το ελεύθερο άκρο του προβόλου, η κατακόρυφη ισορροπία του δεξιού τμήματος δίνει:

$$S = -wa = -\frac{2Pa}{l}.$$



Σχ. 4-3. Διάγραμμα διατμητικής δύναμης και ροπής κάμψης για πρόβολο.

## Myosotis τεχνική (Μυοσώτης τεχνική)

### 9.1 Εισαγωγικά

#### Βασικές εξισώσεις εκτροπής δοκού



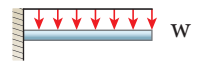
Υποθέτουμε ότι έχουμε μια δοκό πακτωμένη στο ένα άκρο και ελεύθερη στο άλλο, που υπόκειται σε ένα από τα είδη φορτίου: μια ροπή κάμψης  $M$  στο αντίθετο άκρο, μια σημειακή δύναμη  $P$  στο αντίθετο άκρο ή μια δύναμη  $w$  ομοιόμορφα κατανεμημένη σε όλο το μήκος της δοκού. Οι παρακάτω εξισώσεις δίνουν την περιστροφή (γωνιακή εκτροπή) και τη μετατόπιση (γραμμική απόκλιση) του ελεύθερου άκρου της δοκού.

	Γωνιακή εκτροπή, $\theta$	Μετατόπιση, $\delta$
Ροπή κάμψης, $M$	$\frac{ML}{EI}$	$\frac{ML^2}{2EI}$
Σημειακό φορτίο, $P$	$\frac{PL^2}{2EI}$	$\frac{PL^3}{3EI}$
Κατανεμημένο φορτίο, $w$	$\frac{wL^3}{6EI}$	$\frac{wL^4}{8EI}$

Όπου  $E$  είναι ο συντελεστής ελαστικότητας,  $L$  είναι το μήκος της δοκού και  $I$  είναι η εμβαδική ροπή αδράνειας

Σημειώστε τους συντελεστές στους παρονομαστές 12 23 68 και στους αριθμητές 12 23 34.

Σχηματικά η μέθοδος Myosotis δείχνεται στο κάτωθι Σχήμα 9-1.

	Γωνία	Εκτροπή
	$\frac{Ml}{EI}$	$\frac{Ml^2}{2EI}$
	$\frac{Pl^2}{2EI}$	$\frac{Pl^3}{3EI}$
	$\frac{wl^3}{6EI}$	$\frac{wl^4}{8EI}$

Σχ. 9-1. Μέθοδος Μυοσώτης (Myosotis).

Ο Myosotis είναι το γένος του λουλουδιού “Μη με λησμόνει” και ο καθηγητής Den Hartog<sup>1</sup> στο MIT απαιτούσε από τους μαθητές του να απομνημονεύσουν τις έξι ανωτέρω εξισώσεις.

Οι εκφράσεις πρέπει να απομνημονεύονται από την αρχή, κάτι που δεν είναι δύσκολο αν θυμόμαστε μόνο την ακολουθία “**12 23 68**”. Εάν ο εκθέτης του μήκους  $L$  ξεχαστεί, μπορεί να αποκατασταθεί σε κάθε περίπτωση με συλλογισμό των διαστάσεων. Στις τέσσερες εξισώσεις ο εκθέτης του  $L$  είναι ο ίδιος με τους συντελεστές στον παρονομαστή ενώ στις άλλες δύο εξισώσεις είναι το ήμισυ.

Οι τύποι είναι για τη γωνία περιστροφής  $\phi$ , και την εκτροπή-μετατόπιση  $\delta$ , στο άκρο ενός προβόλου υπό τις τρεις συνθήκες φόρτισης που δίνονται στο Σχ. 9-1: *συγκεντρωτική ροπή κάμψης* στο ελεύθερο άκρο, *συγκεντρωτική δύναμη* στο ελεύθερο άκρο και *ομοιόμορφα κατανεμημένη δύναμη* κατά μήκος του μήκους της δοκού.

Στις εξισώσεις,  $M, P, w$  είναι τα μεγέθη της εφαρμοζόμενης φόρτισης,  $L$  είναι το μήκος της δοκού,  $E$  είναι ο συντελεστής ελαστικότητας του υλικού της δοκού, και  $I$  είναι η ροπή αδράνειας (ή δεύτερη ροπή εμβαδού) της διατομής της δοκού.

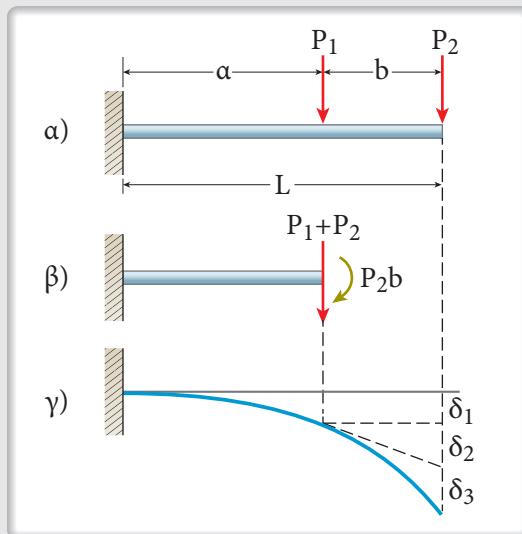
Μια εξήγηση, του γιατί αυτές οι εξισώσεις αξίζει να απομνημονεύονται, δεν είναι επειδή χρησιμοποιούνται απευθείας στην ανάλυση των τυπικών δομικών κατασκευών, αλλά αν και οι μηχανικοί συναντούν πρόβολο φορτιζόμενο με αυτόν τον τρόπο, σίγουρα δεν είναι οι πιο συνηθισμένες διαμορφώσεις δοκών που θα συναντήσουν στην επαγγελματική πρακτική. Αυτό που κάνει αυτές τις εξισώσεις πολύτιμες είναι πώς μπορούν να συνδυαστούν για να λύσουν πολλά πρακτικά προβλήματα *κάμψης* δοκών.

1. J.P. Den Hartog, Strength of Materials, Dover, 1949

## 9.2 Εφαρμογές της μεθόδου Μυοσotis

### Εφαρμογή 9-1

Θεωρούμε πρόβολο φορτιζόμενο με δύο φορτία  $P_1$  και  $P_2$ , όπως φαίνεται στο Σχ. 9-2. Το ολικό μήκος της δοκού είναι  $L$ , η διατομή  $A$  και το μέτρο ελαστικότητας του υλικού  $E$ . Στο αριστερό άκρο η δοκός είναι πακτωμένη ενώ στο δεξιό είναι ελεύθερη. Προσδιορίστε το βέλος κάμψης της δοκού λόγω της φόρτισης με τη βοήθεια της μεθόδου Μυοσotis.



Σχ. 9-2. Παραμόρφωση προβόλου φορτιζόμενου με δύο συγκεντρωτικά φορτία.

