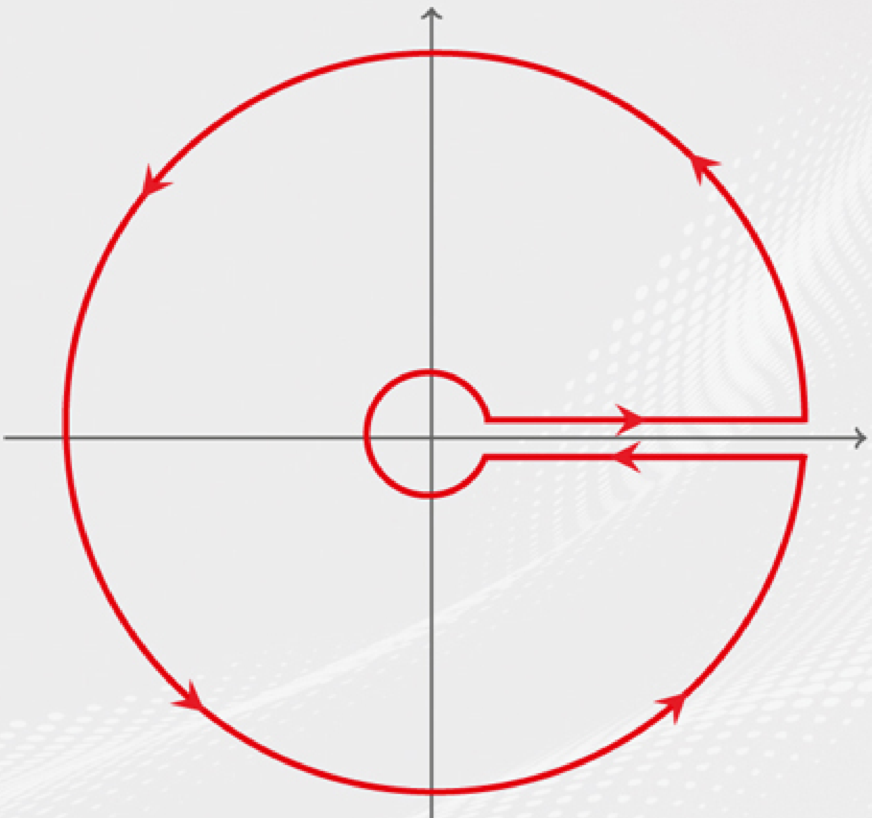
Πέτρος Δημόπουλος

Θέματα Μιγαδικής Ανάλυσης

Συνοπτική Θεωρία & Λυμένες Ασκήσεις



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Θέματα Μιγαδικής Ανάλυσης
Συνοπτική Θεωρία και Λυμένες Ασκήσεις

ISBN 978-960-456-592-4

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια Ι.Κ.Ε.
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ:
Χαριλάου Τρικούπη 22, 106 79 Αθήνα
Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Πρόλογος

Το βιβλίο απευθύνεται στους φοιτητές των Σχολών των Θετικών Επιστημών και του Πολυτεχνείου και περιέχει συνοπτική θεωρία και πολλές λυμένες ασκήσεις που αφορούν βασικά θέματα του μαθήματος της Μιγαδικής Ανάλυσης.

Ο παρών τόμος αποτελείται από επτά κεφάλαια. Στην αρχή κάθε κεφαλαίου αναπτύσσεται η θεωρητική θεματολογία που θα χρειαστεί ο αναγνώστης, ώστε να καταπιαστεί με τις προτεινόμενες ασκήσεις, αποκομίζοντας το μεγαλύτερο δυνατό όφελος. Τα βασικά θεωρήματα συνοδεύονται από τις αποδείξεις τους και, επιπλέον, γίνεται διεξοδική συζήτηση πολλών λεπτών σημείων της θεωρίας.

Η επιλογή των ασκήσεων αποσκοπεί στην εμβάθυνση και ενίσχυση του θεωρητικού υπόβαθρου, καθώς και την καθοδήγηση και εξάσκηση στην εφαρμογή των διαφόρων υπολογιστικών τεχνικών.

Η επίλυση όλων των ασκήσεων είναι εκτενής και πλήρης. Οι αλγεβρικοί υπολογισμοί παρατίθενται με όλα τα αναγκαία ενδιάμεσα βήματα και συμπληρώνονται από τις απαραίτητες διευκρινίσεις.

Στο πρώτο κεφάλαιο ασχολούμαστε με τις ιδιότητες της αναλυτικής μιγαδικής συνάρτησης. Παρουσιάζεται η μελέτη του αναπτύγματος των μιγαδικών συναρτήσεων σε σειρές Taylor και Laurent και ακολουθεί λεπτομερής συζήτηση σχετικά με τους τύπους των ιδιόμορφων σημείων και τον υπολογισμό των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσονται διάφορες τεχνικές που αφορούν τον υπολογισμό ορισμένων ολοκληρωμάτων μονότιμων συναρτήσεων με τη βοήθεια του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων και της εφαρμογής του λήμματος του Jordan. Το τρίτο κεφάλαιο επικεντρώνεται στις μεθόδους προσδιορισμού της πρωτεύουσας τιμής ολοκληρώματος. Στο τέταρτο κεφάλαιο μελετώνται οι ιδιότητες διαφόρων πλειότιμων συναρτήσεων και παρουσιάζονται παραδείγματα σχετικά με το ανάπτυγμα Laurent πλειότιμης συνάρτησης. Ακολούθως, στο πέμπτο κεφάλαιο, αναπτύσσονται διάφορες μέθοδοι προσδιορισμού της τιμής ορισμένων ολοκληρωμάτων πλειότιμων συναρτήσεων. Το έκτο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο σε παραδείγματα που αφορούν τους ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς Fourier και Laplace. Ειδικά για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace μελετάται η εφαρμογή του ολοκληρώματος του Bromwich.

Τέλος, στο έβδομο κεφάλαιο του βιβλίου, με αποκλειστικά εφόδια τις βασικές έννοιες και τα εργαλεία της Μιγαδικής Ανάλυσης, σε συνδυασμό με ελάχιστες προαπαιτούμενες γνώσεις από την ύλη του μαθήματος της Γραμμικής Άλγεβρας, προτείνεται η διαπραγμάτευση του φορμαλισμού που οδηγεί στον ολοκληρωτικό τύπο των Cauchy-Dunford-Riesz, ο οποίος αποδεικνύεται εξαιρετικά χρήσιμος στη γενική μελέτη των ιδιοτήτων τετραγωνικών πινάκων και των συναρτήσεων πίνακα. Η θεωρητική παρουσίαση του συγκεκριμένου φορμαλισμού γίνεται λεπτομερώς, αν και με τρόπο κατάλληλο και σύμφωνο με τις προαπαιτούμενες γνώσεις του προπτυχιακού επιπέδου σπουδών. Πιστεύουμε ότι, χάρη στα αναλυτικά παραδείγματα που εμπεριέχονται στη θεωρητική ενότητα, όπως επίσης και στις προτεινόμενες λυμένες ασκήσεις, δίνεται η ευκαιρία στους φοιτητές να κατανοήσουν πλήρως το συγκεκριμένο θέμα.

Σε κάθε κεφάλαιο, έπειτα από τις θεωρητικές ενότητες βρίσκονται οι εκφωνήσεις των ασκήσεων. Για κάθε άσκηση δηλώνεται η σελίδα του βιβλίου όπου μπορεί να αναζητηθεί η αντίστοιχη λύση. Στη συνέχεια, ακολουθεί η ενότητα με τις λύσεις των ασκήσεων του κάθε κεφαλαίου. Για την ευκολία του αναγνώστη, η εκφώνηση κάθε άσκησης επαναλαμβάνεται στην πρώτη σελίδα της επίλυσης της αντίστοιχης άσκησης. Στο τέλος του τόμου παρατίθενται εκτενής βιβλιογραφία και ευρετήριο όρων.

Πάρμα (Ιταλία), Ιούλιος 2022 — Π. Δ.

Περιεχόμενα

1 Μιγαδικές συναρτήσεις, σειρές Taylor και Laurent, ολοκληρωτικά υπόλοιπα 1

1.1 Μιγαδικοί αριθμοί 1

1.2 Μιγαδικό επίπεδο 2

1.2.1 Αναπαράσταση σε πολικές συντεταγμένες 3

1.2.2 Τύπος του Euler 4

1.2.3 Το σημείο στο άπειρο 6

1.3 Περιοχές ή τόποι του μιγαδικού επιπέδου 7

1.4 Συναρτήσεις μιγαδικής μεταβλητής 8

1.4.1 Συνήθεις μιγαδικές συναρτήσεις 9

1.5 Αναλυτικές συναρτήσεις και συνθήκες Cauchy-Riemann 10

1.5.1 Αρμονικές συναρτήσεις 13

1.6 Ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης 14

1.7 Θεμελιώδες θεώρημα του Cauchy 15

1.7.1 Παράγουσα αναλυτικής συνάρτησης 17

1.7.2 Θεώρημα του Morera 18

1.8 Μιγαδική ολοκλήρωση σε πολλαπλά συνεκτική περιοχή 18

1.8.1 Μια πολύ χρήσιμη εφαρμογή 20

1.9 Ολοκληρωτική αναπαράσταση του Cauchy 21

1.9.1 Ολοκληρωτικός τύπος για παραγώγους ανώτερης τάξης 22

1.10 Ανάπτυγμα σε σειρά Laurent και Taylor 23

1.11 Ρίζες μιγαδικής συνάρτησης 29

1.12 Ιδιόμορφα σημεία μιγαδικής συνάρτησης 31
1.12.1 Πόλοι ή πολικές ιδιομορφίες 32
1.13 Ουσιώδη ιδιόμορφα σημεία 33
1.14 Ιδιομορφίες στο $z = \infty$ 34
1.15 Απαλείψιμες ιδιομορφίες 35
1.16 Μη μεμονωμένα ιδιόμορφα σημεία 35
1.17 Τύποι μιγαδικών συναρτήσεων 36
1.18 Ολοκληρωτικό υπόλοιπο 36
1.19 Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων 38
1.20 Μερικά σημαντικά θεωρήματα 40
1.21 Ασκήσεις 1ου κεφαλαίου 43
1.22 Λύσεις ασκήσεων 1ου κεφαλαίου 48

