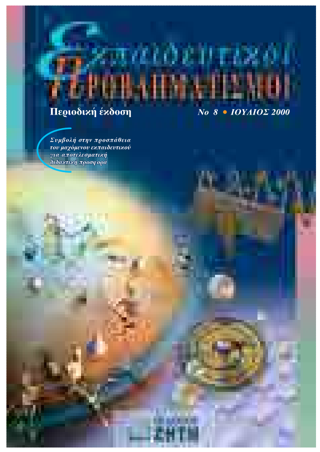
Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί

Περιοδική έκδοση

Νο 8 • ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2000

Συμβολή στην προσπάθεια του μαχόμενου εκπαιδευτικού για αποτελεσματική διδακτική προσφορά

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ



Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί
Νο 8 - Δεκέμβριος 2000

ΕΚΔΟΤΗΣ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ • ΕΚΤΥΠΩΣΕΙΣ
ΖΗΤΗ
Π. ΖΗΤΗ & Σια Ο.Ε.

ΓΡΑΦΕΙΑ - ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑ:
18ο χλμ Θεσ/νίκης - Περαίας
Τ.Θ. 171 • Νέοι Επιβάτες • ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 570 19
Τηλ. (0392) 72.222 - Fax (0392) 72.229
e-mail: info@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ Θεσσαλονίκης:
Αρμενοπούλου 27 • Θεσσαλονίκη 546 35
Τηλ. (031) 203.720 • Fax (031) 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ Αθηνών:
«Ένωση Εκδοτών Βιβλίου Θεσσαλονίκης»
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5)
Αθήνα 105 64
Τηλ.-Fax (01) 32 11 097

Το περιοδικό θα το βρείτε στα βιβλιοπωλεία μας και άλλα συνεργαζόμενα βιβλιοπωλεία

ΣΤΟΙΧΕΙΟΘΕΣΙΑ - ΕΚΤΥΠΩΣΗ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ISSN 1106-9252

ΣΥΝΔΡΟΜΗ (3 τεύχη):
Εκπαιδευτικοί: 5.000 δρχ.
Βιβλιοθήκες: 8.000 δρχ.
Πώληση από τα Βιβλιοπωλεία: 1.500 δρχ το τεύχος

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ-ΑΠΟΣΤΟΛΕΣ: ΑΝΝΗ ΖΗΤΗ
Τ.Θ. 171 • Νέοι Επιβάτες • ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 570 19
Τηλ. - Fax: 0392/72.222
e-mail: info@ziti.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Αγαπητοί φίλοι και συνάδελφοι

Αγαπητοί φίλοι και συνάδελφοι

Στο πρώτο τεύχος της 3ης μ.Χ. χιλιετίας θα θέλαμε να παρουσιάσουμε στους συναδέλφους εκπαιδευτικούς τις κατάλληλες εκπαιδευτικές - διδακτικές οδηγίες για την καλύτερη υλοποίηση των προβλεπόμενων για το σχολικό έτος 2000-2001 αλλαγών στην εκπαιδευτική διαδικασία. Η παρεμβολή της αλλαγής της ηγεσίας του Υπουργείου Παιδείας, οι αλλαγές που προτάθηκαν (διδακτέας - εξεταστέας ύλης, ...) καθώς και οι αλλαγές ορισμένων διδακτικών βιβλίων ανάγκασαν τους «Εκπαιδευτικούς Προβληματισμούς» να καθυστερήσουν την έκδοση αυτού του τεύχους και να περιορίσουν την παρουσίασή τους στην ύλη και στα βιβλία που με βεβαιότητα θα υπάρξουν τη σχολική αυτή χρονιά. Πιστεύουμε ότι οι συνθήκες θα είναι κατάλληλες, ώστε έγκαιρα με την πορεία του σχολικού έτους να κυκλοφορήσουμε το επόμενο τεύχος με τις απαραίτητες οδηγίες για την καλύτερη και αποτελεσματικότερη υλοποίηση του προγράμματος.

Με τις καλύτερές μας ευχές για καλές γιορτές και ευτυχισμένο το νέο έτος 2001.

Η εκδότρια ***Ο Επόπτης Εκδόσεως***

Το περιοδικό μπορείτε να το ζητήσετε από τα βιβλιοπωλεία:

- **Εκδόσεις ΖΗΤΗ**
  Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη
  Τηλ. (031) 203.720, Fax: (031) 211.305
- **«Ένωση Εκδοτών Βιβλίου Θεσσαλονίκης»**
  Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5), 105 64 Αθήνα
  Τηλ.-Fax: (01) 32 11 097
- **Σε όλα τα συνεργαζόμενα βιβλιοπωλεία**

Ο εκδοτικός μας οίκος, για να κάνει πιο ενδιαφέρουσα τη «συζήτηση» μέσα από τους «Εκπαιδευτικούς ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ», θα σας δωρίζει βιβλία των εκδόσεών του (τα οποία θα επιλέξετε εσείς) αξίας 10.000 δρχ. για κάθε πρότασή σας που θα δημοσιεύεται.

Οδηγίες προς τους συγγραφείς των προτάσεων

- *Η έκταση της παρουσίασης ενός θέματος δε θα πρέπει να υπερβαίνει τις 4 σελίδες του εντύπου, τουλάχιστον στις θετικές επιστήμες.*
- *Η χρησιμοποίηση της διατύπωσης, της ορολογίας και των συμβολισμών των εγκεκριμένων διδακτικών βιβλίων της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης είναι υποχρεωτική.*
- *Η προσφυγή στη βοήθεια εννοιών και μεθόδων, που είναι εκτός της διδακτέας ύλης, οπωσδήποτε όμως από το «άμεσο περιβάλλον» της, θα πρέπει να είναι περιορισμένη και να επισημαίνεται ότι είναι εκτός διδακτέας ύλης. Στην περίπτωση αυτή μια βιβλιογραφική αναφορά θα είναι πολύ χρήσιμη.*

Ειδικότερα, κατά την παρουσίαση θα πρέπει, εφόσον είναι εφικτό και απαραίτητο,

- *να επισημαίνονται οι επιδιωκόμενοι στόχοι,*
- *να δίνεται το απαραίτητο πληροφοριακό υλικό με αναφορά στα διδακτικά βιβλία,*
- *να γίνονται οι κατάλληλες διδακτικές υποδείξεις,*
- *να γίνονται εκείνες οι αποδείξεις που υποδεικνύουν μεθόδους επεξεργασίας θεμάτων ή επίλυσης προβλημάτων και*
- *να υποδεικνύονται εκείνα τα σημεία, όπου είναι δυνατόν να ξεφύγουν λάθη.*

Επειδή η σύνταξη του περιοδικού μας κατακλύζεται από προτάσεις με κριτικές του τρόπου παρουσίασης της ύλης στα σχολικά βιβλία, με ασκήσεις ή διαφορετικές λύσεις μιας άσκησης θέλουμε να σας επισημάνουμε ότι μέσα στους στόχους, που έχουν από την αρχή θέσει οι Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί, δεν περιλαμβάνεται

- *η κριτική των εγκεκριμένων σχολικών βιβλίων και των μεθόδων διδασκαλίας (εκτός και αν υπάρχει κάποιο λάθος), γιατί θα προκαλέσουμε σύγχυση στον μαχόμενο εκπαιδευτικό, ούτε και*
- *η παράθεση ασκήσεων ή όσο το δυνατόν περισσότερων λύσεων κάποιων ασκήσεων αφού αυτό καλύπτεται από το μεγάλο αριθμό βοηθημάτων που κυκλοφορούν.*

Στόχος μας είναι ο σχολιασμός και η επιστημονική (στα πλαίσια της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης) ανάλυση θεμάτων, προτάσεων και φαινομένων που εξυπηρετούν καθαρά διδακτικούς σκοπούς καθώς και ασκήσεων ή λύσεων που υποδεικνύουν μεθόδους και τρόπους αντιμετώπισης προβλημάτων που εμφανίζονται κατά την εκπαιδευτική διαδικασία.

Με εκτίμηση
Γεώργιος Παντελίδης

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ της ΧΙΛΙΕΤΙΑΣ

2ο Μέρος: 1700-2000 μ.Χ.

Της **Χριστίνας Φιλή**, Επίκουρης Καθηγήτριας Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Η ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Η δημιουργία του ***Απειροστικού Λογισμού*** είναι συνέπεια μιας μακραίωνης προσπάθειας που ξεκινά από τους ***Ζήνωνα τον Ελεάτη, Δημόκριτο, Εύδοξο*** και ***Αρχιμήδη***, περνά μέσα από τις αραβικές και λατινικές μεταφράσεις των έργων του Αρχιμήδη και συνεχίζεται με τις εργασίες των ***Kepler, Γαλιλαίου, Cavalieri, Torricelli, Fermat, Roberval, Barrow*** και ***Huygens.*** Η γένεση όμως του Λογισμού ως λογικού συστήματος οφείλεται στο ***Newton*** και το ***Leibniz***. Με τις μεθόδους τους (των ροών και των διαφορικών) δημιούργησαν ένα ανεξάρτητο και αυτόνομο κλάδο. Οι τεχνικές τους διαμόρφωσαν ένα εργαλείο πολύ πιο αποτελεσματικό από εκείνο της Γεωμετρίας, που κυριαρχούσε μέχρι τότε. Ο *Newton* εμπειρικός, ενώ ο συστηματικός *Leibniz* είναι εκείνος που διαμορφώνει τους πρώτους κανόνες του Λογισμού όπως και το συμβολισμό που ισχύει μέχρι σήμερα.

18ος αιώνας

Οι βασικές ατέλειες του έργου των *Newton* και *Leibniz* εντοπίζονταν στη λογική αδυναμία που περιέχουν οι έννοιες *όριο* και *απειροστό*. Ο ***Jean le Rond D' Alembert*** επιχειρεί να θεμελιώσει την Ανάλυση στη θεωρία των ορίων, ενώ ο ***L. Euler*** στις «εξαφανισμένες ποσότητες». Ο ***J.-L. Lagrange*** θεμελιώνει αυστηρά την Ανάλυση στο ανάπτυγμα συναρτήσεως κατά *Taylor* και ορίζει τις παραγώγους από τους διαδοχικούς όρους του αναπτύγματος. Αν και οι αποδείξεις του δεν ήσαν αυστηρές, οι ιδέες του βρήκαν την πλήρη δικαίωση μέσα από το έργο του ***K. Weierstrass***.

19ος αιώνας

Ο πρωτοπόρος της αυστηρής θεμελίωσης της Αναλύσεως είναι ο ***B. Bolzano***. Είναι ο πρώτος που στον ορισμό της συνέχειας (1817) υπογραμμίζει ότι αυτή πρέπει να βασίζεται στην έννοια του ορίου. Ο ***A.-L. Cauchy*** απαλλάσσει την Ανάλυση από κάθε έννοια μεταφυσικής ή απειροστού και τη θεμελιώνει στην έννοια του ορίου. Η δειλά εμφανιζόμενη έννοια του ε, ως οσοδήποτε μικρού αριθμού (*Lagrange, Cauchy*), οδηγεί το *Weierstrass* να δώσει με ακρίβεια τον ορισμό της ομοιόμορφης σύγκλισης και συνέχειας, αποδεικνύει την ανεξαρτησία των εννοιών της παραγώγου και της συνέχειας και δημιουργεί τη γλώσσα των (ε,δ). Στην Ελλάδα τη σύγχρονη γλώσσα της Ανάλυσης εισάγει ο ***Ι. Καραντινός*** (1827). Ο *Weierstrass* αποδεικνύει πως *κάθε συνεχής συνάρτηση είναι το όριο μιας ακολουθίας πολυωνύμων, που συγκλίνουν ομοιόμορφα*. Ο ***Dedekind***, βασιζόμενος στον *Εύδοξο*, δίνει με τις τομές τον ορισμό του *άρρητου αριθμού*. Η ***Θεωρία των Συνόλων*** του ***G. Cantor*** δίνει το επαναστατικό έναυσμα: *Οι συναρτήσεις παύουν να θεωρούνται ορισμένες σε διαστήματα ή περιοχές σημείων, αλλά σε τυχόντα σημειοσύνολα.* Το μέτρο συνόλων ορίζεται και οι ***Baire, Borel*** και ***Lebesgue*** ανοίγουν μια νέα εποχή στη θεωρία πραγματικών συναρτήσεων. Ο *Baire* ορίζει τα πυκνά και τα τέλεια σύνολα, ο *Borel*, μεταξύ άλλων, ορίζει τις κλάσεις πραγματικών συναρτήσεων και ο *Lebesgue* επεκτείνει την έννοια του ολοκληρώματος και εισάγει τη μετρήσιμη συνάρτηση. Το θεώρημα *Weierstrass* εξακολουθεί να βρίσκεται στο επίκεντρο της έρευνας. Ειδικότερα η 'ταχύτητα' προσεγγίσεως μελετάται από τους ***Ch. de la Vallée-Poussin, S. Bernstein*** κ.ά. Οι κλασικές συναρτήσεις δεν 'καλύπτουν πλέον τις νέες ανάγκες' των μαθηματικών, όπως στη θεωρία των γενικευμένων επιφανειών (***L.C. Young***), στην Αρμονική Ανάλυση (***Bochner***), στη Θεωρητική Φυσική ('συνάρτηση' ***P.A.M. Dirac***). Στην αρχή της θεωρίας των Τοπολογικών Διανυσματικών Χώρων η έννοια της γενικευμένης συναρτήσεως δεν ήταν αρκετά σαφής. Ο ***L. Schwarz*** (1945) ορίζει τη *'γενικευμένη συνάρτηση'* (*κατανομή*) *ως συνεχές γραμμικό συναρτησιακό στο χώρο των διαφορίσιμων συναρτήσεων με συμπαγή φορέα.*

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

(18ος, 19ος και 20ος αιώνας)

Με την εμφάνιση του απειροστικού Λογισμού εμφανίστηκαν και διάφοροι τύποι διαφορικών εξισώσεων (ΔΕ). Ο ***L. Euler*** θεμελιώνει τη θεωρία με τη χρήση κριτηρίων ολοκληρωσιμότητας. Το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής οδηγεί στη ΔΕ μερικών παραγώγων $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, της οποίας η μελέτη αρχίζει το 1747 με τους *Euler, D' Alembert* και *D. Bernoulli.* Οι εφαρμογές των ΔΕ επεκτείνονται στη Φυσική και στη Μηχανική. Ο *Lagrange* δίνει το γενικό τρόπο επίλυσης ΔΕ με μερικές παραγώγους (ΜΔΕ) $1^{ης}$ τάξεως και ο ***G. Monge*** παρουσιάζει τη γεωμετρική τους ερμηνεία. Στα πλαίσια αναμόρφωσης της Ανάλυσης από τον *Cauchy* εντάσσεται και το έργο του που αφορά τις ΔΕ. Η πρώτη απόδειξη του θεωρήματος ύπαρξης λύσεως σε προβλήματα αρχικών τιμών ΔΕ $1^{ης}$ τάξεως δίνεται από τον *Cauchy* και βελτιώνεται από τον ***R. Lipschitz*** και αργότερα από τον ***E. Picard.*** Στα τέλη του $19^{ου}$ αιώνα τα θεωρήματα υπάρξεως και μοναδικότητας της λύσεως ΔΕ και συστημάτων ΔΕ αποτελούν το σημαντικότερο θέμα έρευνας (*E. Picard, G. Peano).* Το $18^{ο}$ αιώνα η έρευνα επικεντρώνεται στη μελέτη των γραμμικών ΔΕ, γεγονός που οφείλεται στη σημασία που αυτές έχουν για τη Μηχανική και τη Φυσική. Στα μέσα του $19^{ου}$ αιώνα (1858) αποσαφηνίζεται το πρόβλημα της γραμμικής ανεξαρτησίας των λύσεων ΔΕ (***E.B. Christoffel***). Τα προβλήματα της Μαθηματικής Φυσικής οδηγούν στη μελέτη συνοριακών προβλημάτων (*Sturm-Liouville,* 1830). Ο ***V. Steklov*** ερευνά τις διάφορες γενικεύσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών, η οποία βοήθησε στην ανάπτυξη ασυμπτωτικών μεθόδων στη θεωρία ΔΕ και στη Φασματική Ανάλυση. Στη θεωρία γραμμικών και μη γραμμικών ΜΔΕ, η ανάγκη αποδοχής «λύσεων» που δεν ήσαν παραγωγίσιμες συναρτήσεις οδήγησε τους *Léray* και *Sobolev* να εισάγουν την έννοια της γενικευμένης παραγώγου.

Ο **19^ος^** αιώνας είναι η εποχή άνθησης της θεωρίας των αναλυτικών συναρτήσεων με προεξάρχοντες τους *Cauchy, Briot* και *Bouquet*, που δημιουργούν έτσι την αναλυτική θεωρία ΔΕ, την οποία συστηματικοποιεί ο *Weierstrass*. Η επιτυχία της θεωρίας των αναλυτικών συναρτήσεων και της αναλυτικής θεωρίας ΔΕ είχε ως αποτέλεσμα να παραμεριστεί η θεωρία των ΔΕ πάνω στον **R** (ΔΕ/**R**)στο διάστημα 1840-1860. Με τις εργασίες όμως του ***H. Poincaré*** (~ 1880) στην ποιοτική θεωρία ΔΕ ανανεώνεται το ενδιαφέρων των μαθηματικών για τη μελέτη των ΔΕ/**R.**

Η δημιουργία της ποιοτικής θεωρίας ΔΕ προέκυψε από προβλήματα Ουράνιας Μηχανικής (*Poincaré*) και δυναμικής ρευστών (*Zhukovski*). Η ιδιαιτερότητα αυτών των προβλημάτων (προβλήματα σταθερής τροχιάς) καθορίζουν την προσέγγιση του *Poincaré* στη μελέτη της συμπεριφοράς των ολοκληρωτικών καμπύλων του επιπέδου. Σε μια σειρα εργασιών του (~ 1880) ο *Poincaré* εισάγει τις βασικές έννοιες, ενώ η γεωμετρική προσέγγιση του προβλήματος οδηγεί τον *Poincaré* στη Συνδιαστική Τοπολογία. Την έρευνα του *Poincaré* στην ποιοτική θεωρία συνεχίζει ο ***A. M. Ljapunoff*** , οπότε αρχίζει και και αποκτά μεγάλη σημασία τόσο για τα Μαθηματικά, όσο και τη Μηχανική του $20^{ου}$ αιώνα.

Στον περίφημο λόγο του στο $2^{ο}$ Διεθνές Μαθηματικό Συνέδριο στο Παρίσι (1900) ο 38-χρονος ***D. Hilbert*** εφιστά την προσοχή των μαθηματικών σε προβλήματα που προάγουν την επιστήμη, μεταξύ των οποίων δύο αναφέρονται στις ΔΕ. Το $1^{ο}$ (Πρόβλ. N^{o} 10) ανήκει στην ποιοτική θεωρία των ΔΕ και το $2^{ο}$ (Πρόβλ. N^{o} 21) στην αναλυτική θεωρία των ΔΕ.

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ
(18ος , 19ος και 20ος αιώνας)

Αν και προβλήματα του Λογισμού των Μεταβολών (ΛΜ) εμφανίζονται στα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά, η ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού έδωσε τη δυνατότητα στους *Euler* και *Lagrange* κατά τον $18^{ο}$ αιώνα να θεμελιώσουν το ΛΜ και να δώσουν τις πρώτες συνθήκες ακροτάτων. Η εξίσωση των *Euler-Lagrange* θα παίξει ένα σημαντικό ρόλο, κυρίως στη Φυσική (π.χ. αρχή του *Fermat* για τη διάδοση του φωτός, τις αρχές ελάχιστης δράσης του *Maupertius*, καθορισμός κινήσεων στην Αναλυτική Μηχανική). Η μελέτη των συνθηκών για ακρότατα συνεχίζεται τόσο το $18^{ο}$, όσο και το $19^{ο}$ αιώνα με τις εργασίες των *Legendre, Jacobi* και *Weierstrass.* Η εργασία του φυσικού ***J. Plateau*** και το ομώνυμο πρόβλημα δίνουν καινούργια ώθηση στον κλάδο.

Στις αρχές του $20^{ου}$ αι. ο ΛΜ είναι μια αποκρυσταλλωμένη θεωρία. Η συμβολή του ***Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή*** στη διαμόρφωση του ΛΜ ήταν σημαντικότατη και διεθνώς αναγνωρισμένη από διαπρεπείς μαθηματικούς-φυσικούς (*Max Plank, Alfred Pringsheim* κ.ά). Η έννοια του πεδίου που εισήγαγε ο Καραθεοδωρής είχε για το ΛΜ απρόβλεπτες συνέπειες, από την οποία συνάγει μια ανισότητα και θέτει τις βάσεις για την αρχή *Δυναμικού Βέλτιστου Ελέγχου.* Η ανισότητα εμφανίστηκε 20 χρόνια αργότερα (μετά το θάνατο του Καραθεοδωρή) με άλλο όνομα(*) , *ανισότητα Bellmann.* Από τις εργασίες του Καραθεοδωρή στο ΛΜ συνάγει ο ***J. Pesch*** την περίφημη *αρχή μεγίστου της βέλτιστης πλοήγησης.*

(*) Είναι διαπιστωμένο ότι ο Bellmann γνώριζε από τις εργασίες του Καραθεοδωρή την ανισότητα και γι' αυτό γνωστοποίησε την ανισότητα μετά το θάνατο του Καραθεοδωρή.

ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

Η Θεωρία Συνόλων (ΘΣ) που διετύπωσε στα τέλη του $19^{ου}$ αιώνα ο ***G. Cantor*** υπεισέρχεται συστηματικά στους διάφορους κλάδους των Μαθηματικών. Στην Ελλάδα την εισάγει το 1918 ο ***Π. Ζερβός***. Η ΘΣ προκάλεσε την $3^{η}$ μεγάλη κρίση στα Μαθηματικά. Η $1^{η}$ ήταν η ανακάλυψη των άρρητων αριθμών (Πυθαγόρειοι, $5^{ος}$ αιώνας μ. Χ.), η $2^{η}$ προέκυψε μετά τη δημιουργία του Απειροστικού Λογισμού (διαμάχες *Berkeley, Robins,* κ.ά) και η $3^{η}$ δημιουργήθηκε με τα παράδοξα της ΘΣ (*Burali-Forti, Russel*). Με τη Θεωρία Συνόλων «καταργείται» η έννοια της μονάδας και εμφανίζεται η έννοια του συνεχούς, που με την έννοια της δύναμης (ή ισχύος) συνόλου επιτρέπει την ταξινόμηση των συνόλων.

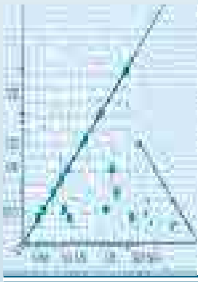
Ο πληθάριθμος (cardinal) οδηγεί στην υπερπεπερασμένη αρίθμηση και την υπερπεπερασμένη επαγωγή. Ο διατακτικός (ordinal) αριθμός οδηγεί στα διατεταγμένα ή καλώς διατεταγμένα σύνολα και στο *αξίωμα της επιλογής* του ***E. Zermelo*** (1904): *Αν για την απεικόνιση F*: *X*√ (*Y*) (δυναμοσύνολο του *Y*) *ισχύει F(x)π*Δ *για κάθε x X, τότε υπάρχει μια απεικόνιση φ*:*X Y τέτοια, ώστε φ(x) F(x) για κάθε x X* ή πιο ειδικά: *Κάθε άπειρο σύνολο περιέχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο.*

Το αξίωμα αυτό (που παίζει τον ανάλογο ρόλο με το $5^{ο}$ *αίτημα του Ευκλείδη* στις Μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες) και οι η χρήση των υπερπεπερασμένων αριθμών οδήγησαν τα παράδοξα της ΘΣ και στο διαχωρισμό των μαθηματικών στους ‘ιδεαλιστές’, που αποδέχονται το αξίωμα του *Zermelo*, και στους ‘εμπειριστές’ που δεν αποδέχονται το αξίωμα αυτό. Στους ιδεαλιστές ανήκουν οι *D. Hilbert, J. Hadamard, W. Sierpinski* στους εμπειριστές ανήκουν οι *E. Borel, H. Lebesgue, N. Lusin.* Τα ‘πέντε γράμματα για τη ΘΣ’ που αντάλλαξαν οι *Baire, Borel, Hadamard* και *Lebesgue* αποτελούν ένα πολύ σημαντικό κείμενο για τα Μαθηματικά. Ο *E. Borel* γράφει τα «*Παράδοξα του απείρου,* Παρίσι 1946. Οι έρευνες του *Zermelo* συνεχίζονται από τους *Fraenkel* (*Σύστημα Zermelo & Fraenkel*), *Bernays, von Neumann* και *Gödel* (*The consistency of the continuum hypothesis,* Princeton 1940) και διατυπώνουν θεωρήματα που γίνονται αποδεκτά.

Ο *Gödel* αποδεικνύει ότι, αν η ΘΣ θεμελιωμένη στα αξιώματα, χωρίς το αξίωμα επιλογής, δεν είναι αντιφατική, τότε η ΘΣ που θα προκύψει όταν συμπεριλάβουμε και το αξίωμα αυτό ή την υπόθεση του συνεχούς δεν είναι αντιφατική.

Στα τέλη του $19^{ου}$ αι. ο ***C. Jordan*** εισάγει την έννοια του μέτρου, ανεξάρτητα από τη δομή του προς ‘μέτρηση’ συνόλου. Οι αδυναμίες της θεωρίας του *Jordan* οδηγούν τον *Borel* να εισάγει το *μέτρο Borel.* Αργότερα ο *Lebesgue* εισάγει το δικό του μέτρο. Τα σύνολα ‘*μέτρου μηδέν*’ συνδέονται με την έκφραση *‘σχεδόν παντού’* και χρησιμεύουν στη θεωρία συναρτήσεων.

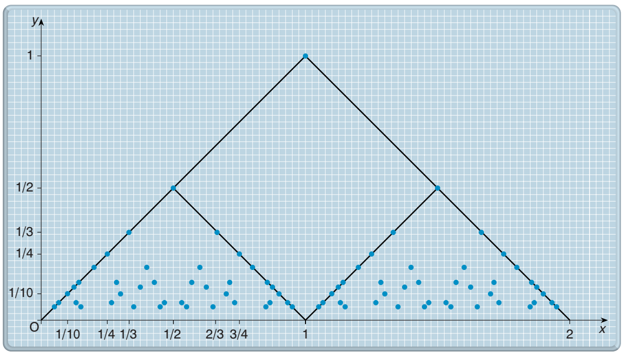
ΣΥΝΕΧΙΖΕΤΑΙ



ΥΠΑΡΧΕΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΗΣ ΟΠΟΙΑΣ ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΚΑΙ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΝΑ ΕΙΝΑΙ «ΟΣΟΔΗΠΟΤΕ ΚΟΝΤΑ»;

Του **Γεωργίου Παντελίδη**, Καθηγητή Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $y=f(x)$ είναι μια συνεχής γραμμή, όταν το σύνολο ορισμού της X είναι ένα διάστημα. Ακόμη, ότι για μια συνάρτηση συνεχή σ' ένα σημείο ξ X οι τιμές της συνάρτησης σε όλα τα γειτονικά σημεία διαφέρουν από την f(ξ) πολύ λίγο. Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει ότι τα σημεία συνέχειας και ασυνέχειας μιας συνάρτησης μπορεί να είναι 'πυκνά', δηλαδή απείρως κοντά το ένα στο άλλο.



Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\kappa}, & \text{αν } x = \frac{\lambda}{\kappa},\ \lambda, \kappa \ \ \mathbb{N} \text{ πρώτοι μεταξύ τους*} \\ 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

είναι συνεχής σε κάθε άρρητο σημείο και είναι ασυνεχής σε κάθε ρητό σημείο ρ και μάλιστα

$$\lim_{x \ \rho} f(x)=0.$$

Απόδειξη

Επειδή η συνάρτηση είναι άρτια, περιορίζουμε τη μελέτη στο [0, +•)

Έστω τ ένας άρρητος αριθμός και ε>0, οπότε υπάρχει ν ℕ με $\nu \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Τότε υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους φυσικοί αριθμοί κ με $\frac{1}{\kappa} \geq \varepsilon$, οπότε και πεπερασμένου πλήθους ρητοί

$$\frac{\lambda}{\kappa} \ \ (0, \tau+1) \text{ με } \frac{1}{\kappa} \geq \varepsilon,$$

για τους οποίους ισχύει

$$f\left(\frac{\lambda}{\kappa}\right) = \frac{1}{\kappa} \geq \varepsilon.$$

Άρα υπάρχει περιοχή (τ–δ, τ+δ) (0, τ+1) που περιέχει μόνο ρητούς $\frac{\lambda}{\kappa}$, με $\frac{1}{\kappa} < \varepsilon$.

Επομένως, για κάθε x (τ–δ, τ+δ) ισχύει

$$\Omega f(x) - f(\tau)\Omega = f(x) = \left(\begin{cases} \frac{1}{\kappa}, & \text{αν } x = \frac{\lambda}{\kappa} \\ 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases} \right) < \varepsilon.$$

$$\text{δηλ. } \lim_{x \ \tau} f(x) = 0 = f(\tau),$$

που σημαίνει ότι η f είναι συνεχής σε κάθε άρρητο σημείο τ.

Έστω $\rho = \frac{\alpha}{\beta}$ ένας οποιοσδήποτε ρητός (α, β ℕ πρώτοι μεταξύ τους), οπότε $f(\rho) = \frac{1}{\beta}$. Τότε για την ακολουθία άρρητων αριθμών $x_n = \rho + \frac{\sqrt{2}}{n}$ ισχύει:

$$x_n = \rho + \frac{\sqrt{2}}{n} \quad \rho$$

και $$f(x_n) = f\left(\rho + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = 0 \quad 0 \ \pi \ f(\rho) = \frac{1}{\beta},$$

που σημαίνει ότι η f δεν είναι συνεχής στο ρητό σημείο ρ.

Για ε>0, όπως και πιο πάνω, υπάρχει περιοχή

* Από τη Θεωρία Αριθμών γνωρίζουμε: Κάθε ρητός αριθμός ρ μπορεί να γραφεί στη μορφή $\frac{\lambda}{\kappa}$, με λ, κ πρώτους μεταξύ τους και κ>0.

(ρ–δ, ρ+δ) που (εκτός από το ρ) περιέχει μόνο ρητούς $\frac{\lambda}{\kappa}$, για τους οποίους ισχύει

$$f\left(\frac{\lambda}{\kappa}\right) = \frac{1}{\kappa} < \varepsilon.$$

Άρα

- για κάθε ρητό σ (ρ–δ, ρ+δ) με σπρ ισχύει f(ε)<ε και
- για κάθε άρρητο x (ρ–δ, ρ+δ) ισχύει 0 = f(x) < ε, που σημαίνει

$$\lim_{x\ \rho} f(x) = 0\ \pi\ f(\rho) = \frac{1}{\beta}.$$

Παρατήρηση 1

Δεν υπάρχει παράδειγμα συνάρτησης, η οποία να είναι συνεχής σε κάθε ρητό και ασυνεχής σε κάθε άρρητο σημείο του $\mathbb{R}$. Αυτό είναι συνέπεια του θεωρήματος: *Το σύνολο των σημείων ασυνέχειας μιας συνάρτησης είναι σύνολο **1ης κατηγορίας**, δηλαδή είναι ένωση αριθμήσιμου πλήθους κλειστών διαστημάτων.* Το σύνολο των άρρητων δεν είναι τέτοιο.