### Απάντηση

Θεωρούμε τομή λίγο πριν στα αριστερά της φόρτισης  $P_1$ , όπου η διατμητική φόρτιση είναι  $P_1 + P_2$  και η καμπτική ροπή  $P_2b$  (Σχ. 9-2b). Γράφουμε τη μετατόπιση  $\delta_1$  και τη γωνία  $\varphi_1$  στο  $P_1$ . Σχεδιάζουμε το διάγραμμα όπως φαίνεται στο Σχ. 9-2c και σημειώνουμε ότι η μετατόπιση στο άκρο συνίσταται από τρία μέρη: τη μετατόπιση  $\delta_1$  λόγω του  $P_1$  τη μετατόπιση  $\delta_2 = \varphi_1 b$ , η οποία ισούται με γραμμική προέκταση της κλίσης στο  $P_1$  και τη μετατόπιση  $\delta_3$  προβόλου μήκους  $b$  ενσωματωμένου στο  $P_1$  με κλίση ελαφρώς προς τα κάτω  $\varphi_1$ . Με βάση της μεθόδου Μυοσotis η μετατόπιση στο ελεύθερο άκρο είναι:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \left[ \frac{(P_2b)a^2}{2EI} + \frac{(P_1 + P_2)a^3}{3EI} \right] + \left[ \frac{(P_2b)a}{EI} + \frac{(P_1 + P_2)a^2}{2EI} \right] b + \frac{(P_2)a^3}{3EI}$$

Μετά από απλές μαθηματικές πράξεις η ολική μετατόπιση  $\delta$ , στο ελεύθερο άκρο, γράφεται ως κάτωθι:

$$\delta = P_1 \left( \frac{a^3}{3EI} + \frac{a^2b}{2EI} \right) + P_2 \left( \frac{L^3}{3EI} \right).$$

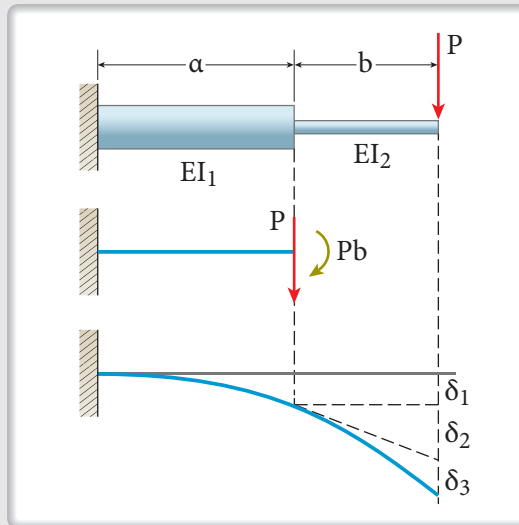
Όπου  $L = a + b$ .

Διερεύνηση: Για  $b=0$ , τότε  $a=L$ , και το αποτέλεσμα είναι:  $\delta = (P_1 + P_2) \left( \frac{L^3}{3EI} \right)$  το οποίο μπορεί να εξαχθεί από τη δεύτερη σειρά δεύτερη στήλη του Σχ. 9-1.

Ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει το ανωτέρω αποτέλεσμα με ολοκλήρωση της εξίσωσης  $M = EI \frac{d^2y}{dx^2}$ . Θα απαιτηθούν αρκετές σελίδες για να φθάσουμε το ίδιο αποτέλεσμα με τη μέθοδο Myosotis! ♦

### Εφαρμογή 9-2

Θεωρούμε τον πρόβολο του Σχ. 9-3, ο οποίος αποτελείται από δύο δοκούς του ίδιου υλικού, με μέτρο ελαστικότητας  $E$ , αλλά διαφορετικής διατομής  $I$ . Δηλαδή τα δύο μέλη της κατασκευής έχουν διαφορετική στιβαρότητα  $EI$ . Ο πρόβολος φορτίζεται με ένα απλό συγκεντρωτικό φορτίο  $P$  στο ελεύθερο άκρο. Θέλουμε να προσδιορίσουμε το βέλος κάμψης στο ελεύθερο άκρο της δοκού.



Σχ. 9-3. Πρόβολος με δύο μέλη διαφορετικής στιβαρότητας  $EI$ , φορτιζόμενος με συγκεντρωτικό φορτίο  $P$ .

**Απάντηση**

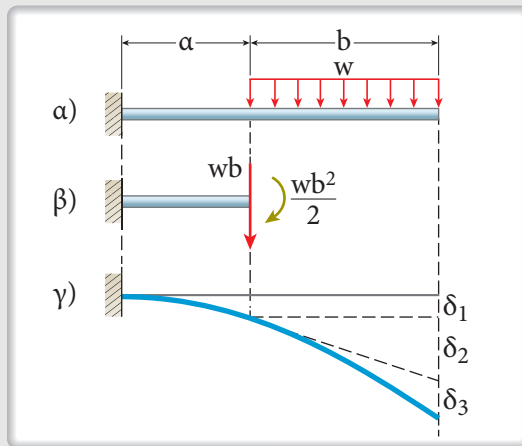
Η απ' ευθείας απάντηση, με βάση την τεχνική Μγοςotis, για το βέλος κάμψης στο άκρο του προβόλου είναι:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \left[ \frac{(Pb)a^2}{2EI_1} + \frac{Pa^3}{3EI_1} \right] + b \left[ \frac{(Pb)a}{EI_1} + \frac{Pa^2}{2EI_1} \right] + \frac{Pb^3}{2EI_2} .$$

Ο αναγνώστης αντιλαμβάνεται το μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου Μγοςotis, χωρίς πολλά μαθηματικά βρίσκουμε την λύση! ♦

**Εφαρμογή 9-3**

Θεωρούμε πρόβολο φορτιζόμενο με ομοιόμορφο φορτίο  $w(N/m)$  σε τμήμα του μήκους της δοκού (Σχ. 9-4). Υπολογίστε το βέλος κάμψης στο ελεύθερο άκρο της δοκού.



Σχ. 9-4. Βέλος κάμψης ομοιόμορφου φορτισμένου προβόλου σε τμήμα του μήκους του.

**Απάντηση**

Χωρίζουμε τη δοκό σε δύο τμήματα όπως φαίνεται στο Σχ. 9-4β, και υπολογίζουμε τη διατμητική (εγκάρσια) δύναμη και την καμπτική ροπή στην ένωση με βάση την στατική. Με βάση τη μέθοδο Μγοςotis, το βέλος κάμψης στο άκρο της δοκού ισούται με:

$$\delta = \left[ \frac{wb \left( \frac{b}{2} \right) a^2}{2EI} + \frac{wba^3}{3EI} \right] + b \left[ \frac{wb \left( \frac{b}{2} \right) a}{EI} + \frac{wba^2}{2EI} \right] + \frac{wb^4}{8EI} .$$

Παρατηρούμε την ευκολία και απλότητα της μεθόδου Μγοςotis! ♦

Μέρος

**B**

**Πειραματικές Μέθοδοι  
Προσδιορισμού της  
Αντοχής των Υλικών**



## Εισαγωγικά στοιχεία

Οι πειραματικές μέθοδοι στα κατασκευαστικά και/ή μηχανολογικά υλικά στην Αντοχή ή Μηχανική των Υλικών παρέχει μια λεπτομερή αλλά εύχρηστη επεξεργασία διαφόρων πειραματικών τεχνικών που είναι χρήσιμες για τον χαρακτηρισμό της δομής και των μηχανικών ιδιοτήτων των υλικών. Δίνοντας έμφαση στις πειραματικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται συχνότερα στα εργαστήρια, το βιβλίο δίνει τη δυνατότητα στους φοιτητές να κατανοήσουν τις πρακτικές πτυχές των μεθόδων και να αντλήσουν τη μέγιστη δυνατή πληροφορία από τα πειραματικά αποτελέσματα που εξάγονται από τις εργαστηριακές μελέτες.

Κάθε κεφάλαιο ακολουθεί παρόμοια μορφή:

1. Συζητά τη σημασία κάθε πειραματικής τεχνικής
2. Παρουσιάζει τις απαραίτητες θεωρητικές και βασικές λεπτομέρειες
3. Διευκρινίζει έννοιες με πολλά επεξεργασμένα παραδείγματα
4. Παρέχει μια λεπτομερή περιγραφή του πειράματος που θα διεξαχθεί και του τρόπου με τον οποίο θα καταγραφούν και θα ερμηνευθούν τα δεδομένα
5. Περιλαμβάνει μεγάλο αριθμό εικονογραφήσεων, σχημάτων και μικρογραφιών
6. Περιέχει ασκήσεις και παραπομπές για περαιτέρω ανάγνωση

Γεφυρώνοντας το χάσμα μεταξύ διάλεξης και εργαστηρίου, αυτό το βιβλίο προσφέρει στους φοιτητές πρακτική εμπειρία χρησιμοποιώντας τεχνικές μηχανολογίας και επιστήμης/μηχανικής υλικών για τον προσδιορισμό της δομής και των ιδιοτήτων των υλικών. Μετά την ολοκλήρωση της μελέτης του βιβλίου, οι φοιτητές θα είναι σε θέση να εκτελούν με σιγουριά πειράματα στο εργαστήριο και να εξάγουν πολύτιμα δεδομένα από τα πειραματικά αποτελέσματα.