2 Υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων πραγματικών συναρτήσεων 101
2.1 Τύποι ορισμένων ολοκληρωμάτων 101
2.2 Λήμμα του Jordan 105
2.3 Ασκήσεις 2ου κεφαλαίου 108
2.4 Λύσεις ασκήσεων 2ου κεφαλαίου 113

3 Πρωτεύουσα τιμή ολοκληρώματος 183
3.1 Ορισμός της πρωτεύουσας τιμής κατά Cauchy 183
3.2 Ασκήσεις 3ου κεφαλαίου 186
3.3 Λύσεις ασκήσεων 3ου κεφαλαίου 188

4 Πλειότιμες συναρτήσεις, σημεία και τομές διακλάδωσης 217
4.1 Γενικά για πλειότιμες συναρτήσεις 217
4.2 Ασκήσεις 4ου κεφαλαίου 219
4.3 Λύσεις ασκήσεων 4ου κεφαλαίου 222

5 Ορισμένα ολοκληρώματα πλειότιμων συναρτήσεων 263
5.1 Γενικά χαρακτηριστικά του υπολογισμού 263

5.2 Ασκήσεις 5ου κεφαλαίου . . . 264
5.3 Λύσεις ασκήσεων 5ου κεφαλαίου . . . 267

6 Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί Fourier και Laplace 319
6.1 Ολοκληρωτικός μετασχηματισμός Fourier . . . 319
6.2 Ολοκληρωτικός μετασχηματισμός Laplace . . . 320
6.2.1 Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace . . . 320
6.2.2 Παρατηρήσεις σχετικά με την εφαρμογή του τύπου για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace . . . 322
6.3 Ασκήσεις 6ου κεφαλαίου . . . 325
6.4 Λύσεις ασκήσεων 6ου κεφαλαίου . . . 328

7 Ολοκληρωτικός τύπος για συναρτήσεις πινάκων 369
7.1 Επιλύουσα τελεστή . . . 370
7.1.1 Σημαντική ιδιότητα των επιλυουσών . . . 371
7.2 Ολοκληρωτικός τύπος για γραμμικούς τελεστές . . . 372
7.3 Ιδιότητες φασματικών τελεστών και τελική μορφή του ολοκληρωτικού τύπου . . . 374
7.3.1 Παραδείγματα . . . 377
7.4 Παρατηρήσεις . . . 382
7.5 Συνοπτικός πίνακας ορισμών και χρήσιμων τύπων . . . 386
7.6 Ασκήσεις 7ου κεφαλαίου . . . 387
7.7 Λύσεις ασκήσεων 7ου κεφαλαίου . . . 390

Κατάλογος Ασκήσεων 423

Βιβλιογραφία 447

Ευρετήριο 449

Κεφάλαιο 1

Μιγαδικές συναρτήσεις, σειρές Taylor και Laurent, ολοκληρωτικά υπόλοιπα

1.1 Μιγαδικοί αριθμοί

Ένας μιγαδικός αριθμός z ορίζεται από την έκφραση

$$z = x + iy\,, \tag{1.1}$$

όπου x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και i η φανταστική μονάδα με την ιδιότητα $i^2 = -1$. Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{C}$. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ είναι υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Οι αριθμοί x και y ονομάζονται πραγματικό και φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού z και συμβολίζονται αντίστοιχα ως $\mathrm{Re}z$ και $\mathrm{Im}z$.

Ορίζεται ο μιγαδικός συζυγής του z και συμβολίζεται με $\bar{z}$ ο μιγαδικός αριθμός

$$\bar{z} = x - iy\,. \tag{1.2}$$

Δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ είναι ίσοι, εάν είναι ίσα τα πραγματικά και τα φανταστικά τους μέρη, δηλαδή $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$. Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών ορίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)\,, \tag{1.3}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)\,, \tag{1.4}$$

όπου στην (1.4) έχει γίνει χρήση της ιδιότητας $i^2 = -1$.

Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού 0 είναι ίσα με μηδέν, και γράφουμε $0 = 0 + i0$. Η πρόσθεση του z με το $-z$ δίνει αποτέλεσμα 0, το οποίο είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης.

Το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού είναι η μονάδα $1 = 1 + i0$, η οποία συμπίπτει με την πραγματική μονάδα. Ο αντίστροφος του z είναι ο αριθμός

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}\,, \tag{1.5}$$

όπου ο αριθμός $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$ ονομάζεται μέτρο ή απόλυτη τιμή του z και ικανοποιείται η σχέση:

$$z\frac{1}{z} = \frac{1}{z}z = 1\,. \tag{1.6}$$

.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύουν η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών. Αποδεικνύονται, επίσης, εύκολα οι ακόλουθες σχέσεις:

$$x = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \equiv \mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\, \bar{z}\,, \tag{1.7}$$

$$y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) \equiv \mathrm{Im}\, z = -\mathrm{Im}\, \bar{z}\,, \tag{1.8}$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2\,, \qquad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2\,, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\,, \tag{1.9}$$

$$|z| = |\bar{z}|\,, \qquad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|\,, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0)\,. \tag{1.10}$$

1.2 Μιγαδικό επίπεδο

Η αναπαράσταση ενός μιγαδικού αριθμού z ως σημείου του καρτεσιανού επιπέδου με συντεταγμένες (x, y) προσφέρει μια γεωμετρική αναπαράσταση του z, βλ. Σχ. 1.1. Στον άξονα των τετμημένων αναπαριστάται το πραγματικό μέρος του z και αυτός είναι ο άξονας των πραγματικών αριθμών. Αναφέρεται δε συχνά ως πραγματικός άξονας. Παρόμοια, στον άξονα των τεταγμένων αναπαρίσταται το φανταστικό μέρος του z και γι αυτό ονομάζεται άξονας των φανταστικών αριθμών ή απλά φανταστικός άξονας. Το στοιχείο 0 τοποθετείται στην αρχή των αξόνων. Από την ως άνω αναπαράσταση προκύπτει φυσική η αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών ως διανυσμάτων στο δισδιάστατο καρτεσιανό επίπεδο, το οποίο λέγεται *μιγαδικό επίπεδο* ή και επίπεδο-z.

Αφού οι μιγαδικοί αριθμοί μπορούν να αναπαρασταθούν ως διανύσματα, είναι αναμενόμενο ότι ισχύουν οι ιδιότητες πρόσθεσης και αφαίρεσης διανυσμάτων. Ισχύουν, επιπλέον, οι τριγωνικές ανισότητες

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|\,, \qquad |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|\,. \tag{1.11}$$

1.12.1 Πόλοι ή πολικές ιδιομορφίες

Έστω ότι το ανάπτυγμα Laurent μιας συνάρτησης $f(z)$ γύρω από το σημείο z_0 περιλαμβάνει έναν πεπερασμένο αριθμό αρνητικών δυνάμεων του $(z-z_0)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\,(z-z_0)^n + \frac{C_{-1}}{(z-z_0)} + \frac{C_{-2}}{(z-z_0)^2} + ... \frac{C_{-k}}{(z-z_0)^k} \quad (C_{-k} \neq 0 \ \text{ για } \ k \geq 1)\,. \tag{1.134}$$

Διαπιστώνουμε αμέσως ότι η συνάρτηση

$$\varphi(z) = (z-z_0)^k f(z) = \tag{1.135}$$

$$= (z-z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} C_n\,(z-z_0)^n + C_{-1}\,(z-z_0)^{k-1} + C_{-2}\,(z-z_0)^{k-2} + ... + C_{-k} \tag{1.136}$$

είναι αναλυτική στο $z = z_0$.

Γράφοντας στη συνέχεια την $f(z)$ ως

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^k}\,, \tag{1.137}$$

αντιλαμβανόμαστε ότι η $f(z)$ δεν έχει πεπερασμένη τιμή στο $z = z_0$. Πράγματι, είναι $|f(z)| \to \infty$ καθώς $|z-z_0| \to 0$ και κάνουμε λόγο για πόλο ή πολική ιδιομορφία της συνάρτησης $f(z)$ στο σημείο z_0. Ισοδύναμα, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση $1/f(z)$ έχει ρίζα στο z_0 με πολλαπλότητα k (αφού $\varphi(z_0) = C_{-k} \neq 0$).

Από τη μορφή που παίρνει το πρωτεύον μέρος του αναπτύγματος Laurent της συνάρτησης γύρω από το z_0, αντλούμε τη σχετική πληροφορία για την τάξη του πόλου. Έτσι, αν $k = 1$, το z_0 είναι απλός πόλος της συνάρτησης, για $k = 2$ είναι διπλός κ.ο.κ. Στη γενική περίπτωση, λέμε ότι ο πόλος της συνάρτησης στο z_0 είναι τάξης k, εάν $C_{-k} \neq 0$ και συγχρόνως $C_{-m} = 0$ για κάθε $m > k$. Είναι δε αδιάφορο, όσον αφορά το συμπέρασμα για την τάξη του πόλου, εάν κάποιοι ή και όλοι οι συντελεστές C_{-m}, με $1 \leq m < k$, είναι μηδενικοί ή μη.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να απαριθμήσουμε τρία ισοδύναμα κριτήρια για τον εντοπισμό των πολικών ιδιομορφιών μιας συνάρτησης. Ένα σημείο z_0 αποτελεί πόλο της συνάρτησης $f(z)$, εάν διαπιστώσουμε ότι ισχύει τουλάχιστον ένα από τα παρακάτω:

1. $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.
2. $\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^k f(z) = A \neq 0 \qquad$ (πόλος τάξης k) .
3. Το σημείο z_0 είναι ρίζα της συνάρτησης $1/f(z)$. Η πολλαπλότητα της ρίζας είναι ίση με την τάξη του πόλου στο z_0 για την $f(z)$.

Πριν κλείσουμε αυτή την παράγραφο, αξίζει να σημειωθεί ότι με επιχειρήματα παρόμοια εκείνων που οδήγησαν στο συμπέρασμα της παρ. 1.11, δηλαδή ότι οι ρίζες μια αναλυτικής συνάρτησης αποτελούν μεμονωμένα σημεία, μπορεί να δειχτεί ότι και οι πόλοι μιας αναλυτικής συνάρτησης είναι *μεμονωμένες ιδιομορφίες*.

