Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί

Περιοδική έκδοση

Νο 2 • ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1996

*Συμβολή στην προσπάθεια
του μαχόμενου εκπαιδευτικού
για αποτελεσματική
διδακτική προσφορά*

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί
Νο 2 - Δεκέμβριος 1996

ΕΚΔΟΤΗΣ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΓΕΝΙΚΗ ΕΠΟΠΤΕΙΑ
Γεώργιος Παντελίδης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΕΙΔΙΚΟΙ ΣΥΝΕΡΓΑΤΕΣ
Κυριάκος Δημήτρης, *Φυσικός, Αναπλ. Καθηγητής Α.Π.Θ.*
Ξένος Θανάσης, *Μαθηματικός, Καθηγητής Μ.Ε.*
Πασχαλίδης Δημήτρης, *Φιλόλογος, Καθηγητής Μ.Ε.*
Τσίπης Κωνσταντίνος, *Χημικός, Καθηγητής Α.Π.Θ.*
Ψωϊνός Δημήτριος, *Μηχ. Μηχανικός, Καθηγητής Α.Π.Θ.*

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΙ ΣΥΝΕΡΓΑΤΕΣ
Γιαννακουδάκης Ανδρέας, *Αν. Καθ. Φυσ/Χημείας Α.Π.Θ.*
Γιαννακουδάκης Παναγιώτης, *Επ. Καθ. Φυσ/Χημείας Α.Π.Θ.*
Γιουβανούδης Γιώργος, *Φυσικός*
Γιούρη-Τσοχατζή Κατερίνα, *Επικ. Καθ. Χημείας Α.Π.Θ.*
Ιακώβου Πέτρος, *Φυσικός-Χημικός*
Κολυβά-Μαχαίρα Φωτεινή, *Επ. Καθ. Μαθηματικών Α.Π.Θ.*
Μανουσάκης Γιώργος, *Καθ. Χημείας Α.Π.Θ.*
Μπόρα - Σέντα Ευθυμία, *§έκτωρ Μαθηματικών Α.Π.Θ.*
Μωυσιάδης Χρόνης, *Αν. Καθ. Μαθηματικών Α.Π.Θ.*
Παπακωσταντίνου Δημήτρης, *Σχολικός Σύμβουλος Μαθ/κών*
Παπαστεφάνου Κώστας, *Αν. Καθ. Φυσικής Α.Π.Θ.*
Σταματάκης Στέλιος, *Επ. Καθ. Μαθηματικών Α.Π.Θ.*
Τσιρπανλής Ζαχαρίας, *Καθ. Ιστορίας Παν. Ιωαννίνων*
Τσουκαλάς Γιάννης, *Καθ. Φυσικής Α.Π.Θ.*

ΕΚΔΟΣΕΙΣ • ΕΚΤΥΠΩΣΕΙΣ
ΖΗΤΗ
Π. ΖΗΤΗ & Σια Ο.Ε.

ΓΡΑΦΕΙΑ - ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑ:
ΣΟΛΩΝΟΣ 79-81
Τηλ.- Fax: 031/825.453, 849.178
Θεσσαλονίκη 542 48
Από τον Απρίλιο του '97 στις νέες εγκαταστάσεις:
18ο χλμ Θεσσαλονίκης - Περαίας

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ Θεσσαλονίκης:
ΑΡΜΕΝΟΠΟΥΛΟΥ 27
Τηλ.: 031/203.720 • Fax: 031/211.305
Θεσσαλονίκη 546 35

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ Αθηνών:
«Ένωση Εκδοτών Βιβλίου Θεσσαλονίκης»
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5)
Αθήνα 105 64
Τηλ.-Fax: 01/32 11 097

Τα πρώτα τεύχη διανέμονται
ΔΩΡΕΑΝ
στους Εκπαιδευτικούς

ΣΤΟΙΧΕΙΟΘΕΣΙΑ - ΕΚΤΥΠΩΣΗ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ISSN 1106-9252

COPYRIGHT: ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Απαγορεύεται η μερική και ολική αναδημοσίευση ή αναπαραγωγή χωρίς την έγκριση του εκδότη.

ΕΤΗΣΙΑ ΣΥΝΔΡΟΜΗ (3 τεύχη)
Εκπαιδευτικοί: 3.000 δρχ.
Βιβλιοθήκες: 5.000 δρχ.

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ - ΑΠΟΣΤΟΛΕΣ
ΑΝΝΗ ΖΗΤΗ
ΣΟΛΩΝΟΣ 79-81, 542 48 ΘΕΣ/ΝΙΚΗ
ΤΗΛ. 031. 864 961
FAX: 031. 825 453

Χαιρετισμός

***Ο** εκδοτικός μας οίκος, στην προσπάθειά του να συμβάλει στην εκπαιδευτική διαδικασία, αποφάσισε, εκτός από τις εκδόσεις των βοηθημάτων Γυμνασίου και Λυκείου και των Πανεπιστημιακών Συγγραμμάτων, να εκδίδει σε τακτά χρονικά διαστήματα το περιοδικό «Εκπαιδευτικοί ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ», που θα απευθύνεται στον εκπαιδευτικό αλλά και στο μαθητή και σπουδαστή. Η συμβολή αυτή θα επιδιώκεται με «συζήτηση» μέσα