Παρατήρηση2

Η συνάρτησή μας είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα [α, β], αφού τα σημεία ασυνέχειάς της είναι οι ρητοί του διαστήματος και είναι αριθμήσιμου πλήθους, δηλαδή μηδενικού μέτρου.

Εξάλλου για κάθε ν $\mathbb{N}$ θεωρούμε τη διαμέριση

$$P_\nu = \left\{0, \frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}, \ldots, \frac{\nu}{\nu}\right\}^{**}$$

και το σύνολο των ενδιάμεσων σημείων ξ_ν από άρρητα σημεία, τότε για το άθροισμα Riemann ισχύει $\rho(f, P_\nu, \xi_\nu) = 0$, οπότε

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{\nu \bullet} \rho(f, P_\nu, \xi_\nu) = 0.$$

Το τελευταίο συμπέρασμα ήταν αναμενόμενο, αφού οι τιμές μιας συνάρτησης σ' ένα σύνολο μηδενικού μέτρου δεν επηρεάζουν την τιμή του ολοκληρώματος.

* Περιορίζουμε τη μελέτη στο διάστημα [0, 1] χάριν απλότητας.

ΠΟΙΟΣ ΘΑ ΜΠΟΡΟΥΣΕ ΝΑ «ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΕΙ» ΤΟΝ ΗΛΙΟ ΤΕΛΕΙΟΤΕΡΑ;

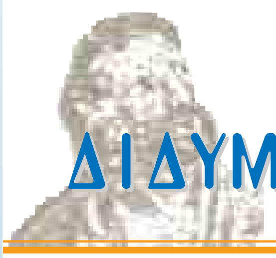
Διερωτάται ο Καθηγητής του Πολυτεχνείου του Μονάχου R. Bulivsch

Για τον άνθρωπο ο Ήλιος είναι το σημαντικότερο άστρο. Βαθιά στο εσωτερικό του το υδρογόνο καίγεται σε ήλιο, από την καύση αυτή εκλύεται ενέργεια και μορφή ακτινοβολίας. Κάθε δευτερόλεπτο 4 εκατομμύρια τόνοι μετατρέπονται σε ακτινοβολία και κάθε δευτερόλεπτο ο Ήλιος γίνεται κατά 4 εκατομμύρια τόνους ελαφρύτερος. Αλλά ο Ήλιος είναι τόσο μεγάλος, ώστε μετά πάροδο δισεκατομμυρίων ετών η απώλειά του θα είναι πολύ μικρή. Η κατάσταση του Ήλιου περιγράφεται από φυσικούς νόμους, δηλαδή από ένα **σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων παραβολικού τύπου.** Αν λάβουμε υπόψη μας μερικά σταθερά γνωστά ποσά, όπως π.χ. η μάζα την οποία είχε το άστρο στην αρχή της ζωής του, δηλαδή όταν άρχισε η πυρηνική καύση στο εσωτερικό του, τότε βρισκόμαστε μπροστά σ' ένα επιλύσιμο πρόβλημα.

- **Ο Ήλιος** ζει ήδη 4,5 δισεκατομμύρια χρόνια, οι υπολογισμοί δείχνουν ότι ο Ήλιος θα λάμπει ομοιόμορφα ακόμη για πολύ, αλλά η ζωή θα υπάρξει πάνω στη Γη το πολύ ακόμη 1,5 δισεκατομμύρια χρόνια. Τότε θα υπάρξει τόση ζέστη, ώστε θα εξατμιστούν οι ωκεανοί.
- Ο Ήλιος θα λάμπει ακόμη 5 δισεκατομμύρια χρόνια. Πριν από το τέλος του θα διασταλεί σ' ένα τεράστιο κόκκινο αστέρα, ο οποίος θα καλύπτει σχεδόν το μισό ουρανό. Θα είναι τόσο μεγάλος όσο η τροχιά του Ερμή.

Ένα τελευταίο για τον Ήλιο: Αν ο Ήλιος ήταν λίγο μόνο μεγαλύτερος, από τις λύσεις των μαθηματικών εξισώσεων προκύπτει ότι θα καίγονταν τόσο γρήγορα, ώστε δε θα αναπτύσσονταν ζωή σε κανένα από τους πλανήτες. Αν η διάμετρός του ήταν κατά 20% μεγαλύτερη, αυτό δεν είναι πολύ, τα πάντα θα είχαν τελειώσει μετά 1 δισεκατομμύριο έτη. Πάνω στη Γη δε θα υπήρχαν ούτε φύκια. Και αν ο Ήλιος ήταν 10 φορές μεγαλύτερος, τότε μετά από μερικά εκατομμύρια (όχι δισεκατομμύρια) χρόνια όλη η καύσιμη ύλη του Ήλιου θα χανόταν. Αν ο Ήλιος ήταν μικρότερος θα ήταν καλύτερα, αλλά τώρα δε θα ήταν αρκετά ζεστός και οι πλανήτες θα έπρεπε να ήταν πλησιέστερά του, αυτό όμως θα ήταν για τη ζωή πολύ επικίνδυνο και κατά πάσα πιθανότητα δεν θα είχε καν αναπτυχθεί.

Γ.Π.



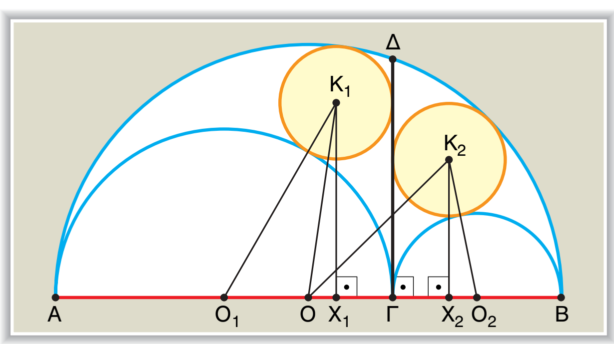
ΣΧΕΤΙΚΑ με τους ΔΙΔΥΜΟΥΣ ΚΥΚΛΟΥΣ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ

Του **Γεωργίου Στάμου**, Μαθηματικού, Καθηγητή Α.Π.Θ.

Ο Αρχιμήδης (287 – 212 π.Χ.) υπήρξε ένας από τους πιο σημαντικούς ερευνητές της αρχαιότητας. 'Ηταν ένας πολύ μεγάλος μαθηματικός, συνάμα δε και ένας πολύ αξιόλογος μηχανικός (φυσικός). Το εκτεταμένο (διασωθέν) έργο του διαθέτει πρωτοτυπία και υψηλή ποιότητα. Η λύση δύσκολων προβλημάτων, με τις γνώσεις μάλιστα εκείνης της εποχής, προκάλεσε το ενδιαφέρον πολλών μεταγενέστερων σπουδαίων επιστημόνων. Δεν είναι τυχαία π.χ. η άποψη του G.W.Leibniz: *«Εκείνος, ο οποίος κατανοεί τον Αρχιμήδη, θαυμάζει ολιγώτερον τας επινοήσεις των νεωτέρων μεγάλων ανδρών».*

Στο παρόν άρθρο θα αναφερθούμε στην πιο ενδιαφέρουσα ίσως ιδιότητα ενός σχήματος, το οποίο ο Αρχιμήδης ιδιαίτερα μελέτησε στο βιβλίο του «Λήμματα». Το σχήμα αυτό ορίζεται ως εξής : Στο επίπεδο, θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, τυχόν σημείο αυτού Γ και τα ημικύκλια διαμέτρων ΑΒ, ΑΓ και ΓΒ, τα οποία κείνται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς τον φορέα του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Το τμήμα του επιπέδου που περικλείεται από τα τρία ημικύκλια καλείται **'Αρβηλος** (= το στρογγυλό κοπίδι των τσαγγαράδων).

Θεωρούμε τώρα την ημιχορδή ΓΔ, η οποία είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, και τους δύο κύκλους, οι οποίοι εφάπτονται στην ημιχορδή και που ο ένας είναι εφαπτόμενος στα ημικύκλια διαμέτρων ΑΒ, ΑΓ και ο άλλος στα ημικύκλια διαμέτρων ΑΒ, ΓΒ. Κατά τον Αρχιμήδη, **οι δύο αυτοί κύκλοι είναι ίσοι.** Στη διεθνή βιβλιογραφία οι κύκλοι αυτοί είναι γνωστοί ως **«δίδυμοι κύκλοι του Αρχιμήδη».**



Σχήμα 1

Η παραπάνω ιδιότητα του Αρβήλου έχει αποδειχθεί με διαφόρους τρόπους. Εμείς δεν θα παραθέσουμε την απόδειξη του Αρχιμήδη, αλλά μία άλλη πολύ απλούστερη που σήμερα μάς είναι γνωστή. Στη συνέχεια θα αναφέρουμε και μία επέκταση του αποτελέσματος του Αρχιμήδη.

Ας είναι K_1, K_2 τα κέντρα των κύκλων του Αρχιμήδη X_1, X_2 οι προβολές αυτών στο ΑΒ και Ο, O_1, O_2 τα κέντρα των κύκλων με διαμέτρους ΑΒ, ΑΓ και ΓΒ αντίστοιχα (Σχ. 1). Από τα ορθογώνια τρίγωνα OX_1K_1 και $O_1X_1K_1$ έχουμε τη σχέση

$$OK_1^2 - OX_1^2 = O_1K_1^2 - O_1X_1^2 . \qquad (1)$$

Αν r_1, r_2 είναι οι ακτίνες των κύκλων του Αρχιμήδη και θέσουμε ΑΒ=2R, ΑΓ=$2R_1$, ΓΒ=$2R_2$, τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$OK_1 = R_1 + R_2 - r_1,\ OX_1 = R_1 - R_2 - r_1, \qquad (2)$$

$$O_1K_1 = R_1 + r_1,\ O_1X_1 = R_1 - r_1. \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην (1) θα προκύψει

$$r_1 = \frac{R_1R_2}{R}. \qquad (4)$$

Αν τώρα θεωρήσουμε τα ορθογώνια τρίγωνα OX_2K_2, $O_2X_2K_2$ και τη σχέση

$$OK_2^2 - OX_2^2 = O_2K_2^2 - O_2X_2^2, \qquad (5)$$

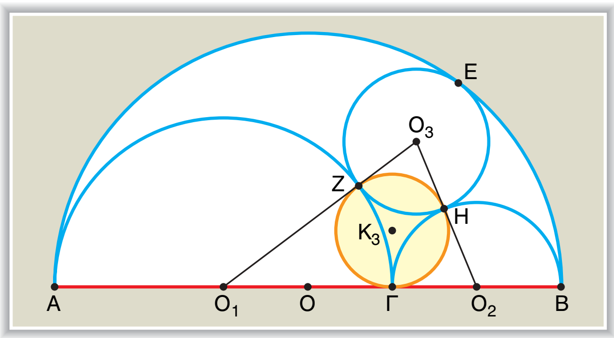
θα προκύψει, ακολουθώντας ανάλογη πορεία, η ακτίνα του δεύτερου κύκλου του Αρχιμήδη

$$r_2 = \frac{R_1R_2}{R}. \qquad (6)$$

Οι δύο λοιπόν κύκλοι του Αρχιμήδη πράγματι είναι ίσοι.

Πριν από μερικές δεκαετίες ανεκαλύφθη από τον αμερικανό L. Bankoff ένας ακόμη κύκλος που είναι ίσος με τους δύο κύκλους του Αρχιμήδη. Ο κύκλος αυτός προκύπτει ως εξής: Θεωρούμε τον κύκλο (με κέντρο O_3 και ακτίνα R_3), ο οποίος εφάπτεται των αρχικών τριών ημικυκλίων στα σημεία Ε, Ζ, Η (Σχ.2). Θα δείξουμε, ότι ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Ζ, Η και Γ είναι ίσος με τους κύκλους του Αρχιμήδη. Ας είναι K_3 το κέντρο και r_3 η ακτίνα αυτού. Προφανώς ο κύκλος (K_3, r_3) είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $O_1O_2O_3$. Σύμφωνα με ένα θεώρημα του Πάππου, το ύψος του τριγώνου $O_1O_2O_3$ που αντιστοιχεί στην πλευρά O_1O_2 είναι διπλάσιο της ακτίνας R_3 (αποδείξτε το). Επομένως για το εμβαδόν ε του τριγώνου $O_1O_2O_3$ θα ισχύει

$$\varepsilon = R_3(R_1+R_2). \qquad (7)$$



Σχήμα 2

Αν τώρα γίνει χρήση της ακτίνας του εγγεγραμμένου κύκλου και του τύπου του Ήρωνα, θα έχουμε αντίστοιχα

$$\varepsilon = r_3(R_1+R_2+R_3), \qquad (8)$$

$$\varepsilon = \sqrt{R_1R_2R_3(R_1+R_2+R_3)}. \qquad (9)$$

Ισχύουν επομένως οι ισότητες

$$R_3(R_1+R_2) = r_3(R_1+R_2+R_3) =$$
$$= \sqrt{R_1R_2R_3(R_1+R_2+R_3)} =$$
$$= \frac{R_1R_2R_3(R_1+R_2+R_3)}{r_3(R_1+R_2+R_3)} = \frac{R_1R_2R_3}{r_3}, \qquad (10)$$

Τότε όμως προκύπτει

$$r_3 = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = \frac{R_1R_2}{R}, \qquad (11)$$

πράγμα που σημαίνει ότι ο κύκλος (K_3, r_3) είναι ίσος με τους κύκλους του Αρχιμήδη. Επομένως έχουμε «τρίδυμους κύκλους» και διερωτάται κανείς μήπως υπάρχει και τέταρτος ίσος κύκλος.

Παρατήρηση

Από την ισότητα $R_3(R_1+R_2)=r_3(R_1+R_2+R_3)$ και με χρήση της σχέσης (11) προκύπτει άμεσα η ακτίνα του κύκλου (O_3, R_3):

$$R_3 = \frac{RR_1R_2}{R_1^2+R_1R_2+R_2^2}. \qquad (12)$$

Βιβλιογραφία

1. L. Bankoff : Are the twin circles of Archimedes really twins ? Math. Magazine 47 (1974), 214-218.
2. Ε. Σταμάτης : Αρχιμήδους Άπαντα, τομ. Γ΄. Έκδοσις Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδος, Αθήναι 1974.

Αποσπάματα από το νέο βιβλίο των Εκδόσεων ΖΗΤΗ

«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΗΣ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ»

Των **Γ. Θωμαΐδη - Α. Πούλου,** Μαθηματικών

Κάθε κεφάλαιο περιλαμβάνει:

- *Επισκόπηση της ύλης*
- *Θέματα δραστηριοτήτων στην τάξη*
- *Μελέτη ειδικών σχημάτων*
- *Ερωτήσεις προφορικής εξέτασης και αξιολόγησης*
- *Εκτενή βιβλιογραφία*
- *Ανάλυση θεωρητικών ζητημάτων*
- *Ασκήσεις και Προβλήματα*
- *Ιστορικά προβλήματα και προβλήματα εφαρμογών*
- *Θέματα συνθετικών δημιουργικών εργασιών*

Τα αποσπάσματα που ακολουθούν είναι ενδεικτικά της ύλης και των περιεχομένων του νέου βιβλίου:

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ

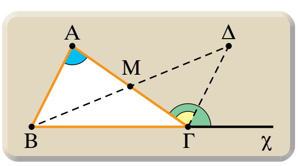
(4ο κεφάλαιο: Παράλληλες ευθείες)

Ο ρόλος της “βοηθητικής γραμμής” στις αποδείξεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (μέρος δεύτερο)

Στο προηγούμενο κεφάλαιο σχολιάσαμε τη σημασία της “βοηθητικής γραμμής” στις αποδείξεις των προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και αναφέραμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα. Στην ύλη του παρόντος κεφαλαίου ανήκει το πιο διάσημο, ίσως, σχετικό παράδειγμα, η “βοηθητική” παράλληλη ευθεία που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του θεωρήματος για το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου.

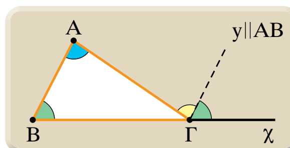
Η απόδειξη αυτή, που περιέχεται σ' όλα τα σύγχρονα βιβλία Γεωμετρίας, προέρχεται κατ' ευθείαν από τα “Στοιχεία” του Ευκλείδη. Για να καλάβουμε καλύτερα τη σημασία της και τον τρόπο που ενδεχομένως επινοήθηκε, θα πρέπει να έχουμε υπόψη τη στενή σχέση των δύο επόμενων γεωμετρικών προτάσεων από τα “Στοιχεία”:

Παντός τριγώνου μιας των πλευρών προσεκβληθείσης η εκτός γωνία εκατέρας των εντός και απεναντίον γωνιών μείζων εστίν



Βιβλίο Ι, πρόταση 16

Παντός τριγώνου μιας των πλευρών προσεκβληθείσης η εκτός γωνία δυσί ταις εντός και απεναντίον ίση εστίν, και αι εντός του τριγώνου τρεις γωνίαι δυσίν ορθαίς ίσαι εισίν.

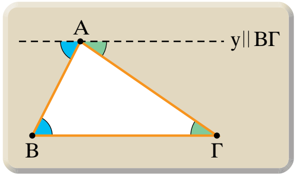


Βιβλίο Ι, πρόταση 32

Η πρώτη πρόταση αναφέρεται στην ιδιότητα κάθε εξωτερικής γωνίας τριγώνου να είναι μεγαλύτερη καθεμιάς των απέναντι εσωτερικών γωνιών, ενώ η δεύτερη δείχνει πόσο ακριβώς μεγαλύτερη είναι (ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών, άρα μεγαλύτερη από καθεμιά κατά το μέτρο της άλλης). Από το τελευταίο αποτέλεσμα συνάγεται βέβαια αμέσως ότι, το άθροισμα των τριών εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές (στα σημερινά βιβλία γίνεται το αντίστροφο).

Η απόδειξη της πρώτης πρότασης στηρίζεται, όπως γνωρίζουμε, στην προέκταση της διαμέσου ΒΜ κατά τμήμα $ΜΔ = ΒΜ$ και στη χρησιμοποίηση των ίσων τριγώνων ΑΒΜ και ΔΜΓ που δημιουργούνται (βλέπε το πρώτο μέρος αυτού του θεωρητικού ζητήματος που αναπτύξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο). Όλα τα προηγούμενα γίνονται πριν από την ανάπτυξη της θεωρίας των παραλλήλων. Από την ισότητα όμως των (εντός εναλλάξ) γωνιών $\hat{Α}$ και $Μ\hat{Γ}Δ$ προκύπτει τώρα ότι η ΓΔ είναι παράλληλη προς την ΑΒ, γεγονός που συνεπάγεται ότι, η γωνία $\hat{Β}$ είναι ίση με την $Δ\hat{Γ}χ$ (εντός, εκτός και επί τα αυτά), άρα η εξωτερική γωνία $Α\hat{Γ}χ$ ίση με το άθροισμα $\hat{Α}+\hat{Β}$.

Τα προηγούμενα κάνουν φανερό το λόγο για τον οποίο ο Ευκλείδης αρχίζει την απόδειξη της πρότασης Ι, 32 φέρνοντας από το σημείο Γ τη “βοηθητική” παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ του τριγώνου.



Από διδακτική σκοπιά φαίνεται ίσως προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη τη “βοηθητική” παράλληλη από το σημείο Α προς την πλευρά ΒΓ (έτσι γίνεται χρήση μόνο εντός εναλλάξ γωνιών). Αυτή, όπως και άλλες εναλλακτικές θέσεις της παράλληλης, ήταν επίσης γνωστές κατά την αρχαιότητα και αναφέρονται από τον Πρόκλο (5ος αι. μ. Χ.) που έγραψε σχόλια για το πρώτο βιβλίο των “Στοιχείων”. Όπως δείξαμε όμως παραπάνω, η συσχέτιση των προτάσεων Ι, 16 και Ι, 32 εξηγεί με πειστικό τρόπο τις επιλογές του Ευκλείδη και αναδεικνύει τη σημασία δύο “βοηθητικών γραμμών” που χρησιμοποιούνται συστηματικά στις γεωμετρικές αποδείξεις:

- Η προέκταση της διαμέσου (ή άλλης χαρακτηριστικής ευθείας) ενός τριγώνου κατά ίσο τμήμα ή ένα μέρος αυτής.
- Η σχεδίαση της παράλληλης προς μια πλευρά (ή άλλη χαρακτηριστική ευθεία) ενός τριγώνου.

Η διδασκαλία των προηγούμενων προτάσεων (θεωρήματα 3.14. και 4.9. του σχολικού βιβλίου) μας δίνει την ευκαιρία να αναφερθούμε με συστηματικό τρόπο στην έννοια της “βοηθητικής γραμμής”.\

ΑΣΚΗΣΕΙΣ και ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

(5ο κεφάλαιο: Τετράπλευρα)

Ασκήσεις εφαρμογής των ορισμών και κριτηρίων των παραλληλογράμμων

Από έρευνες της Διδακτικής των Μαθηματικών, αλλά και από την καθημερινή διδακτική εμπειρία έχει διαπιστωθεί ότι, πολύ συχνά οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τη διαφορά ανάμεσα σε αναγκαία και ικανή συνθήκη. Αυτή η δυσκολία διάκρισης είναι ιδιαίτερα φανερή στην περίπτωση των παραλληλογράμμων, όπου παρατηρείται γενική σύγχυση ανάμεσα σε ορισμούς, ιδιότητες και κριτήρια. Για παράδειγμα, είναι συχνό φαινόμενο στις εξετάσεις της Α Λυκείου να ζητείται η απόδειξη ενός κριτηρίου (π.χ., “αν σ’ ένα τετράπλευρο οι διαγώνιες διχοτομούνται, τότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο”) και οι μαθητές να αποδεικνύουν (συνήθως με άψογο τρόπο!) την αντίστοιχη ιδιότητα (δηλαδή, “σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες διχοτομούνται”).

Ένα τρόπος αντιμετώπισης αυτού του προβλήματος είναι η συστηματική εξάσκηση των μαθητών στη χρησιμοποίηση των ορισμών και των κριτηρίων, με κατάλληλα επιλεγμένες ασκήσεις στις οποίες εμφανίζονται τα διάφορα είδη των παραλληλογράμμων.

Η κλασική άσκηση αυτής της ενότητας αφορά το τετράπλευρο που έχει κορυφές τα μέσα των πλευρών ενός άλλου τετραπλεύρου:

20. α) Τα μέσα των πλευρών κάθε κυρτού τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

(εφαρμογή της § 5.3. του σχολικού βιβλίου)

β) Να δείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου, ενώ τα μέσα των πλευρών ρόμβου είναι κορυφές ορθογωνίου.

(άσκηση 3 Α ομάδας της § 5.3. του σχολικού βιβλίου)

γ) Να δείξετε ότι τα μέσα των πλευρών κυρτού τετραπλεύρου είναι κορυφές τετραγώνου, αν και μόνο αν το ΑΒΓΔ έχει ίσες και κάθετες διαγώνιες.

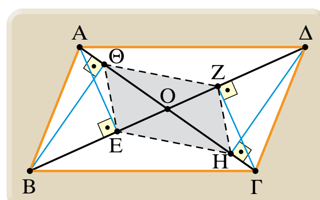
(άσκηση 4 Α ομάδας της § 5.3. του σχολικού βιβλίου)

δ) Να δείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός τραπεζίου είναι κορυφές ρόμβου, αν και μόνο αν το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

(άσκηση 6 Α ομάδας της § 5.4. του σχολικού βιβλίου)

Στις ασκήσεις που ακολουθούν παρουσιάζονται διάφορα σχήματα στα οποία εμφανίζονται παραλληλόγραμμα, ορθογώνια, ρόμβοι, τετράγωνα και τραπέζια:

21. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ παίρνουμε τις προβολές Ε και Ζ των κορυφών Α και Γ αντίστοιχα πάνω στη διαγώνιο ΒΔ.



α) Να δείξετε ότι η διαγώνιος ΑΓ διχοτομεί το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ.

β) Αν Θ και Η είναι οι προβολές των κορυφών Β και Δ αντίστοιχα πάνω στη διαγώνιο ΑΓ να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΘΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Μπορεί το παραλληλόγραμμο ΕΘΖΗ να είναι ρόμβος;

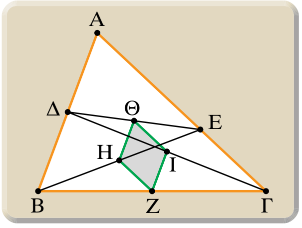
Απόδειξη:

α) Είναι η άσκηση 3 Β ομάδας της § 5.1. του σχολικού βιβλίου.

β) Αν Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ, τότε σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα θα είναι ΟΕ = ΟΖ. Για τον ίδιο λόγο (από τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΟΘ και ΔΟΗ που είναι ίσα επειδή έχουν τις υποτείνουσες ίσες και δύο οξείες γωνίες ίσες) είναι ΟΘ = ΟΗ. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι διαγώνιες ΕΖ, ΗΘ του τετραπλεύρου ΕΘΖΗ διχοτομούνται στο Ο, άρα αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Αυτό συμβαίνει όταν το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. Τότε το τρίγωνο ΘΕΖ είναι ισοσκελές, επειδή το ΘΟ είναι διάμεσος και ύψος. Άρα ΘΕ = ΘΖ και επομένως το παραλληλόγραμμο ΕΘΖΗ είναι επίσης ρόμβος. ▲

22. Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΒΔ=ΓΕ. Αν Ζ, Η, Θ και Ι είναι τα μέσα των ΒΓ, ΒΕ, ΔΕ και ΔΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΗΘΙ είναι ρόμβος.



Απόδειξη:

Τα ευθύγραμμα τμήματα ΖΗ, ΗΘ, ΘΙ και ΙΖ ενώνουν τα μέσα δύο πλευρών στα τρίγωνα ΒΓΕ, ΕΒΔ, ΔΓΕ και ΓΒΔ αντίστοιχα. Άρα θα είναι

$$ΖΗ = \frac{ΓΕ}{2} = ΘΙ \text{ και } ΗΘ = \frac{ΒΔ}{2} = ΙΖ.$$

Επειδή όμως ισχύει $ΓΕ = ΒΔ$, συμπεραίνουμε ότι

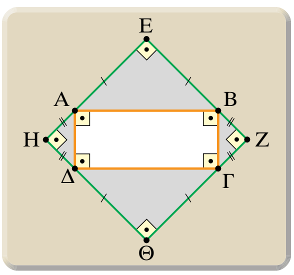
$$ΖΗ = ΗΘ = ΘΙ = ΙΖ$$

και άρα το τετράπλευρο ΖΗΘΙ είναι ρόμβος. ▲

23. Στις πλευρές ενός ορθογωνίου ΑΒΓΔ και εξωτερικά αυτού κατασκευάζουμε τα ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΘ και ΔΑΗ. Να δείξετε ότι το ΕΖΘΗ είναι τετράγωνο.

(Σχολή Δοκίμων 1947 & Γεωπονική Σχολή 1948)

Απόδειξη:

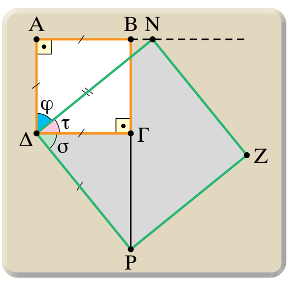


Στο διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι είναι

$$E\hat{A}H = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$$

και επομένως τα σημεία Ε, Α, Η είναι συνευθειακά. Το ίδιο ισχύει προφανώς και για τις τριάδες σημείων (Ε, Β, Ζ), (Ζ, Γ, Θ) και (Θ, Δ, Η). Άρα το ΕΖΗΘ είναι τετράπλευρο με 4 ορθές γωνίες, δηλαδή ένα ορθογώνιο. Επίσης ισχύει ΕΑ = ΕΒ (επειδή ΕΑΒ ισοσκελές) και ΑΗ = ΒΖ (επειδή τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΒΖΓ είναι προφανώς ίσα). Από τις τελευταίες ισότητες, με πρόσθεση κατά μέλη, βρίσκουμε ΕΗ = ΕΖ. Άρα το ορθογώνιο ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο. ▲

24. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την ΑΒ προς το Β και στην προέκταση παίρνουμε τυχαίο σημείο Ν. Επίσης προεκτείνουμε την ΒΓ και στην προέκταση παίρνουμε τμήμα ΓΡ=ΑΝ. Στη συνέχεια με πλευρές τα ΔΝ, ΔΡ κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΔΝΖΡ. Να δείξετε ότι το ΔΝΖΡ είναι τετράγωνο.



Απόδειξη:

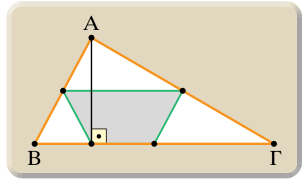
Αρκεί να δείξουμε ότι το παραλληλόγραμμο ΔΝΖΡ έχει μία ορθή γωνία (ορθογώνιο) και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες (τετράγωνο).

Στο προηγούμενο σχήμα, τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΝ, ΓΔΡ έχουν ΑΔ = ΓΔ και ΑΝ = ΓΡ. Θα είναι λοιπόν ίσα και άρα ισχύει $\hat{φ} = \hat{σ}$. Επίσης είναι $\hat{ω} = \hat{τ}$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΝ, ΔΓ που τέμνονται από την ΔΝ. Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$Ρ\hat{Δ}Ν = \hat{σ} + \hat{τ} = \hat{φ} + \hat{ω} = 90^\circ \text{ και } ΔΝ = ΔΡ,$$

δηλαδή το παραλληλόγραμμο ΔΝΖΡ έχει μία ορθή γωνία και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες. ▲

25. Σε κάθε μη ορθογώνιο και σκαληνό τρίγωνο να δείξετε ότι τα μέσα των πλευρών του και το ίχνος ενός ύψους είναι κορυφές ισοσκελούς τραπεζίου.