Το πρώτο πείραμα περιγράφει τον πειραματικό τρόπο υπολογισμού των μηχανικών ιδιοτήτων των κατασκευαστικών και/ή μηχανολογικών υλικών σε εφελκυσμό. Παρέχει το θεωρητικό υπόβαθρο που απαιτείται για τη μελέτη του εφελκυσμού

των υλικών και παρέχει χρήσιμες πληροφορίες του διαγράμματος εφελκυσμού μεταλλικών υλικών. Μελετά την συμπεριφορά των όλκιμων και ψαθυρών υλικών σε εφελκυσμό καθώς και τους βρόχους υστέρησης. Επίσης δίδει κατασκευαστικές πληροφορίες της μηχανής εφελκυσμού και τον τρόπο εκτέλεσης του πειράματος για τον χαρακτηρισμό του υπό μελέτη υλικού.

Το δεύτερο πείραμα μελετά τη κάμψη μεταλλικών δοκών. Αρχικά παρέχονται θεωρητικές λεπτομέρειες για τον υπολογισμό του βέλους κάμψης δοκού με φόρτιση σε δύο συμμετρικά σημεία περίξ του κέντρου. Εκτός από τον συμβατικό τρόπο υπολογισμού του βέλους κάμψης δοκού υπό την επίδραση εγκάρσιας φόρτισης, όπως αναγράφεται στα περισσότερα βιβλία αντοχής των υλικών, παραθέτουμε τον προσδιορισμό του βέλους κάμψης με τη μέθοδο Myosotis, όπως αναφέραμε στο πρώτο μέρος του βιβλίου. Αναγράφονται τα πειραματικά δεδομένα και τον τρόπο χαρακτηρισμού του υλικού από τη μελέτη της κάμψης των δοκών. Παρέχονται τα σχετικά διαγράμματα για τον υπολογισμού του μέτρου ελαστικότητας του υπό μελέτη μεταλλικού υλικού.

Το τρίτο πείραμα αναφέρεται στην στρέψη μεταλλικών ράβδων. Αρχικά παρέχονται μερικά παραδείγματα στρέψης δοκών για την καλύτερη κατανόηση του τρόπου στρέψης δοκών ή ράβδων στην πράξη. Αναγράφεται η σχετική θεωρία που απαιτείται για τον μαθηματικό προσδιορισμό των ιδιοτήτων των υλικών υπό την επίδραση της στρέψης. Επίσης δίδονται πληροφορίες της μηχανής που χρησιμοποιείται στο εργαστήριο για την στρέψη δοκών, την καταγραφή των πειραματικών δεδομένων και την ανάλυση για τον χαρακτηρισμό του υλικού.

Το πείραμα τέταρτο πραγματεύεται με τον λυγισμό μεταλλικών δοκών. Η συσκευή προσδιορισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, με βάση τον τύπο του Euler, αναγράφεται αναλυτικά και δίδεται ο σχετικός πίνακας υπολογισμένου του για διαφορετικές συνθήκες στήριξης. Διαφορετικά υλικά, όπως ο χάλυβας και το αλουμίνιο, εξετάστηκαν πειραματικά για διαφορετικές συνθήκες στήριξης για να υπολογισουμε το κρίσιμο φορτίο όπου εκδηλώνεται λυγισμός επί του δοκιμίου. Επί πλέον δίδεται και η σχετική θεωρία για να ελέγξουμε εάν ο λυγισμός είναι ρυθμιζόμενη λειτουργία αστοχίας του δοκιμίου.

Στο πέμπτο πείραμα προσδιορίζουμε πειραματικά την σκληρότητα των μετάλλων με διαφορετικές μεθόδους π.χ. Brinell, Rockwell, κ.λ.π. Εξετάστηκαν πειραματικά δοκίμια από χάλυβα και μπρούτζο και από τον αριθμό σκληρότητας υπολογίσαμε την αντοχή αυτών των υλικών. Περιγράφονται οι συσκευές που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό της σκληρότητας και η αντίστοιχη θεωρία.

Στο έκτο πείραμα μελετήσαμε την κόπωση μεταλλικών δοκιμίων υπό δυναμική επαναλαμβανόμενη φόρτιση με την χρήση περιστρεφόμενου προβόλου. Το εξεταζό-

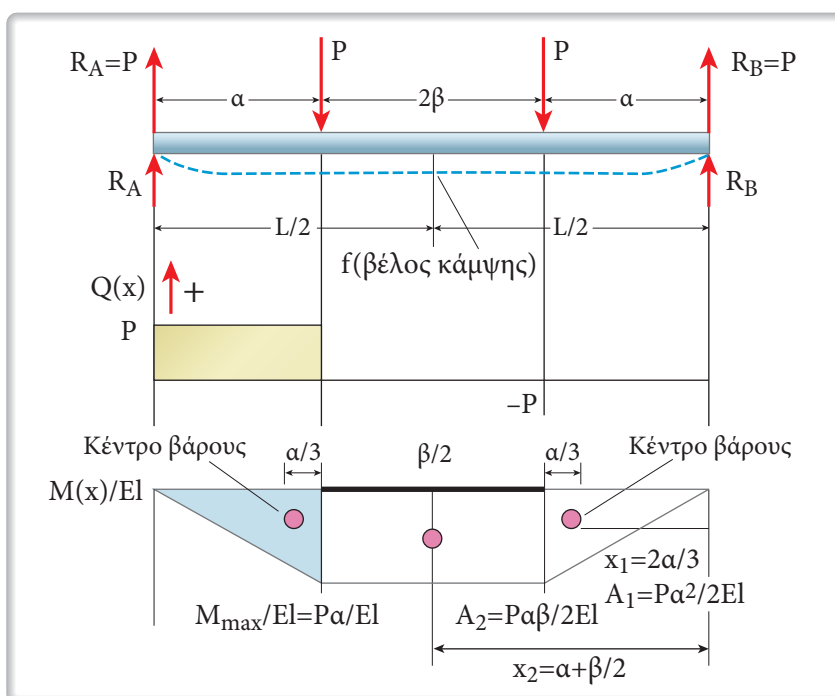
μενο δοκίμιο πρέπει να πληροί τους κανονισμούς ASTM και η συσκευή δείχνεται σε σχετική φωτογραφία με όλες τις κατασκευάσιμες λεπτομέρειες. Αναγράφεται επίσης το διάγραμμα τάσης-αριθμού φορτίσεων για τον προσδιορισμό του ορίου κόπωσης του υλικού. Πρωτοποριακές μελέτες της κόπωσης των υλικών πραγματοποιήθηκαν από τον Γερμανό Μηχανικό F. Wöhler, την περίοδο κατασκευής των νέων σιδηροδρομικών γραμμών στην Ευρώπη και Ρωσία.

Στο τέλος των πειραμάτων αναγράφεται και παράρτημα με θέματα επί των πειραμάτων για την καλύτερη κατανόηση των.

