

ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ ΜΑΡΩΝΙΔΗΣ

# ΑΣΠΡΑ ΚΟΡΑΚΙΑ ΜΑΥΡΑ ΠΡΟΒΑΤΑ

Γρίφοι, προβλήματα, παράδοξα & ιστορίες  
από τον κόσμο των Μαθηματικών





ΤΙΤΛΟΣ

Άσπρα κοράκια, μαύρα πρόβατα

ΥΠΟΤΙΤΛΟΣ

Γρίφοι, προβλήματα, παράδοξα & ιστορίες από τον κόσμο των Μαθηματικών

ΣΥΓΓΡΑΦΕΑΣ

Αναστάσιος Μαρωνίδης

ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ

Αναστάσιος Μαρωνίδης

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΕΞΩΦΥΛΛΟΥ

Άννα Παναγοπούλου

ISBN

978-960-456-584-9



© Copyright: Μαρωνίδης Αναστάσιος, Εκδόσεις Ζήτη, Ιούνιος 2022

*Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις του ελληνικού νόμου (Ν.2121/1993, όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής άδειας του εκδότη και συγγραφέα κατά οποιονδήποτε τρόπο ή μέσο αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή (ηλεκτρονική, μηχανική ή άλλη) και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.*

**Φωτοστοιχειοθεσία**

**Εκτύπωση**

**Βιβλιοδεσία**

**Π. ΖΗΤΗ & Σια Ι.Κ.Ε.**

18° χλμ Θεσσαλονίκης - Περαίας

Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19

Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr



**ΕΚΔΟΣΕΙΣ  
ΖΗΤΗ**

**ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:**

Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη • Τηλ.: 2310-203.720 • Fax 2310-211.305

e-mail: sales@ziti.gr

**www.ziti.gr**

**ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ:**

Χαριλάου Τρικούπη 22 - Τ.Κ. 106 79, Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210-3816.650

e-mail: athina@ziti.gr

**ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ:** www.ziti.gr

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ .....	11
ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	13
Τι είναι τα Μαθηματικά .....	14
Η χρησιμότητα των Μαθηματικών .....	15
Η αξία των Μαθηματικών .....	16
Ευχαριστίες .....	18
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ .....	19
ΛΟΓΙΚΗ .....	23
1    Άσπρα κοράκια, μαύρα πρόβατα .....	23
2    Τα άλογα του Πρωταγόρα .....	32
ΑΛΓΕΒΡΑ .....	38
3    Άρτος, σκάκι και θεάματα .....	38
4    Γραμμικά συστήματα ποδοσφαιρικών εξισώσεων ...	49
5    Το οικοδόμημα των Μαθηματικών .....	57
ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ .....	63
6    Στους δύο τρίτος δεν χωρεί .....	63
7    Δυαδική τράπουλα .....	66
8    Οι προπαίδειες .....	74
9    Η τάξη μεγέθους και το μέγεθος της τάξης .....	84
10   Όλοι οι φυσικοί αριθμοί είναι στρόγγυλοι .....	91
11   Το μέτρο της στρογγυλότητας των αριθμών .....	98
12   Οι περιττοί αριθμοί δεν είναι καθόλου περιττοί .....	104

ΛΟΓΙΣΜΟΣ .....	110
13 0–100 km/h vs 0–400 m .....	110
14 Ο Covid–19 και το ξυράφι του Occam .....	114
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ .....	129
15 Δώρα από την Κίνα .....	129
16 Η στάνη του Monty Hall .....	138
17 Η κατσίκα, ο κατάδικος και το αγόρι .....	143
18 Κορώνα ή Γράμματα; .....	158
19 Φαντασία εις τον κύβο .....	165
ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ .....	173
20 Εξωγήινες λύσεις .....	173
21 Το κρασί νερό δεν γίνεται .....	184
22 Ο περίπατος του Abel .....	197
ΜΙΚΡΕΣ ΙΣΤΟΡΙΕΣ .....	202
23 Υπάρχει αριθμός μεγαλύτερος από το άπειρο; .....	202
24 Πώς από το τίποτα γεννιέται το κάτι .....	212
25 Φονικά Μαθηματικά .....	218
26 Ζήνων ο Ελεάτης και το παράδοξο της κίνησης .....	225
27 Δεν γνωρίζουμε και δεν θα μάθουμε .....	233
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ (ΕΛΛΗΝΙΚΑ) .....	243
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ (ΑΓΓΛΙΚΑ) .....	253

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η ιδέα του βιβλίου που κρατάτε στα χέρια σας, υπό μία έννοια, κυφορείται από το 2016. Ένα πρωινό του Ιούνη, σε μία από τις ατελείωτες και πάντα ενδιαφέρουσες συζητήσεις με τον αδερφό μου Δημήτρη, μου γεννήθηκε μέσα από την κουβέντα η επιθυμία να γράψω για τους δύο μεγάλους πνευματικούς μου έρωτες: τα Μαθηματικά και το Σκάκι. Η συγγραφική μου αυτή επιθυμία ευοδώθηκε χάρις στην υπέροχη πρόταση του Δημήτρη, ως ένα πρώτο βήμα, να προβώ στη δημιουργία ενός ιστολογίου (blog). Λίγες μέρες αργότερα, το πρώτο μου προσωπικό ιστολόγιο με θεματολογία τα Μαθηματικά και το Σκάκι ήταν πραγματικότητα.