(Άσκηση 4 Α ομάδας της § 5.4. του σχολικού βιβλίου)

Παρατήρηση: Αυτή η άσκηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί, επίσης, ως πρωτογενές υλικό μιας σημαντικής δραστηριότητας για την εισαγωγή στο επόμενο κεφάλαιο (Σχήματα εγγεγραμμένα σε κύκλο) και σε μια σημαντική γεωμετρική πρόταση (κύκλος του Euler). Αφού αποδειχθεί η άσκηση, θα ζητηθεί από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τη μέθοδο απόδειξης του θεωρήματος 5.17. του σχολικού βιβλίου (σημείο τομής μεσοκαθέτων και περιγεγραμμένος κύκλος τριγώνου) για να δείξουν ότι οι μεσοκάθετες των πλευρών ενός ισοσκελούς τραπεζίου διέρχονται από το ίδιο σημείο, δηλαδή ότι οι κορυφές του ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

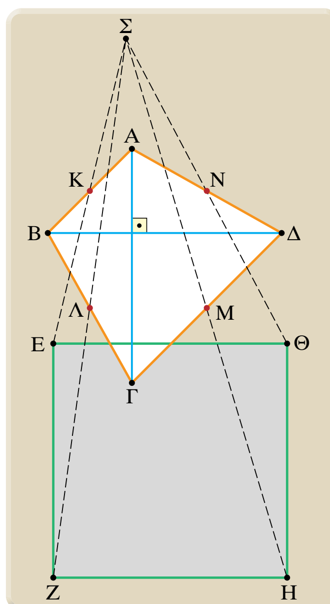
Με βάση αυτό το αποτέλεσμα, αν στο προηγούμενο σχήμα φέρουμε και τα άλλα ύψη του τριγώνου, τότε γίνεται φανερό ότι τα τρία μέσα των πλευρών του τριγώνου και τα τρία ίχνη των υψών πάνω στις πλευρές ανήκουν στον ίδιο κύκλο. Στη συνέχεια μπορούν να τεθούν προς συζήτηση και έρευνα τα εξής ερωτήματα:

α) Υπάρχουν άλλα χαρακτηριστικά σημεία του τριγώνου που ανήκουν στον προηγούμενο κύκλο;

β) Εκτός από το ισοσκελές τραπέζιο, ποια άλλα τετράπλευρα είναι εγγράψιμα σε κύκλο;

26. Δίνεται ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ίσες και κάθετες μεταξύ τους διαγώνιες και τυχαίο σημείοΣ του επιπέδου του. Να δείξετε ότι τα συμμετρικά του Σ ως προς τα μέσα των πλευρών του τετραπλεύρου είναι κορυφές τετραγώνου.

Απόδειξη:



Ονομάζουμε Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του τετραπλεύρου και Ε, Ζ, Η, Θ τα συμμετρικά του Σ ως προς τα μέσα αυτά αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι στα τρίγωνα ΑΒΔ και ΣΕΘ το ευθύγραμμα τμήμα ΚΝ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών. Άρα θα είναι

$$ΚΝ \overset{\parallel}{=} \frac{ΒΔ}{2}$$

και

$$ΚΝ \overset{\parallel}{=} \frac{ΕΘ}{2}$$

αντίστοιχα, από τις οποίες προκύπτει ότι

$$ΕΘ \overset{\parallel}{=} ΒΔ.$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι ισχύει επίσης

ΖΗ $\parallel\!\!=$ ΒΔ, ΕΖ $\parallel\!\!=$ ΑΓ και ΘΗ $\parallel\!\!=$ ΑΓ.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι πλευρές του τετραπλεύρου ΕΖΗΘ είναι ίσες και παράλληλες προς τις ίσες και κάθετες μεταξύ τους διαγώνιες του ΑΒΓΔ. Αυτό βέβαια σημαίνει ότι είναι επίσης ίσες και κάθετες μεταξύ τους, δηλαδή το ΕΖΗΘ είναι ένα τετράγωνο. ▲

Παρατήρηση: Όπως έχουμε αναφέρει στο κεφάλαιο 3 (βλέπε το θεωρητικό ζήτημα “Μελέτη τετραπλεύρων ειδικής μορφής”), τα τετράπλευρα με ίσες και κάθετες μεταξύ τους διαγώνιες ονομάζονται ψευδοτετράγωνα. Το προηγούμενο θέμα μπορεί λοιπόν να διατυπωθεί ως εξής:

Τα συμμετρικά ενός σημείου του επιπέδου ως προς τα μέσα των πλευρών ενός ψευδοτετραγώνου είναι κορυφές τετραγώνου.

ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ και ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

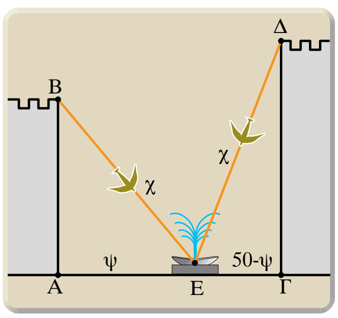
(9ο κεφάλαιο: Μετρικές σχέσεις)

Ένα πρόβλημα από το βιβλίο «Liber Abaci» του Leonadro Pisano, του επονομαζόμενου Fibonacci (1202).

1. Ανάμεσα σε δύο πύργους που έχουν ύψος 40 και 30 μέτρα αντίστοιχα και απέχουν μεταξύ τους 50 μέτρα, υπάρχει ένα συντριβάνι. Δύο πουλιά που πετούν από τους δύο πύργους προς τα κάτω, με την ίδια ταχύτητα, φτάνουν στο συντριβάνι ταυτόχρονα. Πόσο απέχει το συντριβάνι από τους δύο πύργους;

Λύση:

Το ίδιο πρόβλημα λύθηκε με τη μέθοδο των όμοιων τριγώνων στο 8ο κεφάλαιο. Εδώ, θα χρησιμοποιήσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα. Στο διπλανό σχήμα ονομάζουμε ΑΒ και ΓΔ τους πύργους των 30 και 40 μέτρων αντίστοιχα. Αν Ε η θέση του συντριβανιού, ονομάζουμε ΑΕ = y, άρα ΕΓ = 50 − y. Ονομάζουμε ΒΕ = ΕΔ = x. Με την εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΕΔΓ παίρνουμε τις σχέσεις:



$$30^2 + y^2 = x^2 \text{ και } (50-y)^2 + 40^2 = x^2,$$

άρα

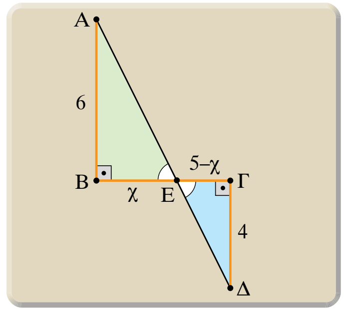
$$30^2 + y^2 = (50-y)^2 + 40^2. \qquad (1)$$

Από την επίλυση της εξίσωσης (1) προκύπτει ότι $y = 40$. Άρα $x = 50$. Αυτό σημαίνει ότι, το συντριβάνι απέχει 50 μέτρα από την κορυφή κάθε πύργου, ενώ από τις βάσεις τους 40 και 10 μέτρα αντίστοιχα. ▲

2. Ένα πλοίο ταξιδεύει 6 km προς Νότο, στη συνέχεια 5 km προς Ανατολάς και τέλος 4 km προς Νότο. Πόσο μακριά βρίσκεται από το σημείο εκκίνησης;

Λύση:

Στο διπλανό σχήμα ονομάζουμε Α το σημείο εκκίνησης, Β το τέλος της διαδρομής των 6 χιλιομέτρων, Γ το τέλος της διαδρομής προς τα ανατολικά και Δ το τελικό σημείο. Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΕ και ΕΓΔ προκύπτει ότι



$$\frac{AB}{BE} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma E} \text{ ή } \frac{6}{x} = \frac{4}{5-x}$$

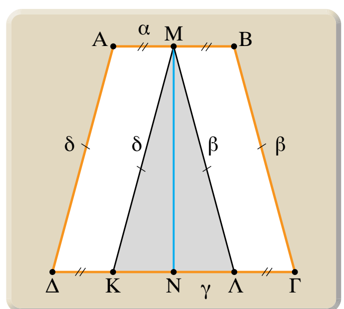
δηλαδή $x = 3$. Επειδή $A\Delta = AE + E\Delta$ μπορούμε με τη βοήθεια του Πυθαγόρειου θεωρήματος να βρούμε ότι

$$A\Delta = 5\cdot\sqrt{5} \approx 11{,}18 \text{ km}$$ ▲

3. Γνωρίζουμε ότι, σε κάθε τραπέζιο μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση μεταξύ των μέσων των μη παράλληλων πλευρών του, χωρίς να είμαστε αναγκασμένοι να κάνουμε μετρήσεις στο εσωτερικό του χωρίου του τραπεζίου. Μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση των μέσων των βάσεων, όταν γνωρίζουμε τα μήκη όλων των πλευρών του τραπεζίου;

Λύση:

Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ ονομάζουμε Μ, Ν τα μέσα των βάσεων ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα και α, β, γ, δ τα μήκη των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία Κ, Λ στη μεγάλη βάση ΓΔ ώστε ΜΚ $\parallel\!\!=$ ΑΔ και ΜΛ $\parallel\!\!=$ ΒΓ. Τότε



$$AM = \Delta K = \frac{\alpha}{2} = MB = \Lambda\Gamma.$$

Άρα

$$K\Lambda = \gamma - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = \gamma - \alpha.$$

Επίσης, ΜΚ = δ και ΜΛ = β. Στο τρίγωνο ΜΚΛ η ΜΝ είναι διάμεσος του και το μήκος της μπορεί να υπολογιστεί από το 1ο θεώρημα διαμέσων. Έτσι,

$$MN^2 = \frac{2\cdot\beta^2 + 2\cdot\delta^2 - (\gamma-\alpha)2}{4}.$$

◆

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΑΥΞΗΣΗ και ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Του **Ανδρέα Ν. Σβέρκου**, Μαθηματικού, Σχολικού Συμβούλου

Η διαφορική εξίσωση Q =kQ

Σε πολλές φυσικές διαδικασίες ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους Q ως προς το χρόνο t είναι ανάλογος της ποσότητας του μεγέθους. Έτσι, σε αντίστοιχα προβλήματα, χρειάζεται να βρούμε μια συνάρτηση $Q=Q(t)$, η οποία σύμφωνα με τον ορισμό των αναλόγων μεγεθών, πρέπει να ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση με χωρζόμενες μεταβλητές $Q (t)=kQ(t)$, όπου k μια σταθερά. (βλ. Μαθηματικά Θετικής Κατεύθυνσης Γ Ενιαίου Λυκείου σελίδα 319, ΟΕΔΒ 1999).

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης, που περιέχεται στο βιβλίο, είναι

$$Q(t) = Ce^{kt}.$$

Ειδικότερα, όταν γνωρίζουμε την τιμή της Q κατά τη χρονική στιγμή t_0 (π.χ. $t=0$), δηλαδή την $Q(t_0)$, τότε η σταθερά C που αντιστοιχεί στην αρχική αυτή συνθήκη είναι $C=Q(t_0)e^{-kt_0}$ και η ζητούμενη συνάρτηση δίνεται από την ισότητα:

$$(*) \qquad Q(t) = Q(t_0)e^{k(t-t_0)}$$

και για $t=0$ είναι

$$Q(t) = Q(0)e^{kt} = Q_0e^{kt}.$$

Η συνάρτηση αυτή εκφράζει το νόμο της **εκθετικής μεταβολής**. Ειδικότερα, αν $k>0$ (αντ. $k<0$) λέμε ότι το Q ακολουθεί την **εκθετική αύξηση** (αντ. **απόσβεση**) (βλ. Μαθηματικά Β Ενιαίου Λυκείου σελ. 130 ΟΕΔΒ 1999).

Θα παρουσιάσουμε, με τη βοήθεια παραδειγμάτων, τη σημασία και χρησιμότητα του νόμου της εκθετικής μεταβολής.

Εκθετική αύξηση

Παράδειγμα 1

Είναι γνωστό ότι ένας πληθυσμός βακτηριδίων αυξάνεται με ρυθμό (ευθέως) ανάλογο προς το μέγεθός του. Αν υποθέσουμε ότι αρχικά, δηλαδή για $t=0$, ο πληθυσμός ήταν 200 και 5 ώρες αργότερα ήταν 450, τότε ποιος ήταν ο πληθυσμός όταν $t=2$ και ποιος θα είναι όταν $t=10$;

Λύση:

Υποθέτουμε ότι η μεταβολή του πληθυσμού ακολουθεί την εκθετική μεταβολή. Η συνάρτηση του πληθυσμού P(t), σύμφωνα με την εξίσωση (*), δίνεται από την ισότητα

$$P(t)=P_0\cdot e^{kt}=200\cdot e^{kt},$$

στην οποία όμως δε γνωρίζουμε τη σταθερά k. Γνωρίζουμε όμως ότι

$$P(5)=450 \quad ή \quad 450=200\cdot e^{k5}.$$

Από την τελευταία ισότητα παίρνουμε

$$e^{5k} = \frac{450}{200} = \frac{9}{4} \quad ή \quad 5k = \ln\left(\frac{9}{4}\right) \quad ή \quad k = \ln\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$ή \qquad kt = \ln\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{t}{5}} \qquad e^{kt} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{t}{5}}.$$

Επομένως, με τα δεδομένα του προβλήματος, η εκθετική μεταβολή δίνεται από τη συνάρτηση

$$P(t) = P_0\cdot e^{kt} = 200\cdot e^{kt}$$

$$= 200\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{t}{5}}.$$

Έτσι για $t=2$ και $t=10$ ο πληθυσμός είναι

$$P(2) = 200\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{2}{5}} \approx 277$$

και

$$P(10) = 200\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{10}{5}} \approx 1012$$

αντίστοιχα.

Ραδιενεργός απόσβεση

Παράδειγμα 2

Τα ραδιενεργά υλικά διασπώνται με ρυθμό ο οποίος είναι (ευθέως) ανάλογος προς την ποσότητα του ραδιενεργού υλικού.

1. Να αποδείξετε ότι ο χρόνος που απαιτείται για να διασπαστεί η μισή ποσότητα ενός ραδιενεργού υλικού, ή, όπως λέμε, η *ημιζωή* του ή ο *χρόνος*

υποδιπλασιασμού του, είναι ανεξάρτητος από την αρχική ποσότητα του υλικού.

2. Το ισότοπο του άνθρακα ^{11}C έχει ημιζωή 20 λεπτά. Πόσος χρόνος χρειάζεται για να διασπαστεί το 90% μιας ποσότητας ^{11}C;

Λύση

1. Η ποσότητα του ραδιενεργού υλικού A(t) κατά τη χρονική στιγμή t ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $A (t)=kA(t)$. Επομένως, αν A_0 είναι η αρχική ποσότητα του ραδιενεργού υλικού, τότε θα έχουμε $A(t)=A_0e^{kt}$. Αν τώρα υποθέσουμε ότι το μισό του ραδιενεργού υλικού θα έχει διασπαστεί σε χρόνο t_1, δηλαδή $A(t_1)=\frac{1}{2}A_0$, τότε θα ισχύει:

$$\frac{1}{2}A_0 = A(t_1) = A_0e^{kt_1} \text{ ή } e^{kt_1} = \frac{1}{2} \text{ ή } t_1 = -\frac{\ln 2}{k}.$$

Η τελευταία ισότητα δηλώνει ότι ο χρόνος υποδιπλασιασμού ενός ραδιενεργού υλικού είναι ανεξάρτητος από την αρχική ποσότητα του υλικού (εξαρτάται μόνο από τη σταθερά k).

2. Αφού ο χρόνος ημιζωής του ^{11}C είναι 20 λεπτά, θα έχουμε: $20=-\frac{\ln 2}{k}$, οπότε

$$k = -\frac{\ln 2}{20} \text{ και } A(t) = A_0e^{-\frac{\ln 2}{20}t} = A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}.$$

Όταν λοιπόν το 90% της ποσότητας θα έχει διασπαστεί, θα έχει απομείνει το 10% αυτής. Έτσι χρειάζεται να προσδιορίσουμε το χρόνο t ώστε $A(t)=0,1A_0$. Έχουμε διαδοχικά

$$0,1A_0 = A(t) = A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \text{ ή } \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} = 0,1 \text{ ή }$$

$$t = \frac{20\cdot\ln 10}{\ln 2} \approx 66,4 \text{ min.}$$

Χρονολόγηση

Το ισότοπο του άνθρακα ^{14}C είναι στοιχείο ασταθές και ραδιενεργό. Στην ατμόσφαιρα, η απώλεια των ατόμων του ^{14}C λόγω της ραδιενεργού απόσβεσης, αναπληρώνεται με τη δημιουργία νέων ατόμων ^{14}C από την κοσμική ακτινοβολία. Στα φυτά η απώλεια του ^{14}C αναπληρώνεται με τη διαδικασία της φωτοσύνθεσης και στα ζώα ο ^{14}C με την κατανάλωση φυτικών τροφών. Η διαρκής αυτή αντικατάσταση έχει ως αποτέλεσμα το επίπεδο του ραδιενεργού άνθρακα να θεωρείται ότι παραμένει σταθερό τόσο στην ατμόσφαιρα όσο και στους ζωντανούς οργανισμούς. Όμως, μετά το θάνατο του οργανισμού ο ^{14}C δεν αντικαθίσταται πλέον και διασπάται με χρόνο ημιζωής 5750 χρόνια. Επομένως, η ποσότητα Q(t) του ^{14}C σε ένα νεκρό οργανισμό ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $Q (t)=kQ(t)$ για κατάλληλη αρνητική τιμή του k. Η εξίσωση αυτή αποτελεί τη βάση για την εκτίμηση της ηλικίας κάποιου ευρήματος με τη βοήθεια της μεθόδου *«χρονολόγηση με άνθρακα 14»*

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί η ηλικία ενός ευρήματος (δείγματος) το οποίο έχει το 70% της ποσότητας του ραδιενεργού άνθρακα που είχε όταν ζούσε.

Λύση

Αφού ο χρόνος ημιζωής είναι 5750 χρόνια, εργαζόμενοι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε:

$$Q(t) = Q_0\cdot e^{-\frac{\ln 2}{5750}t} = Q_0\cdot(e^{\ln 2})^{-\frac{t}{5750}} = Q_0\cdot 2^{-\frac{t}{5750}}.$$

Αναζητούμε το t ώστε

$$Q_0\cdot 2^{-\frac{t}{5750}} = 0,70\cdot Q_0 \text{ ή } 2^{-\frac{t}{5750}} = 0,70 \text{ ή }$$

$$t = -\frac{\ln(0,70)}{\ln 2}5750 \approx 2959,$$

που σημαίνει ότι το εύρημα είναι ηλικίας 2959 ετών.

Ανατοκισμός

Αν ανατοκίσουμε ένα κεφάλαιο α με επιτόκιο ε% το χρόνο, τότε σε ν χρόνια θα εισπράξουμε ποσό

$$\alpha_\nu = \alpha\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^\nu \text{ ή } \alpha_\nu = \alpha(1+\tau)^\nu,$$

όπου $\tau=\frac{\varepsilon}{100}$ (βλ. Μαθηματικά Β Ενιαίου Λυκείου, σελ. 109, ΟΕΔΒ 1999).

Σε μεγάλα οικονομικά πακέτα η ενσωμάτωση των τόκων στο κεφάλαιο γίνεται περιοδικά σε μικρότερες χρονικές περιόδους [στις Τράπεζες, για μικρούς καταθέτες, κάθε έτος ή κάθε εξάμηνο]. Έτσι, αν για παράδειγμα ένα κεφάλαιο α ανατοκίζεται κάθε μήνα με ετήσιο επιτόκιο τ, οπότε το μηνιαίο επιτόκιο είναι $\frac{\tau}{12}$, τότε στο τέλος του 2ου έτους (=24 μήνες) θα εισπράξουμε συνολικά ποσό ίσο με $\alpha\left(1+\frac{\tau}{12}\right)^{24}$. Το κεφάλαιο α ανατοκίζεται ανά ημέρα, τότε σε 3 χρόνια (1095 ημέρες) θα εισπράξουμε ποσό $\alpha\left(1+\frac{\tau}{365}\right)^{1095}$.

Γενικά αν το κεφάλαιο α ανατοκίζεται k φορές το χρόνο, τότε ύστερα από t έτη θα εισπράξουμε συνολικά το ποσό $\alpha_{k(t(}=(1+\frac{\tau}{k})^{kt}$.

Οι παραπάνω περιπτώσεις ανατοκισμού μας οδηγούν στα εξής προβλήματα:

Πρόβλημα 1

Μας συμφέρει το κεφάλαιο που καταθέσαμε στην τράπεζά μας για ένα χρόνο να ανατοκίζεται συχνότερα;

Απάντηση

Αν με A_ν συμβολίζουμε το ποσό που θα εισπράξουμε ύστερα από ένα χρόνο με ν ανατοκισμούς κατ' έτος ενός ποσού Κ και ετήσιο επιτόκιο τ, τότε θα είναι $A_\nu = K\left(1 + \frac{\tau}{\nu}\right)^\nu$. Επειδή η ακολουθία με γενικό όρο $\left(1 + \frac{\tau}{\nu}\right)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, είναι αύξουσα (*), τότε για $\nu, \mu \in \mathbb{N}$, με $\nu<\mu$, ισχύει

$$A_\nu = K\left(1 + \frac{\tau}{\nu}\right)^\nu < K\left(1 + \frac{\tau}{\mu}\right)^\mu = A_\mu$$

που σημαίνει ότι μας συμφέρει ο συχνότερος ανατοκισμός.

Σημείωση: Προφανώς, όταν πρόκειται για χρέος μας προς την τράπεζα ο συχνός ανατοκισμός του χρέους μας δε συμφέρει [Σχετίζεται με τα 'πανωτόκια'].

Πρόβλημα 2

Όπως είδαμε, όσο πιο συχνά ανατοκίζεται το ποσό μας ολοένα μεγαλύτερο θα είναι το τελικό μας ποσό. Θα μπορούσαμε να αυξήσουμε απεριόριστα το ποσό μας αν αυξάνουμε τη συχνότητα (μέσα σ' ένα έτος) του ανατοκισμού απεριόριστα;

Απάντηση

Στην πραγματικότητα ζητάμε να προσδιορίσουμε το όριο της ακολουθίας $\alpha_\nu t = \alpha\left(1 + \frac{\tau}{\nu}\right)^{\nu t}$, όταν το ν (ο αριθμός των ανατοκισμών μέσα στο έτος) αυξάνει απεριόριστα. Έχουμε λοιπόν

$$\alpha(t) := \lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu(t) = \alpha \lim_{\nu\to\infty}\left(1 + \frac{\tau}{\nu}\right)^{\nu\cdot t} =$$

$$= \alpha \lim_{\nu\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{\nu}{\tau}}\right)^{\frac{\nu}{\tau}}\right]^{\tau\cdot t} = \alpha\left[\lim_{\nu\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{\nu}{\tau}}\right)^{\frac{\nu}{\tau}}\right]^{\tau\cdot t} = \alpha e^{\tau\cdot t},$$

που σημαίνει ότι το τελικό μας ποσό σε t έτη δε μπορεί να αυξάνει απεριόριστα, αλλά περιορίζεται (φράσσεται) από τη συνάρτηση $\alpha e^{\tau\cdot t}$.

Φθάσαμε έτσι στον τύπο του συνεχούς ανατοκισμού, έναν σπουδαίο και ευρέως χρησιμοποιούμενο τύπο στις επιχειρήσεις, στις τράπεζες και στην οικονομία.

Τύπος του συνεχούς ανατοκισμού: Αν το κεφάλαιο α κατατεθεί με ετήσιο επιτόκιο ε%=τ και ανατοκίζεται συνεχώς, τότε το ποσό α(t) που θα προκύψει σε t έτη δίνεται από τον τύπο:

$$\alpha(t) = \alpha e^{\tau\cdot t}$$

Ο ρυθμός μεταβολής του α(t) ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $\alpha'(t)=\alpha e^{\tau t}\cdot\tau$, δηλαδή $\alpha'(t)=\tau\alpha(t)$, που σημαίνει ότι: **Όταν ο ανατοκισμός είναι συνεχής, τότε ο ρυθμός μεταβολής του ποσού είναι ανάλογος του υπάρχοντος ποσού.**

Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν κατατεθεί στην τράπεζα ποσό 1.000.000 δρχ. με ετήριο επιτόκιο 10%, τότε σε πέντε χρόνια θα εισπράξουμε:

- με **εξαμηνιαίο** ανατοκισμό το ποσό:

  $$1.000.000\left(1 + \frac{0,1}{2}\right)^{2\cdot 5} = 1.628.894,6 \text{ δρχ.}$$

- με **ημερήσιο** ανατοκισμό το ποσό:

  $$1.000.000\left(1 + \frac{0,1}{365}\right)^{365\cdot 5} = 1.648.606,5 \text{ δρχ.}$$

- με **συνεχή** ανατοκισμό το ποσό:

  $$1.000.000\cdot e^{0,1\cdot 5} = 1.648.721,3 \text{ δρχ.}$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μικρή διαφορά στα τελικά ποσά μεταξύ ημερήσιου και συνεχούς ανατοκισμού. Αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού για μεγάλες τιμές του ν ισχύει:

$$\left(1 + \frac{\tau}{\nu}\right)^\nu \approx e^\tau.$$

(*) Είναι γνωστό ότι η ακολουθία $\alpha_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, συγκλίνει στον αριθμό Euler e (βλ. Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί Νο 5). Για να αποδείξουμε ότι η ακολουθία με γενικό όρο $\beta_\nu = \left(1 + \frac{\tau}{\nu}\right)^\nu$, με $\tau>0$, είναι αύξουσα, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $\nu>1$ ισχύει $\frac{\beta_\nu}{\beta_{\nu-1}} > 1$. Πράγματι, ισχύουν:

$$\frac{\beta_\nu}{\beta_{\nu-1}} = \left(1 + \frac{x}{\nu-1}\right)\left(\frac{1 + \frac{\tau}{\nu}}{1 + \frac{\tau}{\nu-1}}\right)^\nu = \frac{\nu+\tau-1}{\nu-1}\left(1 - \frac{\tau}{\nu(\nu+\tau-1)}\right)^\nu \text{ [ανισότητα Bernoulli] } > \frac{\nu+\tau-1}{\nu-1}\left(\frac{1-\nu\tau}{\nu(\nu+\tau-1}\right) = 1$$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ σε ΓΡΑΜΜΙΚΑ και ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ... και ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΜΕΤΑΡΡΥΘΜΙΣΗ

Του **Θ. Βαγενά**, Φυσικού

Αντί προλόγου

«από τη γνησιότητα του φυσικού αυθόρμητου»
(Ανακαίνιση: Απογυμνώσεις)

Για να μπορέσουμε να δούμε κάθε μεταρρύθμιση που προβάλλεται σαν λύση αποσυμπίεσης της συναισθηματικής φόρτισης των μαθητών από το σχολικό φορτίο, τις επιδόσεις τους στο σχολείο και γενικότερα κάθε τι που αναφέρεται στη μαθητική τους ιδιότητα, αν βέβαια, συμπεριλάβει κανείς σε όλα αυτά και το εξεταστικό μέρος, καθώς και τους παράγοντες που σε καθιερώνουν επιτυχημένο ή αποτυχημένο, ως μεταρρυθμιστή, πρέπει να διαιρέσουμε το συνολικό μας πρόβλημα στα επιμέρους προβλήματα, που το συνθέτουν, που θα λυθούν με απλότητα, και η σύνθεσή τους θα δώσει τη συνολική λύση.

Είναι όμως το πρόβλημα της μεταρρύθμισης γραμμικό, ή για λόγους προσωπικής ικανοποίησης και πειραματισμών των εκάστοτε υπευθύνων προβάλλετα σαν τέτοιο;

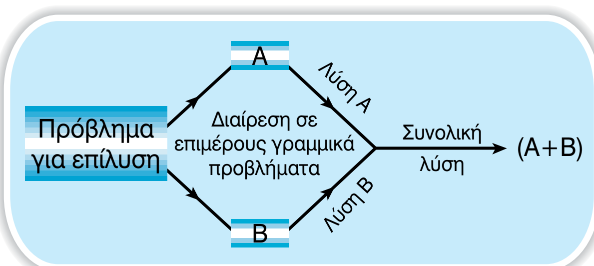
Οι καιροί μας δείχνουν ότι το πρόβλημα της παιδείας στροβιλίζεται με τρόπο που οι μικροστρόβιλοι, που το συνθέτουν, να αποκλίνουν με τρόπο μη γραμμικό ώστε η εύρεση της λύσης του να στηρίζεται σε ανθρώπους –αιχμές που πρέπει να σκέφτονται τα δύσκολα προτού αποφασίσουν σωστά.

Η σχολική μας μαθηματική πορεία καταλήγει να έχουμε δημιουργήσει συγκεκριμένη άποψη για τις γραμμικές ισότητες και τις λύσεις τους, οι οποίες εμπεριέχουν μια δόση αιτιοκρατίας από άποψη φυσική.

Εάν ρωτήσει κανείς μαθητές του Λυκείου να αναφέρουν γραμμικές ισότητες τότε σίγουρα θα πάρουμε απαντήσεις που εκφράζονται μέσω των σχέσεων $\psi = \alpha\chi$ και $\psi = \alpha\chi+\beta$ όπου α, β γνωστοί αριθμοί. Ισότητες δηλαδή που οι μεταβλητές τους είναι πρώτου βαθμού. Χρακτηριστικό τους γνώρισμα είναι η επαλήθευσή τους και από το άθροισμα δύο διαφορετικών λύσεων τους Α, Β δηλαδή λύση αποτελεί και το Α+Β όπως εύκολα αποδεικνύεται.

Η αυστηρή διάθεση των μαθηματικών μας παρασύρει να μην έχουμε αντιληφθεί τη φυσική σημασία της σπουδαίας έννοιας που λέγεται γραμμικότητα. Αναζητώντας έτσι κάποια καθημερινά πράγματα τα οποία βοηθούν σε μια καλύτερη διδακτική ερμηνεία βρίσκουμε σκέψεις οι οποίες έχουν μέσα τους κρυμμένη μια συμμετρία, όπως για παράδειγμα ο χρόνος, η συναρμολόγηση ενός σπασμένου βάζου. Αποδίδουμε έτσι στην γραμμικότητα μια επαλληλία γεγονότων του παρελθόντος, του παρόντος και του μέλλοντος ή στη σύνδεση των κομματιών ενός σπασμένου αρχαίου ελληνικού βάζου το οποίο διατηρείται όπως είναι με την πάροδο του χρόνου, αποτελώντας δείγμα μιας άλλης εποχής και πολιτιστικής παράδοσης.

Έτσι λοιπόν όπου ένα πρόβλημα δεν είναι εύκολο στο σύνολό του να αντιμετωπιστεί το επιμερίζουμε σε επιμέρους προβλήματα που το συνθέτουν και για να βρούμε τη συνολική λύση προσθέτουμε τις επιμέρους λύσεις αριθμητικά.



Μπροστά στη βεβαιότητα των σκέψεών τους γράφουμε τις παρακάτω ισότητες:

$$V_e = E(1-e^{-t/RC}), \quad \Psi = \Psi_0 \eta\mu(\omega t+\varphi_0),$$

$$\Psi = \Psi_0 \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\chi}{\lambda}\right)$$

και περιμένουμε απάντηση εάν αποτελούν λύσεις γραμμικών εξισώσεων. Η απάντηση είναι αρνητική!!! Λάθος είναι λύσεις γραμμικών ισοτήτων (1ου βαθμού) όπως αναγράφονται στο σχολικό βιβλίο.