## Κάμψη μεταλλικών δοκών

### Π2.1 Θεωρητικός υπολογισμός του βέλους κάμψης δοκού με φόρτιση σε δύο συμμετρικά σημεία περίξ του κέντρου

Το σύστημα του Σχ. Π2-1 είναι ισοστατικό ( $2κ=A+P$ ,  $κ=#$  κόμβων,  $P=#$  ράβδων και  $A=#$  αντιδράσεων,  $#=$  αριθμός).



Σχ. Π2-1. Αμφιέρεστη δοκός υπό την επίδραση δύο συμμετρικών φορτίων σε απόσταση  $\alpha$  από τα άκρα της δοκού.

Εδώ  $\kappa=4$ ,  $P=3$  και  $A=5$  (πάκτωση στο αριστερό άκρο και άρθρωση στο δεξιό άκρο της δοκού). Επειδή το σύστημα είναι *ισοστατικό* ( $2\kappa=A+P$ ,  $8=5+3$ ) ο αριθμός των εξισώσεων, από την ισορροπία δυνάμεων και ροπών, είναι ικανός για να προσδιοριστούν οι αντιδράσεις  $R_A$  και  $R_B$ . Πράγματι,

- Ισορροπία δυνάμεων:  $R_A + R_B = 2P$
- Ισορροπία ροπών ως προς το σημείο A:  $P \cdot a + P \cdot (a + 2b) = R_B \cdot L$

Επίσης:  $2a + 2b = L$

Από το ανωτέρω σύστημα των εξισώσεων προκύπτει ότι:

$$R_A = R_B = P \quad (\text{Π2-1})$$

Τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και ροπών σχεδιάζονται στο Σχήμα Π2-1. Από τα διαγράμματα φαίνεται ότι το μέγιστο εγκάρσιο φορτίο είναι  $Q_{\max} = P$  και η μέγιστη ροπή είναι  $M_{\max} = Pa$ . Η μέγιστη αξονική τάση στην άνω και κάτω επιφάνεια της δοκού ισούται με:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_z} \frac{h}{2} \quad (\text{Π2-2})$$

όπου  $h$  είναι το πάχος της δοκού,  $I_z$  η *ροπή αδρανείας της επιφανείας* και  $M_{\max}$  η *μέγιστη ροπή κάμψης*. Για ορθογωνικές διατομές ισχύει:

$$I_z = \frac{1}{12} bh^3.$$

### Μέγιστη ορθή τάση

Στα προβλήματα κάμψης δοκών το ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός της *ορθής τάσης* που αναπτύσσεται μέσα στο υλικό. Για να διασφαλίσουμε ότι η δοκός θα αντέξει το επιβαλλόμενο φορτίο πρέπει η μέγιστη ορθή τάση εντός του υλικού να μην υπερβεί την επιτρεπόμενη τάση σε εφελκυσμό και/ή θλίψη. Κατά την κατεύθυνση του άξονα της δοκού (ουδέτερο άξονα) η τάση είναι μηδέν, στο άνω τμήμα της είναι θλιπτική και στο κάτω τμήμα εφελκυστική. Οπότε πρέπει να ισχύει  $\sigma_{\text{άνω}} \leq \sigma_{\text{επ}}^{\text{θλίψη}}$  και  $\sigma_{\text{κάτω}} \leq \sigma_{\text{επ}}^{\text{εφελκ}}$ . Οι επιτρεπτές τιμές  $\sigma_{\text{επ}}^{\text{θλίψη}}$  και  $\sigma_{\text{επ}}^{\text{εφελκ}}$ , για το υλικό προσδιορίζονται από πειράματα θλίψης και εφελκυσμού αντίστοιχα. Σε κάθε υλικό δίδονται από πίνακες<sup>8</sup>. Για τον υπολογισμό της μέγιστης ορθής τάσης που αναπτύσσεται σε *καθαρή κάμψη* της δοκού πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τα σημεία των ινών της δοκού που απέχουν την μέγιστη απόσταση από τον ουδέτερο άξονα. Ισχύει:

8. Beer et al, Μηχανική των Υλικών, εκδ Τζιόλα 2017

$$\sigma_{x, \max} = \frac{M_z}{I_z} y_{\max} \cdot$$

**Σημ.** Το φορτίο εφαρμόζεται στον z-άξονα και η ορθή τάση αναπτύσσεται στον x-άξονα.

Στη γενική κάμψη ισχύει η ίδια εξίσωση ως η ανωτέρω αλλά το  $M_z$  αντικαθίσταται από το  $M_{z, \max}$  το οποίο υπολογίζεται από το διάγραμμα των ροπών.

Ο λόγος  $W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$  καλείται *ροπή αντίστασης της διατομής* (σε μονάδες  $\text{mm}^3$ ).

Οπότε η μέγιστη ορθή τάση ισούται με:

$$\sigma_{x, \max} = \frac{M_z}{W_z} \text{ (N/mm}^2\text{)}.$$

Για συμμετρικές διατομές, τύπου τετραγώνου, κύκλου, παραλληλόγραμμου κ.λ.π. έχουμε μια *ροπή αντίστασης* ενώ για μη συμμετρικές διατομές έχουμε δύο ροπές αντίστασης οπότε αντιστοιχούν δύο μέγιστες *ορθές* τάσεις. Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε δύο διαφορετικά  $y_{\max}$ . Μια για την άνω θλιβόμενη περιοχή και μια για την κάτω εφελκυόμενη περιοχή. Οι πειραματικές τιμές των ορθών τάσεων σε κάμψη πρέπει να είναι μικρότερες από τις τιμές  $\sigma_{\text{επ}}^{\theta\lambda}$ ,  $\sigma_{\text{επ}}^{\text{εφ}}$  για το υλικό. Οι επιτρεπτές τιμές αναγράφονται σε πίνακες<sup>9</sup>.

**Παρατήρηση:** Για δομικά στοιχεία υπό κάμψη προτιμούμε το  $h$  να είναι μεγαλύτερο από το  $b$ , διότι το  $I_z$  έχει τη μέγιστη τιμή οπότε, από την εξ. (Π2-2), αναπτύσσονται μικρότερες *ορθές* τάσεις εντός του στοιχείου. Αυτό θα γίνει επίσης εμφανές στα ακόλουθα παραδείγματα.

Η μέγιστη *διατμητική* τάση στο μέσο της δοκού ισούται με:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_{\max}}{bh} \quad (\text{Π2-3})$$

όπου  $Q_{\max}$  είναι η μέγιστη εγκάρσια φόρτιση και  $b$  είναι το φάρδος της δοκού.

### Θεώρημα ροπών-εμβადών

Τα εμβαδά των επιφανειών  $A_1$  και  $A_2$  δίδονται στο Σχήμα Π2-1. Οι αποστάσεις των κέντρων του τριγώνου και του ορθογωνίου παραλληλογράμμου από το Β αναγράφονται στο Σχήμα Π2-1.