1.13 Ουσιώδη ιδιόμορφα σημεία

Λέμε ότι μια συνάρτηση εμφανίζει ένα *ουσιώδες ιδιόμορφο σημείο* ή *ουσιώδη ιδιομορφία* στο $z = z_0$, εάν το πρωτεύον μέρος του αναπτύγματος Laurent της συνάρτησης γύρω από αυτό το σημείο αποτελείται από άπειρο αριθμό όρων.

Στην περιοχή μιας ουσιώδους ιδιομορφίας η συμπεριφορά της συνάρτησης είναι «απρόβλεπτη», διότι η συνάρτηση μεταβάλλεται γρήγορα. Η τιμή της συνάρτησης εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζεται το ουσιώδες ιδιόμορφο σημείο. Γενικότερα, δεν μπορεί να γίνει λόγος για το όριο της συνάρτησης στο ουσιώδες ιδιόμορφο σημείο.

Συνήθη παραδείγματα συναρτήσεων που έχουν ουσιώδη ιδιόμορφα σημεία είναι συναρτήσεις όπως $\exp(1/z)$ και $\sin(1/z)$. Βρίσκουμε, πράγματι, ότι το πρωτεύον μέρος των αντίστοιχων αναπτυγμάτων Laurent γύρω από το σημείο $z = 0$ αποτελείται από άπειρο αριθμό όρων. Έτσι, για την εκθετική συνάρτηση γνωρίζουμε ότι αυτή είναι αναλυτική στο μιγαδικό επίπεδο και αναπαρίσταται από το ανάπτυγμα Taylor της Εξ. (1.106), το οποίο ξαναγράφουμε εδώ για ευκολία:

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}\,z^2 + \frac{1}{3!}\,z^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,z^n,, \qquad (\text{με ακτίνα σύγκλισης } \ |z| < \infty)\,. \tag{1.138}$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $z \to 1/z$ (για $z \neq 0$), η Εξ. (1.138) μπορεί χωρίς πρόβλημα να γραφτεί με τη μορφή

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\,\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\,\frac{1}{z^3} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{1}{z^n} \tag{1.139}$$

Η Εξ. (1.139) είναι το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης γύρω από το σημείο $z = 0$ και παρατηρούμε ότι το πρωτεύον μέρος του αποτελείται από άπειρο αριθμό όρων. Παρόμοια, για τη συνάρτηση $\sin(1/z)$, παίρνουμε:

$$\sin(1/z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\,\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\,\frac{1}{z^5} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,\frac{1}{z^{2n+1}}\,. \tag{1.140}$$

Από τα προηγούμενα παραδείγματα σημειώνεται ότι, για το μεν πρώτο από αυτά, το αναλυτικό μέρος έχει μόνο έναν όρο, για το δε δεύτερο, κανένα. Γενικά, η παρουσία ή μη όρων του αναλυτικού μέρους δεν επηρεάζει το συμπέρασμα σχετικά με το είδος της ιδιομορφίας. Όπως, επίσης, μπορούμε να σημειώσουμε για τη συνάρτηση $\sin(1/z)$, ότι από το πρωτεύον μέρος της λείπει μια σειρά όρων (αυτοί που αντιστοιχούν σε άρτιο εκθέτη), χωρίς, όμως, αυτό να έχει επίπτωση στο τελικό συμπέρασμα ότι, δηλαδή το σημείο $z = 0$ είναι ουσιώδες ιδιόμορφο σημείο.

1.14 Ιδιομορφίες στο $z = \infty$

Καταρχάς, ορίζουμε τη γειτονιά του σημείου στο $z = \infty$ ως την περιοχή που βρίσκεται εξωτερικά κλειστής κυκλικής περιφέρειας με ακτίνα R και κέντρο την αρχή των αξόνων.

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής

$$\zeta = \frac{1}{z}\,, \tag{1.141}$$

το σημείο $z = \infty$ μεταφέρεται στο σημείο $\zeta = 0$ του μιγαδικού επιπέδου-ζ. Η ως άνω ορισμένη γειτονιά του $z = \infty$ για $|z| > R$, μετατρέπεται έτσι στη γειτονιά $|\zeta| < 1/R$, γύρω από την αρχή των αξόνων στο επίπεδο-ζ. Επίσης, για μια συνάρτηση $f(z)$, μέσω της Εξ. (1.141), θα έχουμε:

$$f(z) = g(\zeta)\,, \tag{1.142}$$

με συνέπεια, εάν το $\zeta = 0$ είναι ομαλό σημείο της συνάρτησης $g(\zeta)$, τότε και το $z = \infty$ είναι ομαλό σημείο της συνάρτησης $f(z)$. Από αυτό έπεται ότι το ανάπτυγμα της $f(z)$ γύρω από το $z = \infty$ θα είναι τύπου Taylor και θα δίνεται από τη σχέση:[17]

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{z^n}\,, \qquad (|z| > R) \tag{1.143}$$

επειδή, ακριβώς, το αντίστοιχο ανάπτυγμα της $g(\zeta)$ γύρω από το ομαλό σημείο $\zeta = 0$ δίνεται από την ανάλογη σχέση

$$g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n\, \zeta^n\,, \qquad (|\zeta| < 1/R)\,. \tag{1.144}$$

Αντίθετα, εάν το $\zeta = 0$ είναι πόλος k-τάξης της $g(\zeta)$, τότε το $z = \infty$ είναι επίσης πόλος ίδιας τάξης για τη συνάρτηση $f(z)$ και το αντίστοιχο ανάπτυγμα Laurent θα είναι της μορφής $f(z) \sim z^k$.

Τέλος, εάν το $\zeta = 0$ αποτελεί ουσιώδες ιδιόμορφο σημείο της $g(\zeta)$, δηλαδή το πρωτεύον μέρος του αναπτύγματος Laurent αποτελείται από άπειρο αριθμό όρων του τύπου ζ^{-n}, τότε και το $z = \infty$ είναι ουσιώδες ιδιόμορφο σημείο για την $f(z)$ και το αντίστοιχο ανάπτυγμα Laurent θα αποτελείται από άπειρο αριθμό δυνάμεων της μορφής z^n.

[17]Να προσεχτεί ότι, παρόλο που πρόκειται για ανάπτυγμα Taylor, οι δυνάμεις έχουν αρνητικό εκθέτη, ακριβώς επειδή το ανάπτυγμα αναφέρεται στο $z = \infty$.

1.15 Απαλείψιμες ιδιομορφίες

Δεν είναι καθόλου σπάνιο φαινόμενο συναρτήσεις που παρουσιάζουν φαινομενικά (δηλαδή σε πρώτη ματιά) πόλο σε κάποιο σημείο του μιγαδικού επιπέδου, στην πραγματικότητα να είναι ομαλές στο σημείο αυτό. Ένα πολύ κοινό παράδειγμα είναι η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}\,, \tag{1.145}$$

για την οποία το σημείο $z = 0$ δεν είναι πόλος, αφού, όπως μπορεί να δειχτεί είτε με εφαρμογή του κανόνα L' Hopital είτε μέσω του αναπτύγματος σε σειρά Taylor του αριθμητή στο $z = 0$, η συνάρτηση είναι καλά ορισμένη στο εν λόγω σημείο. Μάλιστα,

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1\,. \tag{1.146}$$

Σε αυτή και σε ανάλογες περιπτώσεις κάνουμε λόγο για *απαλείψιμη ιδιομορφία.* Ο τρόπος με τον οποίον εντοπίζονται τα ενδεχόμενα απαλείψιμα σημεία είναι, όπως ακριβώς αναφέρθηκε στην περίπτωση του προηγούμενου παραδείγματος, είτε με χρήση του κανόνα L'Hopital είτε με χρήση κατάλληλων αναπτυγμάτων Taylor της συνάρτησης γύρω από το επίμαχο σημείο.

1.16 Μη μεμονωμένα ιδιόμορφα σημεία

Ενδέχεται να παρουσιαστεί η περίπτωση αναλυτικής συνάρτησης, όπου κάποιο $\tilde{z}$ αποτελεί σημείο συσσώρευσης μεμονωμένων ιδιομορφιών. Πρέπει να παρατηρήσουμε, καταρχάς, ότι το σημείο $\tilde{z}$ δεν μπορεί να είναι ομαλό, επειδή σε αυτή την περίπτωση θα ήταν δυνατή η θεώρηση κύκλου με κέντρο το σημείο αυτό και ακτίνα τέτοια, ώστε στο εσωτερικό του κύκλου να βρίσκονται μόνο ομαλά σημεία. Όπως είναι λογικό, επίσης, βάσει της υπόθεσης, το $\tilde{z}$ δεν μπορεί να είναι ούτε μεμονωμένο σημείο ιδιομορφίας. Πρόκειται, αντίθετα, για *μη μεμονωμένο* σημείο ιδιομορφίας.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$\cot(1/z) = \frac{\cos(1/z)}{\sin(1/z)} \tag{1.147}$$

έχει απλούς πόλους στα σημεία των ριζών του παρανομαστή, δηλαδή στα σημεία $z = 1/(m\pi)$ (m ακέραιος). Με αποτέλεσμα, για μεγάλες τιμές του m, το σημείο $z = 0$ να γίνει σημείο συσσώρευσης των πόλων κι έτσι να χαρακτηριστεί ως σημείο μη μεμονωμένης ιδιομορφίας της συνάρτησης.
Ένα άλλο σχετικό παράδειγμα προσφέρεται από τη συνάρτηση $\cot z$ και αφορά το σημείο στο άπειρο, $z = \infty$. Διαπιστώνεται ότι και εδώ έχουμε την περίπτωση μη μεμονωμένου σημείου συσσώρευσης απλών πόλων. Πράγματι, κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $\zeta = 1/z$, η συνάρτηση που προκύπτει είναι η $\cot(1/\zeta)$, η οποία είναι ακριβώς η συνάρτηση του προηγούμενου παραδείγματος. Συνεπώς, αφού το $\zeta = 0$ είναι μη μεμονωμένο ιδιόμορφο σημείο, συνεπάγεται το ίδιο και για το $z = \infty$.