Αναφέρω ενδεικτικά:

$$E - RC\frac{\Delta V_c}{\Delta t} - V_c = 0 \qquad V_C = E\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

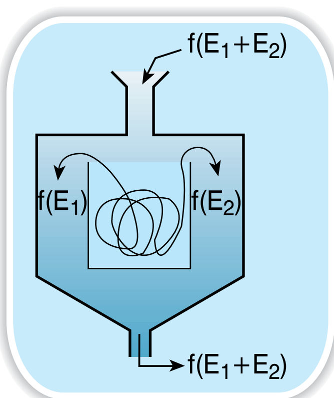
Επομένως και για αυτές ισχύει η αρχή της υπέρθεσης, αν δηλαδή V_1 και V_2 είναι λύσεις με εξωτερική διέγερση E_1 και E_2 που εκφράζουν την εξέλιξη των επιμέρους προβλημάτων που συνθέτουν ένα γραμμικό φαινόμενο το άθροισμά τους περιγράφει την εξέλιξη του συνολικού προβλήματος.

$$\left.\begin{aligned} E_1 - RC\frac{\Delta V_1}{\Delta t} - V_1 = 0 \\ E_2 - RC\frac{\Delta V_2}{\Delta t} - V_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$E_1 + E_2 - RC\frac{\Delta(V_1+V_2)}{\Delta t} - (V_1+V_2) = 0$$

$$f(E_1) + f(E_2) = f(E_1+E_2)$$

Σχόλιο: Κάνει εντύπωση η εκλεκτικότητα την οποία δείχνει ένα γραμμικό σύστημα. Θα μπορούσε να αποτελεί ένδειξη συμμετρίας και προτίμησης των πραγμάτων στη φύση αν δεν υπήρχαν και οι μη γραμμικές εξισώσεις.



Έτσι δικαιολογείται ο «αυθορμητισμός» των συγγραφέων του σχολικού βιβλίου της Γ Λυκείου στα παρακάτω θέματα (w, $\psi_{ο\lambda}$, κυκλική μεταβολή).

1. Σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων που έχουν την ίδια διεύθυνση και διαφορετική συχνότητα.

Εδώ η συνισταμένη κίνηση προκύπτει από την πρόσθεση των απομακρύνσεων του σώματος που αντιστοιχούν σε κάθε μια από τις απλές αρμονικές ταλαντώσεις.

2. Στάσιμα κύματα

Τα δύο κύματα συναντώνται (συμβάλλουν) και το αποτέλεσμα της συμβολής είναι η απομάκρυνση ψ να δίνεται από το άθροισμα των απομακρύνσεων των δύο κυμάτων, δηλαδή:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

3. Κυκλική μεταβολή (θερμοδυναμική)

Για τον υπολογισμό της συνολικής θερμότητας σε μια κυκλική μεταβολή μπορούμε να υπολογίσουμε τα επιμέρους ποσά θερμότητας που ανταλλάσσει το σύστημα με το περιβάλλον και να τα προσθέσουμε.

Στα παραπάνω θέματα χρησιμοποιείται σωστά η **επαλληλία αριθμητικών λύσεων** διότι αποτελούν ισότητες-λύσεις γραμμικού συστήματος εξισώσεων.

Σχόλιο

Για τις ταλαντώσεις η λύση προέρχεται από την εξίσωση:

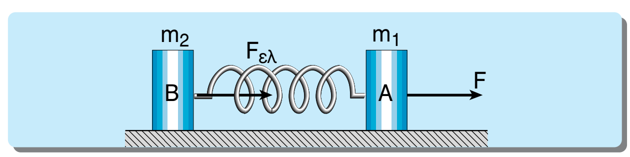
$$m\frac{d^2\psi}{dt^2} = -D\psi \qquad \psi = \psi_0 \eta\mu\omega t$$

Εφαρμογές

Άσκηση 1

Δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 είναι δεμένα στις άκρες ελατηρίου σκληρότητας κ. Στο πρώτο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη F. Να βρείτε τη μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου. Το επίπεδο είναι λείο.

Λύση



Για το σύστημα

$$F = (m_1+m_2)\cdot \alpha \qquad (1)$$

Το (Β) σώμα εκτελεί ταλάντωση διότι

$$F_{\varepsilon\lambda} = -\kappa\cdot x \qquad (2)$$

Η μέγιστη επιτάχυνση του σώματος Β είναι

$$\alpha_{max} = \omega^2\cdot x_0 \qquad (3)$$

τη στιγμή που η ταχύτητα του σώματος (Β) λόγω ταλάντωσης είναι μηδέν. Αυτή συμπίπτει τη στιγμή εκείνη με την επιτάχυνση του συστήματος και των δύο μαζών.
Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m_2}} \qquad (4)$$

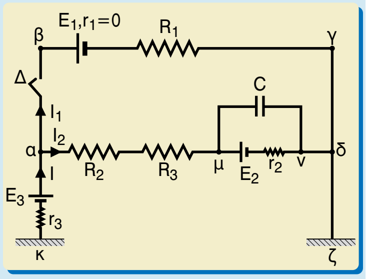
Από (1), (2), (3), (4) έχουμε:

$$F = (m_1+m_2)\cdot\omega^2\cdot x_0 \qquad F = (m_1+m_2)\frac{\kappa}{m_2}\cdot x_0$$

$$x_0 = \frac{F\cdot m_2}{\kappa(m_1+m_2)}$$

Επομένως $\quad \Delta l_{max} = 2\cdot x_0 \quad$ ή $\quad \Delta l_{max} = \dfrac{2F\cdot m_2}{\kappa(m_1+m_2)}$

Άσκηση 2



Στο κύκλωμα του σχήματος οι πηγές έχουν εσωτερική αντίσταση και οι ηλεκτρεγερτικές τους δυνάμεις είναι:
$E_1 = 3V$, $E_2 = 4V$,
$E_3 = 8V$. Αν $R_1 = 2\Omega$,
$R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 3\Omega$,
$r_2 = 4\Omega$, $r_3 = 1\Omega$, $r_1 = 0$
και $C = 1\mu F$ να βρείτε:

α) Την ένταση του ρεύματος που θα διαρέει κάθε αντίσταση.

β) Το φορτίο του πυκνωτή.

γ) Εάν ανοίξουμε το διακόπτη Δ να υπολογίσετε το νέο φορτίο του πυκνωτή και το δυναμικό του σημείου μ. Θα αλλάξει η πολικότητα του πυκνωτή;

δ) Να γίνει η γραφική παράσταση της τάσης στα άκρα του πυκνωτή από τη στιγμή του ανοίγματος του διακόπτη και μετά.

Λύση

Όταν ένα κύκλωμα έχει δύο ή περισσότερα σημεία γειωμένα τότε τα άκρα των γειωμένων αγωγών έχουν το ίδιο δυναμικό (μηδέν) και οι αγωγοί αυτοί διαρέονται από ρεύμα, μπορούμε δε να τους ενώσουμε βρίσκοντας το ισοδύναμο κύκλωμα.

α) Από τους κανόνες του Kircohhoff έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}&\text{Κόμβος α: } I = I_1+I_2\\ &\text{Βρόχος αβγδα: } -E_1+E_2-I_1R_1+I_2r_2+I_2R_3+I_2R_2 = 0\\ &\text{Βρόχος αδζκα: } -E_2+E_3-I_2R_2-I_2R_3-I_2r_2-Ir_3 = 0\end{aligned}\right\}$$

$$I = \frac{68}{38}\,A,\quad I_1 = \frac{61}{38}\,A,\quad I_2 = \frac{7}{38}\,A.$$

β) $V_\mu - E_2 - I_2r_2 = V_\nu \qquad V_{\mu\nu} = \dfrac{90}{19}$ Volt είναι

$$Q = C\cdot V_{\mu\nu} \qquad Q = \frac{90}{19}\,\mu Cb.$$

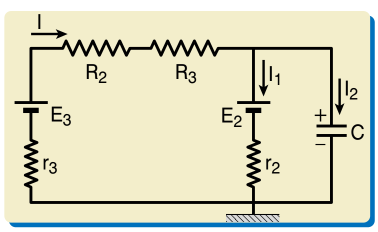
γ) Αφού ανοίξουμε το διακόπτη και μονιμοποιηθεί η κατάσταση, περνώντας αρκετός χρόνος θα έχουμε:
Βρόχος αδζκα:

$$-E_2+E_3-I_2\cdot R_2-I_2R_3-I_2r_2-I_2r_3 = 0 \qquad I_2 = \frac{4}{13}\,A.$$

$$V_\mu-E_2-I_2r_2 = V_\nu \qquad V_{\mu\nu} = \frac{68}{13}\,\text{Volt}$$

$$Q = C\cdot V_{\mu\nu} \qquad Q = \frac{68}{13}\,\mu Cb.$$ **Σχόλιο:** αύξηση του φορτίου

δ) Ανοικτός διακόπτης. Το σχήμα για να είναι περισσότερο κατανοητό έχει μετασχηματιστεί.



- Κανόνες Kircohhoff:

$$\left.\begin{aligned}&I = I_1+I_2\\ &E_3-I(R_2+R_3+r_3)-E_2-I_1r_2 = 0\\ &-V_C+I_1r_2+E_2 = 0\end{aligned}\right\} \qquad V_C(t) = \frac{68}{13}\left(1-e^{-\frac{13t}{36C}}\right)$$

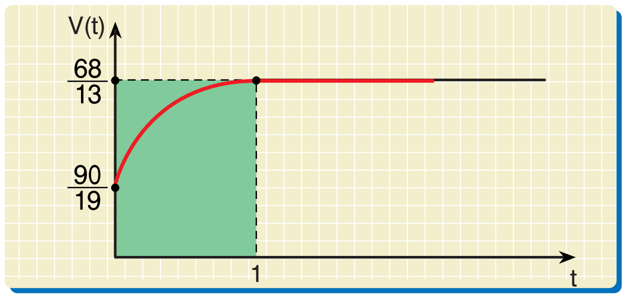
Αυτή αποτελεί τη διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή, αν δεν υπήρχε αρχική διαφορά δυναμικού στα άκρα ήταν δηλαδή αφόρτιστος.

- Ο πυκνωτής αν δεν υπήρχαν οι πηγές θα εκφορτιζόταν στις αντιστάσεις με: $V_C(t) = V_{CO}l^{\frac{-t}{R_{ολ}\cdot C}}$
Θα έχουμε:

$$V_C(t) = V_C(t)+V_C(t)$$

$$V_C(t) = \frac{68}{13}\left(1-e^{-13t/RC}\right) + \frac{90}{19}\,e^{-13t/36c}$$

$$V_C(t) = \frac{68}{13} - \frac{122}{247}\,e^{-13t/36C}$$

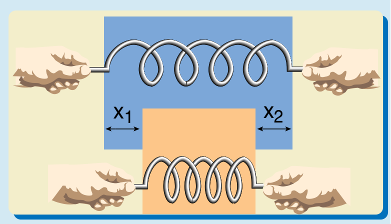


■

Ισότητες που είναι δευτέρου βαθμού η επαλληλία των λύσεών τους ψ_1, ψ_2 δηλαδή $\psi_1+\psi_2$ δεν είναι λύση τους.

Περιγράφουν φαινόμενα που η εξέλιξή τους δεν περιγράφεται από λύση που αποτελείται από επαλληλία λύσεων επιμέρους προβλημάτων, που συνθέτουν το πρόβλημά μας στο σύνολό του. Για την αποκωδικοποίησή τους καλούμαστε να αναζητήσουμε ένα εσωτερικό κανονισμό, ξεφεύγοντας από τη θεματογραφία του Λυκείου. Θα αναφέρω τις παρακάτω ασκήσεις στις οποίες δίνεται μόνο η λύση τους.

Άσκηση 1



Ένας άνθρωπος συμπιέζει με τα χέρια του ένα ελατήριο και το συσπειρώνει όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν η σταθερά του ελατηρίου είναι κ, να βρεθεί η χημική ενέργεια που κατανάλωσε ο άνθρωπος.

Λύση

$$E_{ολ} \,\pi\, E_1+E_2$$

Πράγματι:

$$\frac{1}{2}\kappa x_{ολ}^2 \,\pi\, \frac{1}{2}\kappa x_1^2 + \frac{1}{2}\kappa x_2^2,\ x_{ολ} = x_1+x_2$$

όμως $$F_{ολ} = \kappa(x_1+x_2)$$

Η συνολική ενέργεια που κατανάλωσε ο άνθρωπος είναι:

$$\frac{1}{2}\kappa x_{ολ}^2$$

■

Άσκηση 2

Στην άκρη Α ενός σύρματος ΑΒ φτάνουν ρεύματα I_1 και I_2. Να βρεθεί το συνολικό ποσό θερμότητας που αναπτύσσεται στην αντίσταση R.

Λύση

Το συνολικό ποσό θερμότητας είναι: $Q_{ολ}$ π Q_1+Q_2

όπου Q_1, Q_2 τα επιμέρους ποσά θερμότητας των ρευμάτων I_1, I_2.

$$I = I_1 + I_2$$

Άσκηση 3

Δύο ταλαντώσεις πραγματοποιούνται ταυτόχρονα. Ζητείται το πλάτος της νέας ταλάντωσης που προκύπτει. Επίσης να υπολογιστεί η ενέργεια ταλάντωσης.

Λύση

$$\psi_{ολ} = \psi_1+\psi_2 = αημωt+βημ(ωt+φ)$$

αλλά

$$\frac{1}{2}Dx_0^2 \ π \ \frac{1}{2}D_1α^2 + \frac{1}{2}D_2β^2.$$

Βιβλιογραφία:

1. Παρουσίες, ΦΙΛΩΝ ΑΙΘΚΟΣ, Βιβλιογονία, Αθήνα.
2. Εισαγωγή στην θεωρία των διαφ. εξισώσεων, Π. Στράντζαλος - Α. Κατάβολος.
3. Κυματική Barkeley, Τόμος 3ος.
4. Εισαγωγή στην κβαντομηχανική, Γ.Ι. Ανδριτσόπουλος.
5. Ασκήσεις φυσικής, Τόμος Α, Πέτρος Γ. Ιακώβου.
6. Fast-Fodd και μη γραμμικότητα, Περιοδικό σχεδία. Δ. Τσιώλης.
7. Χρόνος και άνθρωπος. Περιοδικό Επτά ημέρες, Καθημερινή.
8. Σολιτόνια, Στέφανος Πνευματικός.

ΠΕΡΙ ΕΝΤΡΟΠΙΑΣ

Του **Δ. Λιακόπουλου**, Φυσικού

Το γενικό σκεπτικό του «πάρε-δώσε», που είναι βασικό γνώρισμα των διαπροσωπικών, εμπορικών, διακρατικών και άλλων σχέσεων πάνω στον πλανήτη μας, το δανειστήκαμε από την ίδια τη λειτουργία της φύσης. Έτσι το σκεπτικό λειτουργίας μιας μηχανής που δουλεύει για εμάς είναι: «θα **πάρεις** ότι χρειάζεσαι για να μου **δώσεις** αυτό που έχω ανάγκη». Για να λειτουργήσει πιο αποδοτικά μία μηχανή σκεφθήκαμε «να πάρει το δυνατόν **λιγότερα** από εμάς και να μας δώσει το δυνατόν **περισσότερα**.

$$\text{Απόδοση μηχανής: } \alpha = \frac{\text{ενέργεια που μας δίνει}}{\text{ενέργεια που μας παίρνει}}$$

Ένα είδος μηχανής που έπαιξε και παίζει κυρίαρχο ρόλο είναι η θερμική μηχανή. Της δίνουμε θερμική ενέργεια και μας δίνει μηχανικό έργο.

Ο Γερμανός R. Clausius παρατήρησε κατά την προσφορά θερμικής ενέργειας ΔQ, σε μία θερμική μηχανή (που λειτουργούσε με τον κύκλο Carnot), ότι όσο μικρότερος ήταν ο λόγος ΔQ/T, όπου T η επικρατούσα θερμοκρασία, τόσο περισσότερο ωφέλιμο έργο W έδινε η μηχανή. Την ποσότητα ΔQ/T ονόμασε μεταβολή της εντροπίας του συστήματος. Με δυο λόγια, όταν αύξανε το ΔQ/T, μειωνότανε το ωφέλιμο έργο. Όταν μειωνότανε το ΔQ/T, αύξανε το ωφέλιμο έργο.

Αυτά περί εντροπίας με τη στενή έννοια του όρου.

Η ελληνική παιδεία των λογίων και των πρακτικών επιστημόνων της Δύσης βοήθησε να γίνει αντιληπτό η σχέση εντροπίας και αταξίας.

Ο Ησίοδος στη «Θεογονία» μιλούσε για την τάξη που ο Θεός επέφερε στο χάος ώστε να δημιουργηθεί ο κόσμος, ο Πλάτων στον «Τιμαίο» και ο Αριστοτέλης στην «Αθηναίων Πολιτεία» μιλούν για την ανάγκη «ευταξίας» για την απόδοση του κοινωνικού συνόλου, ο Ξενοφών στα «απομνημονεύματα» (οικονομικός) μιλά για την ανάγκη ευταξίας, για την καλή απόδοση οποιασδήποτε επένδυσης και το όλο που έστειλε ο ελληνισμός στην ανθρωπότητα ήταν ότι η οργάνωση αυξάνει την απόδοση. Ο Θουκυδίδης μίλησε για την ανάγκη τάξης και πειθαρχίας στο στράτευμα ώστε να είναι αποδοτικότερο στη μάχη.

Αυτό το έχει κατά νου ο Clausius και οι υπόλοιποι που αρχικά ασχολήθηκαν με το θέμα και συνέδεσαν την έννοια της **εντροπίας** με την **αταξία**. Έτσι ένα οποιοδήποτε φυσικό σύστημα για να παράγει έργο, αυξάνει **οπωσδήποτε** την αταξία του. Όσο λιγότερο όμως αυξηθεί η αταξία, τόσο περισσότερο έργο θα παραχθεί προς όφελός μας.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα πάνω στο θέμα.

Παράδειγμα 1 Τον Αύγουστο του 479 π.Χ. και μετά από μερικές μέρες αψιμαχιών έγινε η μάχη των Πλαταιών (κοντά στις αρχαίες Ερυθρές) μεταξύ 10.000 Λακεδαινομίων οπλιτών υπό τον Παυσανία και 400.000 περίπου επιλέκτων ανδρών της αχανούς Περσικής αυτοκρατορίας υπό τον Μαρδόνιο.

Οι Λακεδαιμόνιοι έκαναν τακτική υποχώρηση στους πρόποδες του Κιθαιρώνος και οι βάρβαροι κινήθηκαν εναντίον τους «αναθαρήσαντες» με σκοπό να τους «χαλάσουν». Η έναρξη προσπάθειας παραγωγής πολεμικού έργου από μέρους τους, συνοδεύτηκε από τρομακτική αύξηση της εντροπίας (αταξίας) μιας και επιτέθηκαν διασπώντας τις γραμμές τους και φωνάζοντας με όλη τους τη δύναμη, παρά τις παραινέσεις των αξιωματικών για οργανομένη προώθηση. Η συμπαγής Σπαρτιατική οπλιτική φάλαγγα κινήθηκε τότε εναντίον τους. Η εντροπία της (αταξία της) σαφώς αυξήθηκε αφού ξεκίνησε και αυτή τη διαδικασία παραγωγής πολεμικού έργου. Η αύξηση όμως ήταν ελάχιστη αφού «αυτοί που ήξεραν την τέχνη του πολέμου καλύτερα από όλους την δίδαξαν σ' αυτούς που δε τη γνώριζαν καθόλου». Το βαρβαρικό στίφος δέχτηκε την επίθεση της συμπαγούς σιδηρόφρακτης Σπαρτιατικής φάλαγγας που είχε βάθος οκτώ ανδρών και μήκος περίπου 1.200 μέτρων. Το αποτέλεσμα ήταν φρικτό για τους βάρβαρους, από τους οποίους ελάχιστοι γλίτωσαν.

Παράδειγμα 2 Ας πάρουμε ένα δημοτικό σχολείο που ετοιμάζεται να στείλει δύο τάξεις για κάποιο έρανο. Όσο τα παιδιά κάθονται στα θρανία και βρίσκονται μέσα στην **τάξη**, η εντροπία τους είναι σχετικά χαμηλή. Όταν βγουν όμως για να κάνουν τον έρανο (να παράγουν οικονομικό έργο) η εντροπία τους (αταξία τους) αυξάνει. Η μία τάξη έστω ότι πήγε εκεί που οι δάσκαλοι την έστειλαν και συγκέντρωσε τα χρήματα που έπρεπε. Η άλλη έστω ότι διασκορπίστηκε στις παιδικές χαρές και τα πάρκα και αύξησε κατά πολύ την εντροπία της με αποτέλεσμα να μην αποδόσει οικονομικό έργο. Τα δύο παραπάνω παραδείγματα δείχνουν ότι η προσπάθεια παραγωγής έργου οποιασδήποτε μορφής, επιφέρει αύξηση της αταξίας και όσο λιγότερο αυξηθεί η αταξία, τόσο περισσότερο έργο θα έχουμε.

Υπάρχει όμως μία σημαντική παράμετρος για τη δυνατότητα μικρής αύξησης της αταξίας. Αυτή είναι η δυνατότητα μετάδοσης αλλά και υπακοής της εντολής δράσης. Οι Σπαρτιάτες, σαν πολύ πειθαρχημένοι, υπάκουαν τους αξιωματικούς και κινήθηκαν οργανωμένα. Οι Πέρσες αντίθετα διέσπασαν τις γραμμές τους παρά τις παραινέσεις των αξιωματικών τους. Το ίδιο και οι μαθητές του δημοτικού. Η μία τάξη εφάρμοσε κατά το δυνατόν τις οδηγίες των δασκάλων ενώ η άλλη όχι (παιδικές χαρές, παγωτά κτλ.) με αποτέλεσμα να μην παράγουν το ίδιο έργο.

Η αύξηση επομένως της εντροπίας (αταξίας) είναι δεδομένη σε κάθε μας ενέργεια και σε κάθε αυθόρμητη διαδικασία στη φύση.

Παράδειγμα 3 Κρατάμε στο δεξί μας χέρι δέκα μπλε μπίλιες και στο αριστερό δέκα κόκκινες. Υπάρχει κάποια τάξη αφού είναι διαχωρισμένες οι μπλε από τις κόκκινες μπίλιες. Αν τις πετάξουμε στον αέρα θα πέσουν στο πάτωμα όπου θα ανακατευθούν και η ελάχιστη οργάνωση που είχαν θα χαθεί αφού αποκλείεται να πέσουν και να διαχωρισθούν από μόνες τους σε μπλε και κόκκινες.

Είναι όμως δυνατή η μείωση της εντροπίας (αταξίας);

Βεβαίως και είναι, αρκεί να δαπανηθεί έργο.

Παράδειγμα 4 Μπείτε σε μια πολύ οργανωμένη δημοτική βιβλιοθήκη με πολύ ψηλά ράφια και τεράστια ποικιλία βιβλίων. Δώστε στον εαυτό σας χρόνο τριών λεπτών για να ρίξει όλα τα ράφια και να ανακατέψει τις χιλιάδες των βιβλίων. Η εντροπία θα έχει αυξηθεί. Έπειτα δώστε στον εαυτό σας περίπου ένα μήνα σκληρής δουλειάς να τα ξαναοργανώσει όλα.

Συμπέρασμα: Το εύκολο και αυθόρμητο είναι η καταστροφή. Το δύσκολο είναι η δημιουργά. Με μια απλή κίνηση ένας ορθοστάτης με πεντακόσια βιβλία μπορεί να καταρρεύσει με τα γνωστά επακόλουθα. Το αυθόρμητο είναι τα βιβλία να πέσουν να ανακατευθούν, να τσαλακωθούν και να σκισθούν. Σ' αυτό βοηθά και η φύση μ' αυτό που ονομάζουμε νόμο της βαρύτητας. Μπορείτε να φανταστείτε ένα κόσμο, όπου μόλις ρίχναμε τον ορθοστάτη τα βιβλία θα πετούσαν στον αέρα και αυθόρμητα θα επανατοποθετούνταν στα ράφια; Όχι βέβαια, διότι στον κόσμο που ζούμε έχει δωθεί από τον «κατασκευαστή» μία βασική εντολή: «Με κόπο θα τα κάνεις όλα Αδάμ». Τα πράγματα βέβαια δεν ήταν έτσι όταν κάποτε ζούσαμε στη «φωτεινή πατρίδα» που ονομάζουμε Παράδεισο. Εκεί το αυθόρμητο από τη φύση ήταν να μας βοηθάει μειώνοντας χωρίς δικό μας κόπο την εντροπία.

Έχει προταθεί ότι η εξέλιξη των ειδών και μάλιστα του ανθρώπου αποτελεί εξαίρεση στον κανόνα και μείωση της εντροπίας αφού ο άνθρωπος σαν άτομο εμφανίζεται πιο οργανωμένος. Αυτό είναι αυταπάτη και έχουμε δύο τρόπους να το δούμε.

1ος τρόπος: *Όπως θα το έβλεπε ένας άθεος.* Αν υποθέσουμε ότι το σημερινό σώμα του ανθρώπου δεν περιέχει ψυχή και προήλθε από την εξέλιξη ενός πιθηκοειδούς μορφής σώματος. Τι είναι αυτό που μας δείχνει ότι η εντροπία του σώματος έχει μειωθεί; Τίποτε. Αντίθετα τα ερεθίσματα της σύγχρονης κοινωνίας μας κάνουν να ζούμε πολύπλοκα και αγχωμένα, άρα σε μια πλήρη αταξία.

2ος τρόπος: *Όπως θα το έβλεπε ένας Χριστιανός ορθόδοξος.* Το σώμα του ανθρώπου μετά την παύση άμεσης επαφής με το Θεό εξέπεσε των λαμπρών ιδιοτήτων του και «κατάντησε» να είναι ένα σώμα ζώου. Σύμφωνα με τις γραφές μάλιστα οι άνθρωποι κάποτε ζούσαν 1000, 800 ή 700 χρόνια και τελικά έφθαναν σε πολύ χαμηλούς μέσους όρους. Με πολύ σκληρή δουλειά (έργο) βελτιώθηκαν οι συνθήκες ζωής και επιβραδύνθηκε η κατάπτωση του ανθρώπινου σώματος. Αν συγκρίνουμε μάλιστα το άφθαρτο παραδείσιο σώμα του ανθρώπου με το βιολογικό, με το οποίο προσωρινά είμαστε δεμένοι καταλαβαίνουμε την αύξηση της εντροπίας που έχει επέλθει. Θα πει κανείς, κατά τη σύληψη δεν έχουμε τη σύνθεση τμημάτων των γονέων για τη δημιουργία ενός νέου οργανισμού; Άρα την αύξηση της τάξης και της οργάνωσης; Η απάντηση είναι όχι. Πρώτον διότι ο οργανισμός είναι το ξεπεσμένο και όχι παραδείσιο σώμα του ανθρώπου και δεύτερον δεν έγινε τίποτε το αυθόρμητο αφού θα έχουν δαπανηθεί τεράστια ποσά σε ενέργεια και χρήμα για να δημιουργηθεί ο νέος άνθρωπος.

Συμπεράσματα:

1. Εντροπία σημαίνει αταξία και η σέση της με την επιτυχία οποιασδήποτε προσπάθειας διατυπώθηκε επανειλλημένως από τους αρχαίους Έλληνες.
2. Σε κάθε προσπάθεια παραγωγής έργου, η αταξία του προσπαθούντος αυξάνει. Όσο λιγότερο αυξηθεί, τόσο περισσότερο το παραγόμενο έργο.
3. Στη φύση το αυθόρμητο είναι να αυξάνει η αταξία. Εύκολα καταστρέφουμε, δύσκολα δημιουργούμε.
4. Η εντροπία μπορεί να μειωθεί με τη δαπάνη πολύ μεγάλης ποσότητας έργου.
5. Δεν μπορούμε να μιλούμε για αυξομείωση της τάξης, αλλά μόνο της αταξίας, αφού τάξη δεν υπάρχει στο σύμπαν που μπορούμε να αντιληφθούμε. Ακόμα και οι λεγόμενοι φυσικοί νόμοι ίσως να μην ισχύουν παντού οι ίδιοι, και ίσως όχι για πάντα.
6. Η αναζήτηση της αυξομείωσης της τάξης ή της αταξίας στο σύμπαν δεν έχουν νόημα αφού ο Απόστολος Παύλος στον «΄Υμνο στην αγάπη», απεκάλυψε ότι το σύμπαν είναι προσωρινό καθ θα αναδομηθεί πλήρως μετά το μεγάλο παγκόσμιο δικαστήριο, καθώς θα εξαληφθεί η μόλυνση και η ανωμαλία (Singularity) που ο άνθρωπος επέφερε αυξάνοντας την εντροπία του μέσα στον παράδεισο.

Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΗΣ ΚΛΑΣΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ
(Μια απλή προσέγγιση χωρίς μαθηματικούς τύπους)

Του **Γ. Ατρείδη,** Φυσικού

Από παλιά η μελέτη της φύσης είχε προκαλέσει το ενδιαφέρον των φιλοσόφων της αρχαίας Ελλάδας, οι οποίοι πέτυχαν να ανακαλύψουν την λογική επαγωγική απόδειξη και να σημειώσουν μεγάλες επιτυχίες στα μαθηματικά. Δεν υιοθέτησαν όμως, τη μέθοδο των πειραματικών αποδείξεων, πάνω στην οποία βασίζεται η φυσική επιστήμη. Παρόλα αυτά όμως η αρχαία ελληνική φιλοσοφική σκέψη ήταν γεμάτη από έννοιες και υποθέσεις που αφορούν διάφορους τομείς της φυσικής και σχετίζονται με τους νόμους της.

Η έννοια της δύναμης αποτέλεσε τα θεμέλια της φιλοσοφίας του Εμπεδοκλή, του Αναξαγόρα και του Δημόκριτου. Η θεωρία της κίνησης του Αριστοτέλη (Αριστοτελική Φυσική), πολύ προχωρημένη για την εποχή της, ήταν μια ανάμιξη φυσικών και μαθηματικών γνώσεων με μεταφυσικές έννοιες.

Σε συνέχεια με τα παραπάνω ήρθε η γένεση της φυσικής με τη δημιουργία της πειραματικής μεθόδου. Αυτό έγινε στο 17^{ο} αιώνα με το Γαλιλαίο και διάφορους άλλους μεθοδολόγους οι οποίοι μπόρεσαν να αναπαράγουν ορισμένα φυσικά φαινόμενα, αφού πρώτα τα απομόνωσαν και τα μελέτησαν.

Η συνέχεια ήταν εκπληκτική αφού γεννήθηκαν καινούργιες επιστήμες (Χημεία, Βιολογία) και η φυσική χωρίστηκε σε τόσους πολλούς τομείς που η μελέτη της στη σημερινή εποχή είναι απόλυτα ειδικευμένη.