Με αφορμή τη συμπλήρωση μιας πενταετίας και την προτροπή πολλών αναγνωστών, μένοντας πάντα πιστός στη ρομαντική σχολή του βιβλίου, αποφάσισα να σταχυολογήσω και να εκδώσω κάποια από τα άρθρα μου επάνω στα Μαθηματικά. Ασφαλώς, τα άρθρα αυτά έχουν τροποποιηθεί, εμπλουτιστεί και μορφοποιηθεί κατάλληλα, ώστε να μπορέσουν να ενσωματωθούν στο βιβλίο. Για λόγους καλύτερης οργάνωσης, τα άρθρα είναι χωρισμένα, με βάση το περιεχόμενό τους, στις εξής θεματικές ενότητες: *Λογική, Άλγεβρα, Θεωρία Αριθμών, Λογισμός, Πιθανότητες, Συνδυαστικά Θέματα και Μικρές Ιστορίες*. Στα Συνδυαστικά Θέματα, μεταξύ άλλων, κάνουν την εμφάνισή τους η *Διανυσματική Ανάλυση* και οι *Μιγαδικοί Αριθμοί*.

Βασική πρόθεση του κάθε άρθρου είναι να παρουσιάσει κάποιο ενδιαφέρον μαθηματικό θέμα και να εισαγάγει μια καινοτομία στην προσέγγισή του, τοποθετώντας με αυτόν τον τρόπο μια πινελιά στον απέραντο γνωσιακό καμβά των Μαθηματικών. Προς αυτήν την κατεύθυνση, κάποια άρθρα γενικεύουν γνωστά αποτελέσματα, διευρύνοντας με αυτόν τον τρόπο το πεδίο εφαρμογής

τους. Σε κάποια άλλα, ο αναγνώστης γίνεται μάρτυρας μιας κρυμμένης, κοινής θεωρητικής βάσης μεταξύ δύο ή περισσότερων φαινομενικά ασύνδετων προβλημάτων. Άλλα εξερευνούν ορισμένες καθημερινές διαδικασίες και φαινόμενα, αποκαλύπτοντας τη μαθηματική νομοτέλεια που κρύβεται από πίσω. Τέλος, κάποια άλλα παρουσιάζουν με αφηγηματικό τρόπο μερικά σπουδαία μαθηματικά θέματα, τα οποία άλλοτε έχουν βιογραφικό χαρακτήρα και άλλοτε αγγίζουν τα όρια της Φιλοσοφίας. Από τις «εξωγήινες λύσεις» και τη «τρογγυλότητα των αριθμών» έως το «ξυράφι του Occam» και τα «παράδοξα με τις κατσίκες», τα άρθρα αυτά έχουν στόχο να αναδείξουν τη χρησιμότητα και την αξία των Μαθηματικών στην κατανόηση και περιγραφή του κόσμου μας.

Το βιβλίο απευθύνεται σε όσους αγαπούν τους μαθηματικούς γρίφους, σε όσους εκστασιάζονται από τα μαθηματικά παράδοξα και τις απρόσμενες συνδέσεις, σε όσους μαγεύονται από τις απίθανες ιστορίες σπουδαιών προσωπικοτήτων της μαθηματικής διανόησης και γενικότερα σε όσους δεν αρκούνται μόνο στα φαινόμενα, αλλά αναζητούν και εξηγήσεις.

Αναστάσιος Μαρωνίδης  
Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2022



# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η λύση ενός μαθηματικού προβλήματος, γρίφου ή παραδόξου αποτελεί αναμφίβολα το επιστέγασμα της ενασχόλησης με αυτά. Ωστόσο, το μεγαλύτερο όφελος που μπορεί να αποκομίσει κανείς δεν προέρχεται από την ίδια τη λύση, αλλά από τη διαδικασία της επίλυσης. Υπό αυτό το πρίσμα, το βιβλίο δίνει μεγαλύτερη έμφαση στον τρόπο σκέψης και την εφαρμογή των εργαλείων που οδηγούν στα συμπεράσματα, παρά στα ίδια τα συμπεράσματα. Στόχος είναι ο αναγνώστης να ενεργοποιήσει τη συνδυαστική σκέψη που είναι απαραίτητη για τον εντοπισμό ομοιοτήτων και διαφορών, καθώς και τη διάκριση μεταξύ ειδικού και γενικού. Οι δεξιότητες αυτές θα του επιτρέψουν να ανακαλύψει συνδέσεις ανάμεσα σε διαφορετικά θέματα (οριζόντια ή διαθεματική προσέγγιση) και να γενικεύσει ή να εξειδικεύσει κεκτημένη γνώση εντός ενός θέματος (κάθετη ή ενδοθεματική προσέγγιση), αντίστοιχα.

Ένας ακόμη στόχος του βιβλίου είναι να αναδείξει τη διάχυτη παρουσία των Μαθηματικών στην καθημερινότητά μας. Απτή απόδειξη αυτής της παρουσίας άλλωστε αποτελεί το γεγονός ότι εκκολαπτήριο των ιδεών, επάνω στις οποίες αναπτύχθηκε η πλειοψηφία των άρθρων, υπήρξαν οι καθημερινές συζητήσεις με γνωστούς και φίλους. Μάλιστα, η παρουσία αυτή είναι τόσο έντονη, που μερικές φορές οι ιδέες ξεπηδούσαν από συζητήσεις για θέματα που αρχικά έμοιαζαν να μην έχουν μεγάλη συγγένεια με τα Μαθηματικά ή ακόμα και από απλές απορίες μαθητών μου.