1.17 Τύποι μιγαδικών συναρτήσεων

Οι μιγαδικές συναρτήσεις μπορούν να ταξινομηθούν ανάλογα με την ύπαρξη και το είδος των σημείων ιδιομορφίας που παρουσιάζουν. Γενικά, έχουμε τους ακόλουθους τύπους μιγαδικών συναρτήσεων.

Ακέραια συνάρτηση: μιγαδική συνάρτηση, η οποία δεν έχει καμία ιδιομορφία στο μιγαδικό επίπεδο, $|z| < \infty$. Η ακέραια συνάρτηση αναπαρίσταται από σειρά δυνάμεων με θετικούς εκθέτες και έχει άπειρη ακτίνα σύγκλισης.

Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι ακέραια συνάρτηση. Ο μοναδικός πόλος της εντοπίζεται στο $z = \infty$ και η τάξη του είναι ίση με τον βαθμό του πολυωνύμου.

Εάν το ανάπτυγμα σε σειρά δυνάμεων της ακέραιας συνάρτησης αποτελείται από άπειρο αριθμό όρων, τότε το σημείο στο άπειρο, $z = \infty$, είναι μεμονωμένη ουσιώδης ιδιομορφία της συνάρτησης. (Αυτός ο τύπος συνάρτησης ονομάζεται *υπερβατική ακέραια συνάρτηση.*)

Ρητή συνάρτηση: μιγαδική συνάρτηση, η οποία δεν παρουσιάζει καμία ουσιώδη ιδιομορφία, ούτε για πεπερασμένο z ούτε για $z = \infty$, αλλά μόνο πολικές ιδιομορφίες. Ο λόγος δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων είναι μια ρητή συνάρτηση.

Μερόμορφη συνάρτηση: μιγαδική συνάρτηση, η οποία σε περιορισμένη περιοχή του μιγαδικού επιπέδου εμφανίζει μόνο πολικές ιδιομορφίες, ενώ, εάν είναι ορισμένη σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο, μπορεί να έχει πεπερασμένο ή άπειρο αριθμό πόλων και μια ουσιώδη ιδιομορφία στο $z = \infty$.

1.18 Ολοκληρωτικό υπόλοιπο

Έστω z_0 ένα μεμονωμένο ιδιόμορφο σημείο της αναλυτικής συνάρτησης $f(z)$. Ορίζουμε ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z)$ στο σημείο z_0 και συμβολίζουμε με

$$[\mathrm{Res}\, f(z)]_{z=z_0} \tag{1.148}$$

την ακόλουθη ποσότητα

$$\boxed{[\mathrm{Res}\, f(z)]_{z=z_0} = \frac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)\, dz} \tag{1.149}$$

όπου c τυχαία κλειστή καμπύλη που ανήκει στην περιοχή αναλυτικότητας της $f(z)$, είναι θετικά προσανατολισμένη, δηλαδή η φορά της είναι αντίθετη των δεικτών του ρολογιού[18] και περικλείει *μόνο* το σημείο ιδιομορφίας z_0 (και κανένα άλλο).

[18] Ισοδύναμα, η θετική φορά ορίζεται ως εξής: κινούμενοι πάνω στην καμπύλη, το εσωτερικό της βρίσκεται πάντα στα αριστερά. Αν το εσωτερικό της καμπύλης βρίσκεται στα δεξιά, τότε η φορά της καμπύλης ορίζεται ως αρνητική.

Θυμίζουμε ότι, χάρη στο θεώρημα του Cauchy σε πολλαπλά συνεκτικούς τόπους, το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους της Εξ. (1.149), οπότε και το ολοκληρωτικό υπόλοιπο, είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της κλειστής καμπύλης ολοκλήρωσης, αρκεί αυτή να βρίσκεται στην περιοχή αναλυτικότητας της $f(z)$ και να περικλείει το z_0. Αντικαθιστώντας την $f(z)$ με το ανάπτυγμα Laurent γύρω από το σημείο z_0, δηλαδή

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \frac{C_{-1}}{(z - z_0)} + \frac{C_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{C_{-3}}{(z - z_0)^3} + \dots , \tag{1.150}$$

βλέπουμε ότι ο μοναδικός όρος που επιβιώνει είναι αυτός που αντιστοιχεί στον συντελεστή C_{-1}. Το συμπέρασμα αυτό γίνεται αμέσως φανερό, εάν θυμηθούμε το αποτέλεσμα (1.88) της παρ. 1.8.1.

Επομένως, το ολοκληρωτικό υπόλοιπο μιας συνάρτησης σε ένα σημείο z_0 ισούται με τον συντελεστή C_{-1} του αναπτύγματος Laurent της συνάρτησης γύρω από το z_0, δηλαδή είναι:

$$\boxed{[\mathrm{Res}\, f(z)]_{z=z_0} = C_{-1}} \tag{1.151}$$

Ας πάρουμε, τώρα, την περίπτωση όπου το z_0 είναι πόλος $k-$τάξης της $f(z)$. Όπως είδαμε στην παρ. 1.12.1 το πρωτεύον μέρος του αναπτύγματος Laurent της συνάρτησης αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό όρων και θα δίνεται γενικά από τη σχέση

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \frac{C_{-1}}{(z - z_0)} + \frac{C_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots \frac{C_{-k}}{(z - z_0)^k} \quad (k \geq 1)\,. \tag{1.152}$$

Στη συνέχεια γράφουμε την ισοδύναμη έκφραση για την ανωτέρω εξίσωση:

$$(z - z_0)^k f(z) = (z - z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + C_{-1} (z - z_0)^{k-1} + C_{-2} (z - z_0)^{k-2} + \dots + C_{-k}\,. \tag{1.153}$$

Με διαδοχικές $(k-1)$ παραγωγίσεις και των δύο μελών της Εξ. (1.153) και παίρνοντας κατόπιν το όριο $z \to z_0$, καταλήγουμε στη σχέση:

$$C_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \Big((z - z_0)^k f(z) \Big) \right] \tag{1.154}$$

δηλαδή, μέσω της σχέσης (1.151), θα είναι:

$$\boxed{[\mathrm{Res}\, f(z)]_{z=z_0} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \Big((z - z_0)^k f(z) \Big) \right]} \tag{1.155}$$

Για παράδειγμα, εάν ο πόλος στο z_0 είναι πρώτης τάξης (δηλαδή $k = 1$ στον τύπο (1.155)), το αντίστοιχο ολοκληρωτικό υπόλοιπο θα δίνεται από τη σχέση:

$$[\mathrm{Res}\, f(z)]_{z=z_0} = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0) f(z)]\,. \tag{1.156}$$

Αξίζει να προσεχθεί το ακόλουθο λεπτό σημείο (βλ. παρακάτω και, επίσης, την **Ασκ. 1.14**). Θεωρώντας, για παράδειγμα, κλειστή καμπύλη με αρνητική φορά, αυτή λαμβάνεται ως θετική ως προς το σημείο στο άπειρο.

1.19 Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων

Θεωρούμε το ακόλουθο ολοκλήρωμα

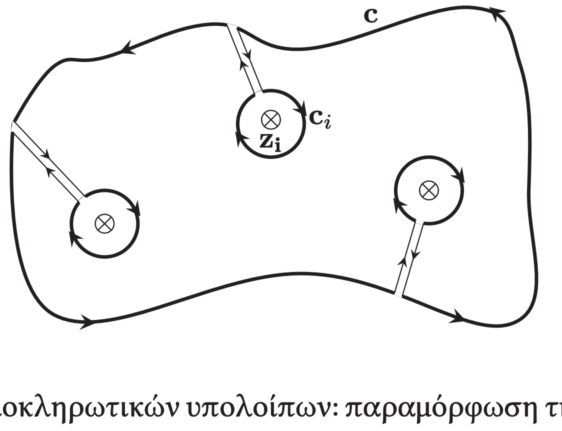
$$\oint_c f(z)\,dz \tag{1.157}$$

με $f(z)$ αναλυτική συνάρτηση σε περιοχή D του μιγαδικού επιπέδου, με εξαίρεση έναν αριθμό σημείων, έστω $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, τα οποία είναι μεμονωμένα σημεία ιδιομορφίας της συνάρτησης. Η κλειστή καμπύλη c είναι θετικά προσανατολισμένη, βρίσκεται ολόκληρη στο εσωτερικό της περιοχής D και περικλείει τα σημεία $z_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Με γενίκευση του αποτελέσματος (1.83) της παρ. 1.8, που αφορά πολλαπλά συνεκτικές περιοχές, η καμπύλη ολοκλήρωσης c μπορεί να παραμορφωθεί κατάλληλα, βλ. Σχ. 1.11, έτσι ώστε να σχηματιστούν «οριακά» κλειστές καμπύλες γύρω από τα σημεία z_i. Για ευκολία, θα θεωρήσουμε ως κλειστές καμπύλες n κύκλους c_i, με αντίστοιχα κέντρα τα σημεία z_i και ακτίνες τέτοιες, ώστε στο εσωτερικό του κάθε κύκλου να μην περικλείεται κανένα άλλο από τα υπόλοιπα σημεία ιδιομορφίας της συνάρτησης. Έτσι, το ολοκλήρωμα (1.157) μπορεί να γραφτεί ως το άθροισμα των ολοκληρωμάτων πάνω στις κυκλικές περιφέρειες c_i. Δηλαδή, θα πάρουμε:

$$\oint_c f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{c_i} f(z)\,dz\,. \tag{1.158}$$

Καθένα από τα ολοκληρώματα του δευτέρου μέλους είναι ανάλογο του αντίστοιχου ολοκληρωτικού υπολοίπου, βλ. Εξ. (1.149) και τελικά θα πάρουμε τη σχέση

$$\boxed{\oint_c f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \left[\mathrm{Res}\, f(z)\right]_{z=z_i}} \tag{1.159}$$



Σχήμα 1.11: Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων: παραμόρφωση της καμπύλης ολοκλήρωσης c γύρω από τα σημεία ιδιομορφίας της ολοκληρωτέας συνάρτησης.