Αν και τις τελευταίες δεκαετίες η σύγχρονη φυσική έχει κάνει τεράστια άλματα και αποτελεί τον κύριο πόλο έλξης και έρευνας των επιστημόνων, **έχει πολύ μεγάλο ενδιαφέρον να μπορέσουμε να δείξουμε σε κάποιον που κάνει τα πρώτα βήματά του στη μελέτη της φυσικής, έναν απλό και ευχάριστο τρόπο κατανόησης και δημιουργικής ασχολίας πάνω στους νόμους της φυσικής.**

Αυτό μπορούμε να το καταφέρουμε δημιουργώντας απλά παραδείγματα από την καθημερινότητα τα οποία εξηγούνται με τους απλούς νόμους και κανόνες της φυσικής.

Ένα κλασικό παράδειγμα αποτελεί η βαρύτητα. Αφήνοντας ένα σώμα ελεύθερο από κάποιο ύψος αυτό κινείται προς τη γη.

Ο μαθητής που θα ασχοληθεί για πρώτη φορά με τη φυσική δεν είναι εξοικειωμένος με νόμους και μαθηματικούς τύπους. Καλό είναι λοιπόν να προσαρμόζουμε τα παραδείγματά μας στις προσωπικές του εμπειρίες. Έτσι μπορούμε να του δώσουμε τη δυνατότητα να κατανοήσει ευκολότερα αυτά που βλέπει να συμβαίνουν γύρω του.

Παρακάτω θα κάνουμε μια απλή προσέγγιση στην έννοια της δύναμης. Δεν θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματικούς τύπους παρά μόνο μερικά παραδείγματα από την καθημερινή ζωή που υπακούουν στους νόμους της κλασικής φυσικής.

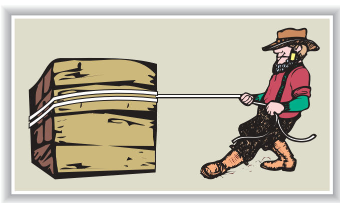
Ας δώσουμε έναν απλό ορισμό για τη δύναμη.

Δύναμη είναι η αιτία που μπορεί να παραμορφώσει τα σώματα ή να μεταβάλει την κινητική τους κατάσταση.

Όταν πιάσεις δηλαδή τον σπόγγο του μαυροπίνακα στο σχολείο και τον πιέσεις με τα δάχτυλά σου θα δεις ότι αλλάζει το σχήμα του. Άρα κατάφερες να παραμορφώσεις τον σπόγγο εφαρμόζοντας σ' αυτόν μια δύναμη.

Ο σπόγγος παραμορφώνεται όταν ασκήσουμε σε αυτόν μια δύναμη

Ας μελετήσουμε τώρα το δεύτερο κομμάτι του ορισμού. Έχουμε ένα ακίνητο κιβώτιο πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο. Δένουμε στο κιβώτιο ένα σχοινί και το τραβάμε.



Καθώς ο άνθρωπος τραβάει το κιβώτιο μεταβάλλει την κινητική του κατάσταση. Αυτό οφείλεται στη δύναμη που εφαρμόζει ο άνθρωπος πάνω στο κιβώτιο μέσω του σχοινιού.

Το κιβώτιο αρχίζει να κινείται. Επομένως αποκτάει κάποια ταχύτητα και λέμε ότι μεταβλήθηκε η κινητική του κατάσταση. Πως το πετύχαμε αυτό; Με την εφαρμογή μιας δύναμης πάνω στο κιβώτιο μέσω του σχοινιού.

Επομένως το μεγάλο συμπέρασμα που μπορούμε να βγάλουμε από τα παραπάνω είναι:

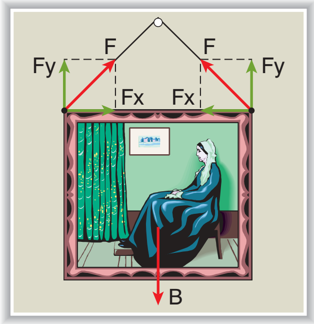
Όλες οι παραμορφώσεις και όλες οι κινήσεις των

σωμάτων στη φύση οφείλονται σε κάποιες δυνάμεις.

Τι εννοούσε ο Νεύτωνας όμως όταν έλεγε ότι:

Για να ισορροπεί ένα σώμα πρέπει η συνολική δύναμη που ασκείται πάνω του να είναι ίση με μηδέν.

Έστω ότι έχουμε ένα κάδρο κρεμασμένο σε ένα τοίχο. Το κάδρο είναι ακίνητο. Άρα ισορροπεί. Πως συμβαίνει αυτό; Στον άξονα x'x έχουμε δυο αντίθετες δυνάμεις F_X που εξουδετερώνονται (δίνουν άθροισμα μηδέν). Στον άξονα y'y έχουμε δυο δυνάμεις F_y που εξουδετερώνουν το βάρος του κάδρου. Άρα συνολικά και στους δυο άξονες η συνολική δύναμη είναι μηδέν.



Το κάδρο ισορροπεί αφού η συνολική δύναμη που ασκείται πάνω του είναι μηδέν.

Τι θα γίνει όμως αν για κάποιο λόγο σπάσει το νήμα που κρατάει το κάδρο;

Αν συμβεί αυτό οι δυνάμεις F που ήταν πάνω στο νήμα θα πάψουν να υπάρχουν. Άρα στο κάδρο θα υπάρχει μόνο μια δύναμη. Το βάρος του. Συνεπώς αυτό δεν θα μπορεί να ισορροπεί και θα κινηθεί προς τα κάτω.

Όσο περισσότερο ασκείται η δύναμη στο κάδρο τόσο αυξάνεται η ταχύτητά του.

Το συμπέρασμα που συνάγεται είναι.

Μια δύναμη μπορεί να κινήσει ένα σώμα πάνω στη διεύθυνσή της.

Ας επεκταθούμε λίγο ακόμη στην παραπάνω περίπτωση.

Έστω ότι το νήμα κόπηκε όταν το κάδρο ήταν σε ύψος 0,5 m. Τότε αυτό φτάνει στο έδαφος με μικρή ταχύτητα και οι ζημιές που προκαλούνται είναι μικρές.
Αν όμως το κάδρο βρισκόταν σε μεγαλύτερο ύψος όταν έσπανε το νήμα, οι ζημιές καθώς έφτανε στο έδαφος θα ήταν μεγαλύτερες. Αυτό σημαίνει ότι έφτασε στο έδαφος με μεγαλύτερη ταχύτητα.

Η μόνη δύναμη που ενεργεί στο κάδρο είναι το βάρος του. Παρατηρούμε ότι όσο περισσότερο ενεργεί η δύναμη τόσο αυξάνεται η ταχύτητα του κάδρου.
Άρα η δύναμη είναι η αιτία της αύξησης της ταχύτητας του κάδρου.

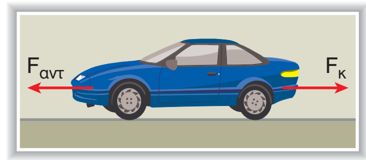
Αν μελετήσουμε την κίνηση του κάδρου, θα δούμε ότι ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνεται η ταχύτητά του είναι σταθερός. Τον ρυθμό αυτό αύξησης της ταχύτητας τον ονομάζουμε επιτάχυνση. Επομένως μπορούμε να καταλήξουμε στο δεύτερο συμπέρασμα του Νεύτωνα.

Κάθε δύναμη που εφαρμόζεται σε ένα σώμα προσδίδει σ' αυτό επιτάχυνση που έχει την κατεύθυνσή της.

Κάποιος όμως μπορεί να ρωτήσει.

Γιατί σε μερικές περιπτώσεις ενώ εφαρμόζουμε δύναμη το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα;
Π.χ. Βρισκόμαστε σ' ένα αυτοκίνητο και πατάμε το γκάζι. Τότε εμφανίζεται η δύναμη του κινητήρα που κινεί το αυτοκίνητο. Κάποια χρονική στιγμή όμως ενώ πατάμε το γκάζι η ταχύτητα του αυτοκινήτου σταθεροποιείται. Πως συμβαίνει αυτό; Γιατί η ταχύτητα του αυτοκινήτου δεν αυξάνεται αφού ασκείται σε αυτό δύναμη;

Η απάντηση είναι απλή. Για να μελετήσουμε την κίνηση ενός σώματος πρέπει να πάρουμε υπόψιν μας όλες τις δυνάμεις που ασκούνται σ' αυτό. Στο παραπάνω παράδειγμα στο αυτοκίνητο ασκείται η δύναμη του κινητήρα $F_κ$ και η δύναμη των αντιστάσεων $F_{αντ}$. Όταν το αυτοκίνητο θα έχει σταθερή ταχύτητα οι δυο αυτές δυνάμεις θα είναι αντίθετες και η συνολική δύναμη θα είναι μηδέν. Η επιτάχυνση του αυτοκινήτου θα είναι μηδέν και η ταχύτητά του σταθερή.

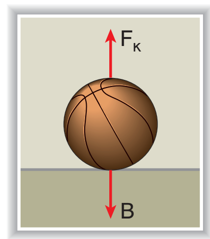


Ενώ η δύναμη του κινητήρα ασκείται στο αυτοκίνητο, η ταχύτητά του παραμένει σταθερή. Αυτό συμβαίνει γιατί υπάρχει και η αντίσταση, η οποία είναι αντίθετη με τη δύναμη του κινητήρα.

Σαν τελευταίο συμπέρασμα ο Νεύτωνας είχε πει.

Οι δυνάμεις στη φύση εμφανίζονται σε ζεύγη (ανά δύο). Σε κάθε δράση εμφανίζεται και μια αντίδραση.

Έστω ότι έχουμε μια ακίνητη μπάλα πάνω στο έδαφος. Στην μπάλα ασκείται η δύναμη του βάρους της (δράση). Τότε εμφανίζεται ακόμη μια δύναμη από το έδαφος προς την μπάλα που ονομάζεται αντίδραση. Οι δυο αυτές δυνάμεις είναι αντίθετες και η μπάλα ισορροπεί.

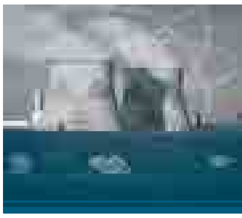


Σε κάθε δράση εμφανίζεται μια αντίδραση

Παραπάνω κάναμε μια απλή προσέγγιση στην έννοια της δύναμης. Υπάρχουν πολλές έννοιες στη φυσική που μπορούν να δοθούν με απλά, καθημερινά παραδείγματα.

Για να κατανοήσει καλύτερα τα φυσικά φαινόμενα ο μαθητής που βρίσκεται στην αρχή της μελέτης του στις φυσικές επιστήμες, καλό θα ήταν όλα τα παραπάνω να δείχνονται με εποπτικά μέσα διδασκαλίας στη διάρκεια του μαθήματος σε κάθε αίθουσα.

Γιατί όπως ξέρουμε μια εικόνα ισοδυναμεί με χίλιες λέξεις.



ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ και ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Του **Κων. Παπαστεφάνου**, Καθηγητή Τμήματος Φυσικής Α.Π.Θ.

Η Πυρηνική Ενέργεια –ενέργεια που εκλύεται από τη διάσπαση του πυρήνα, αρχίζει να αναπτύσσεται με την ανακάλυψη του φαινομένου της πυρηνικής σχάσης από τους O. Hahn και F. Strassman το 1939 και την εγκατάσταση και λειτουργία των πυρηνικών αντιδραστήρων. Ο πρώτος πυρηνικός αντιδραστήρας, «The Graphite Reactor», κατασκευάστηκε το 1943 στο Oak Ridge της Πολιτείας Tennessee (ΗΠΑ) σε πολεμική περίοδο ως μέρος του Προγράμματος Manhattan. Ο αντιδραστήρας σχεδιάστηκε και κατασκευάστηκε μέσα σε 11 μήνες, μετά την επιτυχία της πρώτης αυτοσυντηρούμενης πυρηνικής αλυσωτής αντίδρασης στις 2 Δεκεμβρίου 1942 στο Πανεπιστήμιο του Σικάγο. Χρησίμευσε ως μονάδα-πιλότος για τους αντιδραστήρες παραγωγής πλουτωνίου στο Hanford της Πολιτείας Washington και παρήγαγε τις παγκοσμίως πρώτες ποσότητες πλουτωνίου της τάξεως του γραμμαρίου που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάπτυξη και κατασκευή ενός πυρηνικού όπλου.

Συγχρόνως ο αντιδραστήρας αυτός έγινε η πρώτη πηγή παραγωγής ραδιοϊσοτόπων και ένα ανεκτίμητο εργαλείο στην έρευνα για τη μελέτη των φαινομένων της ακτινοβολίας της ύλης. Στις 2 Αυγούστου 1946, η πρώτη αποστολή ραδιοϊσοτόπων από τον αντιδραστήρα είχε προορισμό το Νοσοκομείο Bernard Free Skin and Cancer Hospital στο St. Louis Missouri (ΗΠΑ).

Σήμερα ραδιοϊσότοπα χρησιμοποιούνται ευρύτατα σχεδόν σε κάθε πεδίο της Επιστήμης και της Τεχνολογίας από την ιατρική διάγνωση και θεραπεία ως τον πόλεμο των άστρων στο διάστημα. Από το 1957 οι πυρηνικοί αντιδραστήρες άρχισαν να κατασκευάζονται για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας με ισχύ 60 MW αρχικά και 1600 MW στις μέρες μας. Σήμερα (στο τέλος του 1998) λειτουργούν 436 πυρηνικοί αντιδραστήρες και είναι υπό κατασκευήν έτεροι 38[1]. Η χώρα μας μέχρι στιγμής δεν έχει εκδηλώσει την όποια πρόθεσή της να αποκτήσει πυρηνικό αντιδραστήρα.

Ταυτόχρονα με την εγκατάσταση των πυρηνικών αντιδραστήρων άρχισε και η αλυσίδα των πυρηνικών ατυχημάτων. Από την 12η Δεκεμβρίου 1952 στον πειραματικό αντιδραστήρα στο Chalk River, Καναδάς (κοντά στην Οττάβα) ως την 9η Φεβρουαρίου 1991 στην Mihama-cho της Ιαπωνίας. Τα μεγαλύτερα Πυρηνικά ατυχήματα που στοίχισαν στο περιβάλλον είναι του Windscale (7.10.1957) στην Μεγ. Βρεττανία, του Three Mile Island (28.3.1979) στο Harrisburg της Πολιτείας Pennsylvania (ΗΠΑ) και του Chernobyl (26.4.1986) στην Ουκρανία της Σοβιετικής Ενώσης.

Όμως το περιβάλλον υπέστη εξίσου οδυνηρές δοκιμασίες και με την έκρηξη των πυρηνικών, άλλως ατομικών, βομβών της Χιροσίμα (6.8.1945) και του Ναγκασάκι (9.8.1945) και ποικίλες όσες, ων ουκ έστιν αριθμός, δοκιμές πυρηνικών όπλων στην έρημο του New Mexico και της Νεβάδα, του Kazachstan (Ρωσία) και του Lop-Nor (Κίνα), των νησιών Bikini Attol και Muroroa στον Νότιο Ειρηνικό.

Σήμερα στο φυσικό μας περιβάλλον δεν θα συναντήσουμε μόνο τα αυτοφυή ουράνιο-ράδιο, θόριο και τα θυγατρικά τους ραδιοϊσότοπα ως και το κάλιο-40, αλλά και τα πολύ επικίνδυνα παράγωγα της σχάσης καίσιο-137 και στρόντιο-90, το πλουτώνιο-239, ξένα προς τη φύση από την πρώτη ημέρα της δημιουργίας της ύλης, αλλά πολύ οικεία στις μέρες μας και θα μας ταλανίζουν γεννεές δεκατέσσερες!

Αυτό το περιβάλλον που τόσο έχει ταλαιπωρηθεί τα τελευταία χρόνια από τους καπνούς του Κόλπου που ακόμα σιγοκαίουν (;) ως τις πάσης φύσεως διαρροές και απορρίψεις των τάνκερς στις θάλασσες –υδάτινα βιτρώ (από τις πετρελαιοκηλίδες) που αργοπεθαίνουν καθημερινά, ας μη του δίνουμε μια μόνο μέρα τον χρόνο, αυτή της 5ης Ιουνίου, αλλά κάτι περισσότερο, όπως π.χ. με την Διάσκεψη Κορυφής (Earth Summit 92) του Ρίο[2] δέκα ημέρες, ή του Κυότο (Ιαπωνία)[3] για να μη βρεθούμε και δε θ' αργήσει με εκείνη τη θλιβερή όψη του κορμοράνου τον καιρό του πολέμου στον Κόλπο.

---

1. Διεθνής Επιτροπή Ατομικής Ενέργειας (International Atomic Energy Agency, IAEA) Μάρτιος 2000.
2. 3-12 Ιουνίου 1992
3. 1-10 Δεκεμβρίου 1997

ΔΙΑΣΤΗΜΑ:
ΕΛΠΙΖΟΝΤΑΣ ΣΕ ΜΙΑ ΣΥΝΑΝΤΗΣΗ

Του **Δ. Μαμούρα,** Φυσικού

Μόλις δόθηκε η τεχνολογική δυνατότητα στον άνθρωπο άρχισε να διερευνά την πιθανότητα ύπαρξης ζωής στο διάστημα. Η Σελήνη και ο Άρης είναι από τα πρώτα ουράνια σώματα που τέθηκαν σε παρατήρηση –από μακριά στην αρχή– αλλά στη συνέχεια με επίσκεψη του ανθρώπου στη Σελήνη και αποστολή ρομπότ στον Άρη (Pathfinder).

Μέχρι στιγμής δεν έχει εντοπιστεί πουθενά ζωή, στην μορφή που εμείς εννοούμε και την αντιλαμβανόμαστε.

Υπάρχει ζωή εκτός γης;

Η αντίθετη άποψη το λιγότερο που θα μπορούσε να χαρακτηριστεί είναι εγωιστική. Στο τεράστιο πλήθος πλανητών που υπάρχουν, είναι απίθανο να μην επικράτησαν συνθήκες γέννησης και ανάπτυξης ζωής, όπως στο δικό μας πλανήτη. Οι επιστήμονες με καθαρά μεθόδους πιθανοτήτων, κατέληξαν πως οι κατοικήσιμοι πλανήτες είναι περίπου 10.000.

Είναι δυνατή η επαφή μας με άλλα εξωγήινα πλάσματα;

Αυτό το συναρπαστικό ερώτημα έρχεται αντιμέτωπο με την πραγματικότητα.

Οι αποστάσεις μεταξύ των άστρων (άρα και των πλανητών που τους περιβάλλουν) είναι τεράστιες. Ο πιο κοντινός αστέρας στο πλανητικό μας σύστημα (α του Κενταύρου) απέχει 4,3 έτη φωτός. Δηλαδή το φως που ξεκινά από αυτόν, φτάνει στη γη σε 4,3 χρόνια (ενώ από τον ήλιο φτάνει στη γη σε 8 περίπου λεπτά). Η μετάβαση στον α του Κενταύρου με ένα συνηθισμένο διαστημόπλοιο διαρκεί πάνω από 100.000 χρόνια. Αν προσεγγίσουμε την ταχύτητα του φωτός, χρειαζόμαστε σύμφωνα με την κλασική φυσική 5 χρόνια να πάμε και άλλα τόσα να επιστρέψουμε. Τα χρόνια αυτά είναι πολλά για διάρκεια διαστημικού ταξιδιού.

Υπάρχει όμως και η διαστολή του χρόνου!

Σύμφωνα με την ειδική θεωρία της σχετικότητας, σε ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με ταχύτητα της τάξεως της ταχύτητας του φωτός παρατηρείται διαστολή του χρόνου. Αυτός που βρίσκεται στο κινούμενο σύστημα δεν αντιλαμβάνεται τη διαφορά. Ένας ακίνητος παρατηρητής βλέπει το χρόνο στο κινούμενο σύστημα να διαστέλλεται. Έτσι τα γεγονότα που συμβαίνουν εκεί, έχει την αίσθηση πως διαρκούν περισσότερο, δηλαδή εξελίσσονται πιο αργά.

Για μια μετάβαση λοιπόν που διαρκεί 10 έτη σύμφωνα με το νόμο της ομαλής κίνησης, στο ταχέως κινούμενο σύστημα μπορεί να αντιστοιχούν 5 έτη ή και λιγότερα.

Η σχέση που συνδέει τους χρόνους που μετρά ο ακίνητος και ο κινούμενος παρατηρητής είναι:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

(υ: ταχύτητα του κινούμενου συστήματος και c: ταχύτητα του φωτός)

Παρατηρούμε πως όταν η υ προσεγγίζει τη c, το κλάσμα μεγαλώνει απεριόριστα. Με εφαρμογή του παραπάνω τύπου βρίσκουμε την επίπτωση που έχει η ταχύτητα σε χρονική διάρκεια 100 ετών στο γήινο σύστημα:

Ταχύτητα	0.8 c	0.9 c	0.99 c	0.999 c	0.9999 c
Χρονική διάρκεια (σε έτη)	60	43.6	14.1	4.5	1.4

Είναι φανερό ότι αν καταφέρουμε να κινηθούμε με ταχύτητα κοντά στην ταχύτητα του φωτός, ο περιορισμός του χρόνου παύει να υπάρχει.

Υπάρχει όμως και η διαστολή της μάζας

Εκτός της διαστολής του χρόνου παρατηρείται και διαστολή της μάζας στις πολύ μεγάλες ταχύτητες. Η νέα τιμή της δίνεται από τη σχέση

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

και αυξάνεται απεριόριστα στις μεγάλες ταχύτητες, όπως περιγράψαμε και για το χρόνο.

Συνέπεια της αύξησης αυτής: Η ενέργεια που πρέπει να προσφέρουμε για να αποκτήσει ένα διαστημόπλοιο σχεδόν την ταχύτητα του φωτός είναι πολύ μεγάλη.

Στη σχέση που δίνει την κινητική ενέργεια του διαστημοπλοίου:

$$E_K = \frac{1}{2} m u^2$$

και οι δύο όροι (m και u) είναι πολύ μεγάλοι. Στον πίνακα δίνεται η κινητική ενέργεια ενός διαστημοπλοίου μάζας 5000 kg (όταν είναι ακίνητο) για διάφορες ταχύτητες, και τα kg ουρανίου που αν διασπαστούν, δίνουν την αντίστοιχη ενέργεια.

Ταχύτητα	Κινητική ενέργεια (Joule)	Ποσότητα Ουρανίου
0.8 c	24.10^{19}	2920 τόνοι
0.9 c	$41{,}8.10^{19}$	5097 τόνοι
0.99 c	$156{,}3.10^{19}$	19061 τόνοι
0.999 c	$502{,}3.10^{19}$	61256 τόνοι
0.9999 c	$1590{,}6.10^{19}$	193902 τόνοι

Άλλα προβλήματα για ένα διαστημικό ταξίδι

Κινούμενοι με ταχύτητα περίπου ίση με την ταχύτητα του φωτός, κάθε συνάντηση με φορτισμένα σωματίδια του διαστήματος (που είναι άφθονα) ισοδυναμεί με βομβαρδισμό από ακτινοβολία. Είναι σα να μας σκοπεύει συνεχώς ένας ατομικός επιταχυντής με σωματίδια υψηλής ενέργειας. Η προστασία μας από αυτά για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα είναι με τα σημερινά δεδομένα αδύνατη.

Η διαστολή του χρόνου που περιγράψαμε μας επιτρέπει να καλύψουμε μεγάλες αποστάσεις αλλά δημιουργεί το ερώτημα:

Μετά το ταξίδι σε ποιον αιώνα θα γυρίσουμε και σε ποια κατάσταση θα βρούμε τη γη όταν επιστρέψουμε;

Ένα ταξίδι ενός έτους με πολύ μεγάλη ταχύτητα μπορεί να ισοδυναμεί για τη γη με 100 ή 200 χρόνια. Άρα, όταν επιστρέψουμε οι δικοί μας άνθρωποι δε θα υπάρχουν, όπως και αυτοί που προετοίμασαν το ταξίδι.

Οποιαδήποτε σύγκρουση με ακόμα και μικρό ουράνιο σώμα ισοδυναμεί σε αυτές τις ταχύτητες με καταστροφή. Η δυνατότητα ελιγμών δεν υπάρχει, γιατί απαιτεί τεράστια ώθηση και κάποια χρονική διάρκεια.

Τελικά θα πιούμε καφέ με κάποιον εξωγήινο;

Σύμφωνα με τα παραπάνω, μάλλον όχι. Και λέμε μάλλον, γιατί η ζωή έχει μεγαλύτερη φαντασία από εμάς... ◆

Τελικά εμείς τι είμαστε;
Αποκυήματα φαντασίας κάποιων τρελών γήινων;

Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ των ΛΑΘΩΝ ή πώς ΜΑΘΑΙΝΟΥΜΕ από τα ΛΑΘΗ ΜΑΣ

Του **Ξ. Σουπιού,** Χημικού

Πολύ συχνά οι μαθητές υποπίπτουν σε λάθη που μπορούσαν να είχαν αποφύγει αν ήταν περισσότερο προσεκτικοί ή τους είχαν επισημανθεί έγκαιρα από τους καθηγητές τους.

Λάθος 1ο

Το πηλίκο $\frac{m}{V}$ εκφράζει πάντα την πυκνότητα του υλικού μιας ουσίας;

Ένας βιαστικός μαθητής θα απαντούσε βεβαίως ΝΑΙ. Ας δούμε όμως αν έχει δίκιο.

Στην Α Λυκείου οι μαθητές γνωρίζουν την καταστατική εξίσωση των αερίων

$$PV = nRT \qquad (1)$$

Με κατάλληλες μετατροπές στη σχέση (1) μπορούμε να δημιουργήσουμε το πηλίκο $\frac{m}{V}$. Έτσι η σχέση (1) μπορεί να γραφτεί

$$PV = \frac{m}{M}RT \quad ή \quad PM = \frac{m}{V}RT \qquad (2)$$

όπου Μ η μάζα του mole.

Στη σχέση (2) το πηλίκο $\frac{m}{V}$ εκφράζει την πυκνότητα (ρ) του αερίου, γιατί τα m και V εκφράζουν τη μάζα και τον όγκο του αερίου. Μπορούμε επομένως να αντικαταστήσουμε το πηλίκο $\frac{m}{V}$ με ρ, οπότε η σχέση (2) γράφεται

$$PM = \rho RT.$$

Ας πάρουμε μια σχέση από την ύλη της Χημείας Β Λυκείου θετικής κατεύθυνσης, που έχει μεγάλη ομοιότητα με την καταστατική εξίσωση των αερίων, $\Pi V = nRT$ (3), η οποία αποτελεί τη σχέση της ωσμωτικής πίεσης των διαλυμάτων. Με μετατροπές ανάλογες με αυτές που κάναμε στην καταστατική εξίσωση των αερίων καταλήγουμε στη σχέση

$$\Pi M = \frac{m}{V} \cdot RT \qquad (4)$$

Στη σχέση (4) το πηλίκο $\frac{m}{V}$ δεν εκφράζει την πυκνότητα γιατί οι όροι του m και V παρέχουν τη μάζα της διαλυμένης ουσίας και τον όγκο του διαλύματος αντίστοιχα, δηλαδή συνδέουν γνωρίσματα διαφορετικών υλικών.

Ας δούμε μια άσκηση που δόθηκε ως θέμα στις Πανελλήνιες Εξετάσεις του 1993 και πολλοί μαθητές έκαναν το παραπάνω λάθος κατά τη λύση της άσκησης.

3 g θείου (S_8) διαλύονται σε 100 g κυκλοεξανίου (C_6H_{12}). Να υπολογιστεί η ωσμωτική πίεση του διαλύματος στους 27°C.

Δίνονται: Η πυκνότητα του διαλύματος $\rho = 1{,}03 \cdot 10^3$ g/L, $A_{r,S} = 32$, ατομικότητα$_S = 8$.

Ο μαθητής ξεκινάει με τον τύπο της ωσμωτικής πίεσης $\Pi V = nRT$ και μετά από αντικατάσταση του n, με $n = \frac{m}{M}$ και επίλυση ως προς Π, καταλήγει στη σχέση

$$\Pi = \frac{m}{V} \cdot \frac{RT}{M} \qquad \Pi = \rho \cdot \frac{RT}{M}$$

η οποία είναι βέβαια λάθος, παρασυρμένος από το γεγονός ότι στην άσκηση δίνεται κάποια τιμή πυκνότητας.

Συμπέρασμα: *Είναι απαραίτητο να γράφουμε δίπλα στα σύμβολα των διαφόρων μεγεθών τα αρχικά των ουσιών που αντιπροσωπεύουν, δηλαδή*

$$\frac{m_{αερίου}}{V_{αερίου}} \quad ή \quad \frac{m_{διαλυμένης\ ουσίας}}{V_{διαλύματος}}$$

Λάθος 2ο

Ας ξαναγυρίσουμε στην καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων $PV = nRT$. Ένα λάθος που κάνουν πολλοί μαθητές πολύ συχνά είναι κατά την αντικατάσταση των μεγεθών της πίεσης και του όγκου. Ποιος είναι αυτός που αποφασίζει σε τι μονάδες πρέπει να μετριούνται τα μεγέθη *P*, *V* για να μπορούμε να τα αντικαταστήσουμε, χωρίς κίνδυνο να κάνουμε λάθος, στον παραπάνω τύπο;

Η τιμή της παγκόσμιας σταθεράς των αερίων που είναι

$$R = 0{,}082\ \mathrm{L \cdot atm \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}},$$

είναι αυτή που αποφασίζει.

Έτσι η πίεση, *P*, πρέπει να μετριέται σε atm και ο όγκος, *V*, πρέπει να μετριέται σε L. Οι μετατροπές είναι εύκολες, αν γνωρίζουμε ότι:

1 L = 1.000 mL = 1.000 cm^3

1 atm = 76 cm Hg = 760 mm Hg

Λάθος 3ο

Είναι σωστή η χρήση της έκφρασης «περιεκτικότητα κ.ό.»;

Σε ορισμένα βιβλία Χημείας στις εκφράσεις περιεκτικότητας συναντάμε τη μορφή περιεκτικότητας % κ.ό., μορφή που μπορεί να μας οδηγήσει σε λάθη.

Ας δούμε με τη βοήθεια παραδειγμάτων δύο διαφορετικές αναλυτικές εκφράσεις της παραπάνω περιεκτικότητας.

- Δίνεται ένα διάλυμα χλωριούχου νατρίου περιεκτικότητας 10% κ.ό. Αυτό σημαίνει ότι σε 100 mL (υδατικού) διαλύματος περιέχονται **10 g** διαλυμένου χλωριούχου νατρίου.

  Ας δούμε ένα άλλο παράδειγμα.

- Δίνεται αέριο μίγμα (διάλυμα) NH_3, N_2, H_2, περιεκτικότητας 20% κ.ό. σε NH_3. Αυτό σημαίνει ότι σε 100 mL του αερίου μίγματος περιέχονται **20 mL** NH_3.

Παρατηρούμε ότι η ίδια έκφραση (% κ.ό.) περιεκτικότητας δίνει με διαφορετικό τρόπο την ποσότητα ενός συστατικού του διαλύματος αν πρόκειται για υδατικό ή για αέριο διάλυμα.