Πηγαίνοντας ένα βήμα παραπέρα, δεν θα ήταν υπερβολή αν λέγαμε ότι τα Μαθηματικά βρίσκονται παντού. Ο μεγάλος Γαλιλαίος είχε πει κάποτε: «Το βιβλίο της φύσης είναι γραμμένο στη γλώσσα των Μαθηματικών». Πράγματι, τόσο οι φυσικοί νόμοι

που διέπουν τη λειτουργία του σύμπαντος, όσο και οι χημικές διεργασίες που λαμβάνουν χώρα μέσα σε αυτό περιγράφονται με τη χρήση μαθηματικών τύπων. Για να μπορέσει λοιπόν κανείς να γνωρίσει τον κόσμο γύρω του, από τα τροχιακά των ατόμων ως τις τροχιές των ουράνιων σωμάτων, πρέπει να γνωρίζει Μαθηματικά. Τι είναι λοιπόν αυτό που κάνει τα Μαθηματικά να ξεχωρίζουν και τελοσπάντων τι είναι τελικά τα Μαθηματικά;

---

## Τι είναι τα Μαθηματικά

---

Στην ερώτηση τι είναι τα Μαθηματικά, η απάντηση είναι απλή: «Τα Μαθηματικά είναι **ΛΕΦΤΑ**». Φυσικά θα ήταν αδιανόητο να χρησιμοποιήσω κυριολεκτικά μια τόσο ευτελή αξία όπως το χρήμα για να χαρακτηρίσω κάτι τόσο ιερό όπως τα Μαθηματικά. Διασπώντας τη λέξη ΛΕΦΤΑ στα γράμματα που την απαρτίζουν, παίρνουμε το εξής αρκτικόλεξο:

- ❑ **Λ:** Τα Μαθηματικά είναι **Λογική**, αφού παρέχουν ένα σύνολο ορθολογικών κανόνων συλλογισμού και συμπερασματολογίας. Η Μαθηματική Λογική αποτελεί τη βάση της ανθρώπινης αναλυτικής και συνθετικής σκέψης.
- ❑ **Ε:** Τα Μαθηματικά είναι **Επιστήμη**. Είναι εκείνη η επιστήμη που μελετά τους αριθμούς, τα γεωμετρικά σχήματα, τα σύνολα και τις δομές τους. Τα Μαθηματικά αποτελούν μία θεμελιώδη επιστήμη, επάνω στην οποία στηρίζονται πολλές άλλες επιστήμες.
- ❑ **Φ:** Τα Μαθηματικά είναι **Φιλοσοφία**. Έχουν χρησιμοποιηθεί ως μέσο για την κατάκτηση των ανθρώπινων φιλοσοφικών αναζητήσεων και υπαρξιακών προβληματισμών. Πολ-



λές κοσμοθεωρητικές προσεγγίσεις έχουν τη βάση τους στα Μαθηματικά.

- ❑ **T:** Τα Μαθηματικά είναι **Τέχνη**. Αφενός διότι κάθε μορφή τέχνης χρησιμοποιεί μαθηματικές οντότητες για να εκφραστεί και αφετέρου επειδή τα ίδια τα Μαθηματικά και οι τυπικές εκφράσεις τους περιέχουν το στοιχείο της αισθητικής και του ωραίου.
- ❑ **A:** Τα Μαθηματικά είναι **Άθληση**. Εξασκούν όλα τα θετικά πνευματικά χαρακτηριστικά του Ανθρώπου και διεγείρουν τη φαντασία, η οποία είναι απαραίτητη για την πρόοδο της ανθρωπότητας.

Ο όρος **ΛΕΦΤΑ** λοιπόν είναι ένας μνημονικός κανόνας για να περιγράψει κανείς με πέντε μόνο λέξεις τι είναι τα Μαθηματικά: Λογική, Επιστήμη, Φιλοσοφία, Τέχνη, Άθληση.

---

## Η χρησιμότητα των Μαθηματικών

---

Ο σπουδαίος Κινέζος φιλόσοφος του βου αιώνα π.Χ. Λάο Τσε είχε πει: «Για να φανταστούμε τη χρησιμότητα των Μαθηματικών στη ζωή μας, αρκεί να φανταστούμε τη ζωή μας χωρίς τα Μαθηματικά». Στον σύγχρονο κόσμο, η ρήση αυτή έχει γίνει πιο επίκαιρη από ποτέ, καθώς τα Μαθηματικά, με τη ραγδαία τεχνολογική ανάπτυξη, έχουν μπει για τα καλά στη ζωή μας, μέσω πληθώρας εφαρμογών:

- ❑ Από τους υπολογιστές και τα κινητά τηλέφωνα, που αποτελούν πλέον προέκταση του χεριού μας, ως την τεχνητή νοημοσύνη και τη ρομποτική.

- ❑ Από την αρχιτεκτονική κτηρίων, δρόμων, εγκαταστάσεων και υποδομών ως την κατασκευή ψηφιακών κόσμων, μέσω της εικονικής και επαυξημένης πραγματικότητας.
- ❑ Από τις νευροεπιστήμες και τη γνωστική ψυχολογία ως τη χαρτογράφηση του ανθρώπινου γονιδιώματος.
- ❑ Από τις ιατρικές απεικονιστικές μεθόδους και τη βιοϊατρική ως τη μοριακή βιολογία και τη γενετική μηχανική.
- ❑ Από την προσομοίωση της εξέλιξης ενός οικονομικού συστήματος με μαθηματικά μοντέλα ως την πρόβλεψη των επιπτώσεων μιας συγκεκριμένης οικονομικής πολιτικής.
- ❑ Από τη μελέτη της αλληλεπίδρασης των πληθυσμών που βιώνουν σε ένα οικοσύστημα ως τις τεχνολογίες ανανεώσιμων πηγών ενέργειας και υβριδικών συστημάτων.
- ❑ Από την καταγραφή στατιστικών μέτρων που αφορούν στον πληθυσμό της γης και το βιοτικό επίπεδο των ανθρώπων ως την εξερεύνηση του διαστήματος και την αναζήτηση άλλων κόσμων, μακριά από τον πλανήτη μας.