η οποία αποτελεί το συμπέρασμα του λεγόμενου θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων.

Αξίζει να τονιστεί ότι, μέσω του θεωρήματος αυτού, η τιμή ενός μιγαδικού ολοκληρώματος πάνω σε κλειστή καμπύλη εξαρτάται αποκλειστικά από ποσότητες που έχουν «τοπικό» χαρακτήρα, δηλαδή τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα στις μεμονωμένες ιδιομορφίες της συνάρτησης, οι οποίες βρίσκονται στο εσωτερικό της καμπύλης ολοκλήρωσης.

Θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα (1.159) για να αποδείξουμε ένα πολύ ενδιαφέρον θεώρημα.

■ *Για μια συνάρτηση $f(z)$, η οποία είναι αναλυτική με εξαίρεση έναν πεπερασμένο αριθμό από μεμονωμένα ιδιόμορφα σημεία, το άθροισμα όλων των ολοκληρωτικών υπολοίπων, συμπεριλαμβανομένου και του ολοκληρωτικού υπολοίπου στο σημείο στο άπειρο, ισούται με μηδέν.*

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα θεωρήσουμε κλειστή καμπύλη c, η οποία δεν διέρχεται από καμία ιδιομορφία της $f(z)$ και θα υποθέσουμε, επίσης, ότι περικλείει όλα τα ιδιόμορφα σημεία, πλην αυτού στο σημείο στο άπειρο. Σύμφωνα με το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων, Εξ. (1.159), θα έχουμε

$$\oint_c f(z)\,dz = 2\pi i \sum_i \left[\mathrm{Res}\, f(z)\right]_{z=z_i} . \tag{1.160}$$

Όσον αφορά την ιδιομορφία στο σημείο στο άπειρο, αυτή βρίσκεται εξωτερικά της c. Παραπέμποντας στην υποσημείωση της σελίδας 36, υπενθυμίζουμε ότι ως προς το σημείο στο άπειρο, η καμπύλη διατρέχεται κατά την αρνητική φορά. Συνεπώς, πάλι με εφαρμογή του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων, θα πάρουμε:

$$\oint_c f(z)\,dz = -2\pi i \left[\mathrm{Res}\, f(z)\right]_{z=\infty} , \tag{1.161}$$

όπου το πρόσημο μείον στο δεύτερο μέλος οφείλεται στην αρνητική φορά της καμπύλης του ολοκληρώματος. Με αφαίρεση κατά μέλη των Εξ. (1.160) και (1.161), φτάνουμε στο συμπέρασμα του θεωρήματος:

$$\sum \left[\mathrm{Res}\, f(z)\right]_{z=z_i,\infty} = 0 . \tag{1.162}$$

Το θεώρημα αποδεικνύεται πολύ χρήσιμο στην πράξη, αφού παρέχει συχνά ένα βολικό τρόπο για τον υπολογισμό του ολοκληρωτικού υπολοίπου στο σημείο $z=\infty$. Πράγματι, εάν είναι γνωστές οι τιμές των ολοκληρωτικών υπολοίπων σε όλες τις μεμονωμένες πεπερασμένες ιδιομορφίες της συνάρτησης, τότε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο $z=\infty$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\left[\mathrm{Res}\, f(z)\right]_{z=\infty} = - \sum_{\text{πεπερ. ιδιομ.}} \left[\mathrm{Res}\, f(z)\right]_{z=z_i} . \tag{1.163}$$

Σχετικά με τη γενική διαπραγμάτευση που αφορά τον άμεσο υπολογισμό του ολοκληρωτικού υπολοίπου στο σημείο στο άπειρο, ο αναγνώστης παραπέμπεται στην **Ασκ. 1.14** της σελ. 79.

1.12 Να προσδιοριστούν οι συντελεστές C_n με $n = -1, 0, 1$ του αναπτύγματος Laurent με κέντρο το σημείο $z_0 = 0$ για τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

σε καθεμία από τις περιοχές του μιγαδικού επιπέδου στις οποίες το ανάπτυγμα υπάρχει.

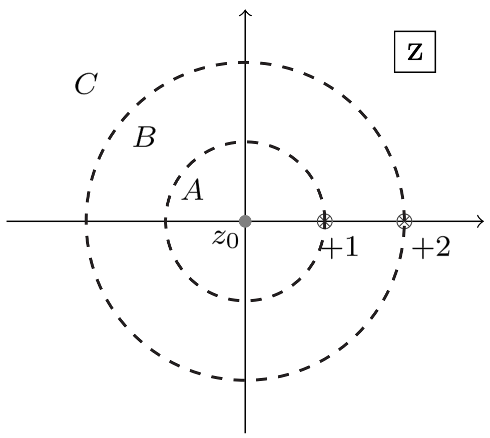
Τα σημεία $z = 1$ και $z = 2$ είναι απλοί πόλοι της $f(z)$. Το κέντρο του αναπτύγματος βρίσκεται στο $z_0 = 0$ και σε συνδυασμό με τις θέσεις των ιδιομορφιών στο μιγαδικό επίπεδο ορίζονται τρεις δακτύλιοι A, B και C οι οποίοι αντιστοιχούν σε $|z| < 1, 1 < |z| < 2$ και $|z| > 2$ (βλ. Σχ. 1.18), στους οποίους το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης δύναται να οριστεί. Το κέντρο του αναπτύγματος είναι ένα ομαλό σημείο της $f(z)$, επομένως το ανάπτυγμα στον κυκλικό δίσκο A θα είναι τύπου Taylor. Γνωρίζουμε ότι η γενική σχέση που δίνει τους συντελεστές του αναπτύγματος Laurent είναι

$$C_n^X = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_X} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz, \tag{1.263}$$

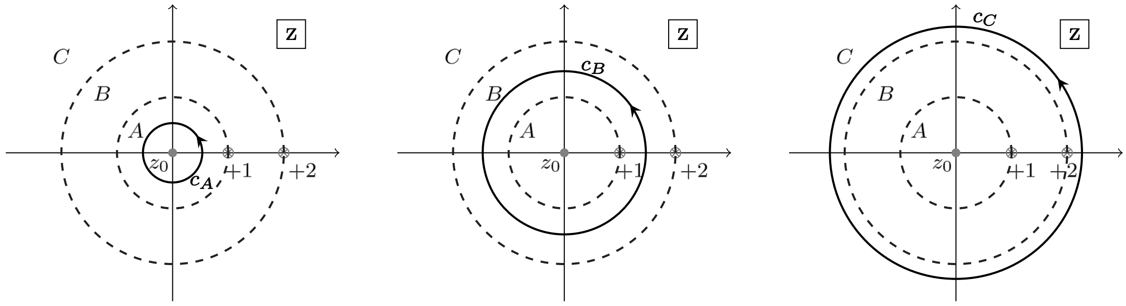
η οποία για τη συγκεκριμένη $f(z)$ και $z_0 = 0$ γράφεται

$$C_n^X = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_X} \frac{1}{(z-1)(z-2)} \frac{1}{z^{n+1}}\, dz\,. \tag{1.264}$$

Με X συμβολίζονται οι κυκλικοί δακτύλιοι A, B και C, με n δηλώνεται η τάξη του συντελεστή και c_X είναι κυκλική περιφέρεια με κέντρο το $z_0 = 0$ και θετική φορά, η οποία βρίσκεται εντός της περιοχής X (A, B, C) του μιγαδικού επιπέδου (βλ. τα τρία διαδοχικά σχήματα του Σχ. 1.19).



Σχήμα 1.18: Κέντρο αναπτύγματος Laurent $z_0 = 0$ και απλοί πόλοι της $f(z)$ στα σημεία $z = 1$ και $z = 2$. Το ανάπτυγμα Laurent ορίζεται στους τρεις δακτύλιους A, B και C.



Σχήμα 1.19: Το Σχ. 1.18 με την προσθήκη των κυκλικών περιφερειών c_A, c_B, c_C αντίστοιχα, από αριστερά προς τα δεξιά.

Στον κυκλικό δίσκο A ($|z| < 1$) με $n = -1$, ο αντίστοιχος συντελεστής του αναπτύγματος είναι

$$C^A_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_A} \frac{1}{(z-1)(z-2)} \, dz = 0 \, , \tag{1.265}$$

όπως απορρέει από το θεώρημα του Cauchy, αφού η καμπύλη δεν περιλαμβάνει κανέναν πόλο της ολοκληρωτέας συνάρτησης. Με άλλα λόγια, το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο σημείο $z = 0$ είναι μηδέν, επειδή πρόκειται για ομαλό σημείο της $f(z)$. Δεν είναι, άλλωστε, δύσκολο να επιβεβαιωθεί ότι όλοι οι συντελεστές με $n < -1$ μηδενίζονται. Έτσι, για τον κυκλικό δίσκο A ($|z| < 1$) φτάνουμε εύκολα στο γενικό αποτέλεσμα

$$C^A_{n\leq -1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_A} dz \frac{1}{(z-1)(z-2)} z^{|n|-1} = 0 \, . \tag{1.266}$$

Έπειτα, για $n = 0$, με χρήση του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων για τον πόλο της ολοκληρωτέας συνάρτησης στο σημείο $z = 0$, είναι

$$\begin{aligned} C^A_0 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_A} \frac{1}{(z-1)(z-2)} \frac{1}{z} \, dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} (2\pi i) \left[\text{Res} \left(\frac{1}{(z-1)(z-2)z} \right) \right]_{z=0} = \\ &= \lim_{z \to 0} \left[z \frac{1}{(z-1)(z-2)z} \right] = \\ &= \lim_{z \to 0} \left[\frac{1}{(z-1)(z-2)} \right] = \frac{1}{2} \, . \end{aligned} \tag{1.267}$$

Επίσης, για $n = 1$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
C_1^A &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_A} \frac{1}{(z-1)(z-2)}\frac{1}{z^2}\,dz = \\
&= \frac{1}{2\pi i}(2\pi i)\left[\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-1)(z-2)z^2}\right)\right]_{z=0} \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2\frac{1}{(z-1)(z-2)z^2}\right] = \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z-1)(z-2)}\right] = \\
&= \lim_{z\to 0}\left(-\frac{1}{(z-1)^2(z-2)} - \frac{1}{(z-1)(z-2)^2}\right) = \frac{3}{4}\,.
\end{aligned} \tag{1.268}$$