Συμπέρασμα: Για να αποφύγουμε λοιπόν λάθη που οφείλονται στη διπλή σημασία του όρου περιεκτικότητα % κ.ό., είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούμε τις εκφράσεις περιεκτικότητας:

- % w/v, που εκφράζει τα g της διαλυμένης ουσίας που περιέχονται σε 100 mL διαλύματος και
- % v/v, που εκφράζει τα mL της διαλυμένης ουσίας που περιέχονται σε 100 mL διαλύματος, ανεξάρτητα από τη φύση του διαλύματος.

◆

AMEDEO AVOGADRO (1776 - 1856)*

Ο Avogadro γεννήθηκε στο Τουρίνο, πρωτεύουσα του Βασιλείου της Σαρδηνίας και της επαρχίας του Πιεμόντε (Πεδεμοντίου). Προερχόταν από παλιά αριστοκρατική οικογένεια και ο πατέρας του ήταν ανώτατος δικαστικός. Σπούδασε νομικά στο Πανεπιστήμιο του Τουρίνου. Η ενασχόλησή του με τις φυσικές επιστήμες φαίνεται ότι άρχισε με διάβασμα κατά τις ελεύθερες ώρες του και την παρακολούθηση μαθημάτων φυσικής στο Πανεπιστήμιο.

Το 1804 έγινε αντεπιστέλλον μέλος της Ακαδημίας Επιστημών του Τουρίνου, μετά την υποβολή δυο δοκιμίων σχετικών με τον ηλεκτρισμό. Η πρώτη δημοσίευση αναφερόταν επίσης σε ηλεκτρικά φαινόμενα· συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας τα πειραματικά αποτελέσματα γνωστών Ιταλών φυσικών, όπως των Volta και Beccaria, χωρίς να καταφύγει στα μαθηματικά, ανέλυε την ηλεκτρική κατάσταση των μονωτών και χρησιμοποιώντας κυρίως τη διαίσθησή του πλησίασε πολύ στην ερμηνεία των διηλεκτρικών ιδιοτήτων της ύλης.

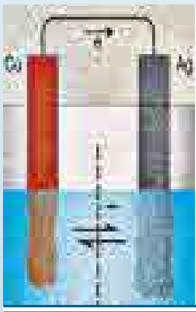
Σε ηλικία 30 ετών αποφάσισε να εγκαταλείψει τη διοικητική του θέση και να στραφεί προς την εκπαίδευση. Αρχικά ασχολήθηκε ως προγυμναστής (repetiteur) με τη φροντιστηριακή διδασκαλία της φυσικής στο Πανεπιστήμιο. Η θέση αυτή δεν τον ικανοποιούσε και μόλις παρουσιάστηκε η ευκαιρία κατέλαβε θέση καθηγητή "θετικής φιλοσοφίας" (μαθηματικά και φυσική) στο Βασιλικό Κολλέγιο της μικρής πόλης Vercelli κοντά στο Τουρίνο. Παρόλο το βαρύγδουπο τίτλο του, το Κολλέγιο δεν ήταν παρά ένα συνηθισμένο γυμνάσιο χωρίς τίποτε το ιδιαίτερο. Εντούτοις, ο Avogadro είχε τώρα στη διάθεσή του πολύ περισσότερο χρόνο για μελέτη και εμβάθυνση στα θέματα που τον ενδιέφεραν.

Μελετώντας τις ιδιότητες διαφόρων απλών ενώσεων στην αέρια κατάσταση, σε συνδυασμό και με το νόμο των απλών αναλογιών του Gay-Lussac, ο Avogadro υπέθεσε ότι "κάτω από όμοιες συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας ίσοι όγκοι όλων των αερίων περιέχουν τον ίδιο αριθμό μορίων". Αν η λέξη μόριο είχε τη σημερινή σημασία, η υπόθεσή του ίσως να συναντούσε καλύτερη υποδοχή. Όμως μόριο δε σήμαινε τότε παρά σωματίδιο (τον όρο, molecula, είχε χρησιμοποιήσει πρώτος το 1658 ο Ιταλός Cassendi με την έννοια της μικρής μάζας, ως υποκοριστικό του mole, δηλαδή μεγάλου όγκου). Οι έννοιες ατόμου και μορίου δεν είχαν ακόμη ξεκαθαριστεί, με αποτέλεσμα η υπόθεσή του να μοιάζει παράλογη, αφού όλοι πίστευαν ότι τα μόρια των αερίων στοιχείων (οξυγόνο, υδρογόνο, άζωτο) αποτελούνταν από ένα μόνο άτομο. Θα έπρεπε λοιπόν ένα σωματίδιο να αποτελείται από δύο τουλάχιστον άτομα είτε τα άτομα να είναι διαιρούμενα. Ο Avogadro υποστήριξε βέβαια ότι πράγματι τα μόρια των απλών αερίων είναι διατομικά, αλλά κάτι τέτοιο δε μπορούσε να δικαιολογηθεί: όλοι πίστευαν ότι όμοια άτομα απωθούνται μεταξύ τους, όχι μόνο επειδή έχουν όμοια ηλεκτρικά φορτία, αλλά και επειδή περιβάλλονται από μια "ατμόσφαιρα θερμότητας", με την οποία εξηγούσαν τη θερμική διαστολή των αερίων. Εξάλλου, ο J. Dalton είχε μόλις αποδείξει πειστικά ότι τα άτομα δεν είναι δυνατό να διαιρούνται. Στο δίλημμα λοιπόν "διατομικά μόρια ή διαιρούμενα άτομα" η απάντηση φυσιολογικά ήταν απορρριπτική και για τις δύο εκδοχές. Ας μην ξεχνάμε ότι δεν υπήρχε καθόλου πειραματική υποστήριξη. Έτσι, η πρωτοποριακή για την εποχή του θεωρία θα έμενε λησμονημένη επί 50 ολόκληρα χρόνια, κατά τα οποία πάντως η χημεία δεν έπαψε να προχωρεί με μεγάλα βήματα, παρόλη την έλλειψη θεωρητικού υπόβαθρου.

Κατά τη διάρκεια της παραμονής του στο Vercelli, ο Avogadro δημοσίευσε συνολικά 12 εργασίες που αναφέρονταν κυρίως στην ειδική θερμότητα –σωμάτων στη στερεά, υγρή και αέρια κατάσταση– την οποία προσπαθούσε να συσχετίσει με διάφορες φυσικές και χημικές ιδιότητες, όπως το δείκτη διάθλασης, τη συγγένεια προς το οξυγόνο, την ηλεκτροθετικότητα, κτλ. Ανεξάρτητα από τα συμπεράσματά του, τα οποία βασίζονταν σε πειραματικά δεδομένα χαμηλής αξιοπιστίας, ήταν η πρώτη σοβαρή προσπάθεια συσχετισμού φυσικοχημικών ιδιοτήτων.

Το 1834 δημοσίευσε τμηματικά το επιβλητικό τετράτομο έργο του "Φυσική των Σωμάτων που είναι ζυγίσιμα" (Fisica dei corpi ponderabili), όπου εξέταζε διεξοδικά τις ιδιότητες των μη αβαρών σωμάτων (τα αβαρή ήταν το φως, η θερμότητα, ο ηλεκτρισμός και ο μαγνητισμός, με τα οποία δεν ασχολήθηκε στο σύγγραμμά του). Ο θάνατος τον βρήκε σε προχωρημένη ηλικία, με ακόμη ακμαίες τις πνευματικές του δυνάμεις.

* Από το βιβλίο του Αν. Βάρβογλη: «Μεγάλοι Χημικοί: Η Παλιά Φρουρά», Εκδόσεις ΖΗΤΗ.



Η ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΧΗΜΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

Του **Γ. Παπαγεωργίου**, Επίκ. Καθηγητή Χημείας του Δ.Π.Θ.

Η λειτουργία των ηλεκτροχημικών στοιχείων είναι ένα από τα θέματα που δύσκολα γίνονται κατανοητά από τους μαθητές. Το γεγονός αυτό είναι αναμενόμενο, αφού για την κατανόηση της λειτουργίας τους θα πρέπει να συνδυαστούν αρκετές γνώσεις από προηγούμενα κεφάλαια της χημείας.

Το πρωταρχικό ερώτημα των μαθητών «πώς χημικές δράσεις μπορούν να παράγουν ηλεκτρικό ρεύμα;» μπορεί να βρει μια πρώτη απάντηση στο χώρο της οξειδοαναγωγής: «Αφού στις οξειδοαναγωγικές αντιδράσεις γίνεται μετακίνηση ηλεκτρονίων από μια ουσία που οξειδώνεται σε μία που ανάγεται, τότε αν η ουσία που οξειδώνεται βρίσκεται σε διαφορετικό χώρο από αυτήν που ανάγεται, η μετακίνηση των ηλεκτρονίων θα μπορούσε να γίνει μέσω ενός σύρματος. Εξ' ορισμού το σύρμα αυτό θα ήταν ρευματοφόρο». Όμως, μια ολοκληρωμένη απάντηση προαπαιτεί, πέρα από την κατανόηση του φαινομένου της οξείδωσης και της αναγωγής, την κατανόηση και πολλών ακόμη θεμάτων όπως: της έννοιας της χημικής ισορροπίας και της αρχής Le Chatelier, της έννοιας της ηλεκτροχημικής σειράς, έννοιες που αφορούν στις ημιπερατές μεμβράνες ή στους ηλεκτρολυτικούς συνδέσμους (εξαρτάται από την ηλεκτροχημική διάταξη που θα χρησιμοποιηθεί κατά τη διδασκαλία), θέματα που αφορούν στο κλειστό ηλεκτρικό κύκλωμα, ακόμη και θέματα που αφορούν στις έννοιες του διαλύματος ή και του ιόντος. Δυστυχώς, στις περιπτώσεις αυτές, αν έστω και μία από τις προαπαιτούμενες γνώσεις δεν υπάρχει στο μαθητή, διακόπτεται η συνέχεια στη σκέψη του και η κατανόηση του διδασκόμενου θέματος δεν μπορεί να επιτευχθεί.

Πέρα από το γεγονός ότι οι προαπαιτούμενες γνώσεις θα πρέπει να υπάρχουν στο μαθητή, ο εκπαιδευτικός θα πρέπει επίσης να του δώσει τη δυνατότητα να τις ανακαλέσει την κατάλληλη στιγμή, ώστε ο συνδυασμός τους με τις νέες πληροφορίες να οδηγήσουν το μαθητή στην απόκτηση της νέας γνώσης. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στις περιπτώσεις αυτές είναι πολύ σημαντικός.

Ποιες γνώσεις λοιπόν, θα πρέπει να ανακληθούν για την κατανόηση της λειτουργίας των ηλεκτροχημικών στοιχείων και με ποια αλληλουχία; Ας μελετήσουμε μέσα από ένα παράδειγμα το θέμα αυτό:

Αρχικές επιλογές

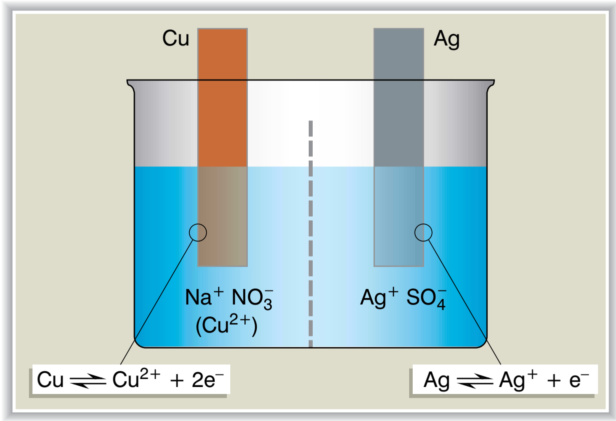
Στο παράδειγμα θα χρησιμοποιηθεί ηλεκτροχημική διάταξη με ηλεκτρόδια Cu σε $NaNO_3$ και Ag σε Ag_2SO_4, ενώ η επικοινωνία των δύο ημιστοιχείων θα γίνεται με πορώδες διάφραγμα. Η χρήση ηλεκτρολύτη στο πρώτο ηλεκτρόδιο που δεν παρέχει στο διάλυμα ιόντα χαλκού διευκολύνει στην ηλεκτροδιάλυση του χαλκού, ενώ αντίθετα η χρήση ηλεκτρολύτη στο δεύτερο ηλεκτρόδιο που παρέχει στο διάλυμα ιόντα αργύρου διευκολύνει στην ηλετροαπόθεση. Η χρήση διάταξης με πορώδες διάφραγμα διευκολύνει στην καλύτερη κατανόηση της μετακίνησης των ιόντων από το ένα ημιστοιχείο στο άλλο.

Μπορούμε να διακρίνουμε τρεις φάσεις κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας που αφορά στην εξήγηση της λειτουργίας του στοιχείου: Στην **1η φάση** γίνονται διευκρινίσεις ως προς τα φαινόμενα και τις έννοιες που διέπουν το ηλεκτροχημικό στοιχείο πριν αυτό αρχίσει να λειτουργεί. Στη **2η φάση** γίνεται μελέτη, σε σχέση με την προϋπάρχουσα κατάσταση, της νέας κατάστασης που προκύπτει καθώς εμφανίζεται ροή ηλεκτρικού ρεύματος μέσα από τη διάταξη. Σε μια **3η φάση** σχολιάζεται η λήξη της λειτουργίας του στοιχείου.

Φάση 1η: Πριν την έναρξη λειτουργίας του ηλεκτροχημικού στοιχείου

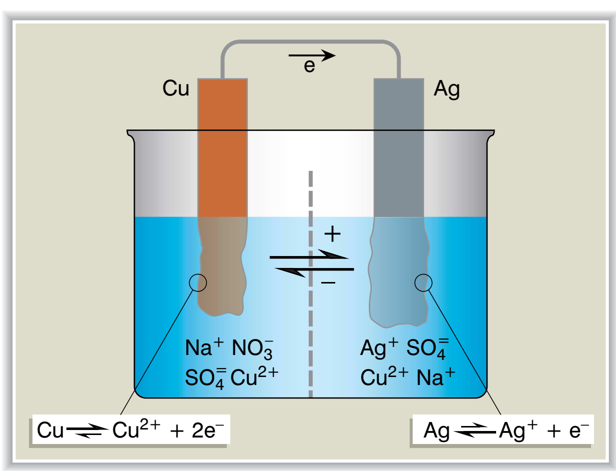
1. Στη διεπιφάνεια μέταλλου-διαλύματος υπάρχει ετερογενής ισορροπία μεταξύ του μετάλλου και του αντίστοιχου ιόντος:

$$Cu \rightleftharpoons Cu^{2+} + 2e^- \qquad Ag \rightleftharpoons Ag^+ + e^-$$



2. Η ηλεκτροδιαλυτική τάση του χαλκού είναι μεγαλύτερη από αυτήν του αργύρου, αφού ο χαλκός είναι ηλεκτροθετικότερο στοιχείο από τον άργυρο (ηλεκτροχημική σειρά). Συνεπώς η ελευθέρωση ηλεκτρονίων στη μάζα του μεταλλικού ελάσματος του χαλκού είναι πιο έντονη από αυτήν στη μάζα του μεταλλικού ελάσματος του αργύρου, γεγονός που δημιουργεί και μεγαλύτερη συσσώρευση ηλεκτρονίων στο μεταλλικό χαλκό απ' ότι στον μεταλλικό άργυρο πριν ακόμη ξεκινήσει η λειτουργία του στοιχείου.
3. Στο χώρο γύρω από την ημιπερατή μεμβράνη δε γίνεται μετακίνηση ιόντων.
4. Τα διαλύματα στα δύο ημιστοιχεία περιέχουν: στο αριστερό ιόντα Na^+ και NO_3^- που προϋπήρχαν, καθώς και μικρή ποσότητα ιόντων Cu^{2+} που δημιουργούνται από την ηλεκτροδιάλυση του χαλκού, ενώ στο δεξιό ιόντα Ag^+ και $SO_4^=$.

Φάση 2η: Μετά την έναρξη λειτουργίας του ηλεκτροχημικού στοιχείου



1. Αν τα δύο μεταλλικά ελάσματα ενωθούν εξωτερικά με ένα μεταλλικό αγωγό, τότε το μεγάλο πλεόνασμα ηλεκτρονίων που προϋπήρχε στο μεταλλικό έλασμα του χαλκού, σε σχέση με αυτό του αργύρου, δημιουργεί κίνηση ηλεκτρονίων μέσω του αγωγού (προς αποκατάσταση ισορροπίας).
2. Η απομάκρυνση των ηλεκτρονίων από το μεταλλικό έλασμα του χαλκού μετατοπίζει την ισορροπία μεταξύ του μεταλλικού χαλκού και των ιόντων του προς την πλευρά των ιόντων:

$$\boxed{Cu \rightleftharpoons Cu^{2+} + 2e^-}$$

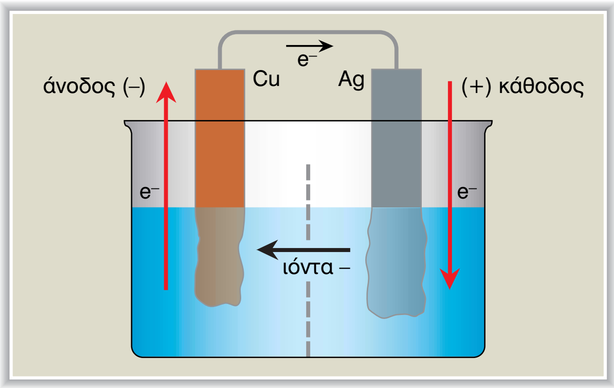
Άρα στο ηλεκτρόδιο του χαλκού συμβαίνει οξείδωση.

Αντίθετα, η μεταφορά ηλεκτρονίων μέσω του σύρματος στο μεταλλικό έλασμα του αργύρου μετατοπίζει την ισορροπία μεταξύ του μεταλλικού αργύρου και των ιόντων του προς την πλευρά του αργύρου:

$$\boxed{Ag \rightleftharpoons Ag^+ + e^-}$$

Άρα στο ηλεκτρόδιο του αργύρου συμβαίνει αναγωγή.
3. Στο χώρο γύρω από την ημιπερατή μεμβράνη γίνεται μετακίνηση ιόντων. Μόνον έτσι εξάλλου, δικαιολογείται ένα πλήρες κύκλωμα που εξασφαλίζει τη συνεχή ροή ηλεκτρονίων στο μεταλλικό αγωγό. Διαφορετικά, θα υπήρχε ροή ηλεκτρονίων για ελάχιστο χρόνο, όσο θα απαιτούσε η εξισορρόπηση των ηλεκτρονίων στα δύο μέταλλα. Τα αρνητικά ιόντα κινούνται προς τα αριστερά, ενώ τα θετικά προς τα δεξιά, αντισταθμίζοντας έτσι τα φορτία σε κάθε ημιστοιχείο.
4. Το διάλυμα στο αριστερό ημιστοιχείο περιέχει ιόντα Na^+ και NO_3^- που προϋπήρχαν, Cu^{2+} που συνεχώς δημιουργούνται από την ηλεκτροδιάλυση του χαλκού, καθώς και $SO_4^=$ που μεταφέρονται από το δεξιό ημιστοιχείο. Αντίθετα, το διάλυμα στο δεξιό ημιστοιχείο περιέχει ιόντα Na^+ και Cu^{2+} που μεταφέρθηκαν από το αριστερό ημιστοιχείο, ιόντα $SO_4^=$ που δεν έχουν ακόμη μετακινηθεί, καθώς και όσα ιόντα Ag^+ δεν έχουν αποτεθεί στο μεταλλικό έλασμα του αργύρου.
5. Αν προσέξουμε την κίνηση των φορτίων θα δούμε ότι αυτή γίνεται με μορφή ηλεκτρονίων στα μεταλλικά ελάσματα και στο μεταλλικό αγωγό, ενώ με μορφή ιόντων στα διαλύματα. Μάλιστα, στο αριστερό ηλεκτρόδιο η κίνηση των ηλεκτρονίων είναι ανοδική, κάτι που δικαιολογεί την ονομασία «άνοδος», ενώ στο δεξιό ηλεκτρόδιο είναι καθοδική, που δικαιολογεί την ονομασία «κάθοδος». Η διαρκής δημιουργία πλεονάσματος ηλεκτρονίων στο

χαλκό (λόγω της μετατόπισης της ισορροπίας χαλκού - ιόντος χαλκού προς την πλευρά του ιόντος και των ηλεκτρονίων) τον καθιστά αρνητικό πόλο του ηλεκτροχημικού στοιχείου, ενώ η αντίστοιχη διαρκής δημιουργία ελλείμματος ηλεκτρονίων στον άργυρο, τον καθιστά θετικό πόλο.



Φάση 3η:
Η λήξη της λειτουργίας του στοιχείου

Κάθε κύκλωμα σταματά να υφίσταται όταν υπάρξει διακοπή σε κάποιο σημείο του. Έτσι, η λειτουργία του ηλεκτροχημικού στοιχείου σταματά αν το έλασμα του χαλκού ηλεκτροδιαλυθεί όλο, ή όλη η ποσότητα των ιόντων αργύρου ηλεκτροαποτεθεί.

◆

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΧΗΜΕΙΑΣ
ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΤΑΞΕΩΝ ΤΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
(για το σχολικό έτος 2000 - 2001)

ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Συγγραφείς:

- **Κ. Τσίπης**
- **Α. Βάρβογλης**
- **Κ. Γιούρη-Τσοχατζή**
- **Δ. Δερπάνης**
- **Π. Παλαμιτζόγλου**
- **Γ. Παπαγεωργίου**

Εκδοτική επιμέλεια: ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Η φιλοσοφία στην οποία στηρίχθηκε η συγγραφή των νέων βιβλίων της Χημείας είναι η φιλοσοφία του σχεδιασμού και της ανάπτυξης έντυπου εκπαιδευτικού υλικού με προδιαγραφές ανάλογες μ' αυτές του έντυπου υλικού της εκπαίδευσης από απόσταση. Ένα τέτοιο έντυπο υλικό πρέπει:

- **Να καθοδηγεί το μαθητή στη μελέτη του**
- **Να προάγει την αλληλεπίδραση του μαθητή με το μαθησιακό υλικό (με ασκήσεις και εργασίες)**
- **Να επεξηγεί δύσκολα σημεία και έννοιες**
- **Να αξιολογεί και ενημερώνει το μαθητή για την πρόοδό του**
- **Να εμψυχώνει και ενθαρρύνει το μαθητή να συνεχίσει τη μελέτη του**

Εφαρμόσθηκαν αυστηρά οι σύγχρονες παιδαγωγικές μέθοδοι και τεχνικές, ώστε τα βιβλία αυτά να ανταποκρίνονται πλήρως στο στόχο τους.

Προσπαθήσαμε να περάσουμε την εικόνα της Χημείας ως της επιστήμης που συμβάλλει στην **ανάπτυξη επιστημονικών δεξιοτήτων**, όπως για παράδειγμα την ανάπτυξη της παρατήρησης, της ταξινόμησης, ή της επικοινωνίας, αλλά και της επιστήμης που οδηγεί στην **ανάπτυξη της κριτικής σκέψης**. Επιχειρήσαμε, με άλλα λόγια, να παρουσιάσουμε μια **αγωγή περί την Χημείαν** και όχι μια απλή προσφορά χημικών γνώσεων. Έτσι, οι χημικές γνώσεις δεν προβάλλουν σαν κάτι το ξεκομμένο από την καθημερινή ζωή, τις αξίες της, ή ακόμη τις συνήθειές μας, ενώ συνδέονται άμεσα με τον ευρύτατο σύγχρονο επιστημονικό χώρο που περιβάλλει τη Χημεία.

Έτσι, τα κείμενα των βιβλίων πλαισιώνονται από ενδιαφέρουσες πτυχές άλλων επιστημών, όπως για παράδειγμα της Ιστορίας, της Ιατρικής, ή της τεχνολογίας, που προσεγγίζουν την καθημερινότητα με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη απλότητα. Αναφορές υπάρχουν ακόμη και σε θέματα που αφορούν τη σχέση Χημείας και τέχνης, Χημείας και γλώσσας, ή Χημείας και φιλοσοφικών προβληματισμών.

Ακόμη, η όλη διάρθρωση των κειμένων μπορεί με τη βοήθεια του διδάσκοντος να συμβάλλει και στη **συγκρότηση αξιών**. Για παράδειγμα, συχνά γίνεται παρεμβολή στα κείμενα θεμάτων που στοχεύουν στην ευαισθητοποίηση των μαθητών απέναντι στα σύγχρονα περιβαλλοντικά προβλήματα. Είναι μια σκόπιμη τακτική που πιστεύουμε ότι μπορεί να οδηγήσει στην ανάπτυξη **περιβαλλοντικής συνείδησης** από το μαθητή.

Επιπλέον, ιστορικά στοιχεία έρχονται να δώσουν νέα ώθηση στην κατεύθυνση της μάθησης. Με ιστορικές αναδρομές στις αρχές των επιστημονικών ιδεών γίνεται προσπάθεια να διεγερθεί το ενδιαφέρον των μαθητών, ώστε στη συνέχεια να γίνει ευκολότερη η αποδοχή και η κατανόηση των σχετικών διδασκομένων εννοιών. Η πορεία αυτή στοχεύει επιπλέον στο να αναπτύξουν οι μαθητές μια επιπλέον ευαισθησία ως προς τον τρόπο σκέψης των επιστημόνων της εποχής εκείνης, που ήταν ικανή να τους οδηγήσει σε επιστημονικές και τεχνολογικές επαναστάσεις.

Καταβάλαμε ιδιαίτερη προσπάθεια ώστε η **δομή της διδασκαλίας** που θα προκύψει για κάθε διδακτική ώρα να συνδυάζει άμεσα την πληρέστερη βιβλιογραφική ενημέρωση των **τελευταίων επιστημονικών εξελίξεων** στο χώρο της Χημικής επιστήμης με την παιδαγωγική κάλυψη που προσφέρουν οι **σύγχρονες εμπειρικές έρευνες** στον τομέα της διδακτικής της χημείας και γενικότερα των φυσικών επιστημών.

Ιδιαίτερη βαρύτητα δόθηκε στο στάδιο της **οικοδόμησης των εννοιών**, επειδή αυτό παίζει ίσως το σημαντικότερο ρόλο στην επίτευξη της μάθησης από το μαθητή.

Κατά τη συγγραφή έχει ληφθεί μέριμνα, ώστε οι νέες έννοιες:

- **Να βρίσκονται σε αλληλουχία μεταξύ τους, ώστε να μη δημιουργούνται πρωθύστερα που οδηγούν σε γνωστικά κενά.**
- **Να είναι λογικά συνδεδεμένες με έννοιες που έχουν ήδη γίνει κατανοητές από το μαθητή, ώστε να διευκολύνεται η δημιουργία σωστής εννοιολογικής δομής.**
- **Να αναπτύσσονται με τέτοιο τρόπο, ώστε το επίπεδο δυσκολίας τους (εννοιολογικά), αλλά και αυτή η γλωσσική διαχείρισή τους να βρίσκονται σε συμφωνία με το ηλικιακό στάδιο των μαθητών της συγκεκριμένης τάξης.**
- **Να αναπτύσσονται με τρόπο που λαμβάνει υπόψη τυχόν εναλλακτικές ή ακόμη και λανθασμένες προϋπάρχουσες ιδέες των μαθητών ώστε να προκαλεί στις περιπτώσεις αυτές γνωστικές συγκρούσεις.**

Επίσης σε ότι αφορά στο συμβολισμό ακολουθήθηκε μια εξελικτική πορεία, ανάλογα με το ηλικιακό στάδιο των μαθητών. Στις μικρότερες τάξεις δηλαδή, είναι όσο το δυνατόν πιο περιορισμένος. Ακόμη και η μαθηματική πλαισίωση των κειμένων με τύπους, εξισώσεις κ.λ.π. γίνεται προοδευτικά, ώστε να υπάρχει η απαιτούμενη εξοικείωση από τους μαθητές.

Τέλος, σε όλα τα βιβλία χρησιμοποιήθηκαν με αυστηρότητα οι συμβολισμοί των μεγεθών, εννοιών και όρων που έχουν καθιερωθεί από τη IUPAC. Επίσης η ονοματολογία των χημικών ενώσεων γίνεται με βάση τους κανόνες που θέσπισε η IUPAC.
Ιδιαίτερη προσοχή δόθηκε ώστε οι ορισμοί των εννοιών και φαινομένων να χαρακτηρίζονται από την πιο σύγχρονη επιστημονική ακρίβεια, αποφεύγοντας πλήρως τις λανθασμένες ερμηνείες εννοιών και φαινομένων που εξακολουθούν να υπάρχουν ακόμη σε βιβλία Χημείας.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ FORMALITY (F) και ένας ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ MOLARITY (M)

Του **Π. Παλαμιτζόγλου,** Χημικού

Κατά τη διάλυση 1 mol ασθενούς μονοπρωτικού οξέος, για παράδειγμα, του νιτρώδους οξέος (HNO_2), σε αρκετή ποσότητα νερού μέχρι τελικού όγκου 1 L, προκύπτουν από τον ιοντισμό του οξέος ιόντα υδρογόνου και νιτρώδη ιόντα.

Η χημική εξίσωση, που αποδίδει το φαινόμενο του ιοντισμού του νιτρώδους οξέος, είναι:

$$HNO_2(aq) + H_2O(l) \rightleftharpoons H_3O^+(aq) + NO_2^-(aq)$$

Αν από τον ιοντισμό του νιτρώδους οξέος και σε θερμοκρασία θ ˚C προκύπτουν 0,02 mol ιόντων υδρογόνου, τότε στο διάλυμα θα υπάρχουν τρία είδη ουσιών εκτός του νερού, που οι συγκεντρώσεις τους, σύμφωνα με τη στοιχειομετρία της παραπάνω χημικής εξίσωσης, θα είναι αντίστοιχα:

$$[HNO_2(aq)] = 1 - 0{,}02 = 0{,}98\ M$$

$$[H_3O^+(aq)] = 0{,}02\ M$$

$$[NO_2^-(aq)] = 0{,}02\ M$$

Κανένα από τα παραπάνω είδη ουσιών δεν έχει συγκέντρωση ίση με 1 M. Γι' αυτό λοιπόν, εισάγεται η έννοια της **Formality (τυπικότητα)**, που συμβολίζεται με το γράμμα F, ως ακριβέστερος τρόπος έκφρασης της συγκέντρωσης των διαλυμάτων των ηλεκτρολυτών.

Η τυπικότητα, F, εκφράζει τον αριθμό mol της διαλυμένης ουσίας, που χρησιμοποιούμε για να παρασκευάσουμε 1 L διαλύματος. Η έννοια μοριακή συγκέντρωση κατ' όγκο (Molarity, M) θα πρέπει να χρησιμοποιείται, για να εκφράζουμε τις συγκεντρώσεις των διαφόρων ειδών των χημικών ουσιών, που περιέχονται στο διάλυμα.