Η παραπάνω λίστα, αν και σε καμία περίπτωση δεν είναι εξαντλητική, εντούτοις μας παρέχει μια ξεκάθαρη εικόνα του εύρους εφαρμογής των Μαθηματικών. Η πραγματική αξία όμως των Μαθηματικών δεν εξαρτάται από τις εφαρμογές τους, αλλά βρίσκεται κρυμμένη στην ίδια τους τη φύση.

---

## Η αξία των Μαθηματικών

---

Τα Μαθηματικά συγκεντρώνουν ένα πλήθος αρετών, οι οποίες τα τοποθετούν σε περίοπτη θέση στην ανθρώπινη διάνοηση. Για

αυτόν τον λόγο, η επαφή με τα Μαθηματικά μπορεί να αποδειχθεί ευεργετική για τον Άνθρωπο στη διαμόρφωση ενός ορθού και συγκροτημένου χαρακτήρα. Πιο συγκεκριμένα, τα Μαθηματικά είναι:

- ❑ **Αντικειμενικά:**  $1 + 1$  κάνουν 2.
- ❑ **Συνεπή:**  $1 + 1$  κάνουν πάντα 2.
- ❑ **Αμερόληπτα:**  $1 + 1$  κάνουν για όλους 2.
- ❑ **Ακριβή:**  $1 + 1$  κάνουν ακριβώς και όχι περίπου 2.

Αλλά συγκεντρώνουν κι επιπλέον χαρακτηριστικά. Για παράδειγμα είναι:

- ❑ **Αυτάρκη:** Το μαθηματικό οικοδόμημα δεν εξαρτάται από καμία άλλη επιστήμη για να χτιστεί.
- ❑ **Απέριττα:** Δίνουν λύση με τα λιγότερα δυνατά δεδομένα.
- ❑ **Περιγραφικά:** Μας παρέχουν την απαραίτητη γλώσσα για να περιγράψουμε τον κόσμο.
- ❑ **Ερμηνευτικά:** Με αυτά μπορούμε να ερμηνεύσουμε τα διάφορα φαινόμενα που συμβαίνουν γύρω μας.
- ❑ **Δημιουργικά:** Παρέχουν ένα σύνολο αξιωμάτων και λογικών κανόνων παραγωγής, με τη χρήση των οποίων μπορεί κάποιος, με εργαλείο τη φαντασία, να ανακαλύψει καινούργια γνώση.

Τα Μαθηματικά όμως, πέρα από όλα τα άλλα, έχουν κι ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα που είναι κρυμμένο στην ίδια τους τη φύση και σπάνια αναγνωρίζεται. Είναι **απλά**. Όσο δύσκολα κι αν φαντάζονται, μπορούν πάντα να αποσυντεθούν σε ένα σύνολο δομικών στοιχείων, τα οποία συνδέονται μέσω απλών λογικών σχέσεων.

## Ευχαριστίες

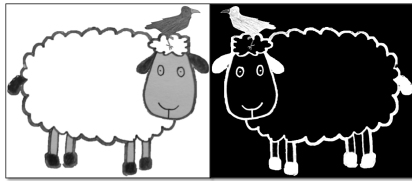
---

Θα ήταν παράλειψη να μην ευχαριστήσω κάποιους ανθρώπους (αλλά και ζώα!), οι οποίοι συνέβαλαν στη δημιουργία αυτού του βιβλίου, ο καθένας με τον δικό του ξεχωριστό τρόπο. Πρωτίστως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον αδερφό μου Δημήτρη για την εξαιρετική του ιδέα να δημιουργήσω το ιστολόγιο, από το οποίο αντλήθηκαν τα άρθρα που παρουσιάζονται στο βιβλίο, αλλά και για την ενδελεχή ανάγνωση του προσχέδιου και την επισήμανση ορισμένων λαθών στο κείμενο. Ευχαριστώ επίσης τη γυναίκα μου Ρένα για την υπομονή που επιδείκνυε κατά την προετοιμασία και ανάρτηση του κάθε άρθρου, αλλά και για την πολύτιμη γνώμη της τόσο στο περιεχόμενο κάποιων άρθρων, όσο και στη μορφοποίηση των σελίδων του βιβλίου. Ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να απευθύνω και στον σκύλο μου Abel, για τη μοναδική παρέα που μου πρόσφερε τα βράδια που έμενα μόνος μπροστά στην οθόνη του υπολογιστή μου, πληκτρολογώντας τα άρθρα μου. Ευχαριστώ επίσης θερμά τους γονείς μου, αλλά και όλους τους αναγνώστες του ιστολογίου μου, για τον πολύτιμο χρόνο που έχουν αφιερώσει στην ανάγνωση των άρθρων και για τα εύστοχα και εποικοδομητικά τους σχόλια μετά από κάθε ανάρτηση. Επίσης, αισθάνομαι την ανάγκη να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στη γραφίστρια Άννα Παναγοπούλου για το υπέροχο εξώφυλλο και τις εκδόσεις Ζήτη για την άρτια έκδοση του παρόντος βιβλίου. Τέλος, θα ήταν αδύνατο να μην ευχαριστήσω την κόρη μου Μελίνα, στο πρόσωπο της οποίας οραματίζομαι, μετά από κάποια χρόνια, το εξιδανικευμένο πρότυπο του αναγνώστη αυτού του βιβλίου. Ένα μεγάλο μέρος της έμπνευσής μου προήλθε από το πρόσωπό της.



