

Σ. ΝΑΤΣΙΑΒΑΣ

Καθηγητής ΑΠΘ

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΔΕΥΤΕΡΗ ΕΚΔΟΣΗ

ISBN 978-960-456-581-8

© Copyright 2η Έκδοση, Ιούλιος 2022, Σωτήριος Νατσιάβας, Εκδόσεις ΖΗΤΗ

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις του ελληνικού νόμου (Ν.2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής άδειας του εκδότη κατά οποιοδήποτε τρόπο ή μέσο αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή (ηλεκτρονική, μηχανική ή άλλη) και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

Φωτοστοιχειοθεσία

Εκτύπωση

Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & ΣΙΑ Ι.Κ.Ε.

18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας

Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19

Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr



www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:

Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη

Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ:

Χαριλάου Τρικούπη 22, 106 79 Αθήνα

Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Στους γονείς μου

Παναγιώτη και Μαρία

και στους δασκάλους μου

Δ. Τσιμπώνη, Χ. Γκαγκάνη,

J.K. Knowles και C.D. Babcock

Πρόλογος δεύτερης έκδοσης

Μετά από είκοσι οκτώ χρόνια αδιάλειπτης διδασκαλίας του εισαγωγικού μαθήματος της Δυναμικής στο τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, κρίθηκε ότι είναι χρήσιμη η επανέκδοση του βιβλίου που χρησιμοποιείται ως βασικό διδακτικό βοήθημα. Κύρια αιτία ήταν η επιθυμία του συγγραφέα για μια όσο το δυνατόν καλύτερη σύμπτωση και αποτύπωση του υλικού που υπάρχει στο βιβλίο με το υλικό των παραδόσεων του μαθήματος, όπως αυτό διαμορφώθηκε από την γόνιμη αλληλεπίδραση με τους φοιτητές του τμήματος κατά την πολύχρονη διδασκαλία του. Η αφορμή δόθηκε από τις ιδιαίτερες συνθήκες που επικράτησαν παγκοσμίως στις παραδόσεις των πανεπιστημιακών μαθημάτων τα τελευταία δυο χρόνια.

Η νέα έκδοση περιλαμβάνει εκτεταμένες διορθώσεις και αλλαγές, σχεδόν σε κάθε σελίδα του αρχικού βιβλίου. Πιο συγκεκριμένα, εκτός από βελτιώσεις στην συστηματική παρουσίαση της θεωρίας και των παραδειγμάτων, έγινε μερική αναδιάταξη και πρόσθεση νέων παραδειγμάτων. Επίσης, προστέθηκε και ένας σημαντικός αριθμός νέων προβλημάτων, που προέκυψαν μετά από επιλογή θεμάτων που δόθηκαν στις εξετάσεις του μαθήματος τα τελευταία χρόνια.

Όπως και στην αρχική έκδοση, η έμφαση δόθηκε στην όσο το δυνατόν απλή, αλλά πλήρη και ξεκάθαρη παρουσίαση των θεμελιωδών αρχών της Δυναμικής και την συνεπή και συστηματική εφαρμογή τους στην κατάστρωση των εξισώσεων κίνησης μηχανικών συστημάτων. Το μεγαλύτερο μέρος του βιβλίου αναφέρεται στην παρουσίαση των βασικών εννοιών της Νευτώνειας Δυναμικής και υποστηρίζει το εισαγωγικό μάθημα της Δυναμικής, που διδάσκεται στο δεύτερο έτος σπουδών. Όμως, ένα σημαντικό τμήμα του βιβλίου, που περιλαμβάνει το Κεφάλαιο 5, το Ειδικό Κεφάλαιο Β και τις Ενότητες 2.5.2, 2.5.3, 3.5.1, 3.8 και 4.6.3, αντιπροσωπεύει υλικό που χρησιμοποιείται για τις ανάγκες ενός επόμενου μαθήματος Δυναμικής, υψηλότερου επιπέδου, το οποίο διδάσκεται στο τελευταίο έτος σπουδών.

Ο στόχος και η ελπίδα του συγγραφέα είναι το παρόν βιβλίο να αποτελέσει χρήσιμο εκπαιδευτικό βοήθημα και εφόδιο για όσους θέλουν να εντρυφήσουν για να πρωτομάθουν τις λιτές και πανέμορφες αρχές της Δυναμικής, αλλά και για όσους ενδιαφέρονται να αποκτήσουν βαθύτερη κατανόηση και γνώση των αρχών αυτών για να τις εφαρμόσουν στην βέλτιστη επίλυση πολύπλοκων προβλημάτων. Τέτοια προβλήματα ανακύπτουν σε ένα ευρύτατο σύνολο κλασικών εφαρμογών (π.χ. μηχανές, επίγεια, εναέρια και θαλάσσια οχήματα και κατασκευές, μηχανι-

σμοί, ρομπότ), αλλά και σύγχρονων πεδίων (π.χ. εμβιομηχανικές διατάξεις, γρήγορα τραίνα και αεροχήματα).

Με την ολοκλήρωση της προσπάθειας για την νέα έκδοση του παρόντος βιβλίου, θέλω να ευχαριστήσω και πάλι το προσωπικό των Εκδόσεων Ζήτη και ιδιαίτερα τον κ. Άρη Σύρμο για την επιμέλεια του κειμένου και την κ. Άννα Παναγοπούλου για την παραγωγή των σχημάτων και την σχεδίαση του εξώφυλλου. Επίσης, ευχαριστώ τον υποψήφιο διδάκτορα κ. Ιωάννη Ντινόπουλο για την βοήθεια στην παραγωγή των νέων σχημάτων. Τέλος, θέλω να προσθέσω στον κατάλογο των φωτεινών δασκάλων μου και τον φυσικό κ. Πέτρο Φραγκούλη, για την πολύτιμη βοήθειά του στα μακρινά λυκειακά χρόνια.

Θεσσαλονίκη, Ιανουάριος 2022

Σωτήρης Νατσιάβας

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό έχει ως κύριο σκοπό την παρουσίαση των βασικών αρχών της **Δυναμικής Υλικών Σωμάτων**, καθώς και την επίδειξη της συστηματικής εφαρμογής τους στην επίλυση πρακτικών προβλημάτων.

Η Δυναμική είναι ο κλάδος της **Μηχανικής** που εξετάζει την σχέση ανάμεσα στην κίνηση υλικών σωμάτων (δηλαδή μεταφορά, περιστροφή, παραμόρφωση) και τις δυνάμεις (υπό την ευρεία έννοια) οι οποίες προκαλούν την κίνηση ή αναπτύσσονται στην διάρκεια της κίνησης. Η εφαρμογή των αρχών της Δυναμικής είναι απαραίτητη σε συστήματα που έχουν μέλη τα οποία κινούνται με σχετικά μεγάλες επιταχύνσεις, οπότε οι υπολογισμοί που βασίζονται στις αρχές της **Στατικής** γίνονται ανακριβείς.

Η επιστήμη της Δυναμικής υλικών σωμάτων βασίζεται σ' έναν μικρό αριθμό βασικών αρχών, αλλά είναι χρήσιμη σ' ένα ευρύτατο πεδίο εφαρμογών. Οι πρώτες λογικές αναφορές σε θέματα της Δυναμικής έγιναν από τους Προσωκρατικούς φιλοσόφους και τον Αριστοτέλη, αλλά οι σύγχρονες επιστημονικές βάσεις της τέθηκαν πολύ αργότερα από τον Γαλιλαίο και τον Νεύτωνα και συμπληρώθηκαν από πρωτοπόρους του πνεύματος όπως οι Euler, Lagrange, Hamilton, Laplace, Poincare και Einstein.

Στις περισσότερες εφαρμογές οι παρατηρούμενες ταχύτητες είναι πολύ μικρές ως προς την ταχύτητα του φωτός, η οποία έχει τιμή 300.000 km/s. Επίσης, οι διαστάσεις των εξεταζόμενων σωμάτων είναι πολύ μεγαλύτερες από τις ατομικές ή τις πυρηνικές διαστάσεις και πολύ μικρότερες από τις διαστάσεις των συστημάτων που εξετάζονται από αστρονόμους ή κοσμολόγους. Κατά συνέπεια, οι προβλέψεις της λεγόμενης **Κλασικής Δυναμικής** –η οποία βασίζεται στους νόμους κίνησης που διατυπώθηκαν από τον Νεύτωνα– είναι αρκετά ακριβείς για την μεγάλη πλειοψηφία των τεχνολογικών εφαρμογών. Για τον λόγο αυτό, η παρουσίαση του υλικού του παρόντος βιβλίου βασίζεται αποκλειστικά στα αξιώματα και τις αρχές της Κλασικής Δυναμικής.

Κατ' αρχάς, ως κίνηση υλικού σώματος ορίζεται η μεταβολή της θέσης των μερών του σχετικά με άλλα σώματα. Επομένως, για την περιγραφή και την μέτρηση της κίνησης χρειάζεται κάποιο **σύστημα αναφοράς**. Όπως απέδειξε ο Γαλιλαίος, υπάρχουν προτιμητέα συστήματα αναφοράς, στα οποία η επιτάχυνση έχει την απλούστερη δυνατή μορφή, γιατί δεν εμφανίζονται ως προς αυτά οι κινηματικές συνιστώσες της (όπως η επιτάχυνση Coriolis και η φυγόκεντρος επιτάχυνση).

Αυτά τα συστήματα αναφοράς ονομάζονται **αδρανειακά**. Επιπλέον, η ύπαρξη ενός τέτοιου συστήματος συνεπάγεται την ύπαρξη μιας απειρίας παρόμοιων συστημάτων, τα οποία μεταφέρονται με σταθερή ταχύτητα ως προς το αρχικό σύστημα αναφοράς. Έτσι, κατά τον Νεύτωνα, το πιο προνομιακό αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι αυτό που είναι στερεωμένο στο «κέντρο του Σύμπαντος».

Οι αρχές της Δυναμικής μπορεί να εκφρασθούν με τρία θεμελιώδη φυσικά μεγέθη, δηλαδή το μήκος, τον χρόνο και την μάζα. Σύμφωνα με την Κλασική Δυναμική, η μάζα ενός σώματος παραμένει σταθερή και ανεξάρτητη από την κίνησή του και τον χρόνο. Επίσης, ο χώρος είναι απόλυτος (δηλαδή είναι ίδιος για παρατηρητές που βρίσκονται σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς και ανεξάρτητος από την κίνηση και τα φυσικά αντικείμενα) και μπορεί να περιγραφεί με στοιχεία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Επομένως, θεωρείται ότι είναι ομογενής και ισότροπος, δηλαδή έχει τις ίδιες μετρικές ιδιότητες σε κάθε σημείο και διεύθυνση. Επιπλέον, ο χρόνος είναι απόλυτος και ομογενής (δηλαδή ανεξάρτητος από τον χώρο).

Παραδοσιακά, η Δυναμική χωρίζεται σε δύο μεγάλες περιοχές: την **Κινηματική** και την **Κινητική**. Η πρώτη εξετάζει την γεωμετρία της κίνησης. Δηλαδή συνδέει τις έννοιες της θέσης, της ταχύτητας, της επιτάχυνσης και του χρόνου χωρίς αναφορά στην φυσική αιτία της κίνησης. Από την άλλη μεριά, η Κινητική εξετάζει την σχέση ανάμεσα στις δυνάμεις, την μάζα και την κίνηση των σωμάτων. Δηλαδή προβλέπει την κίνηση αν είναι γνωστές οι δυνάμεις ή καθορίζει τις δυνάμεις που απαιτούνται για την επίτευξη συγκεκριμένης κίνησης.

Αν η κίνηση ενός σώματος είναι τέτοια, ώστε να μπορεί να αγνοηθεί η περιστροφή (αλλαγή προσανατολισμού) και η παραμορφωσιμότητά του, τότε το σώμα ονομάζεται **υλικό σημείο**. Όταν η περιστροφή ενός σώματος είναι σημαντική, αλλά η αλλαγή στην απόσταση μεταξύ δύο τυχαίων σημείων του είναι αμελητέα, τότε το σώμα ονομάζεται απαραμόρφωτο στερεό ή απλά **στερεό σώμα**. Τέλος, όταν οι παραμορφώσεις του σώματος είναι σημαντικές, τότε το σώμα ονομάζεται **παραμορφώσιμο σώμα**. Είναι προφανές ότι το ίδιο σώμα μπορεί να θεωρηθεί ως υλικό σημείο, στερεό ή παραμορφώσιμο σώμα, ανάλογα με το σκοπό της μελέτης (π.χ. πλανήτες, αεροπλάνα, αυτοκίνητα).

Το κύριο αντικείμενο του παρόντος βιβλίου είναι η ανάλυση της κίνησης δυναμικών συστημάτων, τα οποία αποτελούνται από υλικά σημεία και από στερεά σώματα. Τα μαθηματικά μοντέλα που προκύπτουν για τα συστήματα αυτά αποτελούνται από κανονικές διαφορικές εξισώσεις με ανεξάρτητη μεταβλητή τον χρόνο. Αντίθετα, η κίνηση παραμορφώσιμων στερεών σωμάτων ή ρευστών σωμάτων (δηλαδή σωμάτων που δεν μπορούν να παραλάβουν διατμητική τάση όταν βρίσκονται σε κατάσταση στατικής ισορροπίας και δεν έχουν προτιμητέα μορφή) περι-

γράφεται από μερικές διαφορικές εξισώσεις με ανεξάρτητες μεταβλητές τον χρόνο καθώς και χωρικές συντεταγμένες. Η περιγραφή και ανάλυση της κίνησης παραμορφώσιμων σωμάτων αποτελεί αντικείμενο άλλων μαθημάτων (π.χ. Ελαστοδυναμική, Μηχανική Ρευστών).

Το σύνολο των αρχών κίνησης που προκύπτουν με απ' ευθείας εφαρμογή των νόμων του Νεύτωνα αποτελεί την **Νευτώνεια** ή **Διανυσματική Δυναμική**. Μια εναλλακτική μέθοδος για την θεμελίωση και την παραγωγή των εξισώσεων κίνησης παρουσιάζεται από την ονομαζόμενη **Αναλυτική Δυναμική**, που αναπτύχθηκε κυρίως από τον Lagrange και τον Hamilton. Η μέθοδος αυτή απαιτεί την εισαγωγή πιο αφηρημένων εννοιών, όπως οι γενικευμένες συντεταγμένες, δυνάμεις και ορμές, καθώς και οι δυνατές μετατοπίσεις. Όμως, παρουσιάζει ορισμένα σημαντικά πλεονεκτήματα ως προς τις μεθόδους της Νευτώνειας Δυναμικής, ιδιαίτερα σε συστήματα με δεσμούς κίνησης.

Σε όλη την έκταση του παρόντος βιβλίου δίνεται έμφαση στην σαφή διάκριση ορισμών και εννοιών που αναφέρονται στην Κινηματική και την Κινητική. Επίσης, γίνεται διαχωρισμός μεταξύ των διαφορετικών μεθοδολογιών της Κινητικής (νόμοι του Νεύτωνα και του Euler, αρχές ώσης και ορμής, αρχές έργου και ενέργειας), ενώ ταυτόχρονα τονίζεται η αλληλοσύνδεση που υπάρχει μεταξύ των διαφόρων αρχών της Δυναμικής. Στα πρώτα δύο κεφάλαια του βιβλίου παρουσιάζεται η Κινηματική και η Κινητική Υλικών Σημείων. Οι ορισμοί και οι αρχές της Κινητικής αναπτύσσονται αρχικά για **μεμονωμένα υλικά σημεία** και γενικεύονται στην συνέχεια για **συστήματα υλικών σημείων**. Το τρίτο και το τέταρτο κεφάλαιο αναφέρονται στην Κινηματική και την Κινητική Στερεών Σωμάτων. Τα κεφάλαια αυτά αποτελούν φυσική συνέχεια του πρώτου και του δευτέρου κεφαλαίου, αντίστοιχα, με την θεώρηση ότι το στερεό σώμα είναι ένα σύστημα με άπειρο αριθμό υλικών σημείων, τα οποία διατηρούν αμετάβλητη την μεταξύ τους απόσταση. Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση των βασικών αρχών της Αναλυτικής Δυναμικής.

Για την κατανόηση της θεωρίας της Δυναμικής και την παραγωγή σωστών μαθηματικών μοντέλων είναι απαραίτητη η γνώση βασικών στοιχείων του Διανυσματικού, του Διαφορικού και του Ολοκληρωτικού Λογισμού, καθώς και των εννοιών, αρχών και μεθοδολογιών της Στατικής. Επίσης, το υλικό που παρουσιάζεται στα Παραρτήματα Α και Β και αναφέρεται στον ορισμό και τις ιδιότητες του Τανυστή Αδράνειας και στην παρουσίαση στοιχείων του Λογισμού των Μεταβολών, είναι απαραίτητο συμπλήρωμα του τετάρτου και του πέμπτου κεφαλαίου, αντίστοιχα. Επιπλέον, για την επίλυση των εξισώσεων που προκύπτουν από την εφαρμογή των αρχών της Δυναμικής είναι απαραίτητη η καλή γνώση μεθόδων επίλυσης αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων με αναλυτικό ή με αριθμητικό τρόπο.

Σε κάθε ενότητα, η παρουσίαση της θεωρίας συνοδεύεται από έναν αριθμό παρατηρήσεων, που έχουν στόχο την συμπλήρωση ή την διαλεύκανση ορισμένων σημείων της θεωρίας. Στην συνέχεια, γίνεται η συστηματική επίλυση αντιπροσωπευτικών παραδειγμάτων, με σκοπό την περαιτέρω εμβάθυνση και κατανόηση της θεωρίας. Παράλληλα με την ανάπτυξη των μαθηματικών μοντέλων που προκύπτουν και την διαδικασία επίλυσής τους, δίνεται έμφαση στην σωστή ερμηνεία και την σημασία των αποτελεσμάτων κάθε παραδείγματος. Τέλος, για να δοθεί η ευκαιρία στον αναγνώστη να ελέγξει και να βελτιώσει τον βαθμό κατανόησης της θεωρίας, καθώς και να διαπιστώσει την χρησιμότητα της Δυναμικής στην επίλυση μερικών απλών πρακτικών εφαρμογών, παρουσιάζεται στο τέλος κάθε κεφαλαίου ένας αριθμός άλυτων προβλημάτων.

Στο σημείο αυτό θέλω να ευχαριστήσω τις Εκδόσεις Ζήτη για τις προσπάθειες που κατέβαλαν για την καλύτερη δυνατή εμφάνιση του βιβλίου αυτού.

Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 1994

Σωτήρης Νατσιάβας

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Κινηματική υλικού σημείου

1.1	Εισαγωγή	1
1.2	Διάνυσμα θέσης, ταχύτητα και επιτάχυνση	1
1.2.1	Ορισμοί	1
1.2.2	Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς	4
1.2.3	Κυλινδρικό σύστημα αναφοράς	12
1.2.4	Τροχιακό σύστημα αναφοράς	20
1.3	Σχετική μεταφορική κίνηση	26
	Προβλήματα	31

Κεφάλαιο 2

Κινητική υλικών σημείων

2.1	Εισαγωγή	41
2.2	Νόμοι του Νεύτωνα και του Euler	42
2.2.1	Νόμοι του Νεύτωνα για υλικό σημείο	42
2.2.2	Σύστημα υλικών σημείων - Νόμοι του Euler	44
2.3	Αρχές ώσης και ορμής	56
2.3.1	Γραμμική ορμή και ώση	56
2.3.2	Στροφορμή και στροφική ώση	57
2.4	Αρχές έργου και ενέργειας	70
2.4.1	Έργο και ενέργεια υλικού σημείου	70
2.4.2	Έργο και ενέργεια συστήματος υλικών σημείων.....	76
2.5	Εφαρμογές	89
2.5.1	Κρούση Υλικών Σημείων	90
2.5.2	Κεντρικές δυνάμεις - Διασθημομηχανική	97
2.5.3	Μεταβαλλόμενα συστήματα υλικών σημείων.....	105
	Προβλήματα	114

Κεφάλαιο 3

Κινηματική στερεού σώματος

3.1	Εισαγωγή	147
3.2	Μεταφορική κίνηση	148
3.3	Περιστροφή γύρω από σταθερό άξονα	150
3.4	Γενική επίπεδη κίνηση	156
3.4.1	Ορισμοί	156
3.4.2	Υπολογισμός ταχυτήτων και επιταχύνσεων	157
3.4.3	Στιγμιαίος πόλος περιστροφής	162
3.5	Περιστροφή γύρω από σταθερό σημείο	178
3.5.1	Πεπερασμένες και απειροστές περιστροφές	178
3.5.2	Γωνιακή ταχύτητα στερεού σώματος - Ταχύτητα σημείου	182
3.5.3	Γωνιακή επιτάχυνση στερεού σώματος - Επιτάχυνση σημείου	186
3.5.4	Παράγωγος διανύσματος ως προς περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς	187
3.6	Γενική χωρική κίνηση στερεού	196
3.7	Σχετική κίνηση υλικού σημείου	207
3.8	Γωνίες Euler	218
	Προβλήματα	222

Κεφάλαιο 4

Κινητική στερεού σώματος

4.1	Εισαγωγή	245
4.2	Εξισώσεις του Euler για στερεά σώματα	246
4.2.1	Ορισμοί	246
4.2.2	Στροφορμή και ταυοστής αδράνειας στερεού σώματος	248
4.2.3	Εξισώσεις κίνησης στερεού σώματος	251
4.3	Αρχές ώσης και ορμής	287
4.4	Αρχές έργου και ενέργειας	307
4.5	Υποθετικές δυνάμεις	339
4.6	Εφαρμογές	344
4.6.1	Έκκεντρη κρούση	344
4.6.2	Ζυγοστάθμιση περιστρεφόμενων στερεών σωμάτων	356

4.6.3 Περιστροφή στερεών σωμάτων με αξονοσυμμετρική αδράνεια	364
Προβλήματα	375

Κεφάλαιο 5

Αναλυτική Δυναμική

5.1 Εισαγωγή	419
5.2 Ορισμοί	420
5.3 Αρχή των δυνατών έργων	425
5.4 Εξισώσεις Lagrange	431
5.5 Ολοκληρώματα κίνησης και αρχές διατήρησης	449
5.6 Κανονικές εξισώσεις του Hamilton	461
5.7 Αρχή του Hamilton	469
Προβλήματα	480

Ειδικό κεφάλαιο Α

Τανυστής αδράνειας

A.1 Ορισμοί	495
A.2 Θεώρημα παραλλήλων αξόνων	503
A.3 Περιστροφή αξόνων	510
A.4 Κύριοι άξονες αδράνειας	513
Προβλήματα	528

Ειδικό κεφάλαιο Β

Στοιχεία λογισμού μεταβολών

B.1 Εισαγωγή	535
B.2 Εξίσωση του Euler	536
Προβλήματα	545

Βιβλιογραφία 547

Ευρετήριο όρων 549

Κινηματική υλικού σημείου

1.1 Εισαγωγή

Η Κινηματική είναι κλάδος της Μηχανικής που εξετάζει και αναλύει την γεωμετρία της κίνησης ενός σώματος, χωρίς να αναφέρεται στα αίτια που την προκαλούν. Για υλικό σημείο, ως **κίνηση** ορίζεται η αλλαγή θέσης του σημείου ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς. Έτσι, για την περιγραφή της κίνησης υλικού σημείου, τα απαραίτητα θεμελιώδη φυσικά μεγέθη είναι το μήκος και ο χρόνος.

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγονται αρχικά οι έννοιες των διανυσμάτων θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης σημείου. Στην συνέχεια, παράγονται εκφράσεις για τις συνιστώσες των διανυσμάτων αυτών ως προς μερικά συστήματα αναφοράς που επιλέγονται συχνά σε πρακτικές εφαρμογές. Παράλληλα, επεξηγείται η φυσική σημασία των συνιστωσών των διανυσμάτων αυτών. Το κεφάλαιο τελειώνει με μελέτη της κίνησης υλικού σημείου σχετικά με σύστημα αναφοράς που μεταφέρεται (κινείται παράλληλα) ως προς κάποιο άλλο σύστημα αναφοράς.

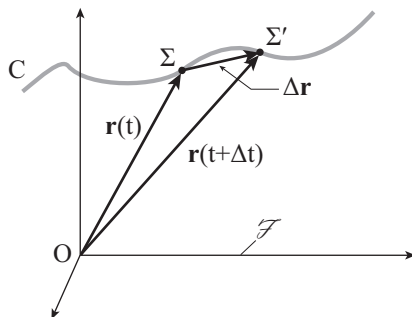
Εκτός από έννοιες της γεωμετρίας, η βασική μαθηματική έννοια που εισάγεται και χρησιμοποιείται στο παρόν κεφάλαιο είναι η χρονική παράγωγος διανύσματος. Η παράγωγος αυτή εξαρτάται από μεταβολές τόσο στο μέγεθος, όσο και στην διεύθυνση του διανύσματος.

1.2 Διάνυσμα θέσης, ταχύτητα και επιτάχυνση

1.2.1 Ορισμοί

Θεωρείται υλικό σημείο Σ καθώς διαγράφει τροχιά στον χώρο. Η τροχιά αυτή αποτελεί μια χωρική καμπύλη C και μπορεί να ορισθεί σχετικά με κάποιο σύστη-

μα αναφοράς \mathcal{F} , όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1. Με τον τρόπο αυτό, η θέση του υλικού σημείου στην χρονική στιγμή t καθορίζεται πλήρως από το διάνυσμα που έχει αρχή το σημείο O του συστήματος αναφοράς \mathcal{F} και πέρας το σημείο Σ . Το διάνυσμα αυτό, έστω $\mathbf{r}(t)$, ονομάζεται **διάνυσμα θέσης** του υλικού σημείου ως προς το σύστημα αναφοράς \mathcal{F} .



Σχήμα 1.1

Στην χρονική στιγμή $t+\Delta t$ το υλικό σημείο καταλαμβάνει την νέα θέση Σ' , η οποία καθορίζεται από το νέο διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}(t+\Delta t)$. Σε αναλογία με τον ορισμό της παραγώγου βαθμωτής συνάρτησης $f(t)$, ο οποίος είναι

$$\dot{f}(t) \equiv \frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t},$$

μπορεί να οριστεί και η χρονική παράγωγος της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{r}(t)$. Δηλαδή

$$\mathbf{v}(t) \equiv \dot{\mathbf{r}}(t), \quad (1.1)$$

με

$$\dot{\mathbf{r}}(t) \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}.$$

Το διάνυσμα $\mathbf{v}(t)$ που προκύπτει με τον τρόπο αυτό ονομάζεται **ταχύτητα** του υλικού σημείου ως προς το σύστημα αναφοράς \mathcal{F} , στην χρονική στιγμή t .

Τέλος, με παρόμοιο τρόπο ορίζεται και η **επιτάχυνση** του υλικού σημείου ως προς το σύστημα αναφοράς \mathcal{F} , στην χρονική στιγμή t , ως η χρονική παράγωγος του διανύσματος της ταχύτητας. Δηλαδή

$$\mathbf{a}(t) \equiv \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t). \quad (1.2)$$

♦ **Παρατήρηση 1η:** Επειδή η Κινηματική εξετάζει μόνο την γεωμετρία της κίνησης και δεν εμπλέκει φυσικούς νόμους, δεν υπάρχουν προτιμητέα συστήματα αναφοράς. Όμως, η κίνηση φαίνεται διαφορετικά από παρατηρητές που βρίσκονται σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς και επομένως πρέπει να καθορισθεί κάποιο σύστημα αναφοράς σε κάθε περίπτωση. Επίσης, με βάση την γεωμετρία της τροχιάς, οι συνιστώσες των διανυσμάτων θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης μπορεί να εκφραστούν σε βολικό σύστημα συντεταγμένων (καρτεσιανό, κυλινδρικό, σφαιρικό κ.λπ.), όπως αναπτύσσεται στις επόμενες ενότητες.

♦ **Παρατήρηση 2η:** Σε μερικές περιπτώσεις, αντί της στιγμιαίας ταχύτητας που ορίζεται από την σχέση (1.1) για απειροστό χρονικό διάστημα dt , είναι πιο χρήσιμο να θεωρηθεί πεπερασμένο Δt και να ορισθεί η **μέση ταχύτητα**

$$\bar{\mathbf{v}}(t) = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t},$$

όπου

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

είναι το διάνυσμα μετατόπισης του υλικού σημείου στο χρονικό διάστημα Δt . Με τον ίδιο τρόπο ορίζεται και η αντίστοιχη **μέση επιτάχυνση**

$$\bar{\mathbf{a}}(t) = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t},$$

όπου

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t).$$

♦ **Παρατήρηση 3η:** Με τον τρόπο που ορίστηκαν η ταχύτητα και η επιτάχυνση μπορεί να ορισθούν και παράγωγοι ανώτερης τάξης της συνάρτησης $\mathbf{r}(t)$. Όμως, αυτές οι παράγωγοι δεν έχουν συνήθως πρακτική αξία, γιατί δεν εμπλέκονται στους νόμους της Κινητικής. Την μόνη εξαίρεση αποτελεί η παράγωγος της επιτάχυνσης, η οποία βρίσκει εφαρμογή στις περιοχές των μηχανισμών και της κρούσης οχημάτων.

♦ **Παρατήρηση 4η:** Ο συμβολισμός $\mathbf{r}(t)$ είναι συντομογραφία του πληρέστερου συμβολισμού $\mathbf{r}_{O\Sigma}(t)$. Το ίδιο ισχύει και για τους συμβολισμούς \mathbf{v} και \mathbf{a} , που αντικαθιστούν τους πιο πλήρεις, αλλά και πιο πολύπλοκους συμβολισμούς

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\Sigma/\mathcal{F}} = (\dot{\mathbf{r}}_{O\Sigma})_{\mathcal{F}}$$

και

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\Sigma/\mathcal{F}} = (\dot{\mathbf{v}}_{\Sigma/\mathcal{F}})_{\mathcal{F}},$$

αντίστοιχα. Η χρησιμότητα των συμβολισμών αυτών θα γίνει φανερή στην μελέτη της Κινηματικής στερεών σωμάτων και της σχετικής κίνησης σωμάτων, όπου εμπλέκονται περισσότερα από ένα συστήματα αναφοράς.

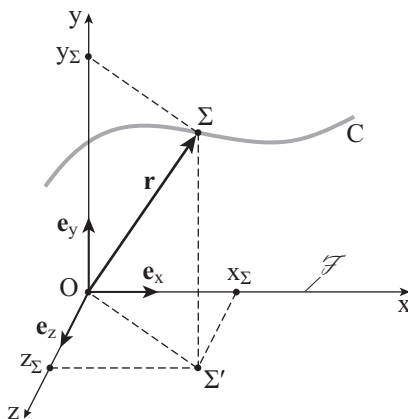
1.2.2 Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς

Στην γενική περίπτωση, η τροχιά ενός υλικού σημείου Σ είναι μια χωρική καμπύλη που μπορεί να ορισθεί παραμετρικά από τις συντεταγμένες του

$$(x_{\Sigma}, y_{\Sigma}, z_{\Sigma}) = (x(t), y(t), z(t))$$

ως προς ορθοκανονικό δεξιόστροφο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς \mathcal{F} ή $Oxyz$, όπως δείχνει το Σχήμα 1.2. Έτσι, αν Σ' είναι η προβολή του σημείου Σ στο επίπεδο Oxz , προκύπτει η διανυσματική σχέση

$$\overline{O\Sigma} = \overline{O\Sigma'} + \overline{\Sigma'\Sigma}.$$



Σχήμα 1.2

Επομένως, αν \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y και \mathbf{e}_z είναι τα μοναδιαία διανύσματα βάσης του συστήματος αναφοράς (δηλαδή $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = 1$, $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0$, $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$ κ.λ.π.), τότε το διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου εκφράζεται στην μορφή

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z.$$

Κατά συνέπεια, με εφαρμογή του ορισμού (1.1) προκύπτει ότι η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[x(t+\Delta t)\mathbf{e}_x + y(t+\Delta t)\mathbf{e}_y + z(t+\Delta t)\mathbf{e}_z] - [x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z]}{\Delta t},$$

αφού τα διανύσματα \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y και \mathbf{e}_z είναι σταθερά κατά μέτρο και κατεύθυνση, ή

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \mathbf{e}_x + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \mathbf{e}_y + \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \mathbf{e}_z \right].$$

Επομένως,

$$\mathbf{v}(t) = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z = \dot{x}(t)\mathbf{e}_x + \dot{y}(t)\mathbf{e}_y + \dot{z}(t)\mathbf{e}_z. \quad (1.3)$$

Παρόμοια, η επιτάχυνση του υλικού σημείου καθορίζεται από την σχέση

$$\mathbf{a}(t) = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z = \ddot{x}(t)\mathbf{e}_x + \ddot{y}(t)\mathbf{e}_y + \ddot{z}(t)\mathbf{e}_z. \quad (1.4)$$

♦ **Παρατήρηση 1η:** Σε πολλές εφαρμογές η τροχιά είναι καμπυλόγραμμη, αλλά **επίπεδη** (δηλαδή δισδιάστατη). Τότε, το σύστημα αναφοράς μπορεί να επιλεγεί έτσι, ώστε

$$z(t) = z_0 = \text{σταθερά},$$

οπότε οι σχέσεις (1.3) και (1.4) αντικαθίστανται από τις απλούστερες

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y \quad (1.5)$$

και

$$\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y, \quad (1.6)$$

αντίστοιχα.

♦ **Παρατήρηση 2η:** Όταν η τροχιά είναι **ευθύγραμμη** (μονοδιάστατη), δηλαδή τέτοια, ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι

$$z(t) = z_0 = \text{σταθερά} \quad \text{και} \quad y(t) = y_0 = \text{σταθερά},$$

οι σχέσεις (1.3) και (1.4) γίνονται

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{e}_x \quad \text{και} \quad \mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{e}_x,$$

αντίστοιχα. Στην περίπτωση αυτή εκφυλίζεται ο ρόλος των διανυσμάτων και όλα τα μεγέθη μπορεί να θεωρηθούν ως βαθμωτά. Επιπλέον, η κίνηση στο επίπεδο Oxy μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία δύο ανεξάρτητων κινήσεων στις διευθύνσεις των αξόνων Ox και Oy . Αντίστοιχα, η χωρική κίνηση είναι επαλληλία τριών ανεξάρτητων κινήσεων στις διευθύνσεις Ox , Oy και Oz .

❖ Παράδειγμα 1.1: Ευθύγραμμη κίνηση με γνωστή επιτάχυνση

Υλικό σημείο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με επιτάχυνση που είναι γνωστή συνάρτηση του χρόνου. Δηλαδή

$$\ddot{x} = f(t). \quad (1)$$

Αν η αρχική θέση και ταχύτητα του σημείου είναι x_0 και v_0 , αντίστοιχα, να προσδιορισθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου για χρόνο $t > 0$.

Λύση

Με απ' ευθείας ολοκλήρωση της εξίσωσης (1) προκύπτει ότι

$$a = \dot{v} \Rightarrow v(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau + c_1,$$

όπου c_1 είναι μια σταθερά που προσδιορίζεται από την αρχική συνθήκη

$$v(0) = v_0 \Rightarrow c_1 = v_0.$$

Επομένως, η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι

$$v(t) = v_0 + \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Παρόμοια, ο προσδιορισμός της θέσης του υλικού σημείου προκύπτει με ολοκλήρωση της εξίσωσης (2). Δηλαδή

$$v = \dot{x} \Rightarrow x(t) = \int_0^t v(\xi) d\xi + c_2, \quad (3)$$

όπου η σταθερά c_2 προσδιορίζεται από την αρχική συνθήκη

$$x(0) = x_0 \Rightarrow c_2 = x_0.$$

Τελικά, με συνδυασμό του παραπάνω αποτελέσματος και των εξισώσεων (2) και (3) προκύπτει ότι η μετατόπιση του υλικού σημείου είναι

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \int_0^t \int_0^\xi f(\tau) d\tau d\xi. \quad (4)$$

⇒ **Σημείωση 1η:** Μια ειδική περίπτωση με πρακτικό ενδιαφέρον είναι η ευθύγραμμη κίνηση με **σταθερή επιτάχυνση**, δηλαδή με

$$f(t) = a_0.$$

Τότε, οι σχέσεις (2) και (4) γίνονται

$$v = v_0 + a_0 t \quad (5)$$

και

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2, \quad (6)$$

αντίστοιχα. Επιπλέον, με απαλοιφή του χρόνου από τις εξισώσεις (5) και (6) προκύπτει ότι

$$v^2 = v_0^2 + 2a_0(x - x_0). \quad (7)$$

➤ **Σημείωση 2η:** Στην γενική περίπτωση, η μελέτη μονοδιάστατων προβλημάτων της Δυναμικής οδηγεί σε εξισώσεις κίνησης με μορφή

$$\ddot{x} = f(\dot{x}, x, t), \quad (8)$$

αντί της (1). Η παραπάνω εξίσωση είναι μη γραμμική κανονική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης και δεν επιδέχεται αναλυτικής λύσεως, εκτός από κάποιες ειδικές περιπτώσεις, όπως η εξετασθείσα (βλέπε και Πρόβλημα 1.5). Τότε, η λύση προσδιορίζεται με εφαρμογή κατάλληλης αριθμητικής μεθόδου.