9. Π.Βουθούνης, Αντοχή των Υλικών, Αυτοέκδοση-Αθήνα, 2020

Το βέλος κάμψης, με βάση το θεώρημα Ροπών-Εμβαδών, ισούται με:

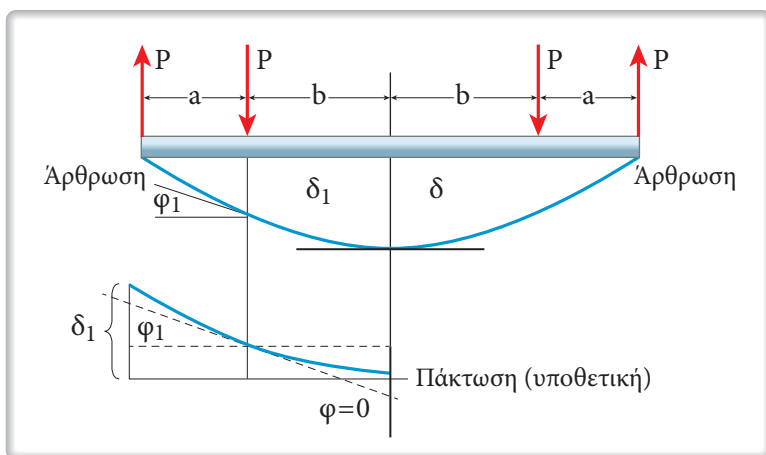
$$\delta = A_1 x_1 + A_2 x_2 = \frac{Pa(3L^2 - 4a^2)}{24EI} \quad (\text{Π2-4})$$

όπου  $P$ =φορτίο (σε Newton),  $E$ =Μέτρο ελαστικότητας του υλικού (σε  $\text{MPa} = \text{N/mm}^2$ ),  $I$ =ροπή αδρανείας ως προς το κέντρο βάρους της δοκού (σε  $\text{mm}^4$ )

Η απόδειξη του τύπου για το βέλος κάμψης στο κέντρο της δοκού αποδεικνύεται ευκολότερα με τον τεχνική Μγοςotis “12 23 64”, ως κάτωθι:

Θεωρούμε ότι η δοκός αποτελείται από δύο ίσα μέλη δεξιά και αριστερά από το κέντρο της δοκού. Στο κέντρο η δοκός είναι πακτωμένη ενώ στο αριστερό σκέλος εφαρμόζονται οι δυνάμεις  $P$  σε απόσταση  $b$ , ( $b=L/2-a$ ), και η αντίδραση  $R_A=P$  σε απόσταση  $L/2$ . Επειδή στο κέντρο η καμπύλη μετατόπισης είναι συμμετρική η κλίση είναι μηδέν (Σχ Π2-2). Οπότε δεν έχουμε συνεισφορά από τη γωνία  $\varphi$ . Άρα το ολικό  $\delta$ , στο κέντρο ισούται, με: (βλ. θεωρητικό μέρος Α).

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_1 - \delta_2 - \varphi_1 b = \frac{P\left(\frac{L}{2}\right)^3}{3EI} - \frac{Pb^3}{3EI} - \left(\frac{Pa^2}{2EI}\right)b \\ &= \frac{PL^3}{24EI} + \frac{P(L-2a)^3}{24EI} - \frac{6Pa^2(L-2a)}{24EI} \\ &= \frac{P}{24EI} [-L^3 + (L-2a)^3 + 6a^2(L-2a)]. \end{aligned}$$



Σχ. Π2-2. Καμπύλη μετατόπισης σε δοκό υπό συμμετρική φόρτιση αναφορικά με το κέντρο της.

Για  $\beta = 0$  τότε  $F = 2P$  και  $\alpha = L/2$ . Η ανωτέρω εξίσωση υπολογισμού του βέλους κάμψης  $\delta$  μετασχηματίζεται σε:

$$\delta = \frac{FL^3}{48EI} \quad (\text{Π2-5})$$

το οποίο παριστάνει το βέλος κάμψης αμφιέρεστης δοκού φορτισμένη στο κέντρο της με φορτίο  $F$ .

## Π2.2 Πειραματικά δεδομένα

### Π2.2.1. Γεωμετρικά στοιχεία

Στο πείραμα χρησιμοποιούμε χαλύβδινη δοκό διαστάσεων  $b = 40,6 \text{ mm}$ ,  $h = 8,2 \text{ mm}$ , μήκους  $L = 1260 \text{ mm}$ , τύπου λάμας, και το φορτίο εφαρμόζεται συμμετρικά γύρω από το κέντρο σε απόσταση  $\alpha = 315 \text{ m}$ . Η ροπή αδρανείας επιφανείας ισούται με:

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = 1865,46 \text{ mm}^4.$$

Οι διαστάσεις της δοκιμίου μετρήθηκαν με το παχύμετρο, του οποίου η ελάχιστη υποδιαίρεση ήταν  $1/10 \text{ mm}$ , οπότε το σφάλμα στις μετρήσεις είναι  $1/20 \text{ mm}$ , δηλαδή  $0,05 \text{ mm}$  το οποίο δεν ελήφθη υπ' όψη στους υπολογισμούς μας.

**Σημ.** Οι μονάδες της ροπής αδρανείας της διατομής  $I$ , είναι σε  $\text{mm}^4$ .

Το σχήμα του δοκιμίου είναι «dog bone» το οποίο έχει κατασκευαστεί στο μηχανουργείο με βάση τους κανονισμούς.

### Π2.2.2. Πειραματικές μετρήσεις

Η πειραματική διάταξη προσδιορισμού του βέλους κάμψης  $\delta$ , σα συνάρτηση του φορτίου  $P$ , δείχνεται στην Εικόνα Π2-1. Η επιμήκυνση της δοκού μετρήθηκε με ειδικό επιμηκυνσιόμετρο, του οποίου η ελάχιστη υποδιαίρεση είναι  $1/100 \text{ mm}$ . Το όργανο προσαρμόζεται στο δοκίμιο με μαγνήτη ισχυρής έντασης. Οι μετρήσεις έγιναν μηχανικά και όχι ψηφιακά. Η συσκευή διαθέτει και ψηφιακή εφαρμογή αλλά για εκπαιδευτικούς λόγους προτιμήσαμε τον μηχανικό τρόπο.

**Σημ.** Η μεταλλική λάμα τοποθετήθηκε με τη μικρή διάσταση κατά την κάθετη φορά, ως προς τον άξονα του δοκιμίου, διότι απαιτείται μικρό φορτίο για να υποστεί κάμψη. Στις δομικές πρέπει η μεγάλη διάσταση να είναι κάθετη στον άξονα, διότι δίδει μεγάλη τιμή στη ροπή αδρανείας της διατομής  $I_z$ , οπότε αναπτύσσεται μικρή ορθή τάση στο δοκίμιο.



Οι πειραματικές μετρήσεις που λάβαμε από το πείραμα αναγράφονται στον Πίνακα Π2-1.

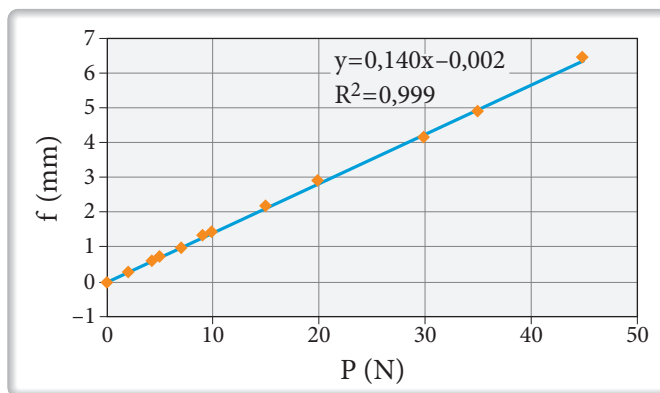
**Πίνακας Π2-1.** Πειραματικές μετρήσεις του βέλους κάμψης δοκού σε συνάρτηση του φορτίου.

<b>P(N)</b>	0	2	4	5	7	9	10	15	20	30	35	45
<b>f(mm)</b>	0	0,25	0,53	0,72	0,97	1,28	1,43	2,15	2,88	3,69	4,3	5,55



Εικόνα Π2-1. Πειραματική διάταξη δοκού υπό καθαρή κάμψη στο κεντρικό τμήμα της.

Το διάγραμμα βέλους κάμψης  $f$  vs. φορτίου  $P$  δείχνεται στο κάτωθι Σχ. Π2-3.



Σχ. Π2-3. Σχεδιασμός βέλους κάμψης  $f$  - Φορτίου  $P$  στη δοκό.

Τα πειραματικά δεδομένα σχεδιάστηκαν με το πρόγραμμα excel και τα σημεία προσομοιώθηκαν με βάση την ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων και η κλίση ισούται με: 0,1406 mm/N.