## 1. Άσπρα κοράκια, μαύρα πρόβατα

*Στον αδερφό μου Δημήτρη, ο οποίος σε μικρή ηλικία μου δίδαξε την αξία να σκέφτεται κανείς ορθά, αλλά και να σκέφτεται κανείς, σκέτα!*



Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε την πρόταση «όλα τα κοράκια είναι μαύρα». Ο μόνος τρόπος να το αποδείξουμε αυτό είναι να καταφέρουμε να δούμε όλα τα κοράκια του κόσμου και να εξετάσουμε το χρώμα τους. Αν έστω και ένα κοράκι δεν είναι μαύρο, τότε η πρόταση είναι ψευδής. Αν όλα τα κοράκια είναι μαύρα, τότε είναι αληθής.

Επειδή στην πράξη είναι αδύνατο να εντοπίσουμε όλα τα κοράκια και να ελέγξουμε το χρώμα τους, αρκούμαστε στο εργαλείο που μας προσφέρει η λογική, την επαγωγική μέθοδο, τη μέθοδο δηλαδή που από ένα σύνολο επαληθευτικών στιγμιότυπων μιας πρότασης, επάγει την καθολική αλήθεια αυτής της πρότασης.

Την επαγωγική μέθοδο χρησιμοποιούμε πολύ συχνά, τις περισσότερες φορές υποσυνείδητα, ώστε να αποφαινόμαστε για προβλήματα που αφορούν στην καθημερινότητά μας και να παίρνουμε αποφάσεις που αν και περιέχουν ένα ρίσκο αβεβαιότητας,

μας επιτρέπουν να πορευόμαστε στη ζωή μας. Χαρακτηριστικό είναι το επόμενο παράδειγμα. Στην ερώτηση «αύριο θα ανατείλει ο ήλιος;», μάλλον όλοι θα απαντούσαμε «φυσικά και θα ανατείλει». Τι μας κάνει όμως να είμαστε τόσο σίγουροι; Μάλλον το ότι αυτό συνέβαινε κάθε πρωί από τη μέρα που γεννηθήκαμε, αλλά και όλα τα χρόνια πριν γεννηθούμε, όπως μας διαβεβαιώνουν οι πρόγονοί μας.

Όπως φαίνεται από το παραπάνω παράδειγμα, η αδυναμία της επαγωγικής μεθόδου είναι ότι πηγαίνει από το *ειδικό* στο *γενικό*. «Ο ήλιος μέχρι σήμερα κάθε πρωί ανέτελλε, άρα ο ήλιος κάθε πρωί ανατέλλει». Η αντίστροφη μέθοδος είναι η παραγωγική, η οποία πηγαίνει από το *γενικό* στο *ειδικό*. Στην παραγωγική μέθοδο, η συμπερασματική πρόταση αποτελεί υποσύνολο μιας καθολικής αληθούς πρότασης και συνεπώς κληρονομεί την τιμή αλήθειας της καθολικής πρότασης.

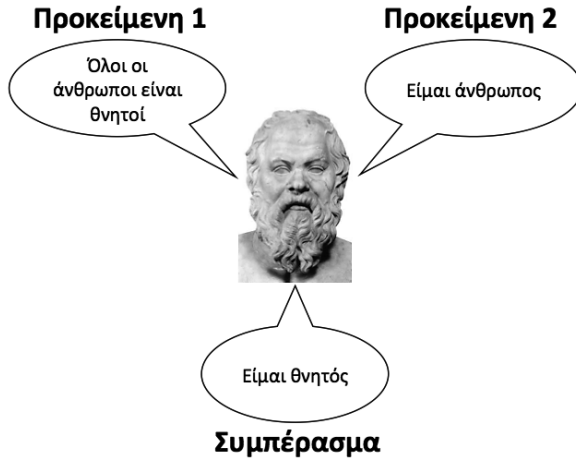
Χαρακτηριστικό παράδειγμα της παραγωγικής μεθόδου αποτελεί το αρχετυπικό αριστοτελικό σχήμα, το οποίο από δύο προκείμενες προτάσεις και έναν κανόνα παραγωγής εξάγει ένα συμπέρασμα. Το κλασικό παράδειγμα εφαρμογής του αριστοτελικού σχήματος απεικονίζεται στην **Εικόνα 1.1** και διατείνεται ότι ο Σωκράτης είναι θνητός, επειδή όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί και ο Σωκράτης αποτελεί ειδική περίπτωση του γενικού συνόλου όλων των ανθρώπων.

Το παραπάνω αριστοτελικό σχήμα θα μπορούσαμε να πούμε ότι αποτελεί το εκμαγείο από το οποίο προήλθαν οι δύο παρακάτω κανόνες συμπεραματολογίας, γνωστοί στη σύγχρονη ορολογία του Προτασιακού Λογισμού ως *modus ponens* και *modus tollens*.

⇒ **modus ponens:**  $\{p \rightarrow q, p\} \vdash q$

⇒ **modus tollens:**  $\{p \rightarrow q, \neg q\} \vdash \neg p$

Ο *modus ponens* με απλά λόγια λέει ότι δοθείσης της πρότα-



Εικόνα 1.1. Το αριστοτελικό λογικό σχήμα. Από δύο προκείμενες προτάσεις εξάγεται ένα συμπέρασμα.