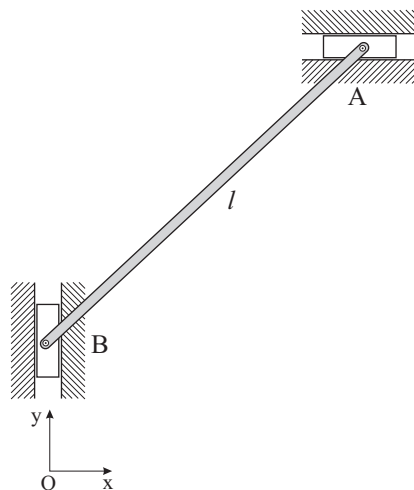
❖ Παράδειγμα 1.2: Κίνηση με περιορισμούς

Το άκρο A της στερεάς ράβδου που φαίνεται στο Σχήμα 1.3 αρχίζει να κινείται οριζόντια έτσι, ώστε να έχει συντεταγμένη

$$x = at^2. \quad (1)$$

Αν η παράμετρος a είναι σταθερή και το μήκος της ράβδου είναι l , να προσδιορισθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του άλλου άκρου B, που κινείται κατακόρυφα, την στιγμή που γίνεται $y = l/2$.

Λύση



Σχήμα 1.3

Με βάση το σύστημα αναφοράς στο Σχήμα 1.3, η θέση y του άκρου Β της ράβδου καθορίζεται από την θέση x του άκρου Α, μέσω της σχέσης

$$x^2 + (l - y)^2 = l^2 \quad (2)$$

ή της σχέσης

$$y = l - \sqrt{l^2 - x^2}, \quad (3)$$

οι οποίες εκφράζουν την συνθήκη στερεότητας της ράβδου. Επομένως, η ταχύτητα του άκρου Β προσδιορίζεται από την σχέση

$$x\dot{x} + (l - y)(-\dot{y}) = 0 \Rightarrow \dot{y} = \frac{x\dot{x}}{\sqrt{l^2 - x^2}}. \quad (4)$$

Επομένως, η επιτάχυνση του άκρου Β είναι

$$\ddot{y} = \frac{(\dot{x}^2 + x\ddot{x})\sqrt{l^2 - x^2} + (x\dot{x})^2(l^2 - x^2)^{-1/2}}{l^2 - x^2}$$

ή, μετά την εκτέλεση των αλγεβρικών πράξεων,

$$\ddot{y} = \frac{x\ddot{x}(l^2 - x^2) + \dot{x}^2 l^2}{(l^2 - x^2)^{3/2}}. \quad (5)$$

Την στιγμή που γίνεται $y = y_0 = l/2$, η σχέση (3) δίνει

$$x = x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}l \quad (6)$$

και άρα η σχέση (1) συνεπάγεται ότι αυτό συμβαίνει την χρονική στιγμή

$$t_0 = \sqrt{\frac{x_0}{\alpha}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}l}{2\alpha}}.$$

Την ίδια στιγμή, η ταχύτητα του άκρου Α είναι

$$\dot{x}(t_0) = 2\alpha t_0 = \sqrt{2\sqrt{3}}l\alpha \equiv \dot{x}_0, \quad (7)$$

ενώ η επιτάχυνσή του είναι

$$\ddot{x}_0(t_0) = 2\alpha \equiv \ddot{x}_0. \quad (8)$$

Τέλος, αντικατάσταση των εκφράσεων των x_0 , \dot{x}_0 και \ddot{x}_0 από τις σχέσεις (6), (7) και (8), αντίστοιχα, στις εξισώσεις (4) και (5) οδηγεί στον προσδιορισμό της τιμής

της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του άκρου B στην χρονική στιγμή $t = t_0$.

Ερώτηση: Τί συμβαίνει καθώς $x \rightarrow l$;

⇒ **Σημείωση:** Στο εξεταζόμενο σύστημα, τα σημεία A και B εκτελούν ευθύγραμμη κίνηση κατά μήκος του άξονα Ox και Oy , αντίστοιχα. Όμως, οι κινήσεις αυτές δεν είναι ανεξάρτητες, αφού περιορίζονται από την σχέση (2). Η σχέση αυτή μπορεί να τεθεί στην γενική μορφή

$$\phi(x, y) = 0.$$

Τέτοιες σχέσεις εκφράζουν δεσμούς κίνησης, οι οποίοι αντιμετωπίζονται με συστηματικές μεθόδους που παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 5.

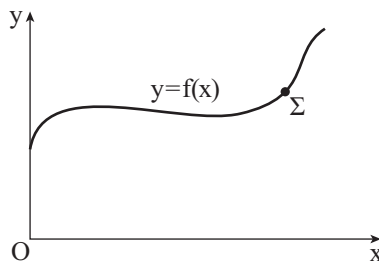
❖ Παράδειγμα 1.3: Κίνηση σε οδηγητική καμπύλη

Το άκρο Σ ενός μέλους μηχανής εξαναγκάζεται να ακολουθήσει την επίπεδη οδηγητική καμπύλη

$$y = f(x), \quad (1)$$

όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.4. Αν η συνιστώσα της ταχύτητας στην διεύθυνση Ox είναι σταθερή και ίση με v_0 , να καθορισθεί η ταχύτητα και επιτάχυνση του Σ σε κάθε χρονική στιγμή.

Λύση



Σχήμα 1.4

Επειδή η κίνηση του σημείου Σ είναι επίπεδη, η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του καθορίζονται από τις σχέσεις (1.5) και (1.6), αντίστοιχα. Στις σχέσεις αυτές, αντικαθίστανται οι εκφράσεις

$$\dot{x} = v_0, \quad \ddot{x} = 0, \quad \dot{y} = f'(x)\dot{x} = f'(x)v_0, \quad \ddot{y} = f''(x)v_0^2.$$

Έτσι, τελικά προκύπτει ότι η ταχύτητα του άκρου Σ έχει μορφή

$$\mathbf{v} = v_0[\mathbf{e}_x + f'(x)\mathbf{e}_y],$$

ενώ η επιτάχυνσή του είναι

$$\mathbf{a} = v_0^2 f''(x) \mathbf{e}_y,$$

με

$$x = v_0 t + x_0.$$

⇒ **Σημείωση:** Όπως και στο Παράδειγμα 1.2, η σχέση (1) αποτελεί δεσμό κίνησης που μπορεί να τεθεί στην γενική μορφή $\phi(x, y) = 0$.

❖ Παράδειγμα 1.4: Βολή υλικού σημείου

Υλικό σημείο κινείται με γνωστή επιτάχυνση

$$\mathbf{a} = -g \mathbf{e}_y, \quad (1)$$

όπου g είναι μία θετική σταθερά. Η αρχική θέση του σώματος είναι

$$\mathbf{r}_0 = x_0 \mathbf{e}_x + y_0 \mathbf{e}_y, \quad (2)$$

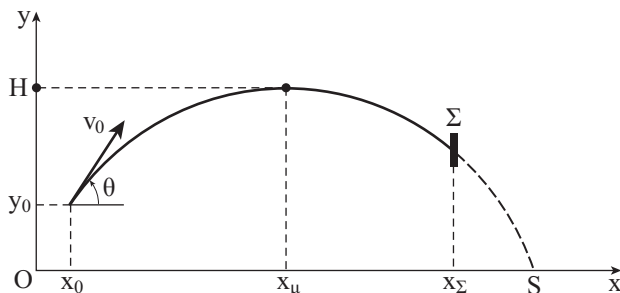
ενώ το σώμα βάλλεται με αρχική ταχύτητα

$$\mathbf{v}_0 = v_{0x} \mathbf{e}_x + v_{0y} \mathbf{e}_y = v_0 (\cos\theta \mathbf{e}_x + \sin\theta \mathbf{e}_y), \quad (3)$$

όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.5.

- Να προσδιορισθεί η θέση και η ταχύτητα του σώματος για κάθε χρονική στιγμή.
- Να βρεθεί η οριζόντια θέση x_μ , στην οποία το σώμα φθάνει στο μέγιστο ύψος H της τροχιάς του. Ποιό είναι το μέγιστο ύψος H ;
- Να προσδιορισθεί η τιμή της γωνίας θ για την οποία το σώμα θα χτυπήσει στόχο που έχει συντεταγμένες x_Σ και y_Σ .
- Να καθορισθεί η θέση x_S , στην οποία $y = y_0$.

Λύση



Σχήμα 1.5

Λύση

α) Με απ' ευθείας ολοκλήρωση της εξίσωσης (1) προκύπτει ότι

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{e}_x + (-gt + c_2) \mathbf{e}_y + c_3 \mathbf{e}_z.$$

Επομένως, με εφαρμογή των αρχικών συνθηκών που εκφράζονται από την σχέση (3) προκύπτει ότι οι σταθερές c_1 , c_2 και c_3 που εμφανίζονται στην παραπάνω εξίσωση παίρνουν τις τιμές

$$c_1 = v_{0x}, \quad c_2 = v_{0y}, \quad c_3 = 0.$$

Άρα, η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι

$$\mathbf{v} = v_{0x} \mathbf{e}_x + (v_{0y} - gt) \mathbf{e}_y. \quad (4)$$

Παρόμοια, ολοκλήρωση της εξίσωσης (4) οδηγεί στην σχέση

$$\mathbf{r} = (v_{0x}t + c_4) \mathbf{e}_x + (v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 + c_5) \mathbf{e}_y + c_6 \mathbf{e}_z,$$

η οποία με εφαρμογή των αρχικών συνθηκών της σχέσης (2) δίνει τελικά

$$\mathbf{r} = (x_0 + v_{0x}t) \mathbf{e}_x + (y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2) \mathbf{e}_y. \quad (5)$$

β) Με βάση την εξίσωση (5), η κατακόρυφη συνιστώσα του διανύσματος θέσης προσδιορίζεται από την έκφραση

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (6)$$

Η ακραία τιμή της συνάρτησης αυτής προσδιορίζεται από την συνθήκη

$$y' = \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{v_{0x}} \dot{y} = 0,$$

οπότε

$$\dot{y} = 0 \Rightarrow t_\mu = \frac{v_{0y}}{g}. \quad (7)$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση (6) προκύπτει το μέγιστο ύψος

$$H = y(t_\mu) = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g}. \quad (8)$$

Επειδή $\ddot{y}(t_\mu) = -g < 0$, είναι φανερό ότι το H αντιστοιχεί πράγματι στην μέγιστη τιμή της κατακόρυφης συνιστώσας y . Η αντίστοιχη οριζόντια θέση προσδιορίζεται από την εξίσωση (5) στην μορφή

$$x_{\mu} = x(t_{\mu}) = x_0 + \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} = x_0 + \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\theta. \quad (9)$$

Μετά από απαλοιφή του χρόνου t από τις συνιστώσες του διανύσματος θέσης \mathbf{r} μπορεί να αποδειχθεί εύκολα ότι η τροχιά του σώματος είναι **παραβολική** με κορυφή το σημείο (x_{μ}, y_{μ}) .

γ) Από την σχέση (5) προκύπτει αμέσως ότι

$$x_{\Sigma} = x_0 + v_{0x} t_{\Sigma} \quad \text{και} \quad y_{\Sigma} = y_0 + v_{0y} t_{\Sigma} - \frac{1}{2} g t_{\Sigma}^2.$$

Με απαλοιφή του χρόνου t_{Σ} από τις δύο τελευταίες σχέσεις, προκύπτει η εξίσωση

$$\tan^2 \theta_{\Sigma} - \frac{2v_0^2}{g(x_{\Sigma} - x_0)} \tan \theta_{\Sigma} + \frac{2v_0^2(y_{\Sigma} - y_0)}{g(x_{\Sigma} - x_0)^2} + 1 = 0 \quad (10)$$

για την γωνία θ . Η παραπάνω συνθήκη ικανοποιείται για δύο τιμές της γωνίας θ_{Σ} (με $0 < \theta_{\Sigma} < \pi/2$). Η τροχιά που αντιστοιχεί στην μικρότερη / μεγαλύτερη γωνία λέγεται **ευθύβολη / επισκυπτική**, αντίστοιχα.

δ) Για $y = y_0$ και $t \neq 0$, η εξίσωση (6) δίνει

$$t_s = \frac{2v_{0y}}{g} = 2t_{\mu}.$$

Επομένως,

$$x_s \equiv x(t_s) = x_0 + \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta.$$

- **Ερώτηση 1η:** Πώς προσδιορίζεται η θέση του σημείου S στο Σχήμα 1.5;
- **Ερώτηση 2η:** Ποιά είναι τα αντίστοιχα αποτελέσματα όταν η βολή είναι οριζόντια ($\theta = 0$) ή όταν η βολή είναι κατακόρυφη ($\theta = \pi/2$);

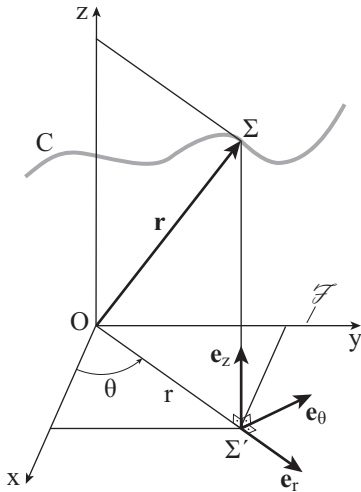
⇒ **Σημείωση:** Το εξεταζόμενο παράδειγμα μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση του Παραδείγματος 1.1. Τελικά, προκύπτει ότι η κίνηση εκτελείται στο επίπεδο Oxy , που ορίζεται από τα διανύσματα \mathbf{e}_y και \mathbf{v}_0 .

1.2.3 Κυλινδρικό σύστημα αναφοράς

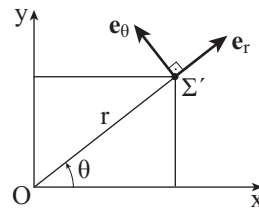
Σε περιπτώσεις εφαρμογών με κυλινδρική γεωμετρία, είναι βολικό να χρησιμοποιούνται οι κυλινδρικές συντεταγμένες (r, θ, z) , με $r \geq 0$ και $0 \leq \theta < 2\pi$, όπως αυτές ορίζονται στο Σχήμα 1.6 για τυχαίο σημείο Σ του χώρου, αντί των αντίστοιχων

καρτεσιανών συντεταγμένων (x, y, z) . Από ορισμό, οι άξονες Oz , οι συντεταγμένες z και τα μοναδιαία διανύσματα βάσης \mathbf{e}_z των δύο αυτών συστημάτων συμπίπτουν. Επιπλέον, αν Σ' είναι η προβολή του σημείου Σ στο επίπεδο Oxy , τότε με την βοήθεια του Σχήματος 1.7 προκύπτουν οι σχέσεις

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (1.7)$$



Σχήμα 1.6



Σχήμα 1.7

Επομένως, με δεδομένες τις συντεταγμένες r και θ προκύπτουν άμεσα οι συντεταγμένες x και y . Αντίθετα, με δεδομένες τις x και y προκύπτει εύκολα η συντεταγμένη r από την σχέση

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

οπότε η γωνία θ προκύπτει (για $r \neq 0$) από τις σχέσεις (1.7). Επίσης, τα μοναδιαία διανύσματα βάσης \mathbf{e}_r και \mathbf{e}_θ στην διεύθυνση του ευθυγράμμου τμήματος $O\Sigma'$ και της καθέτου της, που δείχνουν αύξηση στην τιμή της συντεταγμένης r και θ , αντίστοιχα, συνδέονται μέσω των σχέσεων

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y \quad (1.8)$$

και

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y, \quad (1.9)$$

με τα μοναδιαία διανύσματα βάσης \mathbf{e}_x και \mathbf{e}_y του καρτεσιανού συστήματος αναφοράς. Από τις παραπάνω σχέσεις είναι προφανές ότι τα διανύσματα \mathbf{e}_r και \mathbf{e}_θ

δεν είναι σταθερά, αφού η διεύθυνσή τους εξαρτάται από την συντεταγμένη θ (αλλά όχι από τις r και z).

Στο κυλινδρικό σύστημα αναφοράς, το διάνυσμα θέσης του σημείου Σ ορίζεται από την σχέση

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z. \quad (1.10)$$

Επομένως, η ταχύτητα του σημείου Σ βρίσκεται με παραγωγή της εξίσωσης (1.10) και έχει την αρχική μορφή

$$\mathbf{v} = (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r) + (\dot{z}\mathbf{e}_z + z\dot{\mathbf{e}}_z).$$

Στην προκειμένη περίπτωση, το διάνυσμα \mathbf{e}_z διατηρεί πάντα σταθερό μέτρο και διεύθυνση, ενώ το ακτινικό διάνυσμα \mathbf{e}_r εξαρτάται από την γωνιακή συντεταγμένη θ . Πιο συγκεκριμένα, η σχέση (1.8) οδηγεί στην

$$\dot{\mathbf{e}}_r = -\dot{\theta} \sin\theta \mathbf{e}_x + \dot{\theta} \cos\theta \mathbf{e}_y,$$

η οποία σε συνδυασμό με την εξίσωση (1.9) δίνει

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta. \quad (1.11)$$

Έτσι, η ταχύτητα παίρνει την εξής τελική μορφή σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z. \quad (1.12)$$

Στην συνέχεια, η επιτάχυνση προσδιορίζεται με παραγωγή της (1.12). Δηλαδή

$$\mathbf{a} = \ddot{r}\mathbf{e}_r + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_z + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta. \quad (1.13)$$

Με παραγωγή της εξίσωσης (1.9) και χρησιμοποίηση της (1.8) προκύπτει ότι

$$\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r. \quad (1.14)$$

Έτσι, με την βοήθεια των σχέσεων (1.11) και (1.14), η εξίσωση (1.13) οδηγεί στην εξής έκφραση της επιτάχυνσης του σημείου Σ σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_z. \quad (1.15)$$

♦ **Παρατήρηση 1η:** Όταν η κίνηση περιορίζεται στο επίπεδο

$$z = H = \text{σταθερά},$$

λέγεται **επίπεδη** και μπορεί να περιγραφεί από τις **πολικές** συντεταγμένες r

και θ μόνο. Τότε, η ταχύτητα και η επιτάχυνση προσδιορίζονται από τις σχέσεις (1.12) και (1.15), με $\dot{z}=0$ και $\ddot{z}=0$. Παρόμοια, όταν

$$\theta = \theta_0 = \text{σταθερά},$$

η κίνηση είναι πάλι επίπεδη (δισδιάστατη), αλλά εκφράζεται από τις συντεταγμένες r και z . Όμως, η συνθήκη

$$r = R = \text{σταθερά}$$

σημαίνει ότι η κίνηση γίνεται στην επιφάνεια κυλίνδρου με άξονα Oz και ακτίνα R . Τότε, οι σχέσεις (1.12) και (1.15) γίνονται

$$\mathbf{v} = R \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{z} \mathbf{e}_z$$

και

$$\mathbf{a} = -R \dot{\theta}^2 \mathbf{e}_r + R \ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \ddot{z} \mathbf{e}_z,$$

αντίστοιχα.