Περνάμε, τώρα, στον υπολογισμό των ζητούμενων συντελεστών του αναπτύγματος για τον κυκλικό δακτύλιο B ($1 < |z| < 2$). Είναι

$$C_n^{\mathrm{B}} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_{\mathrm{B}}} \frac{1}{(z-1)(z-2)}\frac{1}{z^{n+1}}\,dz\,, \tag{1.269}$$

με c_B κλειστή κυκλική καμπύλη που περιλαμβάνει στο εσωτερικό της τον απλό πόλο στο $z = 1$ (βλ. μεσαίο σχήμα του Σχ. 1.19) και βέβαια το σημείο $z = 0$. Εντούτοις, πρέπει να παρατηρηθεί ότι για τις τιμές του n, για τις οποίες το $z = 0$ αποτελεί πόλο της ολοκληρωτέας συνάρτησης, η αντίστοιχη συνεισφορά έχει ήδη ληφθεί υπόψην κατά τον υπολογισμό των αντίστοιχων συντελεστών C_n^A. Επομένως, για τους συντελεστές C_n^{B} μπορούμε να γράψουμε

$$C_n^{\mathrm{B}} = C_n^A + \frac{1}{2\pi i}\oint_{c(1,\epsilon)} dz\frac{1}{(z-1)(z-2)}\frac{1}{z^{n+1}}\,dz\,, \tag{1.270}$$

όπου $c(1,\epsilon)$ είναι κύκλος με κέντρο το σημείο $z = 1$ και ακτίνα ϵ (οσοδήποτε μικρή). Με βάση την παραπάνω συζήτηση, θα πάρουμε:

$$\begin{aligned}
C_{-1}^{\mathrm{B}} &= C_{-1}^A + \frac{1}{2\pi i}\oint_{c(1,\epsilon)} \frac{1}{(z-1)(z-2)}\,dz = \\
&= 0 + \frac{1}{2\pi i}(2\pi i)\left[\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-1)(z-2)}\right)\right]_{z=1} = \\
&= \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{1}{(z-1)(z-2)}\right] = \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{1}{z-2} = -1,
\end{aligned} \tag{1.271}$$

$$\begin{aligned}
C_0^{\mathrm{B}} &= C_0^A + \frac{1}{2\pi i}\oint_{c(1,\epsilon)} \frac{1}{(z-1)(z-2)}\frac{1}{z}\,dz = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i}(2\pi i)\left[\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z-1)(z-2)z}\right)\right]_{z=1} = \\
&= \frac{1}{2} + \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{1}{(z-1)(z-2)z}\right] = \\
&= \frac{1}{2} + \lim_{z\to 1}\frac{1}{(z-2)z} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2},
\end{aligned} \tag{1.272}$$

$$\begin{aligned}
C_1^{\mathrm{B}} &= C_1^A + \frac{1}{2\pi i}\oint_{c(1,\epsilon)} \frac{1}{(z-1)(z-2)}\frac{1}{z^2}\,dz = \\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi i}(2\pi i)\left[\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z-1)(z-2)z^2}\right)\right]_{z=1} = \\
&= \frac{3}{4} + \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{1}{(z-1)(z-2)z^2}\right] = \\
&= \frac{3}{4} + \lim_{z\to 1}\frac{1}{(z-2)z^2} = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}.
\end{aligned} \tag{1.273}$$

Εργαζόμαστε με παρόμοιο τρόπο για τους συντελεστές του αναπτύγματος στον δακτύλιο C ($|z| > 2$), οι οποίοι δίνονται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
C_n^C &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_C} \frac{1}{(z-1)(z-2)}\frac{1}{z^{n+1}} = \\
&= C_n^B + \frac{1}{2\pi i}\oint_{c(2,\epsilon)} \frac{1}{(z-1)(z-2)}\frac{1}{z^{n+1}}\,dz,
\end{aligned} \tag{1.274}$$

όπου c_C είναι η κλειστή καμπύλη που απεικονίζεται στο δεξί σχήμα του Σχ. 1.19, η οποία περικλείει, εκτός από τον πόλο στο $z = 1$ και τον ενδεχόμενο πόλο της ολοκληρωτέας συνάρτησης στο $z = 0$, τον πόλο στο σημείο $z = 2$. Η συνεισφορά των δύο πρώτων έχει ήδη συμπεριληφθεί στην τιμή του συντελεστή C_n^B, οπότε μένει να υπολογιστεί η συνεισφορά του πόλου στο $z = 2$. Αυτή δίνεται από το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στον κύκλο $c(2, \epsilon)$, ο οποίος έχει κέντρο στο $z = 2$ και ακτίνα ϵ (οσοδήποτε μικρή). Επομένως, για $n = -1, 0$ και 1, θα πάρουμε:

$$\begin{aligned}
C_{-1}^C &= C_{-1}^B + \frac{1}{2\pi i}\oint_{c(2,\epsilon)} \frac{1}{(z-1)(z-2)}\,dz \\
&= -1 + \frac{1}{2\pi i}(2\pi i)\left[\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z-1)(z-2)}\right)\right]_{z=2} = \\
&= -1 + \lim_{z\to 2}\left[(z-2)\frac{1}{(z-1)(z-2)}\right] =
\end{aligned}$$

$$= -1 + \lim_{z\to 2} \frac{1}{z-1} = -1 + 1 = 0, \tag{1.275}$$

$$\begin{aligned}
C_0^C &= C_0^B + \frac{1}{2\pi i} \oint_{c(2,\epsilon)} \frac{1}{(z-1)(z-2)} \frac{1}{z}\, dz = \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i}(2\pi i) \left[\text{Res}\left(\frac{1}{(z-1)(z-2)z}\right)\right]_{z=2} = \\
&= -\frac{1}{2} + \lim_{z\to 2} \left[(z-2)\frac{1}{(z-1)(z-2)z}\right] = \\
&= -\frac{1}{2} + \lim_{z\to 2} \frac{1}{(z-1)z} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0,
\end{aligned} \tag{1.276}$$

$$\begin{aligned}
C_1^C &= C_1^B + \frac{1}{2\pi i} \oint_{c(2,\epsilon)} \frac{1}{(z-1)(z-2)} \frac{1}{z^2}\, dz = \\
&= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi i}(2\pi i) \left[\text{Res}\left(\frac{1}{(z-1)(z-2)z^2}\right)\right]_{z=2} = \\
&= -\frac{1}{4} + \lim_{z\to 2} \left[(z-2)\frac{1}{(z-1)(z-2)z^2}\right] = \\
&= -\frac{1}{4} + \lim_{z\to 2} \frac{1}{(z-1)z^2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0.
\end{aligned} \tag{1.277}$$

Χαρακτηριστικά, όλοι οι όροι του αναπτύγματος Laurent για $|z| > 2$ μπορούν να προσδιοριστούν ως εξής

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \\
&= \frac{1}{z(1-2/z)} - \frac{1}{z(1-1/z)} \qquad \text{(γεωμετρικές σειρές, } |1/z|, |2/z| < 1) \\
&= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^{n+1}} = \sum_{n=-2}^{-\infty} \left(2^{-(n+1)} - 1\right) z^n,
\end{aligned} \tag{1.278}$$

απ' όπου εύκολα συνάγεται ότι $C_n^C = 0$ για $n \geq -1$, ενώ είναι $C_n^C \neq 0$ για $n \leq -2$.

2.7 Να βρεθεί η τιμή του ολοκληρώματος

$$J \equiv \int_0^\infty \frac{\sin 3x}{x(x^2+4)}\,dx$$

με χρήση του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων.

Επειδή η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι άρτια, θα έχουμε

$$J = \frac{1}{2}\int_{\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x(x^2+4)} dx\,. \tag{2.61}$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι το $x = 0$ είναι απαλείψιμη ιδιομορφία της ολοκληρωτέας συνάρτησης, διότι

$$\frac{\sin 3x}{x} = \frac{(3x) - (3x)^3/3! + O(x^5)}{x} = 3 - 3^3x^2/3! + O(x^4)\,. \tag{2.62}$$

Επομένως, για $x \to 0$ είναι $(\sin 3x)/x \to 3$.

Επεκτείνοντας την ολοκληρωτέα συνάρτηση στο μιγαδικό επίπεδο έχουμε

$$f(z) = \frac{\sin 3z}{z(z^2+4)}\,, \tag{2.63}$$

η οποία έχει δύο απλούς πόλους στα σημεία $z = \pm 2i$.

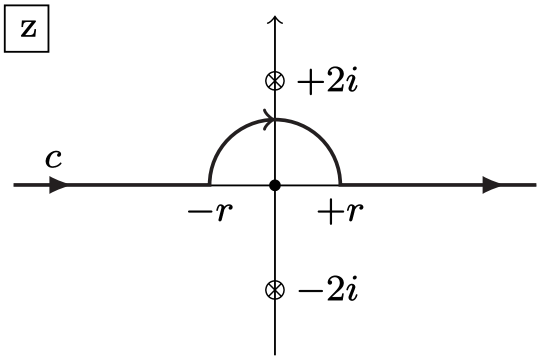
Εκμεταλλευόμενοι το θεώρημα του Cauchy, μπορούμε να επιλέξουμε μία εναλλακτική διαδρομή ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο, η οποία έχει όρια $\pm\infty$, δηλαδή τα ίδια με τα όρια του αρχικού ολοκληρώματος, αλλά είναι σχεδιασμένη έτσι, ώστε να παρακάμπτει την αρχή των αξόνων. Για απλότητα, θεωρούμε παράκαμψη ημικυκλικού σχήματος στο μιγαδικό ημιεπίπεδο με $\operatorname{Im} z > 0$, βλ. Σχ. 2.11. Η ακτίνα r της ημικυκλικής παράκαμψης οφείλει να είναι μικρότερη από την απόσταση που χωρίζει την αρχή των αξόνων από την κοντινότερη ιδιομορφία. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, απαιτείται $|z| < 2$. Έτσι, χάρη στο θεώρημα του Cauchy, για το ολοκλήρωμα J θα ισχύει:

$$J = \frac{1}{2}\int_c \frac{\sin 3z}{z(z^2+4)}\,dz\,. \tag{2.64}$$

Δεδομένου ότι $\sin 3z = (e^{3iz} - e^{-3iz})/2i$, το ανωτέρω ολοκλήρωμα γράφεται ως εξής:

$$J = \frac{1}{4i}\left(\int_c \frac{e^{3iz}}{z(z^2+4)}\,dz - \int_c \frac{e^{-3iz}}{z(z^2+4)}\,dz\right) \equiv \frac{1}{4i}(J_1 - J_2)\,. \tag{2.65}$$

Τα δύο ολοκληρώματα J_1 και J_2 υπολογίζονται με τη βοήθεια του θεωρήματος των ολοκληρωτι-



Σχήμα 2.11: Καμπύλη ολοκλήρωσης c με άκρα $\pm\infty$ στον πραγματικό άξονα (βλ. λεπτομέρειες στο κείμενο).

