Δημήτριος Γ. Κωνσταντινίδης
Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Εισαγωγή στα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Επικοινωνία με τον συγγραφέα:
konstant@aegean.gr

Ιστοσελίδα
samos.aegean.gr/actuar/konstant/

ISBN 978-960-456-605-1

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια Ι.Κ.Ε.
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ:
Χαριλάου Τρικούπη 22, 106 79 Αθήνα
Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό γράφτηκε για να βοηθήσει τους φοιτητές του Α΄ εξαμήνου στο Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών, που παρακολούθησαν το μάθημα Εισαγωγή στα Χρηματοοικονομικά. Η δυσκολία στην επιλογή του υλικού συνίσταται στην αναζήτηση ισορροπίας μεταξύ ενός τεράστιου όγκου γνώσεων, που συσσωρεύτηκαν σε αυτό το αντικείμενο τις τελευταίες δεκαετίες, και της πιεστικής ανάγκης των φοιτητών να έχουν ένα σύντομο και κατανοητό εγχειρίδιο, που θα τους επιτρέψει μέσα σε ελάχιστο χρόνο να αφομοιώσουν τις ιδέες της στοχαστικής μοντελοποίησης και να ανταποκριθούν επιτυχώς στις εξετάσεις. Η πρόκληση αυτή γίνεται ακόμα πιο απαιτητική, εάν συνυπολογίσουμε τις παρόμοιες δυσκολίες που συνόδευσαν τις προηγούμενες παρόμοιες απόπειρες στα πλαίσια της εθνικής βιβλιογραφίας.

Το υλικό παρουσιάζεται σε λογική σειρά. Δηλαδή αρχίζει με τις απλούστερες έννοιες και δομές και σταδιακά εμπλουτίζεται σε πιο σύνθετες. Έγινε προσπάθεια να διατηρηθεί η αυτοδυναμία του κειμένου με την έννοια να συμπεριληφθούν όσον το δυνατό περισσότερα επιχειρήματα και αποδείξεις, που να ελαχιστοποιούν τις παραπομπές και αναφορές σε άλλες πηγές.

Τα παραδείγματα περιορίστηκαν σε αριθμό και βάθος με σκοπό να λειτουργούν σαν διευκρινίσεις της θεωρίας και όχι σαν πεδίο περαιτέρω εξάσκησης. Για τους αναγνώστες με αυξημένες απαιτήσεις δίνεται ένα ελάχιστο δείγμα της διεθνούς βιβλιογραφίας στο τέλος του κειμένου.

Στην προσπάθεια αυτή με βοήθησαν, αρκετοί φοιτητές του Τμήματος Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών, που παρακολουθούσαν τις παραδόσεις και κάνανε ερωτήσεις και θα ήθελα με την ευκαιρία αυτή να τους εκφράσω τις ειλικρινείς ευχαριστίες μου. Επίσης επιθυμώ να εκφράσω τις ευχαριστίες μου προς τους συναδέλφους του Τμήματος, με τις συμβουλές και την ενθάρρυνση των οποίων κατέστη δυνατή η ολοκλήρωση του πονήματος. Τέλος, θέλω ειδικότερα να επισημάνω τις εύστοχες παρατηρήσεις και προτάσεις συναδέλφων που έδωσαν μια καθοριστική βοήθεια στη βελτίωση του βιβλίου.

Σάμος, 24 Ιανουαρίου 2023
Δημήτριος Γ. Κωνσταντινίδης

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Εξετάζουμε το ρόλο των χρηματοοικονομικών στη σύγχρονη οικονομική πραγματικότητα. Πολλές ιδέες πηγάζουν από απλές πρακτικές ανάγκες που ζούμε καθημερινά. Ωστόσο δεν έχουν ακόμη παρουσιασθεί σαν εργαλείο οικονομικής ανάπτυξης και κοινωνικής ευημερίας.

1.1 Χρηματοοικονομικός εγκλεισμός

Ο **χρηματοοικονομικός εγκλεισμός** αναφέρεται στην δυνατότητα αξιοποίησης χρηματοοικονομικών υπηρεσιών για την προώθηση της οικονομικής ανάπτυξης και την καταπολέμηση της φτώχειας. Ο χρηματοοικονομικός εγκλεισμός θα πρέπει ενθαρρύνεται και από το κράτος, καθώς αποτελεί το μέσο που εξασφαλίζει την αύξηση της οικονομικής ευημερίας.

Γενικά υπάρχουν τρεις άξονες στον χρηματοοικονομικό εγκλεισμό. Αυτοί είναι η χρησιμοποίηση, η πρόσβαση και οι περιορισμοί.

Η **χρησιμοποίηση** προϋποθέτει κάποιο χρηματοοικονομικό προϊόν, όπως αξιόγραφα, δάνεια, τραπεζικές διευκολύνσεις, που θα αποτελέσει το όχημα για παραγωγή κερδών.

Η **πρόσβαση** γίνεται είτε με φυσική παρουσία σε κάποιο τραπεζικό κατάστημα ή με την δυνατότητα χρήσης ηλεκτρονικών μέσων συναλλαγής όπως τα ATM, e-banking, κ.λ.π. για την χρησιμοποίηση των χρηματοοικονομικών υπηρεσιών.

Οι **περιορισμοί** αφορούν τις δυνατότητες χρήσης αυτών των υπηρεσιών, έχοντας υπόψη την διαδικασία ταυτοποίησης, την απόσταση που μπορεί να μας χωρίζει και την τραπεζική πίστη που απαιτείται.

Ειδικότερα η **ψηφιακή τεχνολογία** ανοίγει νέες προοπτικές για τον χρηματοοικονομικό εγκλεισμό. Η επιδίωξη είναι να δοθούν στον οικονομικά ενεργό πληθυσμό γρήγορες, φθηνές και προσβάσιμες χρηματοοικονομικές υπηρεσίες. Μια τέτοια μορφή ψηφιοποίησης αποτελεί το πλαστικό χρήμα όπως και οι συναλλαγές μέσω κινητού. Φυσικά αυτές οι ψηφιακές δυνατότητες αγκαλιάζουν γρηγορότερα το σχετικά εύπορο κομμάτι της κοινωνίας.

Η φτώχεια και η άγνοια γύρω από τις **χρηματοοικονομικές υπηρεσίες** αποτελούν ένα σημαντικό εμπόδιο στην πρόσβαση του πληθυσμού σε χρηματοοικονομικές δυνατότητες. Ο **χρηματοοικονομικός αλφαβητισμός** είναι η απόκτηση γνώσεων πάνω σε βασικές έννοιες των χρηματοοικονομικών που να επιτρέπουν πρόσβαση στις χρηματοοικονομικές πηγές. Ο χρηματοοικονομικός αλφαβητισμός βοηθάει να αποκτηθούν δεξιότητες που είναι απαραίτητες για να γίνονται οι οποιεσδήποτε χρηματοοικονομικές συναλλαγές αποδοτικές.