♦ **Παρατήρηση 2η:** Αν το υλικό σημείο κινείται έτσι, ώστε

$$\theta = \theta_0 \quad \text{και} \quad r = R$$

ή

$$\theta = \theta_0 \quad \text{και} \quad z = H,$$

οι εξισώσεις (1.12) και (1.15) γίνονται ίδιες με τις αντίστοιχες σχέσεις που ισχύουν για ευθύγραμμη κίνηση. Όμως, αν

$$r = R \quad \text{και} \quad z = H,$$

η κίνηση είναι μεν μονοδιάστατη, αλλά δεν είναι ευθύγραμμη. Η κίνηση αυτή ονομάζεται **κυκλική** και χαρακτηρίζεται από ταχύτητα

$$\mathbf{v} = R \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \tag{1.16}$$

και επιτάχυνση

$$\mathbf{a} = -R \dot{\theta}^2 \mathbf{e}_r + R \ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta. \tag{1.17}$$

♦ **Παρατήρηση 3η:** Οι χρονικές παράγωγοι των μοναδιαίων διανυσμάτων βάσης \mathbf{e}_r και \mathbf{e}_θ , που εκφράζονται από τις σχέσεις (1.11) και (1.14), μπορεί να προσδιορισθούν με εναλλακτικό τρόπο. Τα διανύσματα αυτά έχουν σταθερό μήκος, αλλά η διεύθυνσή τους εξαρτάται από την γωνία θ . Έτσι, η παράγωγος του ακτινικού διανύσματος \mathbf{e}_r είναι

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} \dot{\theta}, \quad (1.18)$$

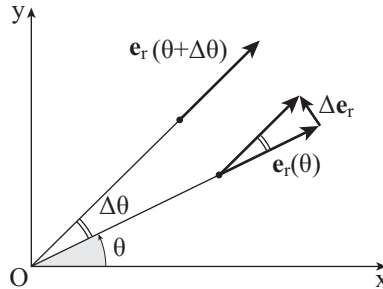
όπου, σύμφωνα με τον ορισμό,

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{e}_r(\theta + \Delta\theta) - \mathbf{e}_r(\theta)}{\Delta\theta}.$$

Με την βοήθεια του Σχήματος 1.8 μπορεί να αποδειχθεί ότι, καθώς $\Delta\theta \rightarrow 0$, η κατεύθυνση του διανύσματος $\Delta\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r(\theta + \Delta\theta) - \mathbf{e}_r(\theta)$ ταυτίζεται με εκείνη του \mathbf{e}_θ , ενώ το μέγεθός του γίνεται ίσο με $\Delta\theta$. Δηλαδή

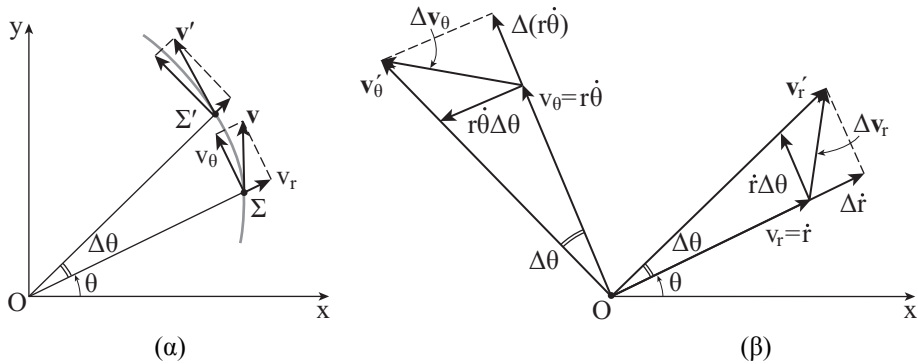
$$\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = \mathbf{e}_\theta. \quad (1.19)$$

Συνδυασμός του αποτελέσματος αυτού με την εξίσωση (1.18) οδηγεί στην σχέση (1.11). Τέλος, με παρόμοιο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί και η εξίσωση (1.14).



Σχήμα 1.8

- ♦ **Παρατήρηση 4η:** Όπως φαίνεται από την έκφραση (1.12), οι συνιστώσες της ταχύτητας στις διευθύνσεις r και z προκύπτουν λόγω μεταβολής του μεγέθους του διανύσματος θέσης, ενώ η συνιστώσα της ταχύτητας στην διεύθυνση θ προκύπτει λόγω αλλαγής της διεύθυνσης του διανύσματος θέσης. Η εικόνα είναι πιο πολύπλοκη για τις πολικές συνιστώσες της επιτάχυνσης. Με την βοήθεια του Σχήματος 1.9 φαίνεται ότι η αλλαγή του μήκους και της διεύθυνσης της ακτινικής συνιστώσας v_r συνεισφέρει τους όρους \ddot{r} και $\dot{r}\dot{\theta}$ στην έκφραση (1.15) της επιτάχυνσης. Παρόμοια, η αλλαγή μήκους και διεύθυνσης της γωνιακής συνιστώσας v_θ παράγει τους όρους $\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$ και $-r\dot{\theta}^2$, αντίστοιχα, στην (1.15).



Σχήμα 1.9

❖ Παράδειγμα 1.5: Κίνηση σε καρδιοειδή καμπύλη

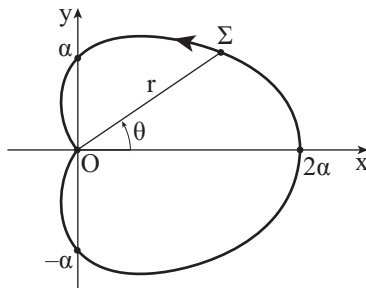
Το σημείο Σ του μέλους ενός μηχανισμού κινείται σε καρδιοειδή οδηγητική καμπύλη, όπως δείχνει το Σχήμα 1.10. Η καμπύλη περιγράφεται από την εξίσωση

$$r = a(1 + \cos\theta) \tag{1}$$

Αν η φορά της κίνησης είναι αντι-ωρολογιακή και γίνεται έτσι, ώστε

$$\dot{\theta} = \omega = \text{σταθερά}, \tag{2}$$

να προσδιορισθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου Σ.



Σχήμα 1.10

Λύση

Κατ' αρχάς, η κίνηση είναι επίπεδη, αφού $z=0$, οπότε $\dot{z}=0$ και $\ddot{z}=0$. Κατόπιν, παραγωγή της εξίσωσης (1) οδηγεί στις σχέσεις

$$\dot{r} = -a\dot{\theta} \sin\theta \tag{3}$$

και

$$\ddot{r} = -\alpha\ddot{\theta} \sin\theta - \alpha\dot{\theta}^2 \cos\theta. \quad (4)$$

Επιπλέον, από την σχέση (2) προκύπτει ότι

$$\theta = \omega t + \theta_0 \quad \text{και} \quad \ddot{\theta} = 0. \quad (5)$$

Επομένως, με αντικατάσταση των εξισώσεων (1)-(5) στις σχέσεις (1.12) και (1.15) προκύπτει ότι

$$\mathbf{v} = \alpha\omega[-\sin\theta\mathbf{e}_r + (1 + \cos\theta)\mathbf{e}_\theta]$$

και

$$\mathbf{a} = -\alpha\omega^2[(1 + 2\cos\theta)\mathbf{e}_r + 2\sin\theta\mathbf{e}_\theta].$$

- **Ερώτηση:** Σε ποιές θέσεις εμφανίζεται η μέγιστη επιτάχυνση;

⇒ **Σημείωση:** Μία εκτίμηση για την διευκόλυνση που παρέχει η χρησιμοποίηση κυλινδρικών συντεταγμένων στο παρόν παράδειγμα μπορεί να προκύψει με την προσπάθεια επίλυσης του ίδιου παραδείγματος με χρησιμοποίηση καρτεσιανών συντεταγμένων.

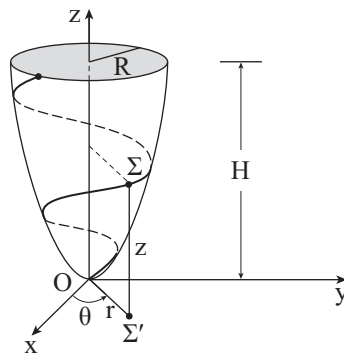
❖ Παράδειγμα 1.6: Κίνηση στην επιφάνεια παραβολοειδούς

Υλικό σημείο Σ ξεκινά από την αρχή O ενός συστήματος αναφοράς στον χρόνο $t = 0$ και κινείται στην επιφάνεια παραβολοειδούς εκ περιστροφής, με εξίσωση

$$z = (r/R)^2 H, \quad (1)$$

όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.11. Η τροχιά που διαγράφει το σημείο Σ περιγράφεται παραμετρικά από τις εξισώσεις

$$r = \alpha t, \quad \theta = \beta t^2. \quad (2)$$



Σχήμα 1.11

**Προβλήματα**

- 1.1** Αν οι ποσότητες \mathbf{a} και \mathbf{b} αντιπροσωπεύουν διανυσματικές συναρτήσεις του χρόνου, ενώ το c είναι μια βαθμωτή συνάρτηση του χρόνου, να αποδειχθούν οι παρακάτω χρήσιμες ταυτότητες

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \dot{\mathbf{a}} + \dot{\mathbf{b}}, \quad \frac{d}{dt}(c\mathbf{a}) = \dot{c}\mathbf{a} + c\dot{\mathbf{a}}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{b}}, \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \dot{\mathbf{b}}$$

και

$$\frac{d}{dt} \left[\mathbf{a} \cdot \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} \right) \right] = (\mathbf{a} \times \dot{\mathbf{a}}) \cdot \frac{d^3\mathbf{a}}{dt^3}.$$

- 1.2** Αν $\mathbf{a}(t) = f(t)\mathbf{b}$, να αποδειχθεί ότι

$$\int \mathbf{a}(t) dt = \mathbf{b} \int f(t) dt + \mathbf{c},$$

όπου το διάνυσμα \mathbf{c} έχει σταθερές συνιστώσες.

- 1.3** Η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να έχει το (μη μηδενικό) διάνυσμα $\mathbf{a}(t)$ σταθερό μέγεθος είναι η

$$\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{a}} = 0,$$

που σημαίνει ότι το $\dot{\mathbf{a}}$ είναι κάθετο στο \mathbf{a} .

- 1.4** Η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να έχει το (μη μηδενικό) διάνυσμα $\mathbf{a}(t)$ σταθερή διεύθυνση είναι η

$$\mathbf{a} \times \dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0},$$

που σημαίνει ότι το διάνυσμα $\dot{\mathbf{a}}$ είναι παράλληλο στο \mathbf{a} .

- 1.5** Υλικό σημείο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση στην διεύθυνση x . Να προσδιορισθεί η θέση και η ταχύτητά του αν η επιτάχυνσή του είναι γνωστή συνάρτηση:

α) της ταχύτητας μόνο, δηλαδή αν $\ddot{x} = f(\dot{x})$,

β) της θέσης μόνο, δηλαδή αν $\ddot{x} = f(x)$.

Και στις δύο περιπτώσεις, είναι γνωστές οι αρχικές συνθήκες $x(0) = x_0$ και $\dot{x}(0) = v_0$.

1.6 Ανελκυστήρας ξεκινά από την ηρεμία και κατέρχεται με σταθερή επιτάχυνση a_0 στο πρώτο μέρος της κίνησης και κατόπιν με επιβράδυνση $a_0/2$, ώστε να φτάσει στον πυθμένα πηγαδιού με μηδενική ταχύτητα. Αν ο συνολικός χρόνος της κίνησης είναι τ , να προσδιορισθεί το βάθος του πηγαδιού.

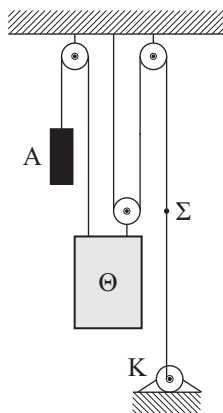
1.7 Δυο σώματα A και B κινούνται στην περιφέρεια κύκλου και εκτελούν ομαλή κίνηση με περιόδους T_A και T_B , αντίστοιχα, με $T_A < T_B$. Αν τα δυο σώματα ξεκινούν από την ίδια θέση και κινούνται ομόρροπα/αντίρροπα, να αποδειχθεί ότι θα ξανασυναντηθούν για πρώτη φορά μετά από χρόνο

$$\tau_0 = \frac{T_A T_B}{T_B - T_A} \quad \text{και} \quad \tau_A = \frac{T_A T_B}{T_B + T_A},$$

αντίστοιχα. Ποιά συνθήκη πρέπει να πληρούν οι περίοδοι T_A και T_B , ώστε τα σώματα να ξανασυναντηθούν στην θέση εκκίνησης;

1.8 Δυο σώματα ξεκινούν από την ηρεμία και εκτελούν ελεύθερη πτώση. Αν τα σώματα ξεκινούν από το ίδιο σημείο με διαφορά χρόνου τ να αποδειχθεί ότι η σχετική ταχύτητα του πρώτου ως προς το δεύτερο είναι σταθερή.

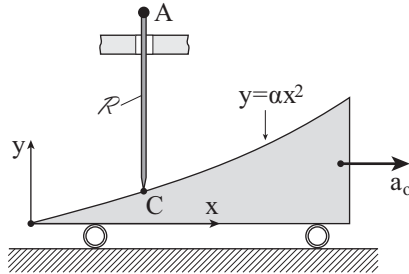
1.9 Το Σχήμα Π1.9 δείχνει την διάταξη ενός ανελκυστήρα. Αν ο θάλαμος Θ ανέρχεται με σταθερή ταχύτητα v_0 , να βρεθεί η ταχύτητα του αντίβαρου A και του σημείου Σ του καλωδίου.



Σχήμα Π1.9

1.10 Το όχημα που φαίνεται στο Σχήμα Π1.10 ξεκινά από την ηρεμία, με $y_C(0) = b$ και σταθερή επιτάχυνση a_0 , όπου C είναι το σημείο επαφής της

ράβδου \mathcal{R} με το όχημα. Να βρεθεί η θέση και η επιτάχυνση της ράβδου μετά από χρόνο τ . Δίδονται: $a_0 = 2\text{m/s}^2$, $\alpha = 1/\text{m}$, $b = 1\text{m}$, $\tau = 5\text{sec}$.



Σχήμα Π1.10

1.11 Το διάνυσμα θέσης ενός υλικού σημείου είναι

$$\mathbf{r}(t) = a(\cos \omega t \mathbf{e}_x + \sin \omega t \mathbf{e}_y + \beta t \mathbf{e}_z),$$

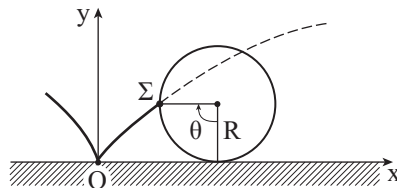
όπου a , β και ω είναι γνωστές σταθερές. Αφού πρώτα αναγνωρισθεί η γεωμετρική σημασία των σταθερών αυτών, να βρεθούν οι συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης ως προς:

- ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς με μοναδιαία διανύσματα βάσης \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y και \mathbf{e}_z ,
- κυλινδρικό σύστημα αναφοράς,
- τροχιακό σύστημα αναφοράς.

1.12 Κυκλοειδής ονομάζεται η καμπύλη που διαγράφεται από σημείο Σ της περιφέρειας κυλιόμενου τροχού, όπως δείχνει το Σχήμα Π1.12. Η εξίσωσή της δίνεται παραμετρικά από τις σχέσεις

$$x = R(\theta - \sin \theta) \quad \text{και} \quad y = R(1 - \cos \theta).$$

Να προσδιορισθεί η επιτάχυνση του σημείου Σ συναρτήσει των R , θ , $\dot{\theta}$ και $\ddot{\theta}$.



Σχήμα Π1.12

1.13 Υλικό σημείο ξεκινά στην χρονική στιγμή $t = 0$ από την θέση

$$\mathbf{r}(0) = a_0 \mathbf{e}_x + b_0 \mathbf{e}_y,$$

με αρχική ταχύτητα

$$\mathbf{v}(0) = c_0 \mathbf{e}_z$$

και επιτάχυνση που έχει μορφή

$$\mathbf{a} = at \mathbf{e}_x + bt^2 \mathbf{e}_y + c \mathbf{e}_z.$$

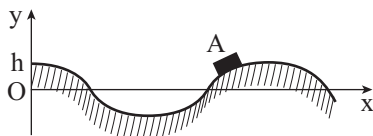
- α) Να βρεθεί η θέση του σημείου στον χώρο συναρτήσει του χρόνου.
 β) Να προσδιορισθεί η προβολή της ταχύτητας στην γραμμή που ορίζεται από την τομή των επιπέδων

$$z = 0 \quad \text{και} \quad y = kx + \lambda.$$

1.14 Αυτοκίνητο Α ταξιδεύει σε δρόμο, του οποίου η επιφάνεια προσεγγίζεται από την αρμονική συνάρτηση

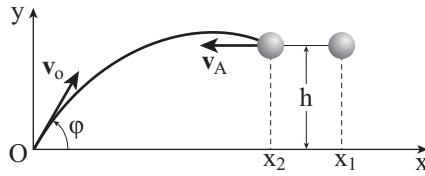
$$y(x) = h \cos\left(2\pi \frac{x}{l}\right),$$

όπως δείχνει το Σχήμα Π1.14. Αν ο οδηγός διατηρεί σταθερό μέτρο ταχύτητας v_0 , να προσδιορισθούν οι συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του αυτοκινήτου στο σύστημα Oxy συναρτήσει της απόστασης x . Σε ποιο σημείο της διαδρομής εμφανίζεται το μέγιστο μέτρο της επιτάχυνσης; Δίδονται: $l = 100 \text{ m}$, $h = 3 \text{ m}$, $v_0 = 50 \text{ km/h}$.