### Π2.2.3. Υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας $E$ , της υπό κάμψη χαλύβδινης δοκού

Από την εξίσωση (Π2-4) παρατηρούμε ότι η κλίση της ευθείας  $f$ - $P$  ισούται με:  $\alpha(3L^2 - 4a^2)/(24EI)$ . Αντικαθιστούμε τις τιμές για τις παραμέτρους  $\alpha$ ,  $L$ ,  $I$ , όπως υπολογίστηκαν ανωτέρω, οπότε η τιμή του μέτρου ελαστικότητας του χάλυβα είναι  **$E = 215 \text{ GPa}$** . Η τιμή αυτή αντιστοιχεί στο μέτρο ελαστικότητας  $E$ , χαλύβδινων δοκών και είναι πλησίον της τιμής που αναγράφεται στη βιβλιογραφία. Η τιμή του μέτρου ελαστικότητας  $E$ , εξαρτάται από τη χημική σύνθεση του χρησιμοποιούμενου χάλυβα για το πείραμα.

Παρατηρούμε ότι το πείραμα κάμψης μας προσδιορίζει με ακρίβεια το μέτρο ελαστικότητας του χάλυβα, χωρίς να ανατρέξουμε σε πειράματα εφελκυσμού όπου απαιτούνται ακριβές μηχανές εφελκυσμού, τύπου INSTRON, MTS ή άλλου τύπου.

### Θεωρητικός προσδιορισμός του βέλους κάμψης σε συμμετρικά φορτιζόμενη δοκό

Από την εξίσωση (Π2-5) υπολογίσαμε τις τιμές του βέλους κάμψης  $\delta^{(\theta_{\epsilon\omega\rho})}$  σε mm, συναρτήσε του φορτίου  $F(N)$  και βρήκαμε ότι:

$$\delta^{(\theta_{\epsilon\omega\rho})} = 0,145 F.$$

F(N)	0	2	4	5	7	9	10	15	20	30	35	45
$\delta^{(\pi\epsilon\iota\rho.)}$ (mm)	0	0,25	0,53	0,72	0,97	1,28	1,43	2,15	2,88	4,11	4,84	6,41
$\delta^{(\theta_{\epsilon\omega\rho})}$ (mm)	0	0,28	0,56	0,70	0,98	1,26	1,41	2,11	2,81	4,22	4,92	6,33

Από τα δεδομένα του πειράματος υπολογίζουμε τη μέγιστη ροπή  $M_{\max}$ , τη μέγιστη αξονική τάση  $\sigma_{\max}$ , και τη μέγιστη διατμητική τάση  $\tau_{\max}$ .

<b>F(N)</b>	0	2	4	5	7	9	10	15	20	30	35	45
<b><math>\delta^{(\text{πειρ.})}</math> (mm)</b>	0	0,25	0,53	0,72	0,97	1,28	1,43	2,15	2,88	4,11	4,84	6,41
<b><math>M_{\max}</math> (N mm)</b>	0	630	1260	1575	2205	2835	3150	4725	6300	9450	11025	14175
<b><math>\sigma_{\max}</math> (MPa)</b>	0	1,34	2,68	3,46	4,83	6,23	6,92	10,38	13,84	20,76	24,22	31,14
<b><math>\tau_{\max}</math> (kPa)</b>	0	9,0	18,0	22,5	31,5	40,5	45	67,5	90	135	157,5	202,5

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

1. Προσδιορίσαμε το μέτρο ελαστικότητας της χαλύβδινης δοκού και βρέθηκε  $E = 215 \text{ GPa}$ .
2. Προσδιορίσαμε τις μέγιστες τάσεις αξονικές και διατμητικές εντός του δοκιμίου για διαφορετικές φορτίσεις. Η επιτρεπτή τάση, στην αξονική διεύθυνση είναι  $\sigma_{\text{επ}} = \sigma_{\max} / \gamma$ , όπου  $\gamma$  παριστάνει τον συντελεστή ασφαλείας ( $\gamma = 1,15$  για χάλυβες), και  $\sigma_{\max}$  ισούται με το όριο διαρροής π.χ. για St45 ισούται με  $450 \text{ MPa}$ , οπότε το  $\sigma_{\text{επ}} = 391 \text{ MPa}$ . Παρατηρούμε ότι το  $\sigma_{\max}$  εντός του υλικού παραμένει πολύ μικρότερο από την επιτρεπόμενη τάση.

## Ευρετήριο όρων

- αδιάφορη ισορροπία, 218  
 ακαμψία της διατομής, 358  
 ακτίνα αδρανείας, 195, 218, 233  
   – περιστροφής της διατομής, 190  
   – περιστροφής, 208  
 ανάλυση κατασκευών στατικά αορίστων, 8  
 ανελαστική παραμόρφωση, 107  
 ανελαστική συμπεριφορά υλικών, vii  
 αντοχή σε εφελκυσμό, 67  
   – σε κόπωση, 12, 367  
   – στη φθορά, 362  
   – των Υλικών, 50, 55  
 αξονική θλίψη, 79  
 αξονική και διαμετρική παραμόρφωση, 84  
 αξονική φόρτιση, 31  
 αξονικό φορτίο, 193, 203  
 απόλυτη αντοχή, 6  
 απώλεια ακαμψίας, 198  
 αριθμός λυγιρότητας, 227  
   – λυγισμού, 227  
   – σκληρότητας, 255  
   – σκληρότητας Brinell, 238, 241  
 αρχή της ελάχιστης ενέργειας, 20  
   – της υπέρθεσης, 284  
   – των δυνατών έργων, 15  
 ασταθές ισορροπίας, 193  
 αστοχία από κόπωση, 381  
   – από ολίσθηση, 104  
   – λόγω θραύσης, 96  
   – λόγω κόπωσης, 267  
   – λόγω πλαστικής ροής, 95  
   – λυγισμού, 358  
   – σε λυγισμό, 193  
 ασυμπίεστα υλικά, 115  
 βαθμός λυγιρότητας, 196, 218, 219, 227, 233, 385, 386  
 βέλος κάμψης, 129, 131, 141, 223, 282, 366, 387  
 βέλος κάμψης αμφιέρεστης δοκού, 329  
   – – σε λυγισμό, 351, 352  
 βρόχος υστέρησης, 100  
 γραμμική αντίσταση στην παραμόρφωση, 165  
 γωνία διάτμησης, 153  
   – ολίσθησης, 173  
 γωνία στρέψης, 7, 153, 154, 163, 174, 175, 336, 346  
 γωνία συστροφής, 165, 173, 176, 178  
 δευτέρα ροπή του εμβαδού, 208  
 διάγραμμα στρέψης, 151  
 διαξονική ένταση, 87  
 διάρκεια ζωής της κόπωσης, 274  
 διαστασιολόγηση δομικών μελών, 63  
   – της διατομής, 227  
 διατμητικές τάσεις του κριτηρίου Tresca, 103  
 διατμητική δύναμη, 13, 117, 119, 150  
   – καταπόνηση, 62  
   – παραμόρφωση, 151  
   – τάση, 153, 154, 173, 178, 346  
   – φόρτιση, 279  
 δικτυωτές κατασκευές, 13  
 διπλή διάτμηση, 34  
 δοκιμή κόπωσης, 366  
 δομικοί χάλυβες άνθρακα, 170  
 δύναμη στρέψης, 333  
 δυναμική επαναλαμβανόμενη φόρτιση, 302  
 δυσκαμψία, 95