Ωστόσο, η γνώσεις σε θέματα χρηματαγοράς σε συνδυασμό με τις πρακτικές εμπειρίες, δεν εξασφαλίζουν μόνο την δυνατότητα να παίρνονται **χρηματοπιστωτικές πρωτοβουλίες** αλλά και να αναζητούνται επενδυτικές ευκαιρίες.

Εξετάζοντας πως ο χρηματοοικονομικός αλφαβητισμός ανοίγει δρόμο για τον χρηματοοικονομικό εγκλεισμό και την οικονομικής ανάπτυξη, οι κυβερνήσεις ενθαρρύνουν τον δανεισμό των νοικοκυριών και επιχειρήσεων όταν αυτός μπορεί να φέρει θετικά οικονομικά αποτελέσματα.

Επομένως το κρίσιμο ερώτημα είναι κατά πόσο οι δανειολήπτες μπορούν να εξασφαλίζουν κερδοφορία. Αυτό είναι σημαντικό μέρος του χρηματοοικονομικού αλφαβητισμού. Άρα, πρέπει να εξετάσουμε πως ο χρηματοοικονομικός εγκλεισμός συνδέεται με την βιώσιμη ανάπτυξη. Μερικές φορές παρατηρείται σύνδεση του χρηματοοικονομικού εγκλεισμού με την **δυνατότητα δανεισμού**. Έτσι μακροπρόθεσμα δημιουργούνται ευκαιρίες απασχόλησης και ενισχύεται η οικονομική σταθερότητα. Μάλιστα ο χρηματοοικονομικός εγκλεισμός καθιστά απαραίτητο τον χρηματοοικονομικό αλφαβητισμό και απαιτεί ψηφιακή τεχνολογία.

Το κύριο επιχείρημα στον χρηματοοικονομικό εγκλεισμό είναι ότι οι συγκροτημένες χρηματοοικονομικές μονάδες βοηθούν την κοινωνία να καταπολεμήσει την φτώχεια με ενθάρρυνση της οικονομικής ανάπτυξης. Για παράδειγμα οι χρηματοοικονομικά εγκλεισμένοι αγρότες μπορούν να κάνουν περισσότερες επενδύσεις ώστε να αυξήσουν το εισόδημα τους και να προσφέρουν καλύτερα προϊόντα.

Ο χρηματοοικονομικός αλφαβητισμός τους επιτρέπει να αξιοποιήσουν **ασφαλιστικά συμβόλαια** για να προστατέψουν την παραγωγή τους από φυσικές καταστροφές. Επομένως ο χρηματοοικονομικός αλφαβητισμός στηρίζει τον **χρηματοοικονομικό προγραμματισμό** και είναι απαραίτητος για τη λήψη αποτελεσματικών χρηματοοικονομικών αποφάσεων. Ειδικότερα φαίνεται να παίζει κρίσιμο ρόλο στη **διαχείριση του δανεισμού**. Μάλιστα έχει παρατηρηθεί ότι τα άτομα, με επαρκείς γνώσεις χρηματοοικονομικών, γνωρίζουν καλύτερα πως να δημιουργήσουν, να ξοδέψουν, να επενδύσουν και να αποταμιεύσουν τα χρήματα τους.

Από την άλλη μεριά ένα χαμηλό επίπεδο **χρηματοοικονομικών δεξιοτήτων** συνδέεται με χαμηλό επίπεδο χρηματοοικονομικού εγκλεισμού, και μάλιστα αυτό ισχύει για κάθε οικονομία. Τέλος ο χρηματοοικονομικός αλφαβητισμός είναι διαμεσολαβητής μεταξύ των μέσων κοινωνικής δικτύωσης και χρηματοοικονομικού εγκλεισμού.

Αξίζει να σημειωθεί η το αποτέλεσμα της διαμεσολάβησης του χρηματοοικονομικού αλφαβητισμού μεταξύ των χρηματοοικονομικών παραγόντων και της βιώσιμης ανάπτυξης. Η συνεχής ενασχόληση με τις χρηματοοικονομικές δυνατότητες δημιουργούν καλύτερες προϋποθέσεις βιώσιμης ανάπτυξης, καθώς περισσότερες οικονομικές δραστηριότητες αποκτούν **ευστάθεια** και βιωσιμότητα και επομένως είναι σε θέση να αντιμετωπίσουν τον επιχειρηματικό ανταγωνισμό.

1.2 Χρηματοοικονομικές πρωτοβουλίες

Οι χρηματοοικονομικές πρωτοβουλίες έχουν στόχο την μακροπρόθεσμη, συνολική και **βιώσιμη ανάπτυξη**, πλήρη και παραγωγική απασχόληση και **αξιοπρεπή εργασία** για τον οποιοδήποτε ανεξάρτητα από την προέλευση του. Για αυτό το σκοπό χρειάζονται χρηματοοικονομική υποστήριξη σε μικρές χρήσιμες οικονομικές μονάδες και ειδικότερα αυτές που δεν έχουν πρόσβαση το στο **τραπεζοπιστωτικό σύστημα**.

Έτσι έχουμε στη διάθεση μας **μικροχρηματοοικονομικές δραστηριότητες** που είναι προσανατολισμένες να καλύπτουν μικρούς επενδυτές. Για παράδειγμα ένας φοιτητής μπορεί να ζητήσει φοιτητικό δάνειο που θα το αποπληρώσει μετά το πέρας των σπουδών του.

Οι χρηματοοικονομικές πρωτοβουλίες ενισχύονται από τεχνολογικές διευκολύνσεις όπως είναι η χρήση **τραπεζικών υπηρεσιών** μέσω κινητού, είτε μέσω πρόσβασης σε ATM και άλλες δυνατότητες. Γενικά οι χρηματοοικονομικές πρωτοβουλίες κινούνται πάλι σε τρεις άξονες. Στην χρήση, στην πρόσβαση και στους περιορισμούς. Η χρήση καλύπτεται από κατοχή χρεογράφων, άνοιγμα λογαριασμού αποταμίευσης και δυνατότητα δανεισμού. Η πρόσβαση ικανοποιείται μέσω των ATM και άλλων ψηφιακών τραπεζικών συναλλαγών και υπηρεσιών. Οι περιορισμοί σχετίζονται με την ταυτοποίηση, τον έλεγχο προϋποθέσεων και νομιμοποιήσεων, την δυνατότητα από απόσταση συναλλαγών καθώς και ζητήματα τραπεζικής πίστης. Ειδικότερα, μεγάλη ώθηση στις χρηματοοικονομικές πρωτοβουλίες έφερε η ψηφιακή οργάνωση του τραπεζοπιστωτικού συστήματος.