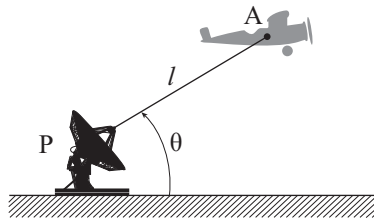
Σχήμα Π1.14

1.15 Αντιαεροπορικό πυροβόλο βάλει κατά αεροσκάφους που κινείται με σταθερό μέτρο ταχύτητας v_A σε σταθερό ύψος h . Αν το μέτρο της αρχικής ταχύτητας του βλήματος είναι v_0 και το πυροβόλο βάλει όταν το αεροσκάφος βρίσκεται σε απόσταση x_1 από το πυροβόλο, όπως δείχνει το Σχήμα Π1.15, να προσδιορισθεί η γωνία φ , ώστε η βολή να είναι επιτυχής. Επίσης, να βρεθεί ο χρόνος κίνησης του βλήματος και η απόσταση που απέχει το αεροσκάφος από το πυροβόλο την στιγμή της πρόσκρουσης. Τέλος, να υπολογισθεί η ταχύτητα του βλήματος σχετικά με το αεροσκάφος κατά την πρόσκρουση. Δίδονται: $h = 3 \text{ km}$, $x_1 = 4 \text{ km}$, $v_A = 800 \text{ km/h}$, $v_0 = 500 \text{ m/s}$.



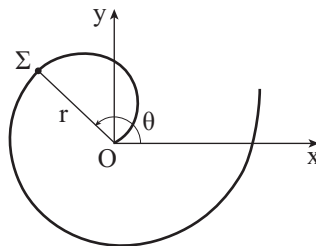
Σχήμα Π1.15

- 1.16** Το αεροπλάνο A που φαίνεται στο Σχήμα Π1.16 ταξιδεύει σε σταθερό ύψος. Το ραντάρ P εντοπίζει το αεροπλάνο και υπολογίζει την απόσταση l , την γωνία θ , καθώς και την χρονική αλλαγή της $\dot{\theta}$. Να βρεθεί η ταχύτητα του αεροπλάνου συναρτήσει των l , θ και $\dot{\theta}$. Ποιά επιπλέον πληροφορία απαιτείται, αν το ύψος είναι μεταβλητό; Τέλος, ποιές άλλες μετρήσεις χρειάζονται για να βρεθεί και η επιτάχυνση του αεροπλάνου;



Σχήμα Π1.16

- 1.17** Σημείο Σ κινείται με σταθερό μέτρο ταχύτητας v_0 σε «σπείρα του Αρχιμήδη», που φαίνεται στο Σχήμα Π1.17 και περιγράφεται με την σχέση $r = a\theta$. Να βρεθεί η επιτάχυνση του σημείου Σ στην θέση $\theta = 2\pi$.



Σχήμα Π1.17

- 1.18** Το σωματίδιο Σ του Σχήματος Π1.18 κινείται σε οδηγητική καμπύλη, η οποία βρίσκεται στην επιφάνεια κυλίνδρου ακτίνας R , με σταθερό βήμα ελίκωσης p . Να προσδιορισθούν η ταχύτητα και η επιτάχυνση του Σ αν κινείται με σταθερό μέτρο ταχύτητας v_0 .

Κινητική στερεού σώματος

4.1 Εισαγωγή

Η Κινητική Στερεού Σώματος συνδέει την κίνηση του σώματος (δηλαδή την μεταφορά και την αλλαγή προσανατολισμού του) με τις δυνάμεις και τις ροπές που την προκαλούν. Οι βασικές φυσικές αρχές που καθιστούν δυνατή αυτή την σύνδεση στηρίζονται στην εφαρμογή των νόμων του Νεύτωνα και του Euler, τις αρχές ώσης-ορμής ή τις αρχές έργου-ενέργειας. Όλες οι αρχές αυτές έχουν ήδη αναπτυχθεί στο δεύτερο κεφάλαιο, για συστήματα υλικών σημείων. Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται εξειδίκευση και άμεση εφαρμογή τους σε στερεά σώματα. Δηλαδή κάθε στερεό σώμα θεωρείται ότι αποτελείται από έναν άπειρο αριθμό σωματιδίων, τα οποία διατηρούν αμετάβλητη την μεταξύ τους απόσταση κατά την διάρκεια της κίνησής τους. Έτσι, οι αρχές που αναπτύχθηκαν στο δεύτερο κεφάλαιο για συστήματα υλικών σημείων παίρνουν πιο συμπαγείς και κομψές μορφές όταν αναφέρονται σε στερεά σώματα. Σε αυτό βοηθάει η εισαγωγή της έννοιας του ταυστή αδράνειας.

Και για τις τρεις διαφορετικές κατηγορίες αρχών της Κινητικής στερεών σωμάτων, η ανάπτυξη και η παρουσίαση γίνεται αρχικά για γενική χωρική κίνηση. Οι απλούστερες κινήσεις, όπως η περιστροφή γύρω από ακίνητο σημείο, η επίπεδη κίνηση, η καθαρή περιστροφή και η μεταφορική κίνηση, εξετάζονται στην συνέχεια ως ειδικές περιπτώσεις. Η εμπέδωση των αρχών αυτών συμπληρώνεται με την μεθοδική επίλυση αρκετών παραδειγμάτων, τα οποία επιλέχθηκαν έτσι, ώστε να παρουσιάζουν, να τονίζουν και να βοηθούν την κατανόηση των βασικών εννοιών όλων των αρχών.

Μετά την παρουσίαση των γενικών αρχών της Κινητικής στερεού σώματος, η οποία γίνεται αναλυτικά στις Ενότητες 4.2-4.4, εξετάζεται η Κινητική υλικού σημείου που κινείται σχετικά με περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς. Τέλος, στην

Ενότητα 4.6 εξετάζονται ξεχωριστά μερικές κατηγορίες προβλημάτων που παρουσιάζουν ιδιαίτερο τεχνολογικό ενδιαφέρον. Τέτοια προβλήματα είναι η έκκεντρη κρούση, η ζυγοστάθμιση περιστρεφόμενων στερεών σωμάτων και η περιστροφή αξονοσυμμετρικών στερεών.

Όταν είναι γνωστή η κίνηση του στερεού σώματος, απ' ευθείας παραγωγήσι δίνει τις απαιτούμενες γωνιακές ταχύτητες, γωνιακές επιταχύνσεις, ταχύτητες και επιταχύνσεις, οπότε οι απαραίτητες δυνάμεις και ροπές προσδιορίζονται με άμεση εφαρμογή των αρχών της Κινητικής. Αντίθετα, όταν είναι γνωστές οι δυνάμεις και οι ροπές (ή, όπως είναι πιο συνηθισμένο, ένας συνδυασμός εξωτερικών δυνάμεων και ροπών με κινηματικούς περιορισμούς) η ανάλυση γίνεται πιο δύσκολη. Σε όλες τις περιπτώσεις, είναι σημαντική η σωστή χάραξη διαγραμμάτων ελευθέρου σώματος. Επίσης, είναι απαραίτητη η κατανόηση και η σωστή εφαρμογή των σχέσεων της Κινηματικής στερεού σώματος, οι οποίες αναπτύχθηκαν στο τρίτο κεφάλαιο.

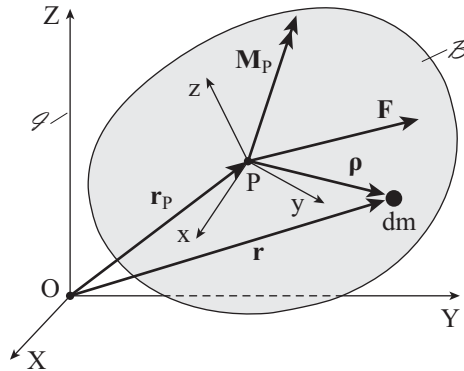
4.2 Εξισώσεις του Euler για στερεά σώματα

4.2.1 Ορισμοί

Σύμφωνα με όσα αναπτύχθηκαν στο τρίτο κεφάλαιο, η γενική χωρική κίνηση ενός στερεού σώματος καθορίζεται πλήρως από έξι ανεξάρτητες χρονικές συναρτήσεις (συντεταγμένες). Οι τρεις από αυτές τις συναρτήσεις συνδέονται με την μεταφορική συνιστώσα της κίνησης και προσδιορίζουν την θέση κάποιου συγκεκριμένου σημείου του στερεού στον χώρο, ενώ οι υπόλοιπες τρεις συντεταγμένες συνδέονται με την περιστροφική συνιστώσα της κίνησης και καθορίζουν τον προσανατολισμό του στερεού στον χώρο. Κατά συνέπεια, για την ανάλυση της γενικής χωρικής κίνησης ενός στερεού σώματος απαιτούνται έξι εξισώσεις κίνησης (ποιό είναι το απλούστερο στερεό σώμα;).

Αρχικά, οι εξισώσεις κίνησης στερεού σώματος αναπτύσσονται με βάση τους δυο νόμους του Euler που αποδείχθηκαν στο δεύτερο κεφάλαιο για συστήματα υλικών σημείων. Για τον σκοπό αυτό, θεωρείται στερεό σώμα το οποίο κινείται ως προς **αδρανειακό** σύστημα αναφοράς \mathcal{S} (ή $OXYZ$) υπό την επίδραση συστήματος εξωτερικών συγκεντρωμένων ή κατανεμημένων δυνάμεων, καθώς και ζευγών δυνάμεων. Με εφαρμογή του γνωστού από την Στατική θεωρήματος μεταφοράς δυνάμεων και ροπών από ένα σημείο στερεού σώματος σε άλλο, η συνολική εξωτερική φόρτιση είναι ισοδύναμη με την συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων \mathbf{F} και την συνισταμένη ροπή \mathbf{M}_P ως προς σημείο P , όπως δείχνει το Σχήμα 4.1. Τέ-

λος, ο προσανατολισμός του στερεού σώματος καθορίζεται από τον προσανατολισμό του συστήματος αναφοράς \mathcal{B} (ή $Pxyz$), το οποίο έχει ως αρχή το σημείο P και είναι στερεωμένο στο σώμα.



Σχήμα 4.1

Στην συνέχεια, θεωρείται ότι το εξεταζόμενο στερεό σώμα απαρτίζεται από μια απειρία στοιχειωδών σωματιδίων με απειροστή μάζα Δm_i . Έτσι, η συνολική μάζα του σώματος προσδιορίζεται από την σχέση

$$m = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta m_i = \int_m dm = \int_V \rho_m dV, \quad (4.1)$$

όπου ρ_m είναι η πυκνότητα μάζας και dV ο στοιχειώδης όγκος που αντιστοιχεί στην μάζα dm . Παρόμοια, αν το διάνυσμα θέσης της στοιχειώδους μάζας dm ως προς το σύστημα αναφοράς \mathcal{S} είναι \mathbf{r} , τότε το **κέντρο μάζας** G του στερεού προσδιορίζεται από την σχέση

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{m} \int_m \mathbf{r} dm, \quad (4.2)$$

σε αναλογία με την σχέση (2.6), που ισχύει για σύστημα υλικών σημείων, στο όριο $\Delta m_i \rightarrow 0$, ($i=1, \dots, N$), με $N \rightarrow \infty$.

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις και τον ορισμό (2.17), η **ορμή** του στερεού σώματος προσδιορίζεται από το διάνυσμα

$$\mathbf{L} = \int_m \mathbf{v} dm. \quad (4.3)$$

Επίσης, με εφαρμογή του ορισμού (2.26), η **απόλυτη στροφορμή** του σώματος ως προς το σημείο P εκφράζεται στην μορφή

$$\mathbf{H}_P = \int_m \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v} dm, \quad (4.4)$$

όπου $\boldsymbol{\rho}$ είναι το διάνυσμα θέσης της απειροστής μάζας dm ως προς σύστημα αναφοράς \mathcal{S} (ή $PX'Y'Z'$), το οποίο έχει ως αρχή το σημείο P και μεταφέρεται ως προς το \mathcal{S} και \mathbf{v} είναι η απόλυτη ταχύτητά της. Επομένως, με εφαρμογή της σχέσης (2.18) προκύπτει ότι

$$\mathbf{L} = m \mathbf{v}_G. \quad (4.5)$$

Αρα, με βάση την αρχή (2.7) και την σχέση (4.5) προκύπτει αμέσως ότι

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} = m \mathbf{a}_G, \quad (4.6)$$

όπου \mathbf{F} είναι η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων και \mathbf{a}_G είναι η (απόλυτη) επιτάχυνση του κέντρου μάζας G του σώματος. Η εξίσωση (4.6) είναι ταυτόσημη με την αντίστοιχη σχέση (2.7), που ισχύει για σύστημα υλικών σημείων. Τέλος, σε στερεό σώμα, η εξίσωση (2.28), δηλαδή η σχέση

$$\mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_P + \mathbf{v}_P \times (m \mathbf{v}_G),$$

όπου \mathbf{M}_P είναι η συνισταμένη ροπή ως προς το σημείο P , παρέχει μαζί με την αρχή (4.6) τις έξι εξισώσεις κίνησης του στερεού σώματος. Η τελευταία σχέση μπορεί να τροποποιηθεί με κατάλληλη επεξεργασία του ορισμού (4.4), που οδηγεί στην παραγωγή μιας συμπαγούς μορφής για την στροφορμή του στερεού ως προς το σημείο P . Λόγω της σπουδαιότητάς της, η σχετική επεξεργασία γίνεται ξεχωριστά, στην επόμενη ενότητα.

4.2.2 Στροφορμή και τανυστής αδράνειας στερεού σώματος

Ο προσδιορισμός της στροφορμής στερεού ως προς σημείο P γίνεται μέσω χρησιμοποίησης της σχέσης (2.34), δηλαδή

$$\mathbf{H}_P = \bar{\mathbf{H}}_P + \boldsymbol{\rho}_G \times (m \mathbf{v}_P).$$

Η **σχετική στροφορμή** $\bar{\mathbf{H}}_P$ ως προς το σημείο P προσδιορίζεται από την έκφραση

$$\bar{\mathbf{H}}_P = \int_m \boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} dm, \quad (4.7)$$

όπως προκύπτει με εφαρμογή του ορισμού (2.33). Με τον τρόπο αυτό, ο προσδιορισμός της (απόλυτης) στροφορμής \mathbf{H}_P , που ορίζεται με την εξίσωση (4.4), ανάγεται στον ευκολότερο προσδιορισμό που αντιπροσωπεύει η σχέση (4.7).

Από ορισμό, η σχετική στροφορμή μετρείται από παρατηρητή σε σύστημα α-

ναφοράς \mathcal{I} που έχει αρχή το σημείο P και μεταφέρεται ως προς το αδρανειακό σύστημα \mathcal{S} . Συνεπώς, το στερεό εκτελεί σφαιρική κίνηση ως προς το \mathcal{I} , οπότε

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho},$$

όπου $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{I}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{I}}$ (γιατί;) είναι η γωνιακή ταχύτητα του στερεού. Συνεπώς, με εφαρμογή γνωστής διανυσματικής ταυτότητας προκύπτει αμέσως ότι

$$\boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) = (\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}^T)\boldsymbol{\omega}.$$

Η σχέση αυτή, σε συνδυασμό με τον ορισμό (4.7), συνεπάγεται την έκφραση

$$\bar{\mathbf{H}}_P = \mathbf{I}_P \boldsymbol{\omega}, \quad (4.8)$$

με

$$\mathbf{I}_P \equiv \int_m (\rho^2 \mathbf{I}_3 - \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}^T) dm, \quad (4.9)$$

όπου \mathbf{I}_3 είναι ο 3×3 μοναδιαίος πίνακας. Στην συνέχεια, για τον προσδιορισμό του μητρώου \mathbf{I}_P , τα διανύσματα $\boldsymbol{\rho}$ και $\boldsymbol{\omega}$ εκφράζονται στην μορφή

$$\boldsymbol{\rho} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{e}_x + \omega_y\mathbf{e}_y + \omega_z\mathbf{e}_z, \quad (4.10)$$

όπου \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y και \mathbf{e}_z είναι τα μοναδιαία διανύσματα βάσης του συστήματος αναφοράς \mathcal{B} , που είναι στερεωμένο στο σώμα (γιατί γίνεται αυτή η επιλογή;). Επομένως, με αντικατάσταση στην σχέση (4.8) και εκτέλεση των πράξεων προκύπτει τελικά ο 3×3 πίνακας

$$\mathbf{I}_P = \begin{bmatrix} I_{xx}^P & I_{xy}^P & I_{xz}^P \\ I_{yx}^P & I_{yy}^P & I_{yz}^P \\ I_{zx}^P & I_{zy}^P & I_{zz}^P \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

που είναι ο λεγόμενος **πίνακας αδράνειας** του στερεού σώματος ως προς το σημείο P και περιέχει τις συνιστώσες του αντίστοιχου τανυστή αδράνειας στο επιλεγμένο σύστημα αναφοράς. Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα αυτού

$$I_{xx}^P = \int_m (y^2 + z^2) dm, \quad I_{yy}^P = \int_m (z^2 + x^2) dm, \quad I_{zz}^P = \int_m (x^2 + y^2) dm,$$

είναι γνωστά ως **μαζικές ροπές αδράνειας**, ενώ τα μη διαγώνια στοιχεία του

$$I_{xy}^P = -\int_m xy dm = I_{yx}^P, \quad I_{yz}^P = -\int_m yz dm = I_{zy}^P, \quad I_{zx}^P = -\int_m zx dm = I_{xz}^P,$$

είναι γνωστά ως **μαζικά γινόμενα αδράνειας**. Από τα παραπάνω, είναι σαφές ότι ο

πίνακας αδράνειας εξαρτάται από την επιλογή του συστήματος αναφοράς $Pxyz$, δηλαδή τόσο από την θέση της αρχής P , όσο και από τον προσανατολισμό των αξόνων του. Επίσης, εξαρτάται από το γεωμετρικό σχήμα και την κατανομή μάζας του σώματος, αλλά δεν εξαρτάται από την θέση του σώματος στον χώρο. Περισσότερες λεπτομέρειες για τις ιδιότητες και τον προσδιορισμό του πίνακα αυτού παρουσιάζονται στο Ειδικό Κεφάλαιο A .

♦ **Παρατήρηση 1η:** Η σχέση (4.8) είναι ανάλογη με την σχέση (4.5) που ισχύει για την ορμή, ειδικά αν η (4.5) γραφεί στην ισοδύναμη μορφή $\mathbf{L} = m\mathbf{I}_G \mathbf{v}_G$.