σης « $p$  συνεπάγεται  $q$ », αν γνωρίζουμε ότι ισχύει η  $p$ , τότε μπορούμε με ασφάλεια να συμπεράνουμε ότι ισχύει και η  $q$ . Αν και το αποτέλεσμα αυτό δείχνει να είναι τετριμμένο, το αντίστοιχο αποτέλεσμα του *modus tollens* ενδέχεται κάποιους να τους ξενίσει. Ο *modus tollens* ουσιαστικά αποτελεί τη «δυϊκή» προσέγγιση του *modus ponens* και με απλά λόγια λέει ότι δοθείσης της πρότασης « $p$  συνεπάγεται  $q$ », αν γνωρίζουμε ότι ισχύει η άρνηση της  $q$ , τότε μπορούμε με ασφάλεια να συμπεράνουμε ότι ισχύει και η άρνηση της  $p$ . Αυτό μπορεί να γίνει καλύτερα αντιληπτό μέσα από το επόμενο παράδειγμα το οποίο δανείζεται για λίγο το μούσι του Σωκράτη...

Έστω η πρόταση «αν ο Σωκράτης είναι σπανός, τότε δεν έχει γένια», η οποία είναι προφανώς της μορφής « $p$  συνεπάγεται  $q$ », όπου

- ⇒  $p$ : «Ο Σωκράτης είναι σπανός»
- ⇒  $q$ : «Ο Σωκράτης δεν έχει γένια»

**Πίνακας 1.1.** Εφαρμογή των modus ponens και modus tollens στην περίπτωση του Σωκράτη.

	<b>Modus ponens</b>	<b>Modus tollens</b>
<b>Προκείμενη 1</b>	Αν ο Σωκράτης είναι σπανός, τότε δεν έχει γένια	
<b>Προκείμενη 2</b>	Ο Σωκράτης είναι σπανός	Ο Σωκράτης έχει γένια
<b>Συμπέρασμα</b>	Ο Σωκράτης δεν έχει γένια	Ο Σωκράτης δεν είναι σπανός

Αν γνωρίζουμε λοιπόν ότι ο Σωκράτης είναι σπανός, τότε μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι αποκλείεται να έχει γένια (modus ponens). Μπορούμε όμως να είμαστε το ίδιο σίγουροι και ότι αν ο Σωκράτης έχει γένια τότε δεν είναι σπανός, δηλαδή ότι «η άρνηση της  $q$  συνεπάγεται την άρνηση της  $p$ » (modus tollens). Τα αποτελέσματα αυτά βρίσκονται συγκεντρωμένα στον **Πίνακα 1.1**.

Στο σημείο αυτό, αν και δεν θα μας απασχολήσει στα επόμενα, θα πρέπει να επισημάνουμε ότι δεν ισχύει απαραίτητα και «η άρνηση του  $p$  συνεπάγεται την άρνηση του  $q$ », που στο παράδειγμά μας μεταφράζεται ως «αν ο Σωκράτης δεν είναι σπανός τότε έχει γένια». Υπάρχουν πολλοί άνθρωποι που δεν είναι σπανοί και παρόλα αυτά έχουν αποφασίσει να μην αφήσουν γένια. Εκτός κι αν η αρχική πρόταση μετατραπεί σε «αν ο Σωκράτης είναι σπανός, τότε δεν μπορεί να βγάλει γένια», οπότε η ιδιότητα «είμαι σπανός» ταυτίζεται με την ιδιότητα «δεν μπορώ να βγάλω γένια». Κατά συνέπεια σε αυτήν την περίπτωση, η πρόταση «η άρνηση του  $p$  συνεπάγεται την άρνηση του  $q$ » μεταφράζεται σε «αν ο Σωκράτης δεν είναι σπανός, τότε μπορεί να βγάλει γένια» και αποκτά και αυτή ισχύ.

Η παραγωγική μέθοδος, λόγω της αυστηρότητας και ακρίβειας στην εξαγωγή συμπερασμάτων, είναι το αδιαμφισβήτητο μαθηματικό εργαλείο. Αντιθέτως, η επαγωγική μέθοδος<sup>1</sup> αποτελεί μια πιθανοκρατική αποδεικτική προσέγγιση, η οποία δεν είναι

<sup>1</sup>Εδώ δεν θα πρέπει να γίνει σύγχυση με τη μαθηματική επαγωγή, η οποία είναι επίσης μια αυστηρή αποδεικτική μέθοδος.



ικανή να αποδείξει αυστηρά προτάσεις όπως «κάθε πρωί ο ήλιος ανατέλλει». Από πρακτική άποψη όμως, ορισμένες φορές είναι ανούσιο να μπαίνουμε στη διαδικασία αμφισβήτησης μιας πρότασης, όπως η προηγούμενη, δεδομένης της απειροελάχιστης πιθανότητας να μην ισχύει. Στις περιπτώσεις αυτές, η παραγωγική μέθοδος μπορεί να αποδειχτεί εντελώς... αντιπαραγωγική. Σχετικά με αυτό παραθέτω μια γνωστή παραβολή που διακωμωδεί την εμμονή κάποιων μαθηματικών στην παραγωγική μέθοδο<sup>2</sup>.