- εγκάρσια θλίψη, 78, 79  
 εκθέτης κράτυνσης, 315  
 εκκεντρο φορτίο, 193  
 εκκεντρότητα, 53  
 ελαστικές γραμμές, 6  
 ελαστική ακαμψία, 207
  - αστάθεια, 20
  - γραμμή, 13, 291
  - γραμμική, 55
  - ευστάθεια, 16, 21
  - κάμψη δοκού, 95
  - παραμόρφωση, 74
  - περιοχή, 54, 312
 ελαστικός λυγισμός της ράβδου, 354  
 ελαστικότητα, 250  
 ελαστοπλαστικά υλικά, 172  
 ελαστοπλαστική στρεπτική ροπή, 172  
 ελαστοπλαστικό, 168  
 ελατότητα, 250  
 ελάχιστη ροπή αδρανείας του δοκμίου, 384  
 εμπειρικός τύπος του Miner, 272  
 ενέργεια διάτμησης παραμόρφωσης, 92
  - παραμόρφωσης, 10
  - παραμόρφωσης στρέβλωσης, 18
 ενεργό μήκος, 192, 194, 206, 232
  - μήκος λυγισμού, 224
  - μήκος του στύλου, 208
  - φορτίο, 26
 εξίσωση Bessel, 212
  - στρεπτικής ισοροπίας, 389
  - του Euler, 190
 επικεντρωμένο κυβικό πλέγμα, 17  
 επιτρεπόμενες τάσεις σχεδιασμού, 198  
 επιτρεπόμενη θλιπτική τάση, 193
  - τάση, 195
  - τάση σύγκρισης, 99
 επιτρεπτές τάσεις, 19, 139  
 επιτρεπτή ορθή τάση, 28
  - σχεδιαστική τάση, 227
  - τάση, 33, 225
  - τάση διάτμησης, 168
  - τάση εφελκυσμού, 202
 επιφάνεια θραύσης, 268  
 επιφανειακή σκληρότητα Rockwell, 361  
 έργο μεταβολής όγκου, 100
  - παραμορφώσεων, 100
 έργο στροφικής παραμόρφωσης, 100  
 εργοσκληρυνση, 96  
 ερπυσμός, 96  
 ευστάθεια του στύλου, 185  
 εφαπτομενικό μέτρο ελαστικότητας, 84, 385, 386  
 εφελκυσμός, 6  
 εφελκυστική αντοχή, 52, 241, 323  
 ζώνη ολιγοκυκλικής κόπωσης, 275  
 ζώνη της πολυκυκλικής φόρτισης, 275  
 θερμοελαστικές ιδιότητες, 17  
 θεώρημα ροπών - εμβადών, 327  
 θεωρία Guest ή Tresca, 91
  - Hecky and Von Mises, 91
  - Saint Venant, 91
  - von Mises, 103
  - ελαστικότητας, 19, 50
  - Ελαστικότητας, 50
  - κάμψης καμπύλων ράβδων, 8
  - μέγιστης ενέργειας παραμόρφωσης, 92
 θεωρία οκταεδρικής διατμητικής τάσης, 115
  - πλακών, 14
  - της ελαστικότητας, 9
  - της μέγιστης διατμητικής τάσης, 104
  - του Haigh, 91
  - του Rankine, 91
 θλιπτική αντοχή, 182
  - τάση, 190
 θλίψη, 6  
 θραύση ψαθυρών υλικών, 17  
 θραυστομηχανική, 97  
 ισοδύναμη τάση, 100, 111  
 ισοδύναμο μήκος, 204  
 ισοστατική ένταση, 338  
 ισοστατικό, 130  
 ισότροπο υλικό, 222

- καθαρή διάτμηση, 112, 113, 163, 164
- κάμψη, 143, 145
  - κάμψη της δοκού, 326
- καθαρή στρέψη, 163, 171
- καμπτική ροπή, 8, 13, 117, 119, 182, 186
- στιβαρότητα, 10, 15
- Καμπτικός-στρεπτικός λυγισμός, 357
- κάμπτο-στρεπτικός λυγισμός, 207
- καμπύλη Wöhler, 383
- λυγισμού, 217
- κάμψη, 6
- δοκών, 7
- κατάσταση επίπεδης τάσης, 110
- κέντρο βάρους, 124
- κίνδυνος αστάθειας, 59
- κινούμενα φορτία, 13
- κλίμακα Brinell, 240
- κόπωση, 267
- του υλικού, 25
  - των μεταλλικών υλικών, 12
- κρίσιμη τάση λυγισμού, 205, 206, 218
- κρίσιμο φορτίο, 184, 187, 188-191, 193, 194, 200, 347, 351
- κρίσιμο φορτίο λυγισμού, 189, 217, 218, 356, 358
- κριτήρια διαστασιολόγησης, 73
- αστοχίας του Hashin , 105
- κριτήριο αντοχής, 11, 18
- διαρροής, 207
  - ισοδύναμης τάσης von Mises, 100
  - μέγιστης διατμητικής τάσης, 96, 389
  - μέγιστης ορθής τάσης, 389
  - στροφικής ενέργειας, 96
- κύκλοι κόπωσης, 12
- φόρτισης, 270
- κύκλος του Mohr, 15, 36
- λόγος λεπτότητας, 190, 208
- λεπτότητας  $\lambda$ , 191
  - λυγιρότητας, 14, 16
- λυγιρότητα, 192, 195
- λυγισμός, 6, 181, 185, 188, 189, 357, 358
- Euler, 198
  - μεταλλικών δοκών, 347
  - ράβδων, 14
- μαλακός χάλυβας, 170
- μέγιστες ορθές τάσεις, 42, 123
- μέγιστη διατμητική τάση, 46, 107, 172, 335
- διατμητική τάση (Tresca), 104
  - ελαστική συστροφή, 171
  - εφελκυστική τάση, 365
  - καμπτική ροπή, 148
  - κύρια τάση, 107, 114
  - ορθή τάση, 326, 46, 101, 104
  - ροπή κάμψης, 139
- μέθοδος Brinell, 238, 364
- Leeb, 260
  - Myosotis, 127, 141, 279
  - Rockwell, 243, 364
  - Shore, 260
  - Vickers, 253
  - δοκιμής Rockwell, 361
  - σκληρότητας Rockwell, 360
- μέση οριακή αντοχή σε θλίψη και εφελκυσμό, 89
- μέτρο Ανθεκτικότητας, 318
- μέτρο διάτμησης, 151, 158, 164, 168, 176, 343, 377
- μέτρο διάτμησης G, 340
- διάτμησης του υλικού, 377
  - ελαστικής ανάπαλσης UR, 316
  - ελαστικότητας, 13, 16, 55, 193
  - λυγισμού T, 223
  - σκληρότητας, 317
  - της ακαμψίας, 165
- μετρούμενη τάση διαρροής, 111
- μη γραμμικά υλικά, vii
- μήκη λυγισμού, 220
- μήκος λυγισμού ράβδου, 218
- μηχανή περιστρεφόμενου προβόλου, 367
- μονοαξονική εντατική κατάσταση, 103
- νόμος θερμικής παραμόρφωσης, 72
- ξαφνική ψαθυρή θραύση, 97