♦ **Παρατήρηση 2η:** Τα διανύσματα $\bar{\mathbf{H}}_P$ και $\boldsymbol{\omega}$ δεν εξαρτώνται από τον προσανατολισμό του συστήματος αναφοράς $Pxyz$. Έτσι, αν $Px'y'z'$ είναι ένα άλλο σύστημα αξόνων με αρχή το ίδιο σημείο P αλλά διαφορετικό προσανατολισμό, τότε σύμφωνα με την εξίσωση (3.34) οι συνιστώσες των διανυσμάτων $\bar{\mathbf{H}}_P$ και $\boldsymbol{\omega}$ ως προς το σύστημα αναφοράς $Px'y'z'$ προσδιορίζονται από τις σχέσεις

$$\bar{\mathbf{H}}_P = \mathbf{A} \bar{\mathbf{H}}_P \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\omega}' = \mathbf{A} \boldsymbol{\omega},$$

αντίστοιχα. Κατά τα γνωστά, ο πίνακας \mathbf{A} μπορεί να οριστεί από τα συνημίτονα κατεύθυνσης των αξόνων του συστήματος αναφοράς $Px'y'z'$ ως προς τους άξονες του συστήματος $Pxyz$ και είναι ορθογώνιος. Έτσι, με βάση τα παραπάνω και την εξίσωση (4.8) προκύπτει ότι

$$\bar{\mathbf{H}}_P = \mathbf{A} \mathbf{I}_P \boldsymbol{\omega} = \mathbf{A} \mathbf{I}_P \mathbf{A}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{A} \mathbf{I}_P \mathbf{A}^T \boldsymbol{\omega}'.$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\bar{\mathbf{H}}_P = \mathbf{I}'_P \boldsymbol{\omega}' \quad \text{με} \quad \mathbf{I}'_P = \mathbf{A} \mathbf{I}_P \mathbf{A}^T.$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα αποτελεί απόδειξη ότι ο πίνακας \mathbf{I}_P μετασχηματίζεται ως τανυστής δεύτερης τάξης, παρόμοια με τους τανυστές τάσεων και τροπών που μελετώνται στην Μηχανική Παραμορφώσιμων Σωμάτων.

♦ **Παρατήρηση 3η:** Όπως δείχνει η σχέση (4.8), το διάνυσμα της στροφορμής $\bar{\mathbf{H}}_P$ έχει γενικά διαφορετική διεύθυνση από ότι το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\boldsymbol{\omega}$. Μία εύλογη ερώτηση είναι αν υπάρχουν άξονες περιστροφής του στερεού τέτοιοι, ώστε τα διανύσματα $\bar{\mathbf{H}}_P$ και $\boldsymbol{\omega}$ να είναι παράλληλα μεταξύ τους. Η μαθηματική έκφραση της ερώτησης αυτής είναι η εξής

$$\bar{\mathbf{H}}_P = \lambda \boldsymbol{\omega}, \quad (4.12)$$

η οποία με την βοήθεια της σχέσης (4.8) συνεπάγεται ότι

$$(\mathbf{I}_P - \lambda \mathbf{I}) \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}. \quad (4.13)$$

Το πρόβλημα αυτό είναι ταυτόσημο με το ιδιοπρόβλημα που εξετάζεται στην Ενότητα Α.4. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην Ενότητα Α.4, το ιδιοπρόβλημα (4.13) έχει λύση για τρεις πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ , που αντιστοιχούν στις τιμές των κύριων ροπών αδράνειας στο σημείο P. Επίσης, τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της εξίσωσης (4.13) έχουν την διεύθυνση των κυρίων άξονων αδράνειας. Επομένως, είναι φανερό ότι η σχέση (4.12) ισχύει μόνον όταν το στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από έναν από τους τρεις κύριους άξονες αδράνειας του στο θεωρούμενο σημείο P.

4.2.3 Εξισώσεις κίνησης στερεού σώματος

Στις περισσότερες εφαρμογές, ως σημείο αναφοράς P επιλέγεται το κέντρο μάζας G του στερεού σώματος, οπότε η εξίσωση (2.28) παίρνει την απλούστερη μορφή

$$\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G. \quad (4.14)$$

Επιπλέον, με χρησιμοποίηση των σχέσεων (2.35) και (4.8) προκύπτει ότι

$$\mathbf{H}_G = \bar{\mathbf{H}}_G = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}. \quad (4.15)$$

Οι εξισώσεις (4.6) και (4.14) αποτελούν τις εξισώσεις κίνησης στερεού σώματος. Επειδή ο πίνακας αδράνειας προσδιορίστηκε στο σύστημα \mathcal{B} , είναι βολικό να γίνουν οι παραγωγίσεις που εμφανίζονται στις σχέσεις αυτές ως προς το σύστημα αναφοράς \mathcal{B} , το οποίο είναι δεμένο στο σώμα. Τότε, οι σχέσεις (4.6) και (4.14) γίνονται

$$\mathbf{F} = m[(\dot{\mathbf{v}}_G)_{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_G] \quad (4.16)$$

και

$$\mathbf{M}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{\mathcal{B}} = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_G, \quad (4.17)$$

αντίστοιχα, με $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$. Επομένως, αν η ροπή \mathbf{M}_G είναι ανεξάρτητη από την κίνηση του κέντρου μάζας G, τότε οι τρεις βαθμωτές εξισώσεις που αντιπροσωπεύονται από την αρχή (4.17) είναι ανεξάρτητες από την εξίσωση (4.16). Η φυσική συνέπεια του αποτελέσματος αυτού είναι σημαντική, γιατί δείχνει ότι η περιστροφική συνιστώσα της κίνησης στερεού σώματος με σημείο αναφοράς το κέντρο μάζας του μπορεί να αναλυθεί πλήρως με την εξίσωση (4.17) και **ξεχωριστά** από την μεταφορική συνιστώσα της κίνησης.

Επειδή το σύστημα αναφοράς \mathcal{B} (ή $Gxyz$) είναι δεμένο στο στερεό σώμα, οι συνιστώσες του ταυστή αδράνειας παραμένουν αμετάβλητες ως προς το σύστημα αυτό. Άρα, η σχέση (4.15) συνεπάγεται ότι

$$(\dot{\mathbf{H}}_G)_{\mathcal{B}} = \mathbf{I}_G \dot{\boldsymbol{\omega}}, \quad (4.18)$$

αφού

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{\mathcal{F}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{F}} \times \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{F}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{\mathcal{B}}.$$

Με αντικατάσταση της σχέσης (4.18) στην εξίσωση (4.17) και εκτέλεση των σχετικών αλγεβρικών πράξεων προκύπτουν τελικά οι σχέσεις

$$\begin{aligned} M_x &= I_{xx} \dot{\omega}_x + I_{xy} (\dot{\omega}_y - \dot{\omega}_z \dot{\omega}_x) + I_{zx} (\dot{\omega}_z + \dot{\omega}_x \dot{\omega}_y) \\ &\quad + (I_{zz} - I_{yy}) \omega_z \omega_y + I_{yz} (\omega_y^2 - \omega_z^2), \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} M_y &= I_{yy} \dot{\omega}_y + I_{yz} (\dot{\omega}_z - \dot{\omega}_x \dot{\omega}_y) + I_{xy} (\dot{\omega}_x + \dot{\omega}_y \dot{\omega}_z) \\ &\quad + (I_{xx} - I_{zz}) \omega_x \omega_z + I_{zx} (\omega_z^2 - \omega_x^2), \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} M_z &= I_{zz} \dot{\omega}_z + I_{zx} (\dot{\omega}_x - \dot{\omega}_y \dot{\omega}_z) + I_{yz} (\dot{\omega}_y + \dot{\omega}_z \dot{\omega}_x) \\ &\quad + (I_{yy} - I_{xx}) \omega_y \omega_x + I_{xy} (\omega_x^2 - \omega_y^2), \end{aligned} \quad (4.21)$$

ως συνιστώσες της εξίσωσης (4.17) στο σύστημα αναφοράς $Gxyz$, με παράλειψη του δείκτη G για απλοποίηση του συμβολισμού.

Από τις σχέσεις (4.19)-(4.21) μπορεί εύκολα να προσδιορισθεί η ροπή \mathbf{M}_G όταν είναι γνωστή η γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$ του στερεού σώματος. Αντίθετα, όταν είναι γνωστή η ροπή \mathbf{M}_G και οι απαραίτητες αρχικές συνθήκες, τότε οι σχέσεις (4.19)-(4.21) αποτελούν το μέσο που οδηγεί στον προσδιορισμό της προκύπτουσας γωνιακής ταχύτητας $\boldsymbol{\omega}$ του στερεού σώματος συναρτήσει του χρόνου.

Η μορφή των εξισώσεων (4.19)-(4.21), που αναφέρονται στην περιστροφική συνιστώσα της κίνησης, είναι πολύπλοκη. Μια σημαντική απλοποίηση επιτυγχάνεται αν θεωρηθεί ότι το **κεντροβαρικό σύστημα** αναφοράς $Gxyz$ συμπίπτει με το αντίστοιχο σύστημα **κύριων αξόνων αδράνειας** στο κέντρο μάζας G . Σε τέτοια περίπτωση, μηδενίζονται όλα τα μαζικά γινόμενα αδράνειας στις σχέσεις (4.19)-(4.21), οι οποίες παίρνουν την μορφή

$$M_x = I_{xx} \dot{\omega}_x + (I_{zz} - I_{yy}) \omega_y \omega_z, \quad (4.22)$$

$$M_y = I_{yy} \dot{\omega}_y + (I_{xx} - I_{zz}) \omega_z \omega_x, \quad (4.23)$$

$$M_z = I_{zz} \dot{\omega}_z + (I_{yy} - I_{xx}) \omega_x \omega_y. \quad (4.24)$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι γνωστές ως **εξισώσεις του Euler**. Αποτελούν ένα σύστημα τριών **μη γραμμικών** κανονικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης ως προς τις συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας $\boldsymbol{\omega}$ στο σύστημα αναφοράς $Gxyz$.

Έτσι, αν και έχουν απλούστερη μορφή από τις εξισώσεις (4.19)-(4.21), η αναλυτική επίλυσή τους είναι γνωστή μόνο σε μερικές ειδικές περιπτώσεις. Γενικά, όταν είναι γνωστή η ροπή \mathbf{M}_G και οι απαραίτητες αρχικές συνθήκες, η επίλυση των εξισώσεων (4.22)-(4.24) γίνεται με αριθμητική ολοκλήρωσή τους, με την οποία προσδιορίζεται η γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$ του στερεού σώματος.

Προσδιορισμός της ιστορίας της γωνιακής ταχύτητας $\boldsymbol{\omega}$ είναι απαραίτητος για τον καθορισμό του προσανατολισμού του στερεού σώματος, ο οποίος γίνεται με κατάλληλη ολοκλήρωση. Επίσης, αντικατάσταση της $\boldsymbol{\omega}$ στην εξίσωση (4.16) οδηγεί σε ένα σύστημα τριών **γραμμικών** κανονικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης ως προς τις συνιστώσες της ταχύτητας \mathbf{v}_G του κέντρου μάζας. Έτσι, αν είναι γνωστή η δύναμη \mathbf{F} και οι αντίστοιχες αρχικές συνθήκες, η επίλυση της εξίσωσης (4.16) είναι εύκολη και οδηγεί στον προσδιορισμό της κίνησης του κέντρου μάζας G , πράγμα που ολοκληρώνει την διαδικασία προσδιορισμού της κίνησης του στερεού σώματος. Η ολοκλήρωση της εξίσωσης (4.16) μπορεί να γίνει και απ' ευθείας στο αδρανειακό σύστημα \mathcal{F} , στην αρχική μορφή (4.6).

Με κατάλληλες απλοποιήσεις, οι εξισώσεις που αναπτύχθηκαν παραπάνω μπορεί να εφαρμοσθούν και για την περιγραφή των απλούστερων κινήσεων του στερεού, όπως η περιστροφή γύρω από ακίνητο σημείο, η επίπεδη κίνηση και η καθαρή περιστροφή, που παρουσιάζονται στα Σχήματα 4.2α-4.2γ και μελετήθηκαν στο τρίτο κεφάλαιο.

➤ **Ειδική περίπτωση 1:** Αν το στερεό εκτελεί **σφαιρική κίνηση**, δηλαδή έχει ακίνητο σημείο O (Σχήμα 4.2α), τότε ισχύει ότι

$$\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O,$$

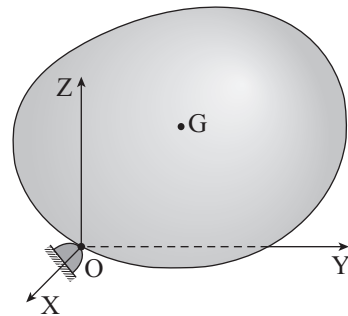
ενώ οι σχέσεις (2.34) και (4.8) οδηγούν στην

$$\mathbf{H}_O = \bar{\mathbf{H}}_O = \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}.$$

Επειδή οι σχέσεις αυτές έχουν την ίδια ακριβώς δομή με τις (4.14) και (4.15), αντίστοιχα, είναι φανερό ότι μπορεί να παραχθούν σχέσεις ταυτόσημες με τις εξισώσεις (4.19)-(4.24), με την διαφορά ότι οι ροπές και οι συνιστώσες του ταυυστή αδράνειας αναφέρονται στο ακίνητο σημείο O αντί για το κέντρο μάζας G . Επιπλέον, η σχέση (4.6), που μπορεί να ξαναγραφεί και στην μορφή

$$\mathbf{F} = m[\mathbf{a} \times \mathbf{r}_{OG} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OG})],$$

καθορίζει τις **αντιδράσεις** που αναπτύσσονται στο σημείο στήριξης O του στερεού σώματος.



Σχήμα 4.2α

⇒ **Ειδική περίπτωση 2:** Όταν το στερεό σώμα εκτελεί **επίπεδη κίνηση** με γωνιακή ταχύτητα

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z,$$

οι εξισώσεις (4.19)-(4.21) γίνονται

$$M_x = I_{xz}\dot{\omega} - I_{yz}\omega^2, \quad (4.25)$$

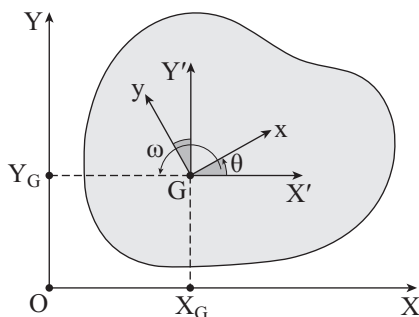
$$M_y = I_{yz}\dot{\omega} + I_{xz}\omega^2 \quad (4.26)$$

και

$$M_z = I_{zz}\dot{\omega} = I\alpha, \quad (4.27)$$

αντίστοιχα ως προς κεντροβαρικό σύστημα αναφοράς $Gxyz$, το οποίο είναι δεμένο στο στερεό σώμα, όπως δείχνει το Σχήμα 4.2β.

Η εξίσωση (4.27) φανερώνει ότι η γωνιακή επιτάχυνση $\alpha = \dot{\omega}$ του στερεού σώματος προκαλείται μόνον από την συνισταύσα M_z της ροπής. Επιπλέον, η ροπή M_z προκαλεί γωνιακή επιτάχυνση με (αδρανειακή) αντίσταση την αντίστοιχη ροπή αδράνειας I_{zz} του σώματος, όπως η δύναμη προκαλεί επιτάχυνση με αντίσταση την μάζα του σώματος.



Σχήμα 4.2β

Όπως δείχνουν οι σχέσεις (4.25)-(4.27), για την επίτευξη επίπεδης κίνησης χρειάζονται στηρίγματα για την παραλαβή των συνιστωσών M_x και M_y της εξωτερικής ροπής (ακόμη και όταν $\alpha=0$), οι οποίες επιβάλλουν την συνεχή περιστροφή του σώματος γύρω από τον άξονα Gz μόνο. Τα στηρίγματα αυτά δεν χρειάζονται όταν ο κεντροβαρικός άξονας Gz είναι **κύριος** άξονας αδράνειας, οπότε

$$I_{xz} = I_{yz} = 0$$

και επομένως οι (4.25) και (4.26) οδηγούν στις

$$M_x = M_y = 0.$$

Αυτό συμβαίνει όταν το σώμα είναι **συμμετρικό** ως προς το επίπεδο κίνησης του κέντρου μάζας του (δηλαδή αν το σημείο με συντεταγμένες (x, y, z) ανήκει στο σώμα, τότε και το σημείο με συντεταγμένες $(x, y, -z)$ ανήκει στο σώμα), ή όταν έχει πολύ **λεπτό πάχος** στην διεύθυνση του άξονα περιστροφής Gz . Τέλος, στην εξεταζόμενη περίπτωση, η εξίσωση (4.6) δίνει

$$F_X = ma_X, \quad (4.28)$$

$$F_Y = ma_Y, \quad (4.29)$$

$$F_Z = 0, \quad (4.30)$$

όπου a_X και a_Y είναι οι συνιστώσες της **απόλυτης** επιτάχυνσης του κέντρου μάζας ως προς το σύστημα αναφοράς $OXYZ$ (οι εξισώσεις αυτές μπορεί να αναπτυχθούν και ως προς το σύστημα $Gxyz$, σύμφωνα με την εξίσωση (4.16)).

Συνοψίζοντας, αν είναι γνωστές οι συνιστώσες M_Z , F_X και F_Y των εξωτερικών φορτίων, τότε, με απ' ευθείας και ξεχωριστή ολοκλήρωση των σχέσεων (4.27)-(4.29) προσδιορίζονται οι τρεις κινηματικοί άγνωστοι του επίπεδου προβλήματος

$$\theta, X_G, Y_G,$$

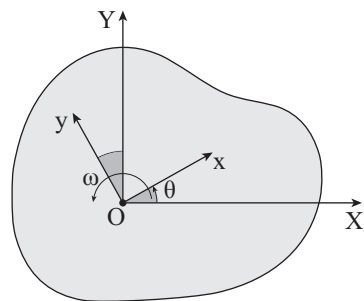
με την βοήθεια και των απαραίτητων αρχικών συνθηκών. Αν η ροπή M_Z δεν είναι μη γραμμική συνάρτηση της περιστροφής θ (ή των $\omega = \dot{\theta}$ και $\alpha = \ddot{\theta}$), τότε ο προσδιορισμός της γωνιακής περιστροφής θ του στερεού είναι εύκολος, γιατί η σχέση (4.27) είναι γραμμική, σε αντίθεση με ότι προκύπτει στην γενική χωρική κίνηση. Τέλος, οι σχέσεις (4.25), (4.26) και (4.30) μπορεί να εφαρμοσθούν στην συνέχεια, για τον προσδιορισμό των αντιδράσεων στήριξης του στερεού σώματος.