Η καταπολέμηση των διακρίσεων στη χρήση και στην πρόσβαση στο χρηματοπιστωτικό σύστημα αναδεικνύεται σαν ένας σημαντικός παράγοντας ανάπτυξης. Τα φτωχά και ευάλωτα νοικοκυριά μπορούν να έχουν ίσες δυνατότητες δανεισμού και γενικότερα δυνατότητες χρησιμοποίησης των χρηματοοικονομικών υπηρεσιών που είχαν ήδη τα πλούσια νοικοκυριά.

Επίσης η υστέρηση των γυναικών στην πρόσβαση στις χρηματοοικονομικές δυνατότητες μπορεί και πρέπει να ξεπεραστεί. Γενικά η ιδέα είναι ότι οι ίσες χρηματοοικονομικές ευκαιρίες για όλες τις εισοδηματικές ομάδες επιταχύνει την βιώσιμη ανάπτυξη.

Ο απλούστερος τρόπος **επενδυτικής πρωτοβουλίας** είναι ο τοκισμός. Το **επιτόκιο** αναφέρεται σαν ποσοστό τόκου σε μία βασική χρονική μονάδα. Για παράδειγμα, όταν έχουμε ετήσιο επιτόκιο 4%, η χρονική μονάδα είναι το έτος. Επιπλέον προσδιορίζεται και η **περίοδος ανατοκισμού**, δηλαδή το χρονικό διάστημα μετά το τέλος του οποίου ο τόκος ενσωματώνεται στο κεφάλαιο. Ένα επιτόκιο λέγεται **πραγματικό** εάν η βασική χρονική μονάδα και η περίοδος ανατοκισμού είναι ίσες. Στην περίπτωση που ο τόκος της ενσωματώνεται στο κεφάλαιο στο τέλος της περιόδου, ονομάζεται **ληξιπρόθεσμο**. Έστω i το ετήσιο πραγματικό ληξιπρόθεσμο επιτόκιο, που διατηρείται σταθερό για όλα τα έτη. Θεωρούμε τον λογαριασμό όπου επενδύεται το αρχικό κεφάλαιο U_0 και στο τέλος του έτους k κατατίθεται ένα επιπλέον ποσό w_k, για $k = 1, 2, \ldots, n$. Ποιο θα είναι το πλεόνασμα στο τέλος του έτους n; Ας συμβολίσουμε με U_k το πλεόνασμα στο τέλος του έτους k, συμπεριλαμβανομένου του ποσού της κατάθεσης w_k. Ο τόκος από το προηγούμενο έτος είναι $i\,U_{k-1}$. Επομένως ισχύει

$$U_k = U_{k-1} + i\,U_{k-1} + w_k\,, \tag{1.2.1}$$

για $k = 1, 2, \ldots, n$. Η σχέση αυτή μας οδηγεί στον αναγωγικό τύπο

$$U_k - (1+i)\, U_{k-1} = w_k\,, \tag{1.2.2}$$

απ΄ όπου, πολλαπλασιάζοντας με $(1+i)^{n-k}$ και προσθέτοντας για όλα τα k, παίρνουμε τελικά

$$U_n = (1+i)^n\, U_0 + \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{n-k}\, w_k\,. \tag{1.2.3}$$

Οι δυνάμεις του $(1+i)$ ονομάζονται **συντελεστές συσσώρευσης**. Το συνολικό ποσό που παράγει το αρχικό κεφάλαιο C μετά από n έτη είναι ίσο με $(1+i)^n\, C$. Η εξίσωση (1.2.3) ερμηνεύεται ως εξής:

Το συνολικό κεφάλαιο στο τέλος του χρονικού διαστήματος ισούται με το ανατοκισμένο αρχικό κεφάλαιο συν το άθροισμα των ανατοκισμένων ενδιάμεσων καταθέσεων.

Ο **συντελεστής προεξόφλησης** ορίζεται σαν

$$v = \frac{1}{1+i}\,. \tag{1.2.4}$$

Η εξίσωση (1.2.3) μπορεί να γραφτεί τώρα ως εξής:

$$v^n\, U_n = U_0 + \sum_{k=1}^{n} v^k\, w_k\,.$$

Έτσι, η παρούσα αξία κάποιου κεφαλαίου C οφειλόμενου τη στιγμή n είναι ίση με $v^n\, C$.

Γράφοντας την εξίσωση (1.2.1) στη μορφή $U_k - U_{k-1} = i\, U_{k-1} + w_k$ και προσθέτοντας για όλα τα k, βρίσκουμε

$$U_n - U_0 = \sum_{k=1}^{n} i\, U_{k-1} + \sum_{k=1}^{n} w_k\,.$$

Δηλαδή η προσαύξηση της επένδυσης είναι το άθροισμα του συνολικού τόκου και των συνολικών καταθέσεων.

1.3 Σύνθετος τόκος

Στην περίπτωση που η περίοδος ανατοκισμού δεν συμπίπτει με τη βασική χρονική μονάδα, το επιτόκιο ονομάζεται **ονομαστικό**. Ένα ετήσιο επιτόκιο στο 6% με περίοδο ανατοκισμού τρεις μήνες, σημαίνει ότι ο τόκος που πιστώνεται είναι $6\%/4 = 1.5\%$ για κάθε τρίμηνο. Επομένως με αρχική κατάθεση 1 έχουμε τελικά $(1.015)^4 = 1.06136$ στο τέλος του έτους. Δηλαδή ένα ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 6% με τριμηνιαίο ανατοκισμό ισοδυναμεί με ετήσιο πραγματικό επιτόκιο 6.136%.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε ετήσιο πραγματικό ληξιπρόθεσμο επιτόκιο ίσο με i. Ορίζουμε σαν $i^{(m)}$ το ονομαστικό επιτόκιο, που ανατοκισμένο m φορές το χρόνο ισοδυναμεί με το επιτόκιο i. Η ισότητα των συντελεστών συσσώρευσης για ένα έτος οδηγεί στην εξίσωση