κών υπολοίπων, με κατάλληλη επιλογή της κλειστής διαδρομής ολοκλήρωσης, βλ. Σχ. 2.12, ώστε να είναι δυνατή η χρήση του λήμματος του Jordan. Θα έχουμε:

$$\oint_{C^+} \frac{e^{3iz}}{z(z^2+4)}\,dz = \int_c \frac{e^{3iz}}{z(z^2+4)}\,dz + \int_{\Gamma^+} \frac{e^{3iz}}{z(z^2+4)}\,dz \equiv J_1 + \int_{\Gamma^+} \frac{e^{3iz}}{z(z^2+4)}\,dz\,, \tag{2.66}$$

$$\oint_{C^-} \frac{e^{-3iz}}{z(z^2+4)}\,dz = \int_c \frac{e^{-3iz}}{z(z^2+4)}\,dz + \int_{\Gamma^-} \frac{e^{-3iz}}{z(z^2+4)}\,dz \equiv J_2 + \int_{\Gamma^-} \frac{e^{-3iz}}{z(z^2+4)}\,dz\,. \tag{2.67}$$

Χάρη στην εφαρμογή του λήμματος του Jordan, τα δύο ολοκληρώματα κατά μήκος των ημικυκλικών περιφερειών $\Gamma^\pm$ μηδενίζονται στο όριο $R \equiv |z| \to \infty$.[9]

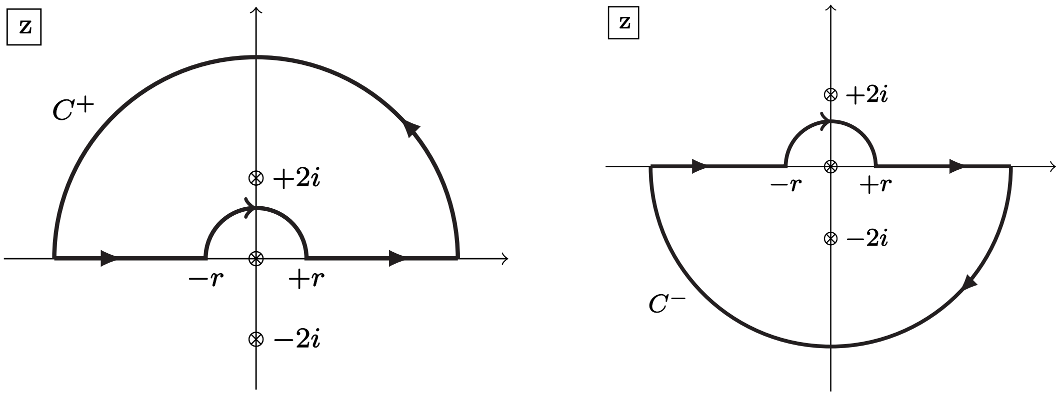
Έτσι, επειδή η καμπύλη C^+ περικλείει τον απλό πόλο στο $z = +2i$ και η καμπύλη C^- τους απλούς πόλους στα σημεία $z = 0, -2i$ (βλ. Σχ. 2.12), με τη βοήθεια του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων παίρνουμε

$$\oint_{C^+} \frac{e^{3iz}}{z(z^2+4)}\,dz = 2\pi i \left[\text{Res}\,\frac{e^{3iz}}{z(z^2+4)}\right]_{z=2i}, \tag{2.68}$$

$$\oint_{C^-} \frac{e^{-3iz}}{z(z^2+4)}\,dz = -2\pi i \left(\left[\text{Res}\,\frac{e^{-3iz}}{z(z^2+4)}\right]_{z=0} + \left[\text{Res}\,\frac{e^{-3iz}}{z(z^2+4)}\right]_{z=-2i} \right), \tag{2.69}$$

όπου το συνολικό πρόσημο μείον στην Εξ. (2.69) οφείλεται στο γεγονός ότι η C^- έχει αρνητική φορά. Υπολογίζουμε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα:

[9]Στη συγκεκριμένη περίπτωση ολοκληρωτέων συναρτήσεων το λήμμα του Jordan βρίσκει εφαρμογή επειδή για $|z| \to \infty$ είναι φανερό ότι $|f(z)| \to 0$, διότι έχουμε $|f(z)| \sim 1/|z|^3$.



Σχήμα 2.12: Οι κλειστές καμπύλες C^+ και C^- στις οποίες υπολογίζονται τα ολοκληρώματα των Εξ. (2.68) και (2.69).

$$\left[\mathrm{Res}\,\frac{e^{3iz}}{z(z^2+4)}\right]_{z=2i} = \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{e^{3iz}}{z(z+2i)(z-2i)} = -\frac{e^{-6}}{8}\,, \tag{2.70}$$

$$\left[\mathrm{Res}\,\frac{e^{-3iz}}{z(z^2+4)}\right]_{z=-2i} = \lim_{z\to -2i}(z+2i)\frac{e^{-3iz}}{z(z+2i)(z-2i)} = -\frac{e^{-6}}{8}\,, \tag{2.71}$$

$$\left[\mathrm{Res}\,\frac{e^{-3iz}}{z(z^2+4)}\right]_{z=0} = \lim_{z\to 0} z\frac{e^{-3iz}}{z(z^2+4)} = \frac{1}{4}\,. \tag{2.72}$$

Επομένως, με βάση τα ανωτέρω αποτελέσματα για τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα, για τις Εξ. (2.68) και (2.69) παίρνουμε

$$\oint_{C^+} \frac{e^{3iz}}{z(z^2+4)}\,dz = 2\pi i\left(-\frac{e^{-6}}{8}\right) = -i\pi\frac{e^{-6}}{4}\,, \tag{2.73}$$

$$\oint_{C^-} \frac{e^{-3iz}}{z(z^2+4)}\,dz = -2\pi i\left(-\frac{e^{-6}}{8}+\frac{1}{4}\right) = i\pi\left(\frac{e^{-6}}{4}-\frac{1}{2}\right)\,. \tag{2.74}$$

Συνεπώς, οι τιμές των ολοκληρωμάτων J_1 και J_2 δίνονται από τις (2.73) και (2.74) αντίστοιχα, κι έτσι, από την Εξ. (2.65) θα πάρουμε το τελικό αποτέλεσμα για το ολοκλήρωμα που μας δόθηκε:

$$J = \frac{1}{4i}(J_1-J_2) = \frac{1}{4i}(i\pi)\left(-\frac{e^{-6}}{4}-\left(\frac{e^{-6}}{4}-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{8}\left(1-e^{-6}\right)\,. \tag{2.75}$$

Κεφάλαιο 7

Ολοκληρωτικός τύπος για συναρτήσεις πινάκων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις τετραγωνικών πινάκων, η μελέτη των οποίων διευκολύνεται σημαντικά, χάρη στην εφαρμογή ενός ολοκληρωτικού τύπου ανάλογου εκείνου του Cauchy για τις μιγαδικές συναρτήσεις.

Το θέμα που θα διαπραγματευτούμε εντάσσεται στη θεματολογία της φασματικής θεωρίας, επομένως, δεν είναι δυνατόν να παρουσιαστεί με την οφειλόμενη αυστηρότητα στις λίγες εισαγωγικές σελίδες του παρόντος κεφαλαίου. Έτσι, θα προσπαθήσουμε να εισαγάγουμε μόνον εκείνες τις έννοιες που απαιτούνται, ώστε να παρουσιαστεί η εφαρμογή του γενικού φορμαλισμού στη μελέτη των συναρτήσεων πινάκων, είτε μονότιμων συναρτήσεων είτε πλειότιμων. Θα δούμε ότι, χάρη σε αυτόν τον φορμαλισμό, ο οποίος αναφέρεται ως φασματική ανάλυση γραμμικών τελεστών,ο υπολογισμός των συναρτήσεων τετραγωνικών πινάκων πραγματοποιείται με συστηματικό τρόπο, χρησιμοποιώντας μερικές βασικές έννοιες και εργαλεία της Ανάλυσης Μιγαδικών Συναρτήσεων και επιπλέον, γίνεται δυνατή η εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με την ιδιότητα της διαγωνοποίησης ενός πίνακα.

Θα ασχοληθούμε με γραμμικούς τελεστές, οι οποίοι ορίζονται σε χώρους πεπερασμένων διαστάσεων στο σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}^n$ (με n πεπερασμένο). Είναι γνωστό ότι, μέσω μιας βάσης διανυσμάτων του n-διάστατου διανυσματικού χώρου, οι τελεστές μπορούν να αναπαρασταθούν με τετραγωνικούς πίνακες $n \times n$. Επομένως, μολονότι στη συζήτηση που ακολουθεί θα κάνουμε λόγο για τελεστές, εντούτοις όλα τα συμπεράσματα θα είναι εφαρμόσιμα στις αναπαραστάσεις τους που είναι ακριβώς τετραγωνικοί πίνακες με μιγαδικά εν γένει στοιχεία.[1]

[1]Σε μερικά σημεία, η ανάπτυξη της θεωρητικής ενότητας ακολουθεί κυρίως την αναφορά [3] της Βιβλιογραφίας του κεφ. 7.