⇒ **Ειδική περίπτωση 3:** Η περιστροφή στερεού σώματος γύρω από ακίνητο άξονα Oz (Σχήμα 4.2γ) είναι ειδική περίπτωση επίπεδης κίνησης και μπορεί να μελετηθεί με τις εξισώσεις που παρουσιάστηκαν στην δεύτερη ειδική περίπτωση. Όμως, επειδή οι εξισώσεις (4.14) και (4.15) έχουν την ίδια ακριβώς μορφή όταν αναφέρονται σε ακίνητο σημείο, οι εξισώσεις (4.25)-(4.27) ισχύουν επιπλέον και για κάθε σημείο του άξονα περιστροφής. Φυσικά, οι ροπές και οι ροπές αδράνειας αναφέρονται τότε στο ίδιο ακίνητο σημείο.

Στην εξεταζόμενη περίπτωση, ο μόνος κινηματικός άγνωστος είναι η γωνία περιστροφής θ , η οποία προσδιορίζεται με διπλή ολοκλήρωση της σχέσης

$$M_O = I_O \alpha, \quad (4.31)$$

όπου η ροπή M_O και η μαζική ροπή αδράνειας I_O αναφέρονται σε τυχαίο σημείο O του άξονα περιστροφής. Ένα πρόβλημα με μεγάλο τεχνολογικό ενδιαφέρον, που ανήκει στην κατηγορία αυτή, είναι το πρόβλημα ζυγοστάθμισης ταχύστροφων μηχανών. Το πρόβλημα αυτό εξετάζεται χωριστά, στην Ενότητα 4.6.2.



Σχήμα 4.2γ

☞ **Ειδική περίπτωση 4:** Αν το στερεό σώμα εκτελεί απλή **μεταφορά** (δηλαδή $\boldsymbol{\omega} \equiv \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{S}} = \mathbf{0}$), οι εξισώσεις του Euler παίρνουν την μορφή

$$\mathbf{M}_G = \mathbf{0}. \quad (4.32)$$

Τότε, η κίνηση προσδιορίζεται από την αρχή (4.6), δηλαδή

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}_G,$$

η οποία είναι ταυτόσημη με την εξίσωση κίνησης υλικού σημείου (Κεφάλαιο 2).

Με εφαρμογή της αρχής μεταφοράς του σημείου εφαρμογής της συνισταμένης φόρτισης, προκύπτει η εξίσωση

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_G + \boldsymbol{\rho}_G \times \mathbf{F},$$

η οποία σε συνδυασμό με τις σχέσεις (4.6) και (4.32) οδηγεί στην εξίσωση κίνησης

$$\mathbf{M}_P = \boldsymbol{\rho}_G \times (m \mathbf{a}_G), \quad (4.33)$$

που ισχύει για αυθαίρετο σημείο αναφοράς P. Προφανώς, $\mathbf{M}_P \neq \mathbf{0}$ όταν $\mathbf{a}_G \neq \mathbf{0}$ (ή το σημείο P δεν συμπίπτει με το κέντρο μάζας G).

◆ **Παρατήρηση 1η:** Οι εξισώσεις κίνησης που αναπτύχθηκαν στην παρούσα ενότητα ισχύουν και για **συστήματα στερεών σωμάτων**. Όταν τα σώματα του συστήματος συνδέονται μεταξύ τους, είναι απαραίτητη η επιβολή κατάλληλων γεωμετρικών και κινηματικών περιορισμών. Σε τέτοιες περιπτώσεις, μπορεί να εφαρμοσθεί μια πιο κομψή εναλλακτική μέθοδος (εξισώσεις Lagrange), η οποία παρουσιάζεται στο πέμπτο κεφάλαιο.

◆ **Παρατήρηση 2η:** Σε πολλές εφαρμογές είναι βολικότερο να προσδιορισθεί η στροφορμή \mathbf{H}_G και η χρονική παράγωγός της $\dot{\mathbf{H}}_G$ ως προς σύστημα αναφοράς \mathcal{F}_1 (ή $Gx_1x_2x_3$), το οποίο δεν είναι δεμένο στο στερεό. Μια τέτοια περίπτωση εμφανίζεται όταν το στερεό σώμα έχει **άξονα συμμετρίας**. Έτσι, αν ο Gx_1 είναι άξονας συμμετρίας του στερεού, στερεώνεται μόνον ο άξονας αυτός στο στερεό. Τότε, το σύστημα αναφοράς \mathcal{F}_1 περιστρέφεται ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς \mathcal{S} με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\Omega}$, που είναι διαφορετική από την γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$ του στερεού σώματος (δηλαδή $\boldsymbol{\Omega} \equiv \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{F}_1/\mathcal{S}} \neq \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{S}} \equiv \boldsymbol{\omega}$). Επομένως, η αρχή (4.14) οδηγεί στην εξίσωση

$$\mathbf{M}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{\mathcal{F}_1} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G, \quad (4.34)$$

με

$$\mathbf{H}_G = I_1 \omega_1 \mathbf{e}_1 + I_2 \omega_2 \mathbf{e}_2 + I_3 \omega_3 \mathbf{e}_3, \quad (4.35)$$

όπου \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 και \mathbf{e}_3 είναι τα μοναδιαία διανύσματα βάσης του συστήματος αναφοράς \mathcal{F}_1 . Άρα,

$$(\mathbf{H}_G)_{\mathcal{F}_1} = I_1 \dot{\omega}_1 \mathbf{e}_1 + (I_2 \omega_2 + I_2 \dot{\omega}_2) \mathbf{e}_2 + (I_3 \omega_3 + I_3 \dot{\omega}_3) \mathbf{e}_3.$$

Αλλά, σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Προβλήματος Α.2, επειδή ο Gx_1 είναι άξονας συμμετρίας, κάθε άξονας που περνάει από το σημείο G και είναι κάθετος στον Gx_1 είναι επίσης κύριος άξονας αδράνειας και έχει σταθερή ροπή αδράνειας. Δηλαδή

$$I_2 = I_3 = I = \text{σταθερά}.$$

Επομένως,

$$(\dot{\mathbf{H}}_G)_{\mathcal{F}_1} = I_1 \dot{\omega}_1 \mathbf{e}_1 + I(\dot{\omega}_2 \mathbf{e}_2 + \dot{\omega}_3 \mathbf{e}_3).$$

Κατά συνέπεια, αντικατάσταση της έκφρασης (4.35) και της τελευταίας σχέσης στην εξίσωση (4.34) και εκτέλεση των αλγεβρικών πράξεων οδηγεί στο εξής σύστημα εξισώσεων

$$M_1 = I_1 \dot{\omega}_1 + I(\Omega_2 \omega_3 - \Omega_3 \omega_2), \quad (4.36)$$

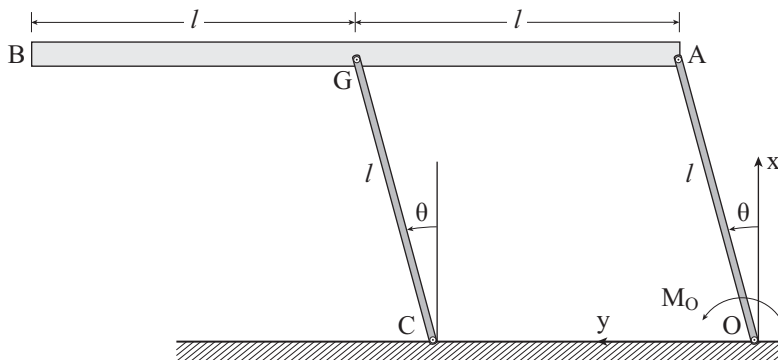
$$M_2 = I \dot{\omega}_2 + I_1 \Omega_3 \omega_1 - I \Omega_1 \omega_3, \quad (4.37)$$

$$M_3 = I \dot{\omega}_3 + I \Omega_1 \omega_2 - I_1 \Omega_2 \omega_1, \quad (4.38)$$

οι οποίες ονομάζονται **τροποποιημένες εξισώσεις του Euler**. Τέλος, επειδή οι σχέσεις (4.34) και (4.35) ισχύουν και όταν αναφέρονται σε ακίνητο σημείο του στερεού σώματος, είναι φανερό ότι οι σχέσεις (4.36)-(4.38) ισχύουν και όταν το στερεό σώμα περιστρέφεται ως προς ακίνητο σημείο.

❖ Παράδειγμα 4.1: Δυνάμεις σε επίπεδο μηχανισμό

Η ομογενής στερεά ράβδος AB , μήκους $2l$ και μάζας m , συνδέεται στο άκρο της A και το κέντρο μάζας της G με αβαρείς ράβδους OA και CG μήκους l , όπως δείχνει το Σχήμα 4.3. Αν η ράβδος OA υπόκειται σε γνωστή ροπή M_O , να προσδιορισθεί

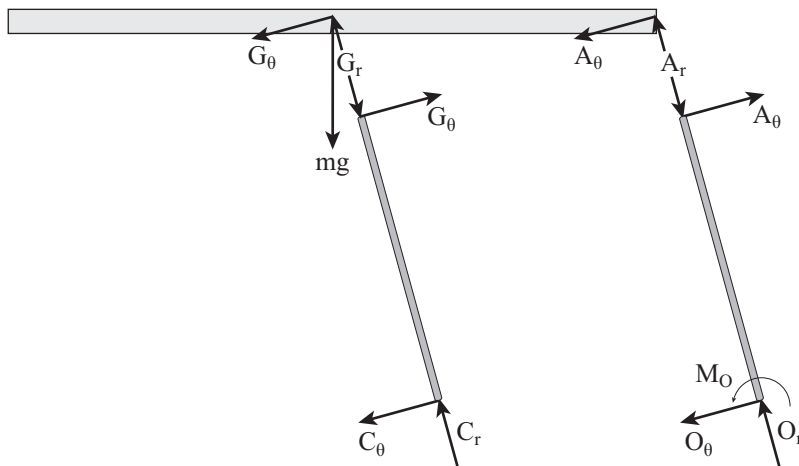


Σχήμα 4.3

η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου OA και η επιτάχυνση του κέντρου G της ράβδου AB. Ποιά είναι η δύναμη που αναπτύσσεται στην άρθρωση A μεταξύ των ράβδων OA και AB;

Λύση

Η ράβδος AB εκτελεί επίπεδη μεταφορική κίνηση, ενώ οι ράβδοι OA και CG εκτελούν καθαρή περιστροφή ως προς άξονες που διέρχονται από τα σημεία O και C, αντίστοιχα, με τα ίδια κινηματικά χαρακτηριστικά. Η επίλυση ξεκινάει με την σχεδίαση των διαγραμμάτων ελευθέρου σώματος, που φαίνονται στο Σχήμα 4.3α.



Σχήμα 4.3α

Κατ' αρχάς, επειδή η ράβδος OA είναι αβαρής, ισχύει ότι

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow A_\theta = \frac{M_O}{l}. \quad (1)$$

Παρόμοια, για την ράβδο CG ισχύει ότι

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow G_\theta = 0. \quad (2)$$

Τέλος, για την ράβδο AB ισχύει η συνθήκη

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G,$$

όπου

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_C + (\alpha \mathbf{e}_z) \times (l \mathbf{e}_r) - \omega^2 l \mathbf{e}_r$$

ή

$$\mathbf{a}_G = \alpha l \mathbf{e}_\theta - \omega^2 l \mathbf{e}_r, \quad (3)$$

με

$$\omega = \dot{\theta} \quad \text{και} \quad \alpha = \ddot{\theta}.$$

Επομένως,

$$\Sigma F_{\theta} = ma_{\theta} \Rightarrow mg \sin \theta + M_O/l = mal,$$

από την οποία προσδιορίζεται η γωνιακή επιτάχυνση στην μορφή

$$\alpha = \frac{g}{l} \sin \theta + \frac{M_O}{ml^2}. \quad (4)$$

Επίσης,

$$\Sigma M_G = 0 \Rightarrow (A_r \cos \theta - A_{\theta} \sin \theta)l = 0,$$

η οποία σε συνδυασμό με την εξίσωση (1) οδηγεί στον προσδιορισμό της συνιστώσας

$$A_r = \frac{M_O}{l} \tan \theta. \quad (5)$$

Συνεπώς, η δύναμη που αναπτύσσεται στην άρθρωση A είναι

$$\mathbf{A} = \frac{M_O}{l} (\mathbf{e}_{\theta} + \tan \theta \mathbf{e}_r).$$

Τέλος, η σχέση (4) μπορεί να γραφεί ως κανονική διαφορική εξίσωση με μορφή

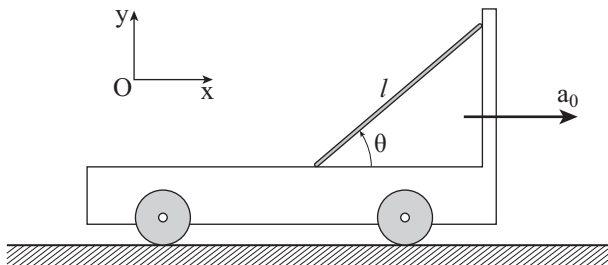
$$\ddot{\theta} - \frac{g}{l} \sin \theta = \frac{M_O}{ml^2}.$$

Με ολοκλήρωση της εξίσωσης αυτής, για δεδομένες αρχικές συνθήκες, προσδιορίζεται η γωνία θ και η γωνιακή ταχύτητα $\omega = \dot{\theta}$. Κατόπιν, καθορίζεται η επιτάχυνση του κέντρου της ράβδου \mathbf{a}_G , με την βοήθεια της εξίσωσης (3).

- **Ερώτηση:** Πώς προσδιορίζεται η συνιστώσα G_r και οι δυνάμεις στις αρθρώσεις O και C;

❖ Παράδειγμα 4.2: Μεταφορά πλάκας με όχημα

Μια ορθογώνια πλάκα πλάτους l και μάζας m μεταφέρεται στην καρότσα οχήματος, όπως δείχνει το Σχήμα 4.4. Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ της πλάκας και



Σχήμα 4.4

της καρτόσας είναι μ , να προσδιορισθεί η μέγιστη επιτάχυνση του οχήματος για την οποία η πλάκα δεν μετακινείται σχετικά με το όχημα.

Λύση

Κατ' αρχάς, σχεδιάζεται το διάγραμμα ελευθέρου σώματος της πλάκας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.4α. Επειδή η πλάκα εκτελεί (επίπεδη) μεταφορική κίνηση ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς $Oxyz$, οι εξισώσεις κίνησης είναι οι εξής

$$\Sigma F_x = m a_{Gx} \Rightarrow Q_2 - N_1 = m a_0, \quad (1)$$

όπου a_0 είναι το μέτρο της οριζόντιας επιτάχυνσης του οχήματος,

$$\Sigma F_y = m a_{Gy} \Rightarrow Q_1 - mg + N_2 = 0 \quad (2)$$

και

$$\Sigma M_{Gz} = I_{zz}^G \alpha \Rightarrow (Q_2 + N_1) \frac{1}{2} l \sin \theta + (Q_1 - N_2) \frac{1}{2} l \cos \theta = 0. \quad (3)$$

Στις τρεις παραπάνω εξισώσεις εμφανίζονται πέντε άγνωστοι (Q_1, Q_2, N_1, N_2, a_0). Οι επιπλέον πληροφορίες που απαιτούνται για τον προσδιορισμό τους οδηγεί στην εξέταση δύο κρίσιμων περιπτώσεων.

Στην **πρώτη περίπτωση**, η πλάκα είναι μόλις έτοιμη να αποκολληθεί από την επάνω ευθεία επαφής της με το όχημα, οπότε

$$Q_1 = N_1 = 0. \quad (4)$$

Τότε, οι εξισώσεις (1)-(3) παίρνουν την απλούστερη μορφή

$$Q_2 = m a_0, \quad (5)$$

$$N_2 - mg = 0 \quad (6)$$

και

$$Q_2 = \cot \theta N_2, \quad (7)$$

αντίστοιχα. Προφανώς, η παραπάνω περίπτωση είναι πιθανή μόνο για

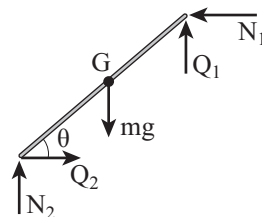
$$Q_2 \leq \mu N_2 \Rightarrow \mu \geq \cot \theta. \quad (8)$$

Έτσι, συνδυασμός των εξισώσεων (4)-(8) οδηγεί στην τελική συνθήκη

$$\frac{a_0}{g} = \cot \theta. \quad (9)$$

Στην **δεύτερη περίπτωση**, η πλάκα είναι έτοιμη να ολισθήσει, οπότε ισχύει ότι

$$Q_1 = \mu N_1 \quad (10)$$



Σχήμα 4.4α

και

$$Q_2 = \mu N_2, \quad (11)$$

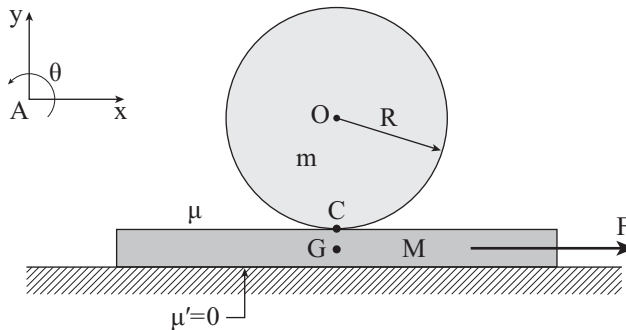
αντί των συνθηκών (4). Επομένως, με αρχική απαλοιφή των όρων Q_1 και Q_2 και μετέπειτα απαλοιφή των όρων N_1 και N_2 από τις εξισώσεις (1)-(3), προκύπτει τελικά ότι

$$\frac{a_0}{g} = \frac{2\mu - \cot\theta(1 - \mu^2)}{2\mu \cot\theta + \mu^2 - 1}.$$

- **Ερώτηση:** Ποιά σχέση πρέπει να ισχύει μεταξύ μ και θ , ώστε να παρατηρείται ταυτόχρονα ολίσθηση και αποκόλληση της πλάκας;

❖ Παράδειγμα 4.3: Ολίσθηση κυλίνδρου σε πλάκα

Κύλινδρος ακτίνας R και μάζας m ηρεμεί επάνω σε πλάκα μάζας M , όπως δείχνει το Σχήμα 4.5. Να προσδιορισθεί η μέγιστη δύναμη F που ασκείται στην πλάκα για την οποία ο κύλινδρος δεν ολισθαίνει.