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = 1 + i\,, \tag{1.3.1}$$

που δίνει

$$i^{(m)} = m\left[(1+i)^{1/m} - 1\right]. \tag{1.3.2}$$

Αν πάρουμε το όριο για $m \to \infty$, προκύπτει το μοντέλο συνεχούς ανατοκισμού. Πράγματι, έστω

$$r = \lim_{m\to\infty} i^{(m)} \tag{1.3.3}$$

ο **ρυθμός τοκισμού** που ισοδυναμεί με το πραγματικό ληξιπρόθεσμο επιτόκιο i. Γράφοντας τη σχέση (1.3.2) στη μορφή

$$i^{(m)} = \frac{(1+i)^{1/m} - (1+i)^0}{1/m}\,, \tag{1.3.4}$$

βλέπουμε ότι ο ρυθμός r είναι η παράγωγος της συνάρτησης $(1+i)^x$ στο σημείο $x = 0$. Έτσι βρίσκουμε ότι

$$r = \ln(1+i)\,, \tag{1.3.5}$$

ή ισοδύναμα $e^r = 1+i$. Αυτό το αποτέλεσμα συμφωνεί με τη σχέση (1.3.1) εάν πάρουμε το όριο για $m \to \infty$ και λάβουμε υπ′ όψιν τον ορισμό (1.3.3).

Επομένως ο συντελεστής συσσώρευσης για μια περίοδο n ετών ισούται με $(1+i)^n = e^{rn}$, ενώ ο συντελεστής προεξόφλησης για την ίδια περίοδο ισούται με $v^n = e^{-rn}$. Εδώ, σαν μήκος της περιόδου, παίρνουμε κάποιον πραγματικό αριθμό.

Διαισθητικά φαίνεται ότι το ονομαστικό επιτόκιο $i^{(m)}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του m. Μπορούμε να δώσουμε μια αυστηρή απόδειξη, ερμηνεύοντας το επιτόκιο $i^{(m)}$ σαν την κλίση της τέμνουσας (βλέπε (1.3.4)) και

m	$i^{(m)}$
1	0.06000
2	0.05913
3	0.05884
4	0.05870
6	0.05855
12	0.05841
∞	0.05827

Πίνακας 1.1: Ονομαστικό επιτόκιο σαν φθίνουσα συνάρτηση του m.

χρησιμοποιώντας την κυρτότητα της συνάρτησης $(1+i)^x$. Η ακόλουθη αριθμητική εφαρμογή για $i = 6\%$, είναι από το [21, σελ. 3].

Θεωρούμε μια συνεχή διαδικασία κατάθεσης σε λογαριασμό με στιγμιαίο ρυθμό καταθέσεων ίσο με $w(t)$. Οπότε το ποσό που κατατίθεται στον λογαριασμό κατά το απειροστό χρονικό διάστημα μεταξύ t και $t+dt$ είναι ίσο με $w(t)\,dt$. Έστω $U(t)$ το υπόλοιπο του λογαριασμού τη στιγμή t. Υποθέτουμε ότι ο τόκος πιστώνεται συνεχώς σύμφωνα με τον ρυθμό τοκισμού $r(t)$, που ενδεχομένως εξαρτάται από τον χρόνο. Ο τόκος, που πιστώνεται στο απειροστό χρονικό διάστημα μεταξύ t και $t+dt$, είναι ίσος με $U(t)\,r(t)\,dt$. Η συνολική προσαύξηση του κεφαλαίου σε αυτό το διάστημα είναι $U(dt) = U(t)\,r(t)\,dt + w(t)\,dt$. Για να λύσουμε την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση $U^{'}(t) = U(t)\,r(t) + w(t)$, γράφουμε

$$\frac{d}{dt}\left[\exp\left\{-\int_0^t r(s)\,ds\right\}\,U(t)\right] = \exp\left\{-\int_0^t r(s)\,ds\right\}\,w(t)\,.$$

Μετά από ολοκλήρωση ως προς t πάνω στο διάστημα $[0,\,n]$, παίρνουμε

$$\exp\left\{-\int_0^n r(s)\,ds\right\}U(n) - U(0) = \int_0^n \exp\left\{-\int_0^t r(s)\,ds\right\}w(t)dt\,. \tag{1.3.6}$$

Επομένως η **παρούσα αξία** κατά τη στιγμή 0 της κατάθεσης κάποιου ποσού τη στιγμή t βρίσκεται εάν πολλαπλασιάσουμε το ποσό αυτό με τον παράγοντα

$$\exp\left\{-\int_0^t r(s)\,ds\right\}\,,$$

που αντιστοιχεί στον συντελεστή συσσώρευσης. Από τη σχέση (1.3.6) έχουμε

$$U(n) = \exp\left\{\int_0^n r(s)\,ds\right\} U(0) + \int_0^n \exp\left\{\int_t^n r(s)\,ds\right\} w(t)\,dt\,.$$

Δηλαδή η παρούσα αξία τη στιγμή n για κατάθεση που έγινε τη στιγμή $t < n$, δίνεται με πολλαπλασιασμό του ποσού με τον παράγοντα

$$\exp\left\{\int_t^n r(s)\,ds\right\}\,. \tag{1.3.7}$$

Στην περίπτωση σταθερού ρυθμού τοκισμού $r(t) = r$, ο παράγοντας που εμφανίζεται στην (1.3.7) ανάγεται στον συντελεστή προεξόφλησης της σχέσης (1.2.4).

Μερικές φορές ο τόκος προκαταβάλλεται στην έναρξη της περιόδου τοκισμού. Ο τόκος που πιστώνεται έτσι λέγεται προκαταβλητέος, ενώ το αντίστοιχο επιτόκιο ονομάζεται **προκαταβλητέο**.

Έστω d ένα ετήσιο πραγματικό προκαταβλητέο επιτόκιο. Ο επενδυτής που καταθέτει ένα ποσό C, θα πιστωθεί αμέσως τον τόκο $d\,C$, ενώ το κεφάλαιο C θα επιστραφεί στο τέλος της ετήσιας περιόδου. Επενδύοντας τον τόκο $d\,C$ με τις ίδιες συνθήκες, ο επενδυτής θα εισπράξει επίσης $d^2\,C$ και ο τόκος θα επιστραφεί στο τέλος της ετήσιας περιόδου. Επενδύοντας ξανά τον νέο τόκο $d^2\,C$, θα πάρει $d^3\,C$ και ούτω καθ΄ εξής. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία στο άπειρο, βρίσκουμε ότι ο επενδυτής θα εισπράξει συνολικά το ποσό

$$C + d\,C + \cdots = \frac{1}{1-d}\,C$$

στο τέλος του έτους σαν αποτέλεσμα της επένδυσης του αρχικού κεφαλαίου C. Το ισοδύναμο πραγματικό ληξιπρόθεσμο επιτόκιο i δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{1}{1-d} = 1 + i\,, \tag{1.3.8}$$