Ύστερα από την εισαγωγή της έννοιας της Formality, F, από τον ιοντισμό του νιτρώδους οξέος, με τη βοήθεια της αντίστοιχης χημικής εξίσωσης, έχουμε:

	$HNO_2(aq)$ +	$H_2O(l) \rightleftharpoons$	$H_3O^+(aq)$ +	$NO_2^-(aq)$	
Αρχικές ποσότητες	1 **F**		–	–	
Μεταβολές	–0.02		+0.02	+0.02	M
Ποσότητες ισορροπίας	0.98		0.02	0.02	

Ένα διάλυμα, που παρασκευάστηκε με διάλυση 0,1 mol $CaCl_2(s)$ σε αρκετή ποσότητα νερού, ώστε ο τελικός όγκος να είναι 1 L, έχει τίτλο 0,1 F. Στο διάλυμα αυτό το $CaCl_2$ διΐσταται πλήρως, οπότε με τη βοήθεια της αντίστοιχης χημικής εξίσωσης έχουμε:

	$CaCl_2(s)$	$\longrightarrow$	$Ca^{2+}(aq)$ +	$2Cl^-(aq)$	
Αρχικές ποσότητες	0.1 **F**		–	–	
Μεταβολές	–0.1		+0.1	+0.2	M
Ποσότητες ισορροπίας	–		0.1	0.2	

Το διάλυμα, δηλαδή, θα έχει τίτλο 0,1 F, σε $CaCl_2$ και θα περιέχονται σ' αυτό αποκλειστικά 0,1 M ιόντα $Ca^{2+}(aq)$ και 0,2 M ιόντα $Cl^-(aq)$.

Τέλος, θα πρέπει να επισημάνουμε ότι η έννοια Formality χρησιμοποιείται συστηματικά στη διεθνή βιβλιογραφία και μάλλον είναι καιρός να την «υιοθετήσουμε» κι εμείς.

Εναλλακτικοί τρόποι εκτέλεσης των πειραμάτων:

ΚΑΤΑΤΑΞΗ ΜΕΤΑΛΛΩΝ σε ΣΕΙΡΑ ΔΡΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ και ΕΠΙΜΕΤΑΛΛΩΣΗ - ΕΠΙΧΑΛΚΩΣΗ

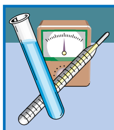
Της **Κ. Γιούρη-Τσοχατζή**, Επίκουρης καθηγήτριας του τμήματος Χημείας Α.Π.Θ.

Από το βιβλίο «Διδακτική των Πειραμάτων Χημείας» της Κ. Γιούρη-Τσοχατζή, Εκδόσεις ΖΗΤΗ, 2000

1. ΚΑΤΑΤΑΞΗ ΜΕΤΑΛΛΩΝ σε ΣΕΙΡΑ ΔΡΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

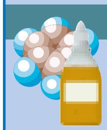
Ένα στοιχείο θεωρείται δραστικότερο ενός άλλου, όταν το εκτοπίζει (διώχνει) από τις ενώσεις του.

1ος τρόπος



Όργανα - Συσκευές

- Δοκιμαστικοί σωλήνες

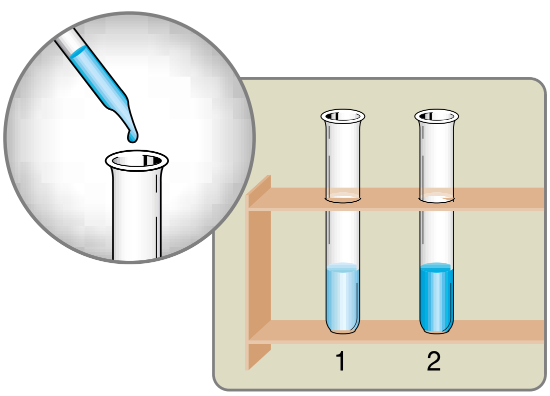


Αντιδραστήρια - Υλικά

- Νιτρικός άργυρος, $AgNO_3$*(aq)* 0,01 Μ
- Θειικός χαλκός, $CuSO_4$*(aq)* 0,1 Μ
- Χαλκός, Cu*(s)* ταινία
- Ψευδάργυρος, Zn*(s)*, ταινία ή μικροί κόκκοι

Πειραματική διαδικασία

- Σε στήριγμα δοκιμαστικών σωλήνων τοποθετούμε δύο δοκιμαστικούς σωλήνες. Στον καθένα σωλήνα βάζουμε ένα κομματάκι μετάλλου (δεύτερη στήλη του πίνακα), διαστάσεων περίπου 0,5 0,5 cm.
- Προσθέτουμε 2 έως 3 mL διαλύματος ενός άλατος (τρίτη στήλη του πίνακα).



- Αφού περιμένουμε επί πέντε περίπου λεπτά, παρατηρούμε και σημειώνουμε τις μεταβολές στην 4η στήλη (συμπληρώνεται από τους μαθητές μετά το πείραμα).

Σωλήνας	Μέταλλο	Διάλυμα άλατος	Δραστικότητα
1ος	Cu	$AgNO_3$	Cu>Ag
2ος	Zn	$CuSO_4$	Zn>Cu

Παρατηρήσεις

1ος σωλήνας. Το κομματάκι του χαλκού Cu μαυρίζει γιατί αποτίθεται επάνω σ' αυτόν μεταλλικός άργυρος. Ο Ag ελευθερώνεται, γιατί ο Cu τον εκτοπίζει από την ένωσή του σύμφωνα με τη χημική εξίσωση:

$$2AgNO_3(aq) + Cu(s) \quad Cu(NO_3)_2(aq) + 2Ag(s)$$

Επομένως ο χαλκός, Cu είναι ηλεκτροθετικότερος του αργύρου, Ag οπότε το σημειώνουμε με την ανισότητα

Cu > Ag.

2ος σωλήνας. Παρατηρούμε ότι πάνω στο κομματάκι του ψευδαργύρου Zn αποτίθεται μεταλλικός χαλκός, Cu, σύμφωνα με τη χημική εξίσωση:

$$CuSO_4(aq) + Zn(s) \quad ZnSO_4(aq) + Cu(s)$$

Άρα ο ψευδάργυρος, Zn είναι ηλεκτροθετικότερος του χαλκού, Cu ή

Zn > Cu.

2ος τρόπος ΜΙΚΡΟΚΛΙΜΑΚΑ

Όργανα - Συσκευές

- Φύλλο εργασίας
- Πλαστική διαφάνεια

Αντιδραστήρια - Υλικά

- Θειικός χαλκός (II), $CuSO_4$ 0,2 M
- Νιτρικός σίδηρος (III), $Fe(NO_3)_3$*(aq)* 0,2 M
- Χλωριούχο μαγνήσιο, MgCl2*(aq)* 0,2 M
- Θειικός ψευδάργυρος, $ZnSO_4$*(aq)* 0,2 M
- Μαγνήσιο, ταινία Mg*(s)*
- Ψευδάργυρος, Zn*(s)*, ταινία ή μικροί κόκκοι
- Σίδηρος, Fe*(s)*, ρινίσματα ή μικρά καρφάκια
- Χαλκός, Cu*(s)*, φύλλα

Τα ανιόντα των αλάτων δεν επηρρεάζουν το αποτέλεσμα του πειράματος

Πειραματική διαδικασία

- Καλύπτουμε το φύλλο εργασίας με μία καθαρή πλαστική διαφάνεια. Στο φύλλο εργασίας έχουμε σχεδιάσει μικρά κουτάκια, όπως φαίνεται στο σχήμα και έχουμε γράψει την ονομασία των αντιδραστηρίων που θα χρησιμοποιήσουμε σε κάθε ένα κουτάκι.
- Τοποθετούμε ένα κομματάκι από φύλλο χαλκού, σε κάθε κουτάκι στη σειρά του χαλκού.
- Τοποθετούμε ένα μικρό κομματάκι ταινίας μαγνησίου, σε κάθε κουτάκι στη σειρά του μαγνησίου.
- Τοποθετούμε ένα μικρό κομματάκι ταινίας ή 2-3 κόκκους ψευδαργύρου, σε κάθε κουτάκι στη σειρά του ψευδαργύρου.
- Τοποθετούμε ένα μικρό καρφάκι σιδήρου σε κάθε κουτάκι στη σειρά του σιδήρου.
- Όταν όλα τα κομμάτια μετάλλων είναι στη θέση τους, προσθέτουμε 2-3 σταγόνες διαλύματος θειικού χαλκού σε κάθε μέταλλο της πρώτης στήλης. Παρατηρούμε και καταγράφουμε τις παρατηρήσεις μας.
- Προσθέτουμε 2-3 σταγόνες διαλύματος χλωριούχου μαγνησίου σε κάθε μέταλλο της δεύτερης στήλης. Παρατηρούμε και καταγράφουμε τις παρατηρήσεις μας.
- Προσθέτουμε 2-3 σταγόνες διαλύματος θειικού ψευδαργύρου σε κάθε μέταλλο της τρίτης στήλης. Παρατηρούμε και καταγράφουμε τις παρατηρήσεις μας.
- Προσθέτουμε 2-3 σταγόνες διαλύματος νιτρικού σιδήρου σε κάθε μέταλλο της τέταρτης στήλης.
- Παρατηρούμε και καταγράφουμε τις παρατηρήσεις μας. Προσπαθούμε να τοποθετήσουμε τα μέταλλα κατά σειρά δραστικότητας. Γράφουμε τις εξισώσεις για κάθε αντίδραση που παρατηρούμε.

Παρατηρήσεις

- Το μαγνήσιο, ο ψευδάργυρος και ο σίδηρος αλλάζουν χρώμα σε διάλυμα θειικού χαλκού, επειδή καλύπτονται από ένα στρώμα χαλκού. Άρα έχουμε:

$CuSO_4(aq) + Mg(s)$ $MgSO_4(aq) + Cu(s)$ οπότε **Mg>Cu**

$CuSO_4(aq) + Zn(s)$ $ZnSO_4(aq) + Cu(s)$ » **Zn>Cu**

$CuSO_4(aq) + Fe(s)$ $FeSO_4(aq) + Cu(s)$ » **Fe>Cu**

- Μεταξύ του χλωριούχου μαγνησίου και των μετάλλων δεν συμβαίνει καμία αλλαγή. οπότε

Mg>Cu, Mg>Zn, Mg>Fe.

- Στο διάλυμα του θειικού ψευδαργύρου αντιδρά μόνο το μαγνήσιο, ενώ με τα άλλα μέταλλα δεν παρατηρούμε αλλαγές, οπότε έχουμε:

$ZnSO_4 + Cu$ * οπότε **Zn>Cu**

$ZnSO_4 + Mg$ $MgSO_4 + Zn$ » **Mg>Zn**

$ZnSO_4 + Fe$ * » **Zn>Fe**

- Το μαγνήσιο και ο ψευδάργυρος μόνο αντιδρούν με νιτρικό σίδηρο και το μέταλλο αλλάζει χρώμα σταδιακά. Άρα έχουμε:

$2Fe(NO_3)_3(aq) + 3Mg(s)$ $3Mg(NO_3)_2(aq) + 2Fe(s)$
οπότε **Mg>Fe**

$2Fe(NO_3)_3(aq) + 3Zn(s)$ $3Zn(NO_3)_2(aq) + 2Fe(s)$
οπότε **Zn>Fe**

- Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις μας η σειρά δραστικότητας των μετάλλων είναι:

Mg > Zn > Fe > Cu

- Δεν παρατηρούμε καμιά αλλαγή μεταξύ του μετάλλου και του διαλύματος άλατος του ίδιου του μετάλλου.
- Τα ανιόντα των μετάλλων δεν επηρεάζουν το αποτέλεσμα του πειράματος.

	$CuSO_4$*(aq)*	$MgCl_2$*(aq)*	$ZnSO_4$*(aq)*	$Fe(NO_3)_3$*(aq)*
Cu				
Mg				
Zn				
Fe				

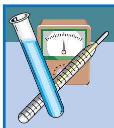
2. ΕΠΙΜΕΤΑΛΛΩΣΗ - ΕΠΙΧΑΛΚΩΣΗ

Η επιμετάλλωση χρησιμοποιείται:

- για να προστατεύσουμε την επιφάνεια ορισμένων αντικειμένων από κάποια χημική μεταβολή ή
- για να δώσουμε στα αντικείμενα καλύτερη εμφάνιση, γιατί συνήθως τα καλύπτουμε με στρώμα κάποιου ευγενέστερου μετάλλου π.χ. Cu (επιχάλκωση), Ag (επαργύρωση), Ni (επινικέλωση), Cr (επιχρωμίωση) κ.λπ.

Η συσκευή που χρησιμοποιείται για την επιμετάλλωση είναι μια ηλεκτρολυτική συσκευή που αποτελείται από τρία τμήματα:

- **Το ηλεκτρολυτικό λουτρό**. Περιέχει κυρίως το άλας του μετάλλου της επιμετάλλωσης, π.χ. θειικό χαλκό, $CuSO_4$ για την επιχάλκωση, νιτρικό άργυρο, $AgNO_3$ για την επαργύρωση κ.λπ.
- **Τα ηλεκτρόδια**. Το ένα ηλεκτρόδιο, η κάθοδος (–), είναι το αντικείμενο που πρόκειται να επιμεταλλωθεί. Το άλλο ηλεκτρόδιο η άνοδος (+), αποτελείται από το μέταλλο που θα χρησιμοποιηθεί για την επιμετάλλωση, π.χ. Cu για την επιχάλκωση, Ag για την επαργύρωση κ.λπ.
- **Την πηγή συνεχούς ρεύματος** που με αυτή συνδέονται τα δύο ηλεκτρόδια. Κατά την ηλεκτρόλυση τα κατιόντα οδεύουν προς την κάθοδο και το αντικείμενο επιμεταλλώνεται.



Όργανα - Συσκευές

- Ποτήρι ζέσης 250 mL
- Ηλεκτρική πηγή ή μπαταρία/ες 4,5V
- Γυάλινη ράβδος
- Ζυγός
- Καλώδια και κροκοδειλάκια
- Διηθητικό χαρτί

Αντιδραστήρια - Υλικά

- Θειικός χαλκός, $CuSO_4 \cdot 5H_2O(s)$
- Υδροξείδιο του νατρίου, $NaOH(aq)$, πυκνό
- Θειικό οξύ, $H_2SO(l)$, πυκνό
- Μεταλλικό αντικείμενο π.χ. μεντεσές
- Χάλκινο έλασμα ή σύρμα

Πειραματική διαδικασία

1ος τρόπος

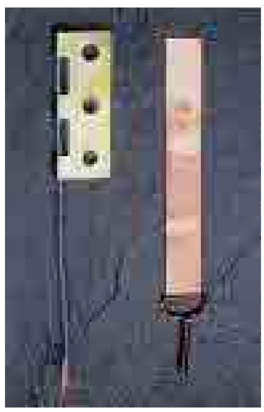
- Καθαρίζουμε προσεκτικά την επιφάνεια του αντικειμένου που θέλουμε να επιμεταλλώσουμε (π.χ. μεντεσές). Αυτό μπορεί να γίνει αν τρίψουμε την επιφάνεια με γυαλόχαρτο ή αν βυθίσουμε τον μεντεσέ σε ποτήρι ζέσης που περιέχει πυκνό διάλυμα υδροξειδίου του νατρίου και τον αφήσουμε για λίγο χρόνο. Κατόπιν τον βγάζουμε, τον πλύνουμε με νερό της βρύσης και με απιοντισμένο νερό και τον σκουπίζουμε καλά με διηθητικό χαρτί.

  Η διαδικασία αυτή μπορεί να παραληφθεί, αν η επιφάνεια του αντικειμένου είναι καθαρή.

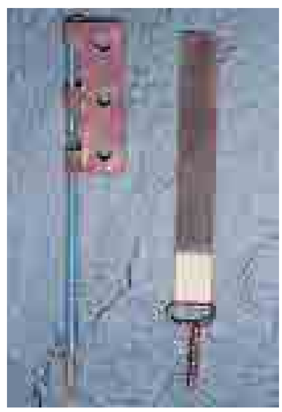
- Σε ποτήρι ζέσης που περιέχει 150 mL απιοντισμένου νερού προσθέτουμε 10 g θειικού χαλκού και περίπου 7 mL θειικού οξέος. Στο διάλυμα αυτό βυθίζουμε τα δύο ηλεκτρόδια.
- Συνδέουμε τα ηλεκτρόδια με την πηγή του συνεχούς ρεύματος, δηλαδή τον μεντεσέ με την κάθοδο (–) και το έλασμα χαλκού με την άνοδο (+).

  (*Η πηγή είναι μετασχηματιστής που μετατρέπει το εναλλασσόμενο ρεύμα των 220 Volts σε συνεχές ρεύμα 4,5 V ή μπαταρία/ες 4,5 V.*

- Θέτουμε σε λειτουργία τη συσκευή ηλεκτρόλυσης. Όταν σταματήσει η ηλεκτρόλυση, αποσυνδέουμε τον μεντεσέ, το ξεπλύνουμε με νερό και το σκουπίζουμε με διηθητικό χαρτί.
- Παρατηρούμε τις μεταβολές που έγιναν.



Πριν



Μετά

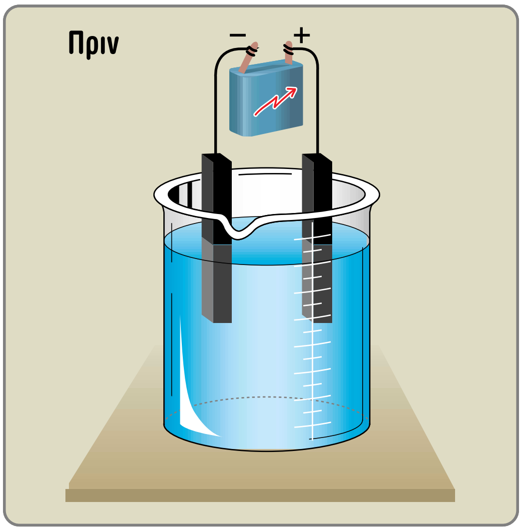
Κατά τη διάρκεια

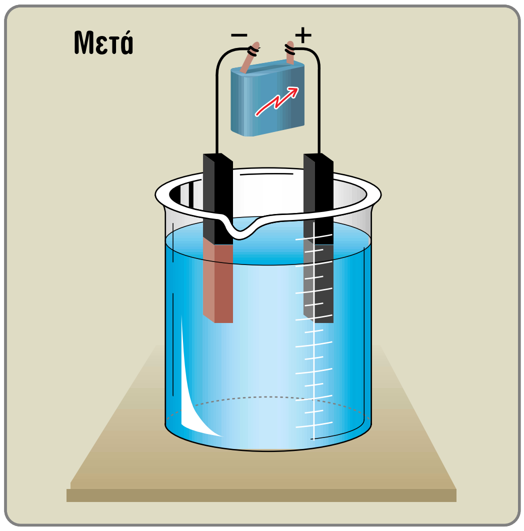
2ος τρόπος

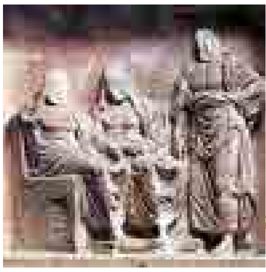
- Σε ποτήρι ζέσης που περιέχει το διάλυμα που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω, βυθίζουμε δύο ηλεκτρόδια από γραφίτη (μύτες μαύρου μολυβιού ή καρβουνάκια).
- Παρατηρούμε την αλλαγή του χρώματος του ενός ηλεκτροδίου και σημειώνουμε τις παρατηρήσεις μας.

Παρατηρήσεις

Ο μεντεσές και ο γραφίτης έγιναν κόκκινα επειδή επικαλύφτηκαν με μεταλλικό χαλκό.







ΥΠΟΘΕΤΙΚΟΙ ΛΟΓΟΙ ΥΠΟΘΕΤΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Της **Αναστασίας Γιαγκοπούλου,** Φιλολόγου

Επειδή όλοι αυτοί που ασχολούνται με την ελληνική γλώσσα έχουν έρθει κάποτε σε επαφή με τα κείμενα της αρχαίας ελληνικής πεζογραφίας και αντιλαμβάνονται τη δυσκολία αλλά και τα προβλήματα που δημιουργεί η κατανόηση και η επεξεργασία του γι' αυτό και είναι πάντα πρόσφορο το έδαφος για μελέτη του συντακτικού και διεύρυνση των γνώσεων.

Η επιλογή του συγκεκριμένου θέματος μέσα από την αρχαία ελληνική σύνταξη δεν ήταν τυχαία, αλλά έγινε, επειδή οι υποθετικοί λόγοι αποτελούν ένα από τα πιο θεμελιώδη κεφάλαια του συντακτικού.

Κρίθηκε σκόπιμο να γίνει διάκριση των υποθετικών λόγων σε ευθύ, πλάγιο και εξαρτημένο λόγο, χωρίς να υπεισέλθουμε σε τυχόν μετατροπές, αλλά πλαισιώνοντας τη θεωρία με υποδείγματα απαντήσεων και με ασκήσεις ανοικτού και κλειστού τύπου.

Ο υποθετικός λόγος είναι συνδυασμός υπόθεσης - απόδοσης. Η απόδοση, ως συνέπεια της υπόθεσης, πάντα ακολουθεί στο νόημα, αλλά στη διάταξη του κειμένου μπορεί και να προηγείται της υπόθεσης.

- ***Εἰ βούλει*** *(υπόθεση),* ***μένε*** *(απόδοση).*
- ***Ἔσει ἐλεύθερος*** *(απόδοση),* ***ἐὰν ἀπολυθῇς ἐπιθυμίας*** *(υπόθεση).*

Η **ΥΠΟΘΕΣΗ** μπορεί να είναι:

α. **Υποθετική** ή **εναντιωματική** πρόταση ή μετοχή.

β. **Χρονικοϋποθετική** ή **αναφορικοϋποθετική** πρόταση ή μετοχή.

Η **ΑΠΟΔΟΣΗ** μπορεί να είναι:

α. **Κύρια πρόταση** ή **ευθεία ερώτηση**, επομένως ο υποθετικός λόγος βρίσκεται σε <u>ευθύ λόγο</u>.

β. **Ειδική πρόταση**
Ειδικό απαρέμφατο
πλάγια ερώτηση
τελικό απαρέμφατο (όταν εξαρτάται από ρ. *κελευστικά*, *προτρεπτικά*, *συμβουλευτικά*, *ευχετικά*, *απαγορευτικά*, *αιτητικά*)
κατηγορηματική μετοχή (όταν εξαρτάται από ρ. *αίσθησης*, *γνώσης*, *άγνοιας*, *αγγελίας*).
Επομένως ο υποθετικός λόγος βρίσκεται σε <u>πλάγιο λόγο</u>.

γ. Οτιδήποτε άλλο εκτός από τα παραπάνω, δηλαδή:
δευτερεύουσα πρόταση (*τελική*, *ενδοιαστική*, *αιτιολογική*, *συμπερασματική* κ.α.).
τελικό απαρέμφατο (*υποκείμενο*, *αντικείμενο*, *της αναφοράς*, *του σκοπού*, *του αποτελέσματος* κ.α.).
μετοχή (*τελική*, *αιτιολογική*, *επιθετική* κ.α.).
Επομένως ο υποθετικός λόγος βρίσκεται σε <u>εξαρτημένο λόγο</u>.

Συμπέρασμα

Οι υποθετικοί λόγοι, σε ό,τι αφορά την απόδοσή τους, είναι:

I. ΥΠΟΘΕΤΙΚΟΙ ΛΟΓΟΙ ΣΕ ΕΥΘΥ ΛΟΓΟ.
II. ΥΠΟΘΕΤΙΚΟΙ ΛΟΓΟΙ ΣΕ ΠΛΑΓΙΟ ΛΟΓΟ.
III. ΥΠΟΘΕΤΙΚΟΙ ΛΟΓΟΙ ΣΕ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΟ ΛΟΓΟ.

Τα είδη των υποθετικών λόγων

Τα είδη των υποθετικών λόγων, σε ό,τι αφορά τη σημασία τους, είναι

1 Το πραγματικό

ΥΠΟΘΕΣΗ: **εἰ + Οριστική**
ΑΠΟΔΟΣΗ: **οποιαδήποτε έγκλιση** (εκτός από Δυνητική Οριστική).

➡ ***Εἰ εἰσί*** *βωμοί,* ***εἰσὶ*** *καὶ θεοί.*

Υπόδειγμα Ο υποθετικός λόγος δηλώνει *το πραγματικό σε ευθύ λόγο*, γιατί η υπόθεση, εκφέρεται με ***εἰ*** **+ Οριστική ενεστώτα** (*εἰ εἰσὶ βωμοὶ*) και η απόδοση είναι κύρια πρόταση που εκφέρεται με **Οριστική ενεστώτα** (*εἰσὶ καὶ θεοί*).

✔ Σημειώσεις

1) Όταν τόσο στην υπόθεση όσο και στην απόδοση

έχουμε **Οριστική μέλλοντα**, τότε ο υποθετικός λόγος δηλώνει το ***πραγματικό με σημασία προσδοκωμένου***.

➡ ***Εἰ** τοῦτο **πράξει**, καλῶς **ἕξει**.*

2) Τίθεται στην απόδοση δυνητική οριστική, μόνο όταν αυτή είναι ρητορική ερώτηση.

2 Το μη πραγματικό

ΥΠΟΘΕΣΗ: **Εἰ + Οριστική ιστορικού χρόνου**
ΑΠΟΔΟΣΗ: **Δυνητική Οριστική**

➡ ***Εἴ** τις σε **ἤρετο, τί ἂν ἀπεκρίνω;***

Υπόδειγμα Ο υποθετικός λόγος δηλώνει το *μη πραγματικό σε ευθύ λόγο*, γιατί η υπόθεση εκφέρεται με ***εἰ* + Οριστική ιστορικού χρόνου** (*εἴ τίς σε ἤρετο*) και η απόδοση είναι ευθεία ερώτηση που εκφέρεται με **δυνητική Οριστική** (*τί ἂν ἀπεκρίνω;*).

Το δυνητικό **ἂν** μπορεί να παραληφθεί από την απόδοση, όταν αυτή είναι παρατατικός απρόσωπων ρημάτων και εκφράσεων + απαρέμφατο και δηλώνεται το μη πραγματικό του απαρεμφάτου και όχι του ρήματος. Επίσης παραλείπεται, όταν με την απόδοση δηλώνεται το αναπόφευκτο και όχι απλώς κάτι το πιθανό ή δυνατό.

➡ **ἐχρῆν, ἔδει** (= έπρεπε)

➡ **ἐξῆν, οἷόν τ' ἦν** (= ήταν δυνατό).

➡ **προσῆκε** (= ταίριαζε)

➡ **ἄξιόν ἦν** (= ήταν σωστό).

➡ ***Εἰ ἦσαν ἄνδρες** ἀγαθοί, **ἐξῆν** αὐτοῖς **δεικνύναι** τὴν ἀρετήν.* (= *ἐδείκνυσαν ἄν*). Άρα το *ἐξῆν* ισοδυναμεί με το δυνητικό *ἄν*.

➡ ***Εἰ ἐπεγένετο** τῇ φλογὶ ἄνεμος, **ἐκινδύνευσε** πᾶσα ἡ πόλις **διαφθαρῆναι.***

3 Το προσδοκώμενο

ΥΠΟΘΕΣΗ: **ἐάν, ἄν, ἢν + Υποτακτική**
ΑΠΟΔΟΣΗ: **Οριστική Μέλλοντα**

ή **μελλοντική έγκλιση** (*Υποτακτική, Προστακτική, Ευχετική ευκτική, Δυνητική ευκτική*)

ή **μελλοντική φράση** (α. *μέλλω + τελ. απαρ.*, β. *απρόσωπο ρήμα ή απρόσωπη φράση + απαρ.*, γ. *ρηματικό επίθετο σε* **- τέος**, **- τος**).

➡ ***Ἐὰν** ἐμὲ **ἀποκτείνητε, βλάψετε** ὑμᾶς αὐτούς.*

Υπόδειγμα Ο υποθετικός λόγος δηλώνει το *προσδοκώμενο σε ευθύ λόγο*, γιατί η υπόθεση εκφέρεται με **ἐὰν + Υποτακτική** (*ἐὰν ἐμὲ ἀποκτείνητε*) και η απόδοση είναι κύρια πρόταση που εκφέρεται με **Οριστική μέλλοντα** (*βλάψετε ὑμᾶς αὐτούς*).

4 Αόριστη επανάληψη στο παρόν - μέλλον

ΥΠΟΘΕΣΗ: **ἐάν, ἄν, ἢν + Υποτακτική**
ΑΠΟΔΟΣΗ: **Οριστική Ενεστώτα** ή **γνωμικού Αορίστου**

ή *Υποτακτική, Προστακτική*

ή α. *απρόσωπο ρήμα ή απρόσωπη φράση + απαρ.*,

β. *ρηματικό επίθετο σε* **- τέος**, **- τος**.

➡ ***Ἢν** ἐγγὺς **ἔλθη** θάνατος, οὐδεὶς **βούλεται θνήσκειν.***

Υπόδειγμα Ο υποθετικός λόγος δηλώνει την *αόριστη επανάληψη στο παρόν - μέλλον σε ευθύ λόγο*, γιατί η υπόθεση εκφέρεται με **ἢν + υποτακτική** (*ἢν ... ἔλθη θάνατος*) και η απόδοση είναι κύρια πρόταση που εκφέρεται με **Οριστική Ενεστώτα** (*οὐδεὶς βούλεται θνήσκειν*).

✔ Σημειώσεις

Συχνά στον ευθύ λόγο η απόδοση του προσδοκωμένου και της αόριστης επανάληψης στο παρόν - μέλλον ταυτίζονται. Τότε έχουμε:

α. **Προσδοκώμενο**, όταν η πράξη της υπόθεσης γίνεται μια φορά.

β. **Αόριστη επανάληψη στο παρόν - μέλλον**, όταν η πράξη της υπόθεσης μπορεί να γίνει πολλές φορές.

Κατά κανόνα η υποτακτική αορίστου στην υπόθεση μάς οδηγεί στο προσδοκώμενο, ενώ η υποτακτική ενεστώτα στην αόριστη επανάληψη.

5 Απλή σκέψη του λέγοντος

ΥΠΟΘΕΣΗ: **Εἰ + Ευκτική**
ΑΠΟΔΟΣΗ: **Δυνητική ευκτική** ή **οριστική αρκτικού χρόνου**.

➡ ***Εἰ μή τις τρέφοιτο, οὐκ ἂν ζῴη**.*

Υπόδειγμα Ο υποθετικός λόγος δηλώνει την *απλή σκέψη του λέγοντος σε ευθύ λόγο*, γιατί η υπόθεση εκφέρεται με **εἰ + ευκτική** (*εἰ μή τις τρέφοιτο*) και η απόδοση είναι κύρια πρόταση που εκφέρεται με **Δυνητική ευκτική** (*οὐκ ἂν ζῴη*).

6 Αόριστη επανάληψη στο παρελθόν

ΥΠΟΘΕΣΗ: **Εἰ + Ευκτική επαναληπτική**

ΑΠΟΔΟΣΗ: **Παρατατικός με ή χωρίς ἂν ή αόριστος με το ἄν**.