Σχήμα 4.5

Λύση

Αρχικά, επιλέγεται το αδρανειακό σύστημα αναφοράς $Axyz$. Κατόπιν, σχεδιάζονται τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος για τον κύλινδρο και την πλάκα, όπως δείχνει το Σχήμα 4.5α. Έτσι, για τον κύλινδρο, που εκτελεί επίπεδη κίνηση, ισχύουν οι εξισώσεις κίνησης

$$\Sigma F_x = m a_x \Rightarrow Q = m \ddot{x}_O, \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - mg = 0 \quad (2)$$

και

$$\Sigma M_O = I_O \alpha \Rightarrow QR = \frac{1}{2} m R^2 \alpha, \quad (3)$$

Βιβλιογραφία

Τα πρώτα δώδεκα βιβλία στην παρακάτω λίστα αναφέρονται κυρίως σε εισαγωγικές έννοιες και πεδία της Νευτώνειας Δυναμικής. Τα υπόλοιπα βιβλία αναφέρονται σε πιο προχωρημένα θέματα και εφαρμόζουν έννοιες της Αναλυτικής Δυναμικής.

1. Beer, F.P., Johnston, E.R., Cornwell, P.J. and Self, B.P., «Vector Mechanics for Engineers: Dynamics», 11th edition, (μετάφραση: Σ. Κατσαβούνης), Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, 2019.
2. Hibbeler, R.C., «Engineering Mechanics: Dynamics», 14th edition, Pearson Prentice Hall, Hoboken, New Jersey, 2016.
3. Housner, G.W. and Hudson, D.E., «Applied Mechanics - Dynamics», 2nd edition, Caltech, Pasadena, California, 1980.
4. McGill, D.J. and King, W.W., «Engineering Mechanics: An Introduction to Dynamics», 4th edition, Tichenor Publishing, Bloomington, Indiana, 2003.
5. Meriam, J.L. and Kraige, L.G., «Engineering Mechanics: Dynamics», 7th edition, J. Wiley and Sons, New York, 2012.
6. Riley, W.F. and Sturges, L.D., «Engineering Mechanics: Dynamics», J. Wiley and Sons, New York, 1993.
7. Spiegel, M.R., «Theoretical Mechanics», McGraw-Hill, New York, 1967.
8. Θεοχάρης, Π.Σ., «Μηχανική του Απολύτως Στερεού», Έκδοση ΕΜΠ, Αθήνα, 1978.
9. Καλτσίδου, Δ., Παπαργύρη-Πέγιου, Σ. και Χαραλαμπίκης, Ν., «Δυναμική», Θεσσαλονίκη, 1985.
10. Μυλωνάς, Κ.Μ., «Κινηματική και Δυναμική του Υλικού Σημείου», Αθήνα, 1978.
11. Παϊπέτης, Σ.Α., «Τεχνική Μηχανική: Η Δυναμική», Πάτρα, 1981.
12. Χατζηδημητρίου, Ι.Δ., «Θεωρητική Μηχανική Ι», Θεσσαλονίκη, 1975.
13. Bauchau, O.A., «Flexible Multibody Dynamics», Springer Science+ Business Media, London, 2011.
14. Chetaev, N.G., «Theoretical Mechanics», Mir Publishers, Moscow, 1989.
15. D' Souza, A.F. and Garg, V.K., «Advanced Dynamics: Modeling and Analysis», Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1984.

16. Geradin, M. and Cardona, A., «Flexible Multibody Dynamics», John Wiley & Sons, New York, 2001.
17. Goldstein, H., «Classical Mechanics», 2nd edition, Addison-Wesley, Reading, 1980.
18. Greenwood, D.T., «Principles of Dynamics», 2nd edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1988.
19. Greenwood, D.T., «Advanced Dynamics», Cambridge University Press, New York, 2003.
20. Kane, T.R. and Levinson, D.A., «Dynamics: Theory and Applications», McGraw-Hill, New York, 1985.
21. Lanczos, C., «The Variational Principles of Mechanics», University of Toronto Press, Toronto, Canada, 1952.
22. Meirovitch, L., «Methods of Analytical Dynamics», Mc Graw Hill, New York, 1970.
23. Papastavridis, J.G., «Tensor Calculus and Analytical Dynamics», CRC Press, Boca Raton, 1999.
24. Pars, L.A., «A Treatise on Analytical Dynamics», Heinemann Educational Books, London, 1965.
25. Shabana, A.A., «Dynamics of Multibody Systems», 3rd edition, Cambridge University Press, New York, 2005.
26. Udwadia, F.E. and Kalaba, R.E., «Analytical Dynamics A New Approach», Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
27. Whittaker, E.T., «A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies», 4th edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1937.

Ευρετήριο όρων

- αγνοήσιμη συντεταγμένη, 450, 460, 466
αδρανειακή δύναμη, 43, 340
αδρανειακό σύστημα αναφοράς, 42, 44, 56, 70, 246, 287, 307, 339, 425, 431
ακατάστατος δεσμός, 423
ακτίνα αδράνειας, 497
Αναλυτική Δυναμική, 419
αναπήδηση, 37
ανάστροφη μετάπτωση, 374
ανολόνομος δεσμός, 422
απειροστό έργο, 71
απειροστές περιστροφές, 181
απόγειο, 139
απόλυτη επιτάχυνση, 210, 255, 339
απόλυτη κίνηση, 26
απόλυτη στροφορμή, 247
απόλυτη ταχύτητα, 27, 209, 289
απωστική κεντρική δύναμη, 98
αρχές διατήρησης ορμής και στροφορμής, 450
αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, 74, 310, 452
αρχή διατήρησης της ορμής, 57, 288
αρχή διατήρησης της στροφορμής, 59, 288
αρχές έργου-ενέργειας, 70, 307
αρχή του D'Alembert, 43
αρχή του Hamilton, 469
αρχή των δυνατών έργων, 426
αστρόβιλα πεδία δυνάμεων, 75
- βαθμοί ελευθερίας, 420
βαθμός απόδοσης διάταξης, 75
βήμα ελίκωσης, 20
- γειτονικές συναρτήσεις, 535
γενικευμένες δυνάμεις, 432
γενικευμένες συντεταγμένες, 420
γενικευμένες ταχύτητες, 422
γενικευμένη αρχή του D'Alembert, 426
- γενικευμένη ορμή, 450
γενική επίπεδη κίνηση, 156
γενική χωρική κίνηση, 196
γεωδαιτική καμπύλη, 542
γεωμετρική συνοριακή συνθήκη, 479
γεωμετρικός δεσμός, 424
γεωσύγχρονη τροχιά, 139
γραμμή κόμβων, 219
γραμμή κρούσης, 90
γραμμική ώση, 56
γραμμικό ελατήριο, 83
γρήγορη συστροφή, 369
γυροσκοπικές κινήσεις, 367
γυροσκοπικός όρος, 190, 438
γωνιακή επιτάχυνση, 152, 159, 186
γωνιακή ταχύτητα, 151, 158, 183
γωνίες Euler, 219
- δεσμός κίνησης, 420
δεύτερος νόμος του Euler, 47
δεύτερος νόμος του Kepler, 102
διάγραμμα επιταχύνσεων, 162, 172
διάγραμμα ταχυτήτων, 162, 171
διάνυσμα θέσης, 2
διαστημομηχανική, 96
διευθύνουσα, 137
δικάθετο διάνυσμα, 23
δίσκος αναφοράς, 151, 157
δράση, 464
δύναμη Coriolis, 340
δυναμικά ζυγοσταθμισμένο σώμα, 359
δυναμική ενέργεια, 72
δυναμική συνοριακή συνθήκη, 479
δυνατές μετατοπίσεις, 425
δυνατό έργο, 426
- ειδική αρχή της σχετικότητας, 128
έκκεντρη κρούση, 90, 291
έκκεντρότητα κωνικής τομής, 138

- εκτεταμένος σχηματικός χώρος, 469
 εκτεταμένος χώρος φάσεων, 464
 ελαστική κρούση, 92
 ελκτική κεντρική δύναμη, 98
 ελλειψοειδές του Poinsot, 418
 ελλειψοειδές αδράνειας, 518, 529
 εμβαδική ταχύτητα, 99
 ενεργές δυνάμεις, 47
 εξισώσεις μετασχηματισμού, 431
 εξισώσεις του Euler, 252, 537, 545
 εξισώσεις του Greenwood, 438, 488
 εξισώσεις του Hamilton, 461
 εξισώσεις του Lagrange, 433
 εξωτερικές δυνάμεις, 44, 248
 εξωτερικές ροπές, 47, 310
 επίπεδη κίνηση, 14, 222, 254, 289, 311
 επίπεδο συμμετρίας, 349
 επιτάχυνση Coriolis, 339
 επιτροχία συνιστώσα, 23, 155
 εσωτερικές δυνάμεις, 44
 ευθεία κρούση, 90
 ευθεία μετάπτωση, 372
 ευθειοποιούν επίπεδο, 24
 ευθύβολη/επισκυπτική βολή, 12
 ευθύγραμμη τροχιά, 5
 εφραπτόμενο διάνυσμα, 21
- ζυγοστάθμιση στερεού σώματος, 356
- θεώρημα παραλλήλων αξόνων, 504
 θεώρημα του Chasle, 200
 θεώρημα του Euler, 182, 232
 θεώρημα του Euler για ομογενείς συναρτήσεις, 492
 θεώρημα του Frobenius, 482
 θεώρημα του Steiner, 505
- ιδανικοί δεσμοί κίνησης, 427
 ιδιότητα πρόσθεσης, 189
 ιξώδεις δυνάμεις, 437
 ισότιμα συστήματα δυνάμεων, 47
 ισχύς μηχανής, 75
 ισχύς στερεού σώματος, 315
- καθαρή περιστροφή, 150
- κάθετη κρούση, 90
 κάθετο επίπεδο, 24
 κανονικές εξισώσεις του Hamilton, 463
 κανονικοί μετασχηματισμοί, 466
 Καρτεσιανό διάνυσμα περιστροφής, 244
 Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, 4
 κατάσταση μόνιμης μετάπτωσης, 366
 καταστατικός δεσμός, 423
 κεντρική δύναμη, 97
 κεντρική κρούση, 90
 κέντρο καμπυλότητας, 22
 κέντρο μάζας, 45, 247
 κεντροβαρικό σύστημα αναφοράς, 252, 503
 κεντρομόλος επιτάχυνση, 187
 κινηματικός δεσμός, 424
 κινητή πολική τροχιά, 164, 175
 κινητική ενέργεια, 71, 437
 κινητός κώνος, 186
 κλωνισμός, 219
 κρουστική δύναμη, 64, 90
 κρουστικό κέντρο, 348, 405
 κυκλικές ή αγνοήσιμες συντεταγμένες, 450
 κυκλική κίνηση, 15, 24
 κυκλική συντεταγμένη, 454
 κυκλική τροχιά, 138
 κυκλοειδής καμπύλη, 544
 κυλινδρικό κέλυφος, 502
 κυλινδρικό σύστημα αναφοράς, 12
 κύριες μαζικές ροπές αδράνειας, 518
 κύριο κάθετο διάνυσμα, 22
 κύριος άξονας αδράνειας, 254, 313, 356, 518
 κωνική τομή, 102, 137
- λεία κρούση, 90
 λογισμός των μεταβολών, 535
- μαζικά γινόμενα αδράνειας, 249, 497
 μαζικές ροπές αδράνειας, 249, 495, 497
 μέση επιτάχυνση, 3
 μέση ταχύτητα, 3
 μετάπτωση, 219
 μετασχηματισμός του Legendre, 462
 μεταφορική κίνηση, 27, 62, 189, 197, 256, 291, 312
 μεταφορική κινητική ενέργεια, 310

- μετοχική επιτάχυνση, 210, 339
μετοχική ταχύτητα, 27, 209
μηχανή jet αεροπλάνων, 144
μηχανική ενέργεια, 73, 310, 452
μόνιμη μετάπτωση, 366, 369, 371
μόνιμη ροή, 105
μονογενή συστήματα, 436
μονοδιάστατη κίνηση, 151
μόνιπλευρος δεσμός, 423
- Νευτώνεια ή Διανυσματική Δυναμική, 419
νόμοι του Νεύτωνα και του Euler, 41
νόμος ανάκλασης, 97
νόμος Παγκόσμιας Έλξης ή Βαρύτητας, 100
νόμος της γυροσκοπικής μετάπτωσης, 368
νόμος του Snell, 546
- όγκος ελέγχου, 106
οδογράφος της ταχύτητας, 37
ολοκλήρωμα της κίνησης, 53, 449, 465
ολοκλήρωμα του Jacobi, 451
ολόνομο σύστημα, 433, 470, 472, 473
ολόνομος δεσμός κίνησης, 422, 431, 440
ομογενές πεδίο, 137
ορθογώνιος πίνακας, 179
ορμή, 56, 247
- παγκόσμια σταθερά βαρύτητας, 100
παραβολική τροχιά, 102
παραδεκτές συναρτήσεις, 535
πεπερασμένες περιστροφές, 181
περίγειο, 139
περίοδος επαναφοράς, 91
περίοδος σύνθλιψης, 91
περιστροφή στερεού σώματος γύρω από ακί-
νητο άξονα, 255, 290, 312
περιστροφή στερεού σώματος γύρω από ακί-
νητο σημείο, 288, 311
περιστροφική κινητική ενέργεια, 310
πίνακας αδράνειας, 249
πλάγια κρούση, 90
πλαστική κρούση, 92
πολικές συντεταγμένες, 14
πρόβλημα δύο σωμάτων, 100, 137
πρόσθετοι δεσμοί, 438
- πρώτος νόμος του Euler, 46
πρώτος νόμος του Kepler, 102
- ρεόνομο σύστημα, 456
ρεόνομος δεσμός, 422
ρυθμός μεταβολής της ενέργειας, 453
- σκληρόνομος δεσμός, 422
σταθερά ελατηρίου, 83
σταθερή πολική τροχιά, 164, 175
σταθερός κώνος, 186
στατικά ζυγοσταθμισμένο σώμα, 359
στατική ώθηση, 112
στιβαρότητα ελατηρίου, 83
στιγμιαίο κέντρο περιστροφής, 312
στιγμιαίος άξονας περιστροφής, 163, 184,
313
στιγμιαίος πόλος περιστροφής, 163
στροφική ώση, 58
στροφικός οδογράφος, 187
στροφορμή, 57, 247
συζυγείς μεταβλητές, 464
συμμετρικό σώμα, 254
συνάρτηση δυναμικού, 72
συνάρτηση σκέδασης του Rayleigh, 437
συνάρτηση του Hamilton, 462
συνάρτηση του Lagrange, 436
συνάρτηση του Routh, 485
συναρτησιακό, 535
συνημίτονα κατεύθυνσης, 179
συντελεστής επαναφοράς, 92
συντηρητικές δυνάμεις, 73
συντηρητικό σύστημα, 436, 451
σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων, 36
σύστημα υλικών σημείων, 41, 57, 59
σύστημα στερεών σωμάτων, 256, 291, 312
συστροφή, 219
σφαιρική κίνηση, 182, 253
σφαιρικό κέλυφος, 530
σχετική επιτάχυνση, 210, 339
σχετική κίνηση, 26
σχετική στροφορμή, 61, 248
σχετική ταχύτητα, 209
σχηματικός χώρος, 424

- τανυστής αδράνειας, 496
ταχύτητα διαφυγής, 102
ταχύτητα υλικού σημείου, 2
τραχεία κρούση, 90
τρίεδρο Serret-Frenet, 23
 τρίτος νόμος του Kepler, 102
τροποποιημένες εξισώσεις του Euler, 257
- υδροστρόβιλος Pelton, 143
υπερβολική τροχιά, 102
υποθετικές δυνάμεις, 340
- φυσικά συστήματα, 438
- χαρακτηριστική εξίσωση, 514
χώρος φάσεων, 464
- ώση, 56, 287

Σύντομο βιογραφικό

Ο συγγραφέας Σωτήριος Νατσιάβας είναι καθηγητής και διευθυντής του Εργαστηρίου Δυναμικής Μηχανών στο τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης (ΑΠΘ). Κατέχει Δίπλωμα Μηχανολόγου Μηχανικού από το ίδιο τμήμα, καθώς και Master of Science (M.S.) και Διδακτορικό (Ph.D.) από το τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών του California Institute of Technology (Caltech). Εκτός από το ΑΠΘ, δίδαξε στο Caltech, στο τμήμα Mechanical and Aerospace Engineering του Arizona State University (ASU) και στο τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

Η διδακτική και ερευνητική δραστηριότητα του συγγραφέα εστιάζεται στην περιοχή της Δυναμικής και των Ταλαντώσεων Μηχανικών Συστημάτων, με έμφαση σε γραμμικές και μη γραμμικές ταλαντώσεις, στην δυναμική κατασκευών και μηχανών, την δυναμική και ευστάθεια οχημάτων, την βελτιστοποίηση κατασκευών και την αλληλεπίδραση ρευστών-στερεών. Στα πλαίσια των δραστηριοτήτων αυτών συνέγραψε τρία διδακτικά βιβλία και πλήθος επιστημονικών άρθρων που δημοσιεύτηκαν σε έγκριτα διεθνή περιοδικά και πρακτικά συνεδρίων. Επίσης, επέβλεψε πολλές μεταπτυχιακές διατριβές και σημαντικό αριθμό διδακτορικών διατριβών. Τέλος, έχει ενεργό συμμετοχή σε πολλές διεθνείς επιστημονικές και τεχνικές επιτροπές και οργανώσεις, καθώς και στην συνδιοργάνωση συνεδρίων δυναμικής και ταλαντώσεων.

Για την επιστημονική δράση του, ο κ. Νατσιάβας έλαβε μεταξύ άλλων τα βραβεία E. Sechler Award (Graduate Aeronautical Laboratories of Caltech), Award for Teaching Excellence (College of Engineering and Applied Sciences at ASU) και Senior Research Prize (European Association of Structural Dynamics, 2020). Επίσης, είναι Fellow της ASME (American Society of Mechanical Engineers) από το 2008, ενώ διετέλεσε Associate Editor και είναι μέλος της Συντακτικής Επιτροπής (Editorial Board) σε κύρια περιοδικά της περιοχής του, όπως ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, Journal of Vibration and Acoustics, International Journal of Solids and Structures και International Journal of Non-linear Mechanics.