που οδηγεί στο

$$d = \frac{i}{1+i}\,. \tag{1.3.9}$$

Αυτό το αποτέλεσμα επιδέχεται την ακόλουθη ερμηνεία:

Εάν επενδυθεί το κεφάλαιο 1, ο προκαταβλητέος τόκος d ισοδυναμεί με την παρούσα αξία του ληξιπρόθεσμου τόκου i (που θα καταβληθεί στο τέλος του έτους). Παραπέρα, από τη σχέση (1.3.8) προκύπτει ότι $i = d/(1-d)$. Δηλαδή ο ληξιπρόθεσμος τόκος i που καταβάλλεται στο τέλος του έτους είναι ίσος με τον προκαταβλητέο τόκο συν τους δικούς του τόκους, που συσσωρεύονται στη διάρκεια του έτους. Υπάρχει ένας απλός τύπος που συνδέει τα δύο επιτόκια, το προκαταβλητέο και το ληξιπρόθεσμο,

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{i} + 1\,.$$

Έστω $d^{(m)}$ το ισοδύναμο ονομαστικό επιτόκιο του προκαταβλητέου επιτοκίου με m περιόδους ανατοκισμού ανά έτος. Ο επενδυτής εισπράττει τόκο $d^{(m)}\,C/m$ στην αρχή της κάθε περιόδου ανατοκισμού, ενώ το κεφάλαιο C επιστρέφεται στο τέλος του έτους. Εξισώνοντας τους παράγοντες συσσώρευσης για αυτή την περίοδο, παίρνουμε τη σχέση

$$\frac{1}{1-d^{(m)}/m} = 1 + \frac{i^{(m)}}{m} = (1+i)^{1/m}\,.$$

Αυτό οδηγεί στον τύπο

$$d^{(m)} = m\,[1-(1+i)^{-1/m}]\,. \tag{1.3.10}$$

Σε αναλογία με τη σχέση (1.3.9) έχουμε

$$d^{(m)} = \frac{i^{(m)}}{1+i^{(m)}/m}\,,$$

που δίνει πάλι μια απλή σχέση μεταξύ των $d^{(m)}$ και $i^{(m)}$

$$\frac{1}{d^{(m)}} = \frac{1}{i^{(m)}} + \frac{1}{m}\,. \tag{1.3.11}$$

Από εδώ προκύπτει ότι

$$\lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \lim_{m\to\infty} i^{(m)} = r\,,$$

που είναι αυτό που περιμέναμε. Πράγματι, στην περίπτωση του συνεχούς ανατοκισμού, η διαφορά μεταξύ προκαταβλητέου και ληξιπρόθεσμου επιτοκίου εξαλείφεται. Παρακάτω στον Πίνακα 2.1.2 βλέπουμε μια αριθμητική εφαρμογή για $i = 6\%$, από το [21, σελ. 6].

m	$d^{(m)}$
1	0.05660
2	0.05743
3	0.05771
4	0.05785
6	0.05799
12	0.05813
∞	0.05827

Πίνακας 1.2: Προκαταβλητέο επιτόκιο με m περιόδους ανατοκισμού.

Τώρα θα εισαγάγουμε του τρόπους πληρωμής, που ονομάζονται **διηνεκείς ράντες**, και θα υπολογίσουμε την παρούσα αξία τους. Θεωρούμε κάποια ροή ετήσιων πληρωμών ύψους 1. Εάν η πληρωμή γίνεται στην αρχή του έτους, έχουμε **προκαταβλητέα ράντα** με παρούσα αξία

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} := 1 + v + v^2 + \cdots = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{d}\,.$$

Εάν η πληρωμή γίνεται στο τέλος του έτους, έχουμε **ληξιπρόθεσμη ράντα** με παρούσα αξία

$$a_{\overline{\infty}|} := v + v^2 + v^3 + \cdots = \frac{v}{1-v} = \frac{1}{i}\,.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα μια **συνεχή ράντα** με σταθερό ρυθμό πληρωμών $w = 1$ ξεκινώντας από τη στιγμή 0. Η παρούσα αξία της δίνεται σαν

$$\overline{a}_{\overline{\infty}|r} := \int_0^\infty e^{-r\,t}\,dt = \frac{1}{r}\,.$$

Τέλος, θα εξετάσουμε και ράντες με διαφορετικές ετήσιες πληρωμές $\{w_0,\, w_1,\, \ldots\}$, που γίνονται στις στιγμές $\{0,\, 1,\, \ldots\}$ αντίστοιχα. Η παρούσα αξία σε αυτή την περίπτωση παίρνει τη μορφή $\ddot{a} := w_0 + v\,w_1 + v^2\,w_2 + \cdots$. Μια τέτοια ράντα μπορεί να παρασταθεί σαν άθροισμα σταθερών ραντών με πληρωμές $\{w_0,\, w_1 - w_0,\, w_2 - w_1,\, \ldots\}$ διαδοχικά, οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε την παρούσα αξία ως εξής:

$$\ddot{a} = \frac{1}{d}\left[w_0 + v\,(w_1 - w_0) + v^2\,(w_2 - w_1) + \cdots\right]\,.$$

Στην περίπτωση των εκθετικά αυξανόμενων πληρωμών $w_k = e^{\tau k}$, για $k = 0, 1, 2, \ldots$ βρίσκουμε ότι

$$\ddot{a} = \frac{1}{1 - e^{-(r-\tau)}} \,,$$

εφόσον $\tau < r$.