7.1 Επιλύουσα τελεστή

Για ένα γραμμικό τελεστή A, ο οποίος ορίζεται σε n-διάστατο διανυσματικό χώρο, η επιλύουσα τελεστή (*resolvent*) δίνεται από τη σχέση:

$$R(z) = (z\mathbb{1} - A)^{-1}\,, \tag{7.1}$$

με $z \in \mathbb{C}$ και $\mathbb{1}$ ο μοναδιαίος (ή ταυτοτικός) τελεστής.[2]

Η αναπαράσταση σε πίνακα της επιλύουσας τελεστή $R(z)$ είναι τετραγωνικός πίνακας $n \times n$. Επιπλέον, η $R(z)$ μπορεί να ειδωθεί ως μία συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής z. Η συνάρτηση $R(z)$ είναι αναλυτική για κάθε z εκτός από τις τιμές για τις οποίες ο τελεστής $(z\mathbb{1} - A)$ δεν είναι αντιστρέψιμος. Με άλλα λόγια, η $R(z)$ δεν δύναται να οριστεί για τις τιμές λ για τις οποίες ισχύει:

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathbb{1} - A) = 0\,. \tag{7.2}$$

Ως γνωστόν, η (7.2) αποτελεί τη χαρακτηριστική εξίσωση του τελεστή A, μέσω της οποίας προσδιορίζονται οι ιδιοτιμές του.

Χάρη στο θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας το πολυώνυμο

$$P(z) = \det(z\mathbb{1} - A)\,, \tag{7.3}$$

που είναι βαθμού n, έχει n ρίζες στο μιγαδικό επίπεδο, όχι κατ' ανάγκην όλες διαφορετικές μεταξύ τους. Με άλλα λόγια, ενδέχεται κάποιες ή όλες οι ρίζες του πολυωνύμου να έχουν πολλαπλότητα μεγαλύτερη της μονάδας.

Ονομάζουμε φάσμα του τελεστή A και συμβολίζουμε με σ_A το σύνολο των ιδιοτιμών του:

$$\sigma_A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\},\ \ m \leq n\,, \tag{7.4}$$

με αντίστοιχες πολλαπλότητες ιδιοτιμών $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$, οι οποίες υπακούουν στη σχέση:

$$\sum_{i=1}^{m} r_i = n\,, \tag{7.5}$$

έτσι ώστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, το οποίο γράφεται ισοδύναμα ως $\Delta(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{r_i}$, να είναι πολυώνυμο βαθμού n, ως οφείλει.

Στην πράξη, ο προσδιορισμός της επιλύουσας τελεστή με αναπαράσταση τον πίνακα A $(n \times n)$ απαιτεί τον υπολογισμό του αντιστρόφου του πίνακα $(z\mathbb{1} - A)$ $(n \times n)$, ο οποίος όπως γνωρίζουμε δίνεται από τον τύπο:

$$(z\mathbb{1} - A)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(z\mathbb{1} - A)}{\det(z\mathbb{1} - A)}\,, \tag{7.6}$$

[2]Η αναπαράσταση του μοναδιαίου τελεστή σε πίνακα είναι ο μοναδιαίος πίνακας $\mathbb{1}_{n\times n}$.

όπου ο αριθμητής δηλώνει τον συμπληρωματικό πίνακα (*adjugate*) του πίνακα $(z\mathbb{1} - A)$.

Παράδειγμα. Θα προσδιορίσουμε την επιλύουσα ενός γραμμικού τελεστή A που έχει την ακόλουθη αναπαράσταση:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

Σχηματίζουμε τον πίνακα:

$$(z\mathbb{1} - A) = \begin{pmatrix} z & -1 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ -1 & 0 & z \end{pmatrix} \tag{7.8}$$

και θα βρούμε τον αντίστροφό του. Χρειάζεται, πρώτα, να υπολογίσουμε την ορίζουσα

$$\det(z\mathbb{1} - A) = \det \begin{pmatrix} z & -1 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ -1 & 0 & z \end{pmatrix} = z^3 - 1\,. \tag{7.9}$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας τον τύπο (7.6) για τον αντίστροφο πίνακα, βρίσκουμε:

$$(z\mathbb{1} - A)^{-1} = \frac{1}{z^3 - 1} \begin{pmatrix} z^2 & z & 1 \\ 1 & z^2 & z \\ z & 1 & z^2 \end{pmatrix}. \tag{7.10}$$

Όπως προαναφέρθηκε, τα σημεία των πόλων της επιλύουσας είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A. Εδώ οι ιδιοτιμές, τρεις και διακριτές, είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \exp(2i\pi/3)$ και $\lambda_3 = \exp(-2i\pi/3)$.

7.1.1 Σημαντική ιδιότητα των επιλυουσών

Θα αποδείξουμε, στη συνέχεια, μια σημαντική ιδιότητα των επιλυουσών τελεστή.

■ *Για $z, z' \in \mathbb{C}$, ισχύει η σχέση* :

$$R(z)\,R(z') = -\frac{R(z) - R(z')}{z - z'}\,. \tag{7.11}$$

Απόδειξη : Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (7.11) με $(z\mathbb{1} - A)\,(z'\mathbb{1} - A)$, οδηγούμαστε σε ταυτότητα. Πράγματι, διαπιστώνουμε αμέσως ότι το πρώτο μέλος γίνεται ίσο με το μοναδιαίο

Ευρετήριο

Bromwich
- ολοκλήρωμα, 322
  - παραδείγματα, 335, 345, 354, 361

Cauchy
- θεμελιώδες θεώρημα, 15
- ολοκληρωτική αναπαράσταση, 21
- ολοκληρωτικός τύπος, 21
- ολοκληρωτικός τύπος παραγώγων, 22
- πρωτεύουσα τιμή, 183

Cauchy-Dunford-Riesz
- ολοκληρωτικός τύπος, 372

Cauchy-Riemann
- εφαρμογές, 48, 52, 59, 66
- συνθήκες, 12

Cayley-Hamilton
- θεώρημα, 382

Darboux
- ανισότητα, 15

De Moivre, τύπος, 5

Euler, τύπος, 4

Fourier
- ολοκληρωτικός μετασχηματισμός, 319

Jordan
- λήμμα, 105

Laplace
- εξίσωση, 13
- ολοκληρωτικός μετασχηματισμός, 320
  - αντίστροφος, 320

Laurent
- ανάπτυγμα, 23
- αναλυτικό μέρος, 31
- πρωτεύον μέρος, 31
- σειρά, 23
- συντελεστές, 23
  - για πλειότιμη συνάρτηση, 246, 253, 258

Liouville
- θεώρημα, 40

Morera
- θεώρημα, 18

Riemann, 6
- επιφάνεια, 218
- σφαίρα, 6
- φύλλο, 218

Taylor
- ανάπτυγμα, 23

άπειρο, 6

αναλυτική συνάρτηση, 12
- παράγουσα, 17

αναπαράσταση σε πολικές συν/νες, 3

διακλάδωση
- σημείο, 218
- τομή, 218

επιλύουσα τελεστή, 370

θεμελιώδες θεώρημα Άλγεβρας, 42
θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων, 38
θεώρημα του ορίσματος, 40
ιδιομορφία, 31
  απαλείψιμη, 35
  ουσιώδης, 33
  πολική, 32
ιδιόμορφο σημείο, 31
  απαλείψιμο, 35
    παραδείγματα, 78, 84
  μεμονωμένο σημείο, 33
  μη μεμονωμένο, 35
    παραδείγματα, 95, 97
  ουσιώδες, 33
    παραδείγματα, 81, 96–98
  πόλος, 32
  στο άπειρο, 34
κλειστή καμπύλη, 7
  αρνητικά προσανατολισμένη, 36
  θετικά προσανατολισμένη, 36
μιγαδική συνάρτηση, 8
  ακέραια, 36
  αναλυτική, 10, 12
  αρμονική, 13
  εκθετική, 9
  μερόμορφη, 36
  μονότιμη, 8
  ολοκλήρωμα, 14
  πλειότιμη, 8, 217
    $\log z$, 230
    $\sqrt{z}$, 222
    κλάδος, 218
  πολυωνυμική, 36
  ρίζες, 29
  ρητή, 36
  συνεχής, 8
  τριγωνομετρική, τύποι, 9
  υπερβατική ακέραια, 36
  υπερβολική, τύποι, 9
μιγαδικό επίπεδο, 2
  εκτεταμένο, 6
μιγαδικό ολοκλήρωμα, 14
  περιοχή πολλαπλά συνεκτική, 18
  πρωτεύουσα τιμή, 183
μιγαδικός αριθμός, 1
  ρίζα, 5
  συζυγής, 1
  φάση, 3
  όρισμα, 3
ολοκλήρωμα
  ορισμένο, 101
    με απαλείψιμη ιδιομορφία, 119, 126, 131, 138
    μονότιμης συνάρτησης, 101
    πλειότιμης συνάρτησης, 263
ολοκληρωτικό υπόλοιπο, 36
ολοκληρωτικός μετασχηματισμός
  Fourier, 319
  Laplace, 320

πίνακας
  χαρακτηριστική εξίσωση, 370
περιοχή, 7
  ανοικτή, 7
  απλά συνεκτική, 7
  πολλαπλά συνεκτική, 7
  συνεκτική, 7
πολική
  γωνία, 3
πρωτεύον όρισμα, 3
πρωτεύουσα τιμή ολοκληρώματος, 183, 188
  μετακίνηση πόλων $\pm i\varepsilon$, 194
ρίζες, 29
  μεμονωμένα σημεία, 30
σημείο
  διακλάδωσης, 218
  ιδιόμορφο, 31

στο άπειρο, 6
συσσώρευσης (όριο), 8
στερεογραφική προβολή, 6
τελεστής
διαγωνοποιήσιμος, 382
ελάχιστο πολυώνυμο, 382
ερμιτιανός, 385
κανονικός, 385
μοναδιακός, 385
προβολικός, 376
σχέση πληρότητας, 376
προσαρτημένος, 385
φασματική ανάλυση, 376
φασματικός, 374
χαρακτηριστικό πολυώνυμο, 370
τριγωνική ανισότητα, 2
τόπος, 7
φάσμα τελεστή, 370
φασματική ανάλυση τελεστή, 376