*Ένας μηχανικός, ένας φυσικός και ένας μαθηματικός έκαναν περίπατο στην ύπαιθρο, κομπάζοντας ο καθένας για την επιστήμη του. Κάποια στιγμή, καθώς περπατούσαν σε ένα λιβάδι, εμφανίζεται μπροστά τους ένα μαύρο πρόβατο. Μόλις το βλέπει ο μηχανικός αναφωνεί:*

*– Ένα μαύρο πρόβατο! Αγαπητοί συνάδελφοι, θα πρέπει να συμπεράνουμε ότι τα πρόβατα αυτής της περιοχής είναι μαύρα!*

*Αμέσως τον διακόπτει ο φυσικός λέγοντας:*

*– Αγαπητέ συνάδελφε, θα διαφωνήσω μαζί σου! Το μόνο που μπορούμε να συμπεράνουμε είναι ότι αυτό το πρόβατο είναι μαύρο!*

*Γυρίζουν τότε και οι δυο στον μαθηματικό και τον ρωτάνε:*

*– Εσύ συνάδελφε τι λες;*

*Και τότε, ο μαθηματικός, που τους ακούει όλη αυτήν την ώρα στωικά, αποκρίνεται:*

---

<sup>2</sup>Την παραβολή αυτή άκουσα για πρώτη φορά από τα χείλη του αδερφού μου Δημήτρη.

*– Αγαπητοί συνάδελφοι, θα διαφωνήσω εντελώς και με τους δυο σας! Το μόνο που μπορούμε να συμπεράνουμε είναι ότι αυτή η πλευρά του προβάτου είναι μαύρη!*

Στην παραβολή αυτή βλέπουμε ότι αρχικά, στη θέα ενός μαύρου προβάτου, ο μηχανικός κάνει ένα ακραίο επαγωγικό άλμα, που τον οδηγεί στο πολύ γενικό συμπέρασμα ότι η περιοχή έχει μαύρα πρόβατα. Ο φυσικός, χρησιμοποιώντας με μεγαλύτερη μετριοπάθεια την επαγωγική μέθοδο, συμπεραίνει ότι και η έτερη πλευρά είναι μαύρη και αποφαίνεται ότι το συγκεκριμένο πρόβατο είναι μαύρο. Τέλος, ο μαθηματικός, δείχνοντας την εμμονή του στην παραγωγική μέθοδο, αρνείται να μετέλθει οποιονδήποτε επαγωγικό συλλογισμό και αρκείται στο συμπέρασμα ότι μόνο η συγκεκριμένη πλευρά του προβάτου, αυτή δηλαδή που βλέπει μπροστά του, είναι μαύρη.

Από πρακτική άποψη, το συμπέρασμα του μηχανικού είναι σαφέστατα λάθος και θα πρέπει να απορριφθεί. Από την άλλη, το συμπέρασμα του μαθηματικού είναι επιστημονικά το μόνο απόλυτα ορθό με βάση τα δεδομένα. Ωστόσο, με όρους της καθημερινότητας, το πιο χρήσιμο συμπέρασμα μάλλον ανήκει στον φυσικό.

Ας αφήσουμε όμως τώρα ήσυχα τα πρόβατα και ας γυρίσουμε στα κοράκια. «Όλα τα κοράκια είναι μαύρα». Όπως είδαμε, η επαγωγική μέθοδος, όταν στηρίζεται σε πληθώρα επιμέρους τεκμηρίων, μπορεί να αποτελέσει μια ισχυρή αποδεικτική μέθοδο. Εφαρμόζοντας λοιπόν την επαγωγική μέθοδο βγαίνουμε στο σεργιάνι και κάθε φορά που συναντάμε ένα μαύρο κοράκι, το καταγράφουμε και νοιώθουμε περισσότερο βέβαιοι για το αληθές της πρότασης που πάμε να αποδείξουμε. Ασφαλώς, με αυτόν τον τρόπο δεν θα καταφέρουμε ποτέ να αποδείξουμε αυστηρά την πρότασή μας. Όσα μαύρα κοράκια κι αν έχουμε συναντήσει, κα-

νείς δεν μπορεί να μας διαβεβαιώσει ότι και το επόμενο κοράκι που θα δούμε θα είναι μαύρο. Ωστόσο, κάθε επιπλέον μαύρο κοράκι που προστίθεται στη λίστα μας, απομακρύνει περισσότερο την αμφιβολία μας.

Μέχρι εδώ, όλα καλά. Ας αναλύσουμε τώρα λίγο περισσότερο την κατάσταση. Αρχικά, η πρόταση «όλα τα κοράκια είναι μαύρα» είναι φανερά ταυτόσημη με την πρόταση «οτιδήποτε είναι κοράκι, είναι μαύρο». Η τελευταία αυτή όμως πρόταση είναι της μορφής «p συνεπάγεται q», όπου

⇒ p: «το x είναι κοράκι»

⇒ q: «το x είναι μαύρο»

Σύμφωνα όμως με τον κανόνα *modus tollens*, η πρόταση «p συνεπάγεται q» είναι ισοδύναμη με την πρόταση «η άρνηση του q συνεπάγεται την άρνηση του p», δηλαδή με την πρόταση «οτιδήποτε δεν είναι μαύρο, δεν είναι κοράκι». Και δεν φαίνεται να υπάρχει τίποτα το περίεργο σε αυτό, ώσπου να σκεφτούμε ότι αυτή η ισοδυναμία μας επιτρέπει να κάνουμε το εξής εκπληκτικό. Αντί να βγούμε έξω να ψάχνουμε κοράκια για να αποδείξουμε ότι είναι μαύρα, καθόμαστε στο δωμάτιό μας, παρατηρούμε γύρω μας αντικείμενα τα οποία δεν είναι μαύρα και απλώς διαπιστώνουμε ότι δεν είναι κοράκια! Για παράδειγμα, η παρατήρηση ότι ο τοίχος απέναντί μου είναι άσπρος και φυσικά δεν είναι κοράκι ενισχύει την πρόταση «οτιδήποτε δεν είναι μαύρο, δεν είναι κοράκι», η οποία αυτόματα ενισχύει και την πρόταση «οτιδήποτε είναι κοράκι είναι μαύρο»!

Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό και ως «το παράδοξο του Hempel»<sup>3</sup> ή ως «raven paradox». Πώς είναι δυνατόν να αποδείξει κανείς κάτι για τα κοράκια, χωρίς να παρατηρήσει ούτε ένα

---

<sup>3</sup>Hempel, Carl Gustav (8 Ιανουαρίου 1905 – 9 Νοεμβρίου 1997): Γερμανός συγγραφέας και φιλόσοφος, κύριος εκφραστής του λογικού εμπειρισμού, του

κοράκι; Στο πλαίσιο του *modus ponens*, για να καταρριφθεί η πρόταση, θα πρέπει να αναζητήσουμε τουλάχιστον ένα κοράκι το οποίο δεν είναι μαύρο. Όμοια, στο πλαίσιο του *modus tollens*, θα πρέπει να αναζητήσουμε ένα τουλάχιστον αντικείμενο που δεν είναι μαύρο και παρόλα αυτά είναι κοράκι. Φανερά όμως, η δεύτερη αναζήτηση είναι μακράν πιο κοπιαστική, αφού μας υπαγορεύει να παρατηρήσουμε όλα τα αντικείμενα του σύμπαντος που δεν είναι μαύρου χρώματος. Αυτό που συμβαίνει στην πραγματικότητα είναι ότι το δωμάτιό μας αποτελεί ένα εντελώς ασήμαντο ποσοστό του παρατηρήσιμου σύμπαντος και κατά συνέπεια, οι παρατηρήσεις μας δεν είναι αρκετές για να στηρίξουν την επαγωγική μας διαδικασία. Ακόμη κι αν επεκτείνουμε τον χώρο των παρατηρήσεών μας έξω από το δωμάτιό μας, π.χ. στη γειτονιά μας, στην πόλη μας ή στη χώρα μας, ούτε τότε θα μπορούμε να στηρίζουμε επαρκώς το συμπέρασμά μας.

Με τον έναν ή τον άλλο τρόπο, όσο προκλητικό κι αν ακούγεται, είναι σαφές ότι δεν μπορούμε να γνωρίζουμε με σιγουριά αν όντως όλα τα κοράκια είναι μαύρα! Η ακριβής διατύπωση της πρότασης που ισχύει είναι «όλα τα κοράκια που έχουμε συναντήσει όλοι οι άνθρωποι μέχρι σήμερα είναι μαύρα». Εκτός κι αν η ιδιότητα «μαύρος» περιέχεται στον ορισμό του κορακιού. Στην περίπτωση αυτή, με όρους της καντιανής φιλοσοφικής γλώσσας, έχουμε να κάνουμε με μια *αναλυτική* πρόταση, οπότε είμαστε αυτόματα βέβαιοι ότι όλα τα κοράκια είναι μαύρα, εξ ορισμού!

Χρησιμοποιώντας τώρα τη μέθοδο του Hempel, προχωρούμε να αποδείξουμε την περίφημη αντιρατσιστική φράση «God, she is black», που μεταφράζεται ως «ο Θεός είναι μαύρη», μεταφέροντας την υπόρρητη δήλωση ότι ο Θεός είναι μαύρου χρώματος και θηλυκού γένους. Ισοδύναμη αυτής της πρότασης

---

φιλοσοφικού κινήματος του 20ού αιώνα που αναζητούσε τη λογική ανάλυση της έγκυρης γνώσης και την εμπειρική θεμελίωση της επιστήμης.

είναι η «οτιδήποτε δεν είναι μαύρο ή θηλυκού γένους δεν είναι Θεός». Πολύ απλά λοιπόν, παρατηρούμε γύρω μας τα έμψυχα και άψυχα αντικείμενα που είτε είναι αρσενικού γένους είτε δεν είναι μαύρα. Αυτήν τη στιγμή που γράφω για παράδειγμα, κοιτάζοντας έξω από το παράθυρό μου, παρατηρώ έναν παππού, που το μόνο επάνω του που θυμίζει Θεό είναι το λευκό του μούσι. Το ίδιο συνέβη και χθες που σουλατσάριζαν έξω στον δρόμο διάφοροι άνδρες, αλλά και προχθές και αντιπροχθές, κ.ο.κ. Αυτό, με βάση την παραπάνω επαγωγική προσέγγιση, συνηγορεί στο ότι ο θεός δεν είναι αρσενικού και άρα είναι θηλυκού γένους. Επίσης, αυτήν τη στιγμή δίπλα μου βρίσκονται σκόρπια στο πάτωμα τα πολύχρωμα τουβλάκια της κόρης μου. Κόκκινα, κίτρινα, πράσινα, μπλε, πάντως όχι μαύρα. Παρά τη δημιουργική τους χρήση από την κόρη μου, ούτε σε αυτά μου είναι δυνατό να διακρίνω κάποια θεία φύση. Συνεπώς, καθένα από αυτά τα «μη μαύρα» αντικείμενα αποτελεί τεκμήριο ότι ο Θεός είναι μαύρος. Συνοψίζοντας, ο Θεός είναι θηλυκού γένους και μαύρος, συνεπώς «God, she is black»!