Εάν μια προκαταβλητέα ράντα προβλέπει n μόνο πληρωμές ποσού μιας μονάδας, η παρούσα αξία τη στιγμή 0 είναι ίση με $\ddot{a}_{\overline{n}|} := 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1}$. Αναπαριστώντας αυτή τη ράντα σαν διαφορά δύο άπειρων ραντών, βρίσκουμε ότι

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|} - v^n \, \ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1 - v^n}{d} \,. \tag{1.3.12}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να πάρουμε τον τύπο

$$a_{\overline{n}|} \;\; = \;\; \frac{1 - v^n}{i} \,. \tag{1.3.13}$$

Η τελική αξία αυτών των ραντών είναι επίσης χρήσιμη. Αυτή ορίζεται σαν τη συνολική αξία των πληρωμών που μαζεύτηκαν μέχρι τη στιγμή n και συμβολίζεται με το γράμμα s

$$\begin{aligned} \ddot{s}_{\overline{n}|} &= \frac{(1+i)^n - 1}{d} \,, \\ s_{\overline{n}|} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i} \,. \end{aligned}$$

Έτσι βρίσκουμε πάλι μια απλή σχέση μεταξύ της παρούσας αξίας και της τελικής αξίας

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|}} + i \,.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι έχουμε τη στιγμή 0 ένα χρέος ύψους S, που είναι να πληρωθεί με πληρωμές $w_1, \ldots, w_n$ στο τέλος των ετών $k = 1, \ldots, n$. Άρα το S αντιστοιχεί στην παρούσα αξία των πληρωμών

$$S = v \, w_1 + v^2 \, w_2 + \cdots + v^n \, w_n \,. \tag{1.3.14}$$

Έστω S_k το υπόλοιπο χρέος μετά την k πληρωμή. Συσχετίζοντας αυτό το υπόλοιπο χρέος με το υπόλοιπο χρέος του προηγούμενου χρόνου, παίρνουμε την εξίσωση

$$S_k = (1+i) \, S_{k-1} - w_k \,,$$

για $k = 1, \ldots, n$. Αυτή η εξίσωση γράφεται

$$w_k = i\, S_{k-1} + (S_{k-1} - S_k)\,. \tag{1.3.15}$$

Από αυτόν τον τύπο είναι προφανές ότι κάθε πληρωμή περιέχει δύο μέρη, τον τόκο και την **απομείωση του κεφαλαίου**. Αντικαθιστώντας το $-S_k$ με U_k, βλέπουμε ότι η σχέση (1.3.15) είναι ισοδύναμη με τη σχέση (1.2.2). Επομένως, όλα τα αποτελέσματα για το U_k μεταφέρονται αυτόματα εδώ.

Οι πληρωμές $w_1, \ldots, w_n$ μπορούν να επιλεγούν αυθαίρετα. Για παράδειγμα, για χρέος $S = 1$ μπορούμε να κάνουμε πληρωμές

$$w_1 = w_2 = \cdots = w_{n-1} = i\,,$$

και $w_n = 1 + i$. Σε αυτή την περίπτωση πληρώνουμε μόνο τόκο στα πρώτα $n - 1$ έτη και το συνολικό ποσό με τον τόκο του τελευταίου έτους στο τέλος του έτους n. Από τη σχέση (1.3.14) βρίσκουμε ότι

$$1 = i\, a_{\overline{n}|} + v^n\,, \tag{1.3.16}$$

που είναι μια παραλλαγή της σχέσης (1.3.13).

Το ίδιο χρέος μπορεί να αποπληρωθεί με ίσες πληρωμές

$$w_1 = w_2 = \cdots = w_{n-1} = w_n = 1/a_{\overline{n}|}\,.$$

Δηλαδή υπάρχουν πολλοί εναλλακτικοί τρόποι πληρωμών.

1.4 Αποτίμηση δικαιώματος προαίρεσης

Με τον όρο **δικαίωμα προαίρεσης** εννοούμε μια συμφωνία μεταξύ δύο πλευρών. Από τη μια έχουμε την πλευρά του αγοραστή και από την άλλη θεωρούμε τον πωλητή που ονομάζεται κάτοχος **αξιόγραφου**. Ο αγοραστής καταβάλλει σήμερα την τιμή του δικαιώματος προαίρεσης στον πωλητή, οπότε αποκτά το δικαίωμα που του επιτρέπει να κάνει σε κάποια μελλοντική χρονική στιγμή ή σε κάποιο χρονικό διάστημα, ορισμένες συναλλαγές αγοράς σύμφωνα με κάποιες προκαθορισμένες από σήμερα συνθήκες. Αυτό το δικαίωμα είναι καθοριστικής σημασίας διότι δίνει τη δυνατότητα στον αγοραστή να μην προχωρήσει σε μια ασύμφορη συναλλαγή. Τέτοια δικαιώματα προαίρεσης υπήρχαν σε διαπραγμάτευση ήδη από τα μέσα του 17ου αιώνα στο χρηματιστήριο του Άμστερνταμ. Στη συνέχεια πέρασαν από μια κυμαινόμενη εξέλιξη μέχρι που εμφανίσθηκαν ξανά το 1973, τριάντα χρόνια μετά τον δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο και έκτοτε το εμπόριο τους διευρύνεται σταθερά.

Θα θεωρήσουμε μόνο δικαιώματα προαίρεσης, που ο βασικός τίτλος αποτελεί κάποιο αξιόγραφο. Θα διακρίνουμε τα δικαιώματα προαίρεσης σε δικαιώματα αγοράς και σε δικαιώματα πώλησης. Στο δικαίωμα αγοράς επιτρέπεται στον κάτοχο του δικαιώματος να αγοράσει το αξιόγραφο σε μια εξ αρχής καθορισμένη τιμή (**τιμή βάσης**) από τον αντίστοιχο πωλητή. Στο δικαίωμα πώλησης επιτρέπεται στον κάτοχο του δικαιώματος να πουλήσει το αξιόγραφο σε μια εξ αρχής καθορισμένη τιμή (τιμή βάσης) στον αντίστοιχο αγοραστή. Παραπέρα μπορούμε να διακρίνουμε δικαιώματα προαίρεσης ανάλογα με το **χρόνο άσκησης** αυτού του δικαιώματος. Σύμφωνα με το **ευρωπαϊκό δικαίωμα** προαίρεσης επιτρέπεται η άσκηση του δικαιώματος μόνο στο τέλος της χρονικής περιόδου που ορίζεται. Αντίθετα σύμφωνα με το **αμερικάνικο δικαίωμα** προαίρεσης η άσκηση του δικαιώματος μπορεί να γίνει σε οποιαδήποτε στιγμή μέσα στη χρονική περίοδο που ορίζεται. Παραπέρα υπάρχουν μια σειρά από διαφορετικά δικαιώματα προαίρεσης που ονομάζονται **εξωτικά δικαιώματα** προαίρεσης. Επί πλέον πρέπει να επισημάνουμε, ότι ο αγοραστής του δικαιώματος προαίρεσης μπορεί οποιαδήποτε στιγμή να πουλήσει παραπέρα το δικαίωμα του. Μάλιστα υπάρχει αγορά δικαιωμάτων προαίρεσης, όπου αυτά έχουν σε κάθε χρονική στιγμή μια συγκεκριμένη τιμή.