- ολιγοκυκλική κόπωση, 268
- ολική ενέργεια παραμόρφωσης, 18
- ολική στρεπτική ενέργεια παραμόρφωσης, 165, 166
- όλκιμα υλικά, 17, 18, 25, 93, 169
- όλκιμη θραύση, 97
- όλκιμη παραμόρφωση, 82
- όλκιμο υλικό, 157
- ολκιμότητα, 250, 313, 362
- ομογενές υλικό, 222
- ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο, 283
- ομοιόμορφη κατανομή φορτίου, 295
- ονομαστικό εμβαδόν έδρασης, 28
- οπλισμός προέντασης, 56
- ορθή παραμόρφωση, 72
  - τάση, 31
- οριακή αντοχή, 23
  - - σε διάτμηση, 24
- οριακή ενέργεια παραμόρφωσης, 93
  - ορθή τάση, 23
  - τάση, 25
- οριακό φορτίο, 23, 26
- όριο αναλογίας, 158, 346
  - ανοχής, 18
  - αντοχής, 192
- όριο διαρροής, 52, 53, 67, 96, 168, 169, 172, 270, 323, 346
- όριο διαρροής, 100
  - διαρροής ελαστοπλαστικού υλικού, 168
  - διαρροής σε εφελκυσμό και θλίψη, 309
  - διατμητικής αντοχής, 102
  - ελαστικότητας τάσης, 267
  - θραύσης, 23, 323
  - καταστροφικής αστοχίας, 53, 169
- παραμένουσα παραμόρφωση, 55
- παραμένουσες τάσεις, 25, 193
- πείραμα κόπωσης, 378
- περιβάλλουσα αστοχία, 115
- περιβάλλουσα επιφάνεια αστοχίας, 115
- πλαστικές παραμορφώσεις, 102
- πλαστική παραμόρφωση, 17, 52, 74, 95, 260, 312
- πλαστική ροή, 96
- πλαστικός λυγισμός, 222
- πλαστικότητα, 191, 250
- πλευρικός-στρεπτικός λυγισμός, 357
- πολική αδράνεια διατομής, 346
- πολική ροπή αδρανείας, 154, 165, 175, 343, 344, 377
- πολική ροπή αδρανείας, ix, 344
  - ροπή αδρανείας επιφανείας, 153
- πολυαξονική ή πραγματική τριαξονική ένταση, 87
- πολυκυκλική κόπωση, 268
- πραγματική ειδική παραμόρφωση, 314
- πυκνότητα της ενέργειας παραμόρφωσης, 163
- πυρηνικό εύρος, 225
- ροπή αδρανείας, 189, 233
  - αδρανείας διατομής, 185
  - αδράνειας επιφάνειας, 194
  - αδρανείας I, κυλοδοκού, 375
  - αδράνειας κυλινδρικής διατομής, 366
  - αδρανείας της διατομής, 6
  - αδρανείας της επιφανείας, 125, 326
  - αντίστασης της διατομής, 327
  - διαρροής, 171
  - κάμψης, 6, 117, 143, 182, 286
  - λυγισμού, 211
- ροπή στρέψης, 7, 154, 158, 161, 165, 166, 171, 176, 177, 334, 377
- ροπή στρέψης  $M_t$ , 335
  - συστροφής, 176
- σημεία καμψής, 194
- σημείο διαρροής, 9, 72
- σκληρόμετρα Rockwell, 243, 362
- σκληρότητα Brinell, 238
  - του μετάλλου, 237
  - Rockwell, 363
- στατικά αόριστη, 8
  - φορτία, 35
- στατική εκτροπή, 13
- στιβαρότητα, 139

- στιβαρότητας γινόμενο, 132  
στρεπτική διατμητική τάση, 176  
στρεπτική ροπή, 166, 174
  - ροπή αδρανείας, 173στρεπτική ροπή διαρροής, 171
  - στιβαρότητα, 7, 155στρέψη, 7, 151, 333
  - δοκού, 337
  - ράβδων, 20στροφικές ταλαντώσεις, 7  
στροφική δέσμευση, 194  
συμβατική αντοχή σε κόπωση, 275
  - τάση, 315
  - τάση θραύσης, 308συμβατικό όριο διαρροής, 312, 316  
συμπληρωματική ενέργεια, 16  
συνθήκες στατικής ισορροπίας, 117  
συνθήκη αδιαβατική, 16
  - διαρροής, 18, 104συντελεστές γραμμικής διαστολής, 72
  - ελαστικότητας, 165
  - φορτίου, 26συντελεστής ακαμψίας, 345  
συντελεστής αντίστασης, 26
  - ασφαλείας, 25, 52, 150, 168, 192, 203
  - διάτμησης, 164, 165
  - διατομής, 228
  - ενεργού μήκους μέλους, 194
  - HB (σκληρότητας κατά Brinell), 359
  - λυγιρότητας, 385
  - σκληρότητας, 241
  - στιβαρότητας, 189συσσκευή Brinell, 364
  - Rockwell, 362σύστημα διαξονικής τάσης, 93, 114  
συστροφή, 174  
ταλαντώσεις αξονικές, 10
  - εγκάρσιες, 10
  - κρεμαστών γεφυρών, 9
  - στρεπτικές, 10τανυστής αποκλίνουσας τάσης, 111  
τάσεις διαξονικές ή τριαξονικές, 91  
τάσεις διατμητικές, 12  
τάσεις ορθές, 12  
τάση διαρροής, 18, 55, 82, 112, 150, 190, 196, 197, 221, 358, 382  
τάση διαρροής, 56
  - έδρασης, 34
  - ή όριο κόπωσης, 370
  - λυγισμού, 225
  - σύνθλιψης, 63τελική αντοχή, 6, 192
  - τάση θραύσης, 192τεχνική επιφάνειας-ροπής, 11  
τιμή σκληρότητας Rockwell, 360  
τριαξονική εντατική κατάσταση, 103
  - θλίψη, 88υδροστατική εντατική κατάσταση, 103  
υπέρθυση και συμβατότητα, 283  
φορτίο λειτουργίας, 24
  - λυγισμού, 189, 200, 352
  - σχεδίασης, 24φωτοελαστική μέθοδος, 19  
ψαθυρά υλικά, 25, 169  
ψαθυρή αστοχία, 53
  - θραύση, 18, 82ψαθυρό υλικό, 157  
ψυχρή έλαση, 170





Ο Δρ Παναγιώτης Κακαβάς-Παπανιάρως δίδαξε πολλά έτη μαθήματα Αντοχής των Υλικών, Τεχνολογία Δομικών Υλικών, Φυσική, Μαθηματικά, Πολυμερή και Σύνθετα Υλικά στο Πανεπιστήμιο της Νότιας Καλιφόρνιας (University of Southern California) στο Los Angeles, ως βοηθός καθηγητών τα πρώτα έτη των μεταπτυχιακών του σπουδών και αργότερα ως Λέκτορας καθηγητής στο CALSTATE Los Angeles. Είναι κάτοχος πτυχίου Φυσικού (άριστα) από το ΑΠΘ και δίπλωμα Χημικού Μηχανικού (με έπαινο) από το Πανεπιστήμιο Πατρών.

Μετά το πέρας των μεταπτυχιακών σπουδών στο USC (PhD και MSc Χημικός Μηχανικός, MSc Φυσικός και MSc Εφαρμοσμένα μαθηματικά επέστρεψε στην Ελλάδα και εργάστηκε ως μεταδιδακτορικός στο Πολυτεχνείο Πατρών, τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών και Αεροναυπηγών στο τομέα των υλικών. Κατόπιν εργάστηκε ως καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Πελοποννήσου (πρ. ΤΕΙ Δυτικής Ελλάδος) διδάσκοντας μαθήματα Αντοχής των Υλικών, Τεχνολογία Δομήσιμων Υλικών, Μαθηματικά, Φυσική, Ενεργειακός σχεδιασμός κτιρίων κ.λ.π. Έχει δημοσιεύσει πολλά θεωρητικά και πειραματικά άρθρα στον τομέα των Υλικών Δόμησης σε επιστημονικά περιοδικά. Ασχολείται με την εφαρμογή των Πεπερασμένων Στοιχείων για τον σχεδιασμό και χαρακτηρισμό των κατασκευαστικών υλικών.

Έχει δημοσιεύσει δύο ακόμη βιβλία με τίτλο: *Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων* (εκδ Τζιόλα 2015) και *Τεχνολογία Δομικών Υλικών* (εκδ. Ζήτη 2023)