➡ ***Εἴ τις δοκοίη** αὐτῷ βλακεύειν, **ἔπαισεν ἄν**.*

Υπόδειγμα Ο υποθετικός λόγος δηλώνει την *αόριστη επανάληψη στο παρελθόν σε ευθύ λόγο*, γιατί η υπόθεση εκφέρεται με **εἰ + ευκτική** (*εἰ δοκοίη ...βλακεύειν*) και η απόδοση είναι κύρια πρόταση που εκφέρεται με **Οριστική αορίστου + ἂν** (*ἔπαισεν ἄν*).

✔ Σημείωση **Κάθε έγκλιση υποθετικής πρότασης δηλώνει πάντοτε ό,τι και ο υποθετικός λόγος που σχηματίζεται με την απόδοσή του.**

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ στους Υποθετικούς Λόγους

I Να βρείτε το είδος του υποθετικού λόγου δικαιολογώντας την απάντησή σας σύμφωνα με το υπόδειγμα της θεωρίας.

α. *Οὐκ ἂν ἐποίησεν Ἀγασίας ταῦτα, **εἰ μὴ ἐγὼ ἐκέλευσα**.*

β. ***Εἰ καταρραθυμήσετε**, τῆς φιλοτιμίας ταύτης ἀποστερήσεσθε.*

γ. ***Ἄν τι μὴ κατὰ γνώμην ἐκβῇ**, ἐν ὀργῇ ποιεῖσθε.*

δ. *Ἔσει ἐλεύθερος, **ἐὰν ἀπολυθῇς ἐπιθυμίας**.*

ε. ***Εἴ τινος δέοιτο Ἀστυάγης**, πρῶτος ᾐσθάνετο Κῦρος.*

στ. ***Εἰ οὕτω τὴν μάχην ποιήσαιτε**, ῥᾳδίως ἂν νικήσαιτε.*

II Να μετατρέψετε τις παρακάτω προτάσεις (α, β, γ) έτσι ώστε να δηλώνουν όλα τα άλλα είδη των υποθετικών λόγων, ακολουθώντας το παράδειγμα.

π.χ.
Εἰ βούλοιο φίλος εἶναι, μέγιστος ἂν εἴης
(απλή σκέψη του λέγοντος)

πραγματικό
➩ ***Εἰ βούλει** φίλος είναι, μέγιστος **ἂν εἴης**.*

μη πραγματικό
➩ ***Εἰ ἐβούλου** φίλος εἶναι, μέγιστος **ἂν ἦσθα**.*

προσδοκώμενο
➩ ***Ἐὰν βούλῃ** φίλος εἶναι, μέγιστος **ἔσει (-ῃ)**.*

αόριστη επανάληψη στο παρόν - μέλλον
➩ ***Ἐὰν βούλῃ** φίλος εἶναι, μέγιστος **εἶ**.*

αόριστη επανάληψη στο παρελθόν
➩ ***Εἰ βούλοιο** φίλος εἶναι, μέγιστος (ἂν) **ἦσθα**.*

α. ***Εἰ ἔχομεν τὰ ὅπλα**, ἰσχυρότεροι φίλοι ὑμῖν ἐσμέν.*

β. ***Εἰ ἑορτὴν ἄγοι**, ἀγῶνας ἐποίει.*

γ. ***Ἢν μένωμεν**, σπονδαὶ ἔσονται.*

III Με βάση την *απόδοση*, να αναγνωρίσετε αν οι παρακάτω υποθετικοί λόγοι βρίσκονται σε **ευθύ, πλάγιο** ή **εξαρτημένο λόγο.**

α. *Ἀπαγγέλλετε Ἀριαίῳ ὅτι, **εἰ μὴ ὑμεῖς ἤλθετε**, ἐπορευόμεθα ἂν ἐπὶ βασιλέα.*

β. *Κῦρος, **εἰ ἐβίω**, ἄριστος ἂν δοκεῖ ἄρχων γενέσθαι.*

γ. *Ἔγνω αὐτόν, **εἰ βούλοιτο**, τοῦτ' ἂν διαπραττόμενον.*

δ. *Πότερον **εἰ αὐτοὺς ἀποκτείνοιτε καὶ τοὺς παῖδας αὐτῶν**, ἱκανὴν ἂν τοῦ φόνου δίκην λάβοιτε;*

ε. *Οὕτω διάκειμαι ὑφ' ὑμῶν, ὡς οὐδὲ δεῖπνον ἔχω, **εἰ μή τι συλλέξομαι**.*

IV Να σχηματίσετε υποθετικούς λόγους (με βάση την τυπική απόδοση) συνδέοντας τις προτάσεις της στήλης Α με αυτές της Β.

Α

α. *Εἰ δημεύσαιτε τὰ χρήματα*
β. *Ἐὰν νῦν ζητήσητε ταῦτα*
γ. *Εἰ πάντες ἐβοηθοῦμεν ἀλλήλοις ἀεὶ*
δ. *Εἰ μὲν ἐπίοιεν οἱ Ἀθηναῖοι*
ε. *Εἴ τις ἀντιλέγει*

Β

1. οὐδεὶς ἂν ἄνθρωπος ἐδεήθη τῆς τύχης.
2. ὑπεχώρουν οἱ Συρακόσιοι.
3. λεγέτω.
4. καλῶς ἂν ἔχοι.
5. οὕτως εὑρήσετε.

V Να μεταφέρετε στα αρχαία ελληνικά τις προτάσεις ώστε να σχηματίζουν τον κατάλληλο υποθετικό λόγο.

α. Αν κάποιος σας ρωτούσε, τί θα απαντούσατε (= *ἀποκρίνομαι*);

β. Αν γίνεις σοφός, παιδί μου, όλοι θα είναι φίλοι σου.

γ. Αν κάποιος έκλεβε, τιμωρούνταν (= *κολάζομαι*).

δ. Αν εσείς θέλετε να επιτεθείτε (*ἐξορμῶ*), θέλω να σας ακολουθήσω (*ἕπομαι*). ◆

ΜΕΤΩΠΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ή ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΕ ΟΜΑΔΕΣ;

Του **Α. Κ. Καραδημητρίου,** Δ.φ., Επίτ. Σχολ. Σύμβουλος Φιλολόγων

(Από το βιβλίο του συγγραφέα «Διδακτική των Αρχαίων Ελληνικών» που κυκλοφορεί από τις Εκδόσεις ΖΗΤΗ)

Τα τελευταία χρόνια και στη χώρα μας κάποιοι παιδαγωγοί έστρεψαν το ενδιαφέρον τους στη λεγόμενη «κοινωνική λειτουργία» της διδασκαλίας. Οι παιδαγωγοί αυτοί προτείνουν στους εκπαιδευτικούς να οργανώσουν τους μαθητές τους –εκτός από τη γνωστή σε όλους μετωπική μορφή διδασκαλίας, κατά την οποία ο δάσκαλος έχει όλους τους μαθητές του απέναντι, μετωπικά– και σε ομάδες σχολικής εργασίας, μέσα στην τάξη. Η νέα οργάνωση που προτείνεται, μπορεί να έχει, με μικροπαραλλαγές, περίπου τα εξής χαρακτηριστικά: Οι μαθητές της τάξης χωρίζονται σε 4-5 ομάδες των 4-6 ατόμων και κάθονται γύρω από τραπέζια (ή και θρανία κατάλληλα τοποθετημένα) τόσα, όσες είναι και οι ομάδες. Τα τραπέζια απέχουν μεταξύ τους, για να μην ενοχλεί η μια ομάδα την άλλη, μπορούν όμως να ενωθούν σε σχήμα Π, κάθε φορά που θα κριθεί αναγκαίο. Όταν, λοιπόν, διευθετηθεί η αίθουσα κατάλληλα και οι μαθητές καταλάβουν τις θέσεις τους, ο καθηγητής, ύστερ' από σύντομη ενημερωτική εισαγωγή, δίνει σε κάθε ομάδα το υλικό που έχει ετοιμάσει γι' αυτήν και ορίζει το διαθέσιμο χρόνο –κοινό σε όλες τις ομάδες– για την επεξεργασία του υλικού. Το υλικό αυτό μπορεί ν' αποτελείται από ένα-δύο γραπτά ερωτήματα –διαφορετικά σε κάθε ομάδα– στα οποία θα πρέπει να δοθεί απάντηση, μεσ' από μικρά ισάριθμα κείμενα για τα οποία ζητείται συγκεκριμένη επεξεργασία ή και από το ίδιο το μάθημα της ημέρας, όποιο κι αν είναι αυτό, χωρισμένο, βέβαια, σε ισάριθμα με τις ομάδες μέρη. Κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας, ο καθηγητής μπορεί κατά διαστήματα να περιέρχεται τις ομάδες για τυχόν επεξηγήσεις, συμπληρωματική πληροφόρηση κτλ. Στο τέλος, κάθε ομάδα ανακοινώνει με έναν εκπρόσωπό της το αποτέλεσμα της δουλειάς της και μπορεί να επακολουθήσει συζήτηση κατά ομάδα ή γενική.

Περιγράψαμε με συντομία τη μορφή διδασκαλίας με ομάδες, και γιατί δεν είναι ευρύτερα γνωστή στο χώρο της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, όπου επικρατεί σχεδόν καθολικά η παραδοσιακή μετωπική διδασκαλία, αλλά και γιατί οι θιασώτες της διατείνονται πως αυτή έχει μόνο πλεονεκτήματα έναντι της μετωπικής, στην οποία καταλογίζουν σοβαρά μειονεκτήματα[5]. Πιο συγκεκριμένα, υποστηρίζουν μεταξύ άλλων πως οι μαθητές «γίνονται σιγά-σιγά μικροί ερευνητές και αναπτύσσουν την κριτική και τη δημιουργική τους σκέψη», πως οι μαθητές αισθάνονται «ξεχωριστές προσωπικότητες που συμβάλλουν στην εξέλιξη της διδασκαλίας» κτλ., και όλα αυτά μέσα σε συνθήκες όπου «ευνοούνται και επικρατούν περισσότερο οι συνεργατικές αξίες από τις ανταγωνιστικές».

Πράγματι, από την περιγραφή που κάναμε πιο πάνω γίνεται, νομίζω, φανερό ότι στην ομαδική μορφή διδασκαλίας αλλάζουν η στάση και ο ρόλος του καθηγητή και των μαθητών, οι οποίοι εθίζονται σε συνεργασία πολύ περισσότερο τώρα απ' ό,τι κατά τη μετωπική διδασκαλία. Ωστόσο, οι τρεις-τέσσερις δοκιμαστικές διδασκαλίες σε ομάδες, που πραγματοποιήσαμε στα πλαίσια της Σ.Ε.Λ.Μ.Ε. και του 1ου Π.Ε.Κ. Θεσσαλονίκης, έδειξαν πως και αυτή η μορφή διδασκαλίας έχει τα μειονεκτήματά της, όπως άλλωστε είναι φυσικό. Και, βέβαια, με τη λέξη «μειονεκτήματα» δεν εννοούμε την όποια αναταραχή, η οποία προκαλείται κατά τη διευθέτηση του χώρου διδασκαλίας, ούτε μόνο την κάπως θορυβώδη διαδικασία μέσα στην τάξη –«βαβούρα» την ονόμασαν οι συνάδελφοι– η οποία κάποτε ενοχλεί και τους ίδιους τους μαθητές αλλά και τους καθηγητές που διδάσκουν στις διπλανές αίθουσες. Ως μειονεκτήματα θεωρούμε:

1) Τη μονομερή και ελλιπή ενημέρωση των μαθητών, αφού οι τελευταίοι ενδιαφέρονται κυρίως για την εργασία της ομάδας τους και σχεδόν αδιαφορούν για τις εργασίες των άλλων ομάδων.
2) Το πολύ πιθανό ενδεχόμενο να εργάζονται ένας ή δύο σε κάθε ομάδα –οι ικανότεροι ή οι επιμελέστε-

5. Βλ. και Στ. Δερβίση, *Οι στάσεις των μαθητών απέναντι στην παραδοσιακή-μετωπική και την ομαδική μορφή διδασκαλίας,* «Νέα Παιδεία», τ. 79, Αθήνα 1996, σ. 40 κ.ε.

ροι– ενώ οι άλλοι να παρακολουθούν παθητικά και παρασιτικά και

3) Τη δαπάνη σε χρόνο, η οποία είναι σαφώς μεγαλύτερη από εκείνη που θα απαιτούσε η μετωπική διδασκαλία.

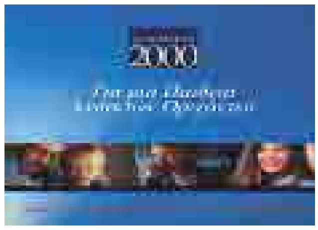
Εξάλλου, δεν είναι και τόσο βέβαιο ότι στη νέα μορφή διδασκαλίας «ευνοούνται και επικρατούν περισσότερο οι συνεργατικές αξίες από τις ανταγωνιστικές» μεταξύ των ομάδων και των μελών τους. Το βέβαιο είναι ότι οι μαθητές εθίζονται περισσότερο σε συνεργασία και αυτό είναι σημαντικό, μόνο που για να υπάρξει συνεργασία, πρέπει πρώτα να υπάρξει ατομική εργασία, γι' αυτό και οι μαθητές, πριν μάθουν να συνεργάζονται, πρέπει πρώτα να μάθουν να εργάζονται.

Το συμπέρασμα, που προκύπτει απ' όλα αυτά, νομίζω πως είναι αυτονόητο: Κάθε μορφή διδασκαλίας έχει κάποια πλεονεκτήματα αλλά και μειονεκτήματα. Και ο εκπαιδευτικός, που θέλει πραγματικά να βελτιώσει τη διδασκαλία του και όχι απλώς να φαίνεται μοντέρνος και in –τα in και out είναι όροι της μόδας και πιστεύω πως δεν έχουν θέση στο χώρο της παιδείας, όπου πρέπει να επικρατεί η σοβαρότητα– επιβάλλεται ν' αναζητεί το καινούριο και να το δοκιμάζει, πάντα όμως χωρίς ξιπασιά αλλά με σεβασμό στην παράδοση και στο μέσα από αιώνες παραδεκτό και καταξιωμένο. Έτσι, θα έχει ως κύρια μορφή διδασκαλίας τη μετωπική, παράλληλα όμως θα βρίσκει ευκαιρίες στη διάρκεια των μαθημάτων του (π.χ. σε ομαδικές εργασίες στην Οδύσσεια και στην Ιλιάδα, σε εργασίες επανάληψης μερών της τραγωδίας και άλλων μαθημάτων, στις συνθετικές εργασίες του Λυκείου κτλ.) για σχολική εργασία και με ομάδες.

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΜΕΤΑΡΡΥΘΜΙΣΗ
Η ΑΠΟΡΡΥΘΜΙΣΗ ΤΗΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ;

Του **Βαγγέλη Παπαγιάγκου***, Δ/ντή Φροντιστηρίων ΠΛΑΙΣΙΟ

Το νέο σύστημα αξιολόγησης και εξέτασης που αποτέλεσε casus belli πυροδοτώντας τη θλιβερή αναταραχή των καταλήψεων και τη θύελλα αντιπαραθέσεων στην εκπαιδευτική και όχι μόνο κοινότητα, έχει ήδη ολοκληρώσει ένα πρώτο κύκλο εφαρμογής του. Τα παιδιά που πριν δύο χρόνια τραγουδούσαν ρυθμικά το «κάτσε καλά Γεράσιμε», απόφοιτοι πλέον του νέου εκπαιδευτικού συστήματος, μπορούν να αποτιμήσουν ώριμα πια την πορεία τους στο λύκειο και να ψάξουν γι' αυτό το κάτι παραπάνω που υποσχέθηκε να τους προσφέρει η μεταρρύθμιση στον αγώνα τους για επαγγελματική ανέλιξη. Είναι η ώρα των παιδιών να «σταθμίσουν» και των άλλων να προβληματιστούν και να σκεφτούν πως αυτό που πολυδιαφημίστηκε σαν βαθιά και αναγκαία τομή στην εκπαίδευση θα δρέψει καλύτερους καρπούς από το αναχρονιστικό και ξεπερασμένο σύστημα των τεσσάρων δεσμών.



Αναντίρρητα η αποφοίτηση από το ενιαίο λύκειο πρέπει να πιστοποιεί ένα minimum γνώσεων και επίδοσης που θα ελέγχεται αξιόπιστα από ένα σύστημα εθνικών εξετάσεων.

Το απολυτήριο του ενιαίου λυκείου δεν πρέπει να είναι προνόμιο λίγων ταλαντούχων ή πολύ εργατικών μαθητών, αλλά όλων αυτών που ανάλογα με τις δυνάμεις τους υπόσχονται να προσπαθήσουν για το «ελάχιστα αποδεκτό» επίπεδο μάθησης χωρίς να απαιτήσουν «χάρη» με μηδενική προσπάθεια.

Το πρόβλημα ξεκινά από τη στιγμή που το απολυτήριο γίνεται το απόλυτο κριτήριο για την εισαγωγή στην τριτοβάθμια εκπαίδευση... Οι υψηλές βαθμολογίες δεν αποδεικνύουν πια πραγματικές επιδόσεις, αλλά εξομοίωση μετρίων και αρίστων. Αποτέλεσμα είναι να παρατηρείται ένας πρωτοφανής (βαθμολογικά) συνωστισμός σε περιζήτητες σχολές η εισαγωγή σε πολλές από τις οποίες θα κριθεί στο δέκατο του μορίου.

Αυτός ο στενός εναγκαλισμός μετρίων και αρίστων, που φυσικά δεν πιστοποιεί κάποια ξαφνική αναβάθμιση των σπουδών στο λύκειο, καταρρίπτει ουσιαστικά και το μύθο της «ίσης ευκαιρίας» αφού οι άριστοι «αποτυχόντες» της μιας χρονιάς θα συνδιεκδικήσουν, χωρίς εξετάσεις τη φορά αυτή, τις καλές θέσεις με τους υποψηφίους της επόμενης ελπίζοντας σε πτώση βάσεων.

Επιβάλλεται μία ορθολογικότερη νομή των θέσεων υψηλής ζήτησης, χωρίς να θίγεται ο σημαντικός ρόλος του λυκείου και η παρουσία του μαθητή στη σχολική μονάδα.

Οι περικοπές της ύλης, η επιδερμική κάλυψη σημαντικών κεφαλαίων που οδηγεί σε «στένεμα» και όχι στο «πλάτεμα» της γνώσης, τα εύκολα και τα πολλές φορές «πρόχειρα» επιλεγμένα θέματα εξετάσεων και τέλος η προφορική βαθμολογία η λογική της οποίας ευνοεί σε κάθε περίπτωση τους μέτριους ή αδύνατους μαθητές, αδικούν τους πραγματικά καλούς αφού τους στερούν τη δυνατότητα να καταγράψουν την πραγματική υπεροχή τους. Τα μαθήματα βαρύτητας κάθε πεδίου που τελικά πλησιάζουν ή ανταποκρίνονται καλύτερα στα πραγματικά ενδιαφέροντα του μαθητή, πρέπει να αποκτήσουν ενεργό ρόλο και όχι αναιμική παρουσία στη διαμόρφωση της βαθμολογίας ενός υποψηφίου.

Στοχεύοντας στην ανάδειξη των καλά προετοιμασμένων και όχι απλώς των «ενημερωμένων», οι γραπτές τελικές επιδόσεις στα μαθήματα αυτά χωρίς την προφορική βοήθεια των τετραμήνων, πρέπει να λειτουργούν ισόρροπα με το βαθμό του ενιαίου λυκείου στην οριστική αξιολόγηση ενός υποψηφίου. Έτσι μόνο θα αμβλύνονται ή θα εξανεμίζονται οι όποιες αδικίες γεννά η συμμετοχή της προφορικής βαθμολογίας στην τελική αξιολόγηση, έτσι επίσης οι βάσεις εισαγωγής θα αποκτήσουν μεγαλύτερο εύρος που θα δικαιολογεί και μία μικρή παράλειψη ή ένα μικρό σφάλμα χωρίς «κόστος».

Το λύκειο οφείλει να είναι για όλους. Είναι αλήθεια δύσκολο να έχουμε ένα σχολείο όπου οι αδύνατοι θα έχουν τη βοήθεια ή την επιείκεια που τους πρέπει και παράλληλα ένα σχολείο ακριβοδίκαιο όπου οι ικανοί θα αξιώνουν δίκαιη μεταχείριση όλων και εφόδια για να κατακτήσουν το μέλλον που οραματίζονται. Είναι ένα στοίχημα δύσκολο που πρέπει και αξίζει να κερδίσουμε.

Όλοι, χωρίς αποκλεισμούς και αφορισμούς με διάλογο, τόλμη και αίσθημα ευθύνης πρέπει να συστρατευτούμε για να δώσουμε στην εκπαίδευση που υπηρετούμε την ΠΟΙΟΤΗΤΑ και την ΑΞΙΑ που της ταιριάζουν.

ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΕΣ ΣΚΕΨΕΙΣ
RUSSELL ΚΑΙ WITTGENSTEIN: Η ΞΕΧΩΡΙΣΤΗ ΤΟΥΣ ΘΕΣΗ ΣΤΗ ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ

Του **Παναγιώτη Δρέλλια**, Μαθηματικού

Εισαγωγή

Οι φιλόσοφοι Ράσελ και Βιτγκενστάιν εντάσσονται σ' ένα κοινό ρεύμα στοχασμού: τη φιλοσοφική ανάλυση ή την γλωσσοαναλυτική φιλοσοφία.

Η φιλοσοφική ανάλυση έχει σαν αφετηρία την άποψη ότι πολλά φιλοσοφικά προβλήματα οφείλονται σε γλωσσικές υπερβολές ή και δυσλειτουργίες.

Οι αναλυτικοί φιλόσοφοι που εξετάζουμε εδώ έβλεπαν στην ανθρώπινη γλώσσα το αντικαθρέπτισμα του κόσμου (απεικονιστική θεωρία της γλώσσας) και απέβλεπαν στη διαμόρφωση μίας πρότυπης γλώσσας, η οποία θα ακριβολογεί απόλυτα, απαλλαγμένη από αμφισημίες, αοριστίες, εικόνες και μεταφορές.

Συνοπτική παρουσίαση

α) Το έργο του Ράσελ, Άγγλου Μαθηματικού, φιλόσοφου και κοινωνιολόγου είναι σημαντικότατο και χαρακτηρίζεται από ευρύτητα πνεύματος, χρησιμοποιεί δε ως βάση την επιστημονική σκέψη, τα μαθηματικά, την ηθική και την πολιτική.

Ο Ράσελ προσπάθησε να αντικαταστήσει την υποκειμενικότητα με κάτι αντικειμενικό, δηλαδή κάτι που να απορρέει από μία λογική επιχειρηματολογία ανεξάρτητη από τη γνώμη των ανθρώπων.

Με το έργο του «Η επιστημονική μέθοδος στη φιλοσοφία» (1914) ο Ράσελ τονίζει ότι ο πραγματικός σκοπός της φιλοσοφίας είναι η θεωρητική αντίληψη του κόσμου και το όργανο των αναζητήσεών του θα είναι μία νέα μέθοδος η «αναλυτική λογική».

Έτσι η λογική είναι άμεσα χρήσιμη για τη φιλοσοφία γιατί θα αποφευχτεί το λάθος της κλασικής φιλοσοφίας που συνίσταται σ τα εξής:

I) η επίδραση της φαντασίας στο φιλοσοφικό στοχασμό.
II) η άρνησή της να στηριχτεί στις θετικές επιστήμες.
II) η προέλευση των λύσεών της από πρακτικά συμφέροντα.

Τελικά ο Ράσελ υποστηρίζει ότι μέθοδος έρευνας του φυσικού – αισθητού κόσμου θα πρέπει να είναι η αυστηρή λογική ανάλυση. Με το έργο του παρουσίασε νέες προοπτικές και πεδία έρευνας του φιλοσοφικού σκέπτεσθαι. Δεν έβλεπε τη δική του φιλοσοφία ως απλώς μία περιεκτική φιλοσοφική θεωρία αλλά και ως ένα ορισμένο τρόπο του φιλοσοφείν.

Η λογική ανάλυση που εισηγήθηκε υποδεικνύει πόσο βασική σημασία έχει για κάθε θεωρία η θετική μέθοδος.

Το απόσπασμα από το έργο του «Logic and Knowledge» (1964). «Ό,τι μπορεί γενικά να ερευνηθεί φιλοσοφικά, μπορεί να ερευνάται με τέτοιες μεθόδους. Και ότι δεν μπορεί να ερευνηθεί με τέτοιες μεθόδους, πρέπει εμείς να παραιτούμεθα από τη γνώση του» μας θυμίζει την αρχή και το τέλος του γνωστού «Tractatus» του Wittgenstein.

Η αποστροφή λοιπόν του Russel για τη φιλοσοφία του καιρού του και του παρελθόντος ήταν σε μεγάλη έκταση μία επανάσταση στην παραδοσιακή φιλοσοφία. Και η επανάσταση αυτή οφείλεται βασικά στη ριζοσπαστική φιλοσοφική μέθοδο, την ανάλυση.

β) Αλλά και η συμβολή του Βιτγκενστάιν στην αναλυτική φιλοσοφία είναι σημαντική. Επηρεασμένος ο Αυστριακός φιλόσοφος από τον Ράσελ επεξεργάστηκε θεωρητικά, με τον πιο ριζοσπαστικό τρόπο ένα από τα θεμελιώδη προβλήματα του λογικού εμπειρισμού: ο άνθρωπος γνωρίζει τα γεγονότα με τις αισθήσεις και το λογικό του. Η θεωρητική διατύπωση αυτής της θέσης βρίσκεται στο «Tractatus logicophilosophicus» και είναι βασισμένη στην λογική του Ράσελ.

Ασχολήθηκε επίσης διεξοδικά και με τη φιλοσοφία της γλώσσας, υποστηρίζοντας ότι κάθε τύπος γλώσσας είναι ένα παιχνίδι με ορισμένους βασικούς κανόνες. Έτσι κατάρριψε το αξίωμα της μοναδικότητας της γλώσσας.

Η σκέψη του Βιτγκενστάιν αναπτύχθηκε σε δύο πολύ διαφορετικές φάσεις:

α) Στην πρώτη θεμελιώνει τις απόψεις του για τη γλώσσα πάνω σε μία θεωρία για τη φύση του κόσμου (θεωρία του «μωσαϊκού»).
β) Στη δεύτερη παρουσιάζει μία νέα άποψη για τη γλώσσα με βάση το κριτήριο της χρήσης (θεωρία του «σκακιού» της γλώσσας).

Ο Βιτγκενστάιν επηρέασε τη φιλοσοφική ζωή, διότι διαμόρφωσε μία ατμόσφαιρα που χαρακτηρίζεται από την τάση πολλών μελετητών να εργάζονται προσεκτικά πάνω σε συγκεκριμένες έννοιες.

Ουσιαστικό γνώρισμα κατά τον Βιτγκενστάιν της σωστής φιλοσοφικής εργασίας είναι μία πλήρης περιγραφή των πραγματικών λειτουργιών της γλώσσας («οφείλουμε να την επαναφέρουμε από τη μεταφυσική στην καθημερινή χρήση»).

Συμπέρασμα

Οι αναλυτικές έρευνες έχουν πράγματι συμβάλει στην καλύτερη κατανόηση του χαρακτήρα και του ρόλου των φιλοσοφικών ιδεών.

Τα φιλοσοφικά προβλήματα, σύμφωνα με τους Ράσελ και Βιτγκενστάιν, μας καταπονούν ανώφελα, διότι δεν κατανοούμε πώς πραγματικά λειτουργεί η γλώσσα μας.

Διασαφηνίζοντας έτσι το νόημα των λέξεων και τον τρόπο που αυτές λειτουργούν και συμπλέκονται με τη γλώσσα, απελευθερωνόμαστε από μεταφυσικά προβλήματα, που τόσο έχουν ταλανίσει την παραδοσιακή σκέψη.

Η γνωστή φράση του Βιτγκενστάιν: «τα όρια της γλώσσας μου είναι τα όρια του κόσμου μου» θα λέγαμε ότι συμπυκνώνει την ουσία της αναλυτικής φιλοσοφίας, που υπήρξε καθοριστική στο φιλοσοφικό στοχασμό του 20ου αιώνα.

Βιβλιογραφία

1. Θεόφιλου Βέικου, Σύγχρονη Φιλοσοφία, Ιωάννινα 1974, εκδόσεις: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.
2. Κ. Κατσιμάνη - Στ. Βιρβιδάκη, Προβλήματα φιλοσοφίας, Αθήνα 1999, ΟΕΔΒ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

www.ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

e-mail:sales@ziti.gr

ΑΡΜΕΝΟΠΟΥΛΟΥ 27
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 546 35

τηλ.: (031) 203.720
fax: (031) 211.305

ΒΙΒΛΙΑ

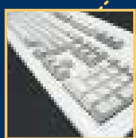
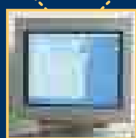
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑ

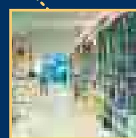
- ΤΕΧΝΙΚΑ
- ΓΙΑ ΤΑ Α.Ε.Ι. - Τ.Ε.Ι. - Ι.Ε.Κ.
- ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ

σύμφωνα με τα νέα αναλυτικά προγράμματα 2000 - 2001

- ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ (ΓΕΝΙΚΟ - ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΝ)
- ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ



Τα βιβλία μας θα τα βρείτε σε όλα τα βιβλιοπωλεία της Ελλάδας
Για την εξυπηρέτησή σας, το βιβλιοπωλείο μας αναλαμβάνει την ταχυδρομική αποστολή σ' όλη την Ελλάδα των βιβλίων που σας χρειάζονται με αντικαταβολή

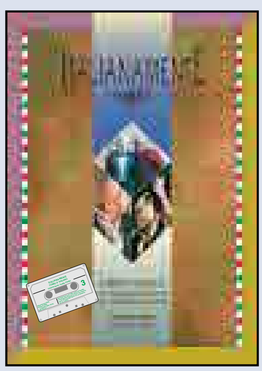
ITALIANAMENTE

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗ ΣΕΙΡΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΚΜΑΘΗΣΗ ΤΗΣ ΙΤΑΛΙΚΗΣ ΓΛΩΣΣΑΣ

Συνεργάστηκαν:
- Το πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης (Αντ. Τσοπάνογλου, Α.Μ. Rodella)
- Καθηγητές – φροντιστές μέλη της επιτροπής ιταλικών της Π.Ο.Ι.Φ.Ξ.Γ. (PALSO) (Λ. Παγούρας και Συνεργάτες)

ITALIANAMENTE 1
Επίπεδο Elementare

ITALIANAMENTE 2
Επίπεδο Premedio


ITALIANAMENTE 3
Επίπεδο Medio


ITALIANAMENTE 4
Επίπεδο Superiore

Διατίθεται κασέτα audio με φυλλάδιο

e-mail: sales@ziti.gr **www.ziti.gr**

Κεντρική διάθεση:
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ
ΑΡΜΕΝΟΠΟΥΛΟΥ 27
Τηλ.(031)203.720 - Fax (031)211.305
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 546 35