Τα δικαιώματα προαίρεσης προσφέρουν στον αγοραστή τους διάφορα πλεονεκτήματα. Κατά πρώτον, δίνουν την ευκαιρία απόκτησης αξιογράφων χωρίς τον κίνδυνο κάποιας μεγαλύτερης, απρόβλεπτης ζημιάς, διότι το δικαίωμα αυτό μπορεί να μην ασκηθεί, οπότε ο αγοραστής χάνει στην χειρότερη περίπτωση μόνο την τιμή αγοράς του δικαιώματος. Κατά δεύτερον, στη περίπτωση θετικής εξέλιξης, αποκτά δικαίωμα στη συμμετοχή στη συναλλαγή με την ελάχιστη επιβάρυνση. Τέλος τα δικαιώματα προαίρεσης μπορούν να λειτουργήσουν και σαν **ασφάλιση αξιών**. Εάν, για παράδειγμα, κάποιος επιθυμεί να εξασφαλιστεί από ζημιές που δημιουργούνται από τις διακυμάνσεις τιμών, τότε μπορεί να το κάνει αγοράζοντας δικαίωμα προαίρεσης πώλησης.

1.5 Ασκήσεις

Άσκηση 1. *Εξηγήστε τον ρόλο του χρηματοοικονομικού αλφαβητισμού στην βιώσιμη ανάπτυξη.*

Άσκηση 2. *Αναλύστε τον κίνδυνο χαμηλού επιπέδου χρηματοοικονομικού αλφαβητισμού και πως επιδρά στο οικονομικό σύστημα.*

Άσκηση 3. *Δώστε τους κύριους άξονες της βιώσιμης ανάπτυξης. Πως επιδρά ο χρηματοοικονομικός εγκλεισμός;*

Άσκηση 4. *Δώστε ένα επιχείρημα που να εξηγεί γιατί ο χρηματοοικονομικός εγκλεισμός αναπτύσσεται αρχικά στις εύπορες κοινωνίες.*

Άσκηση 5. *Βρείτε μια σχέση μεταξύ χρηματοοικονομικού αλφαβητισμού και κοινού αλφαβητισμού.*

Άσκηση 6. *Δείξτε ότι ισχύει*

$$i^{(m)} - d^{(m)} = \frac{i^{(m)}\, d^{(m)}}{m}\,.$$

Άσκηση 7. *Δείξτε ότι ισχύει*

$$d < d^{(2)} < d^{(3)} < \cdots < r < \cdots < i^{(3)} < i^{(2)} < i\,,$$

και επιπλέον

$$i^{(m)} - d^{(n)} \leq \frac{i^2}{m \wedge n}\,.$$

Σημείωση 1. Για κάποιο σταθερό $i > 0$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{(1+i)^x - 1}{x} = \frac{e^{r\,x} - 1}{x}\,.$$

Από το ανάπτυγμα Taylor

$$f(x) = r + \frac{1}{2}\, r^2\, x + \frac{1}{3!}\, r^3\, x^2 + \cdots$$

βλέπουμε ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x > 0$. Επομένως η $f(x)$ αυξάνει από το $f(0+) = r$ προς το $f(1) = i$ και αντίστοιχα η

$$g(x) := f\left(\frac{1}{x}\right)\,,$$

φθίνει στο διάστημα $[1,\,\infty)$ από το i προς το r. Έτσι έχουμε ότι η $i^{(m)} = g(m)$ φθίνει προς το r, καθώς $m \to \infty$. Παρομοίως, η $d^{(m)}$ αυξάνει προς το r, καθώς $m \to \infty$.

Άσκηση 8. *Μια εταιρεία θέλει να αποπληρώσει ένα* **ομόλογο** *που την υποχρεώνει σε πέντε ετήσιες πληρωμές των 15.000. Η πρώτη πληρωμή είναι προγραμματισμένη για τις 31 Δεκεμβρίου 2009. Για την* **αποπληρωμή του ομολόγου** *η εταιρεία θέλει να κάνει ετήσιες καταθέσεις ύψους x από την 1 Ιανουαρίου του 2000 με επιτόκιο 6%, με την τελευταία κατάθεση να γίνεται την 1η Ιανουαρίου του 2009. Υπολογίστε το x.*

Σημείωση 2. Το συνολικό απόθεμα από τις πληρωμές τής εταιρείας την 1η Ιανουαρίου 2009 είναι ίσο με $x\, s_{\overline{10}|0.06}$. Η παρούσα αξία του ομολόγου την 1η Ιανουαρίου 2009 είναι ίση με $15,000\, a_{\overline{5}|0.06}$. Εξισώνουμε τις δύο τιμές για να βρούμε το x.

Άσκηση 9. *Μια διηνεκής ράντα αποτελείται από ετήσιες αυξανόμενες πληρωμές των ποσών $(1+k)$, $(1+k)^2$, $(1+k)^3$, ... που ξεκινούν από το τέλος του πρώτου έτους, το πραγματικό ετήσιο επιτόκιο είναι 4% και η παρούσα αξία της κατά την έναρξη του πρώτου έτους είναι ίση με 51. Βρείτε το k.*

Σημείωση 3. Έστω $u = (1+k)/1.04$, και γράφουμε την εξίσωση ως εξής:

$$51 = \frac{1+k}{1.04} + \left(\frac{1+k}{1.04}\right)^2 + \cdots = u + u^2 + \cdots = \frac{u}{1-u} = \frac{1+k}{0.04-k}\,.$$

Άσκηση 10. *Ένα δάνειο ύψους 1.000, με ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο 12% που ανατοκίζεται ανά μήνα ($m = 12$), είναι να αποσβεστεί σε έξι μηνιαίες ληξιπρόθεσμες πληρωμές. Οι πρώτες τρεις θα αφορούν στην καταβολή του ποσού x, ενώ οι άλλες τρεις θα αφορούν την καταβολή του ποσού $3x$. Βρείτε την τιμή του x.*

Σημείωση 4. Καταστρώνουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned} 1000 &= x\,(v + v^2 + v^3) + 3\,x\,(v^4 + v^5 + v^6) \\ &= x\,(3\,a_{\overline{6}|} - 2\,a_{\overline{3}|}) = x\,11.5\,. \end{aligned}$$

Άσκηση 11. *Αγοράζουμε ένα ομόλογο στην τιμή των 98.51 με λήξη σε ένα έτος και με* **ονομαστική αξία** *100. Το ομόλογο έχει κουπόνι επιτοκίου 4% με δύο περιόδους πληρωμής ετησίως. Υπολογίστε την* **ετήσια απόδοση** *με δύο περιόδους ανατοκισμού.*

Σημείωση 5. Έστω $j = i^{(2)}/2$, οπότε παίρνουμε την εξίσωση

$$98.51 = \frac{2}{1+j} + \frac{102}{(1+j)^2}.$$

Άσκηση 12. *Ένα* **συμβόλαιο ζωής** *μπορεί να πληρωθεί με τέσσερις διαφορετικούς τρόπους, που όλοι έχουν την ίδια παρούσα αξία:*

1. Μία διηνεκή ράντα ύψους 120 ανά μήνα, με πρώτη πληρωμή έναν μήνα μετά τον θάνατο του ασφαλισμένου.

2. Καταβολή του ποσού των 365,47 στο τέλος του κάθε μήνα για n έτη, με πρώτη πληρωμή έναν μήνα μετά τον θάνατο του ασφαλισμένου.

3. Την καταβολή του ποσού των 17.866,32 στο τέλος της περιόδου των n ετών, μετά το θάνατο του ασφαλισμένου.

4. Την καταβολή του ποσού x αμέσως μετά το θάνατο του ασφαλισμένου.

Υπολογίστε το x.

Σημείωση 6. Από τα 1. και 2. έχουμε $12\,(120)\, a_{\overline{\infty}|}^{(12)} = 12\,(365.47)\, a_{\overline{n}|}^{(12)}$, οπότε βρίσκουμε το v^n. Στη συνέχεια, από τα 3. και 4. παίρνουμε το x.

Άσκηση 13. *Ας θεωρήσουμε τώρα έναν επενδυτή, ο οποίος καταθέτει το ποσό p και αποκτά δικαίωμα για n μελλοντικές εισπράξεις. Αυτές οι εισπράξεις συμβολίζονται με $v_1, \ldots, v_n$ και γίνονται κατά τις χρονικές στιγμές $\tau_1, \ldots, \tau_n$ αντίστοιχα. Ποιος είναι ο ρυθμός των εισπράξεων;*

Σημείωση 7. Η παρούσα αξία των εισπράξεων είναι συνάρτηση του ρυθμού τοκισμού r. Ας ορίσουμε

$$a(r) = \sum_{k=1}^{n} e^{-r\,\tau_k}\, v_k\,.$$

Έστω x η λύση της εξίσωσης $a(x) = p$. Η απόδοση της επένδυσης ορίζεται σαν $i = e^x - 1$.

Η εξίσωση $a(x) = p$ μπορεί να λυθεί με αριθμητικές μεθόδους. Για παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(r) = \ln\left(a(r)/v\right)$, όπου $v = v_1 + \cdots + v_n$. Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι $f(0) = 0$ και

$$f^{'}(r) = \frac{a^{'}(r)}{a(r)} < 0\,, \qquad f^{''}(r) = \frac{a^{''}(r)}{a(r)} - \left[\frac{a^{'}(r)}{a(r)}\right]^2 > 0\,, \qquad (1.5.1)$$

με την τελευταία ανισότητα να βγαίνει από την ερμηνεία της δεύτερης παραγώγου σαν διακύμανση. Πράγματι, βρίσκουμε

$$
\begin{aligned}
f''(r) &= \sum_{k=1}^{n} \tau_k^2 \, \frac{e^{-r\,\tau_k}\, v_k}{\sum_{m=1}^{n} e^{-r\,\tau_m}\, v_m} - 2\left(\sum_{k=1}^{n} \tau_k \, \frac{e^{-r\,\tau_k}\, v_k}{\sum_{m=1}^{n} e^{-r\,\tau_m}\, v_m}\right)^2 \\
&\quad + \left(\sum_{k=1}^{n} \tau_k \, \frac{e^{-r\,\tau_k}\, v_k}{\sum_{m=1}^{n} e^{-r\,\tau_m}\, v_m}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \tau_k^2 \, \frac{e^{-r\,\tau_k}\, v_k}{\sum_{m=1}^{n} e^{-r\,\tau_m}\, v_m} \\
&\quad -2 \sum_{k=1}^{n} \tau_k \left(\sum_{i=1}^{n} \tau_i \, \frac{e^{-r\,\tau_i}\, v_i}{\sum_{m=1}^{n} e^{-r\,\tau_m}\, v_m}\right) \frac{e^{-r\,\tau_k}\, v_k}{\sum_{m=1}^{n} e^{-r\,\tau_m}\, v_m} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \tau_i \, \frac{e^{-r\,\tau_i}\, v_i}{\sum_{m=1}^{n} e^{-r\,\tau_m}\, v_m}\right)^2 \frac{e^{-r\,\tau_k}\, v_k}{\sum_{m=1}^{n} e^{-r\,\tau_m}\, v_m} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\tau_k^2 - 2\,\tau_k \left(\sum_{i=1}^{n} \tau_i \, \frac{e^{-r\,\tau_i}\, v_i}{\sum_{m=1}^{n} e^{-r\,\tau_m}\, v_m}\right)\right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{i=1}^{n} \tau_i \, \frac{e^{-r\,\tau_i}\, v_i}{\sum_{m=1}^{n} e^{-r\,\tau_m}\, v_m}\right)^2\right] \frac{e^{-r\,\tau_k}\, v_k}{\sum_{m=1}^{n} e^{-r\,\tau_m}\, v_m} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\tau_k - \sum_{i=1}^{n} \tau_i \, \frac{e^{-r\,\tau_i}\, v_i}{\sum_{m=1}^{n} e^{-r\,\tau_m}\, v_m}\right]^2 \frac{e^{-r\,\tau_k}\, v_k}{\sum_{m=1}^{n} e^{-r\,\tau_m}\, v_m} > 0\,.
\end{aligned}
$$

Ερμηνεύοντας το κλάσμα $f(r)/r$ σαν κλίση της τέμνουσας και παρατηρώντας ότι η f είναι κυρτή συνάρτηση, από τις σχέσεις (1.5.1) βλέπουμε ότι η $f(r)/r$ είναι αύξουσα συνάρτηση. Επομένως, για $0 < s < x < u$ παίρνουμε την ανισότητα

$$\frac{f(s)}{s} < \frac{f(x)}{x} < \frac{f(u)}{u}\,,$$

που δίνει

$$\frac{f(x)}{f(s)}\, s < x < \frac{f(x)}{f(u)}\, u\,.$$

Επομένως, καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{\ln(p/v)}{\ln[a(s)/v]}\, s < x < \frac{\ln(p/v)}{\ln[a(u)/v]}\, u\,. \tag{1.5.2}$$

Με κάποιο κατώτερο φράγμα s και κάποιο ανώτερο φράγμα u για τη λύση x, μπορούμε να βελτιώσουμε τα φράγματα μέσω της (1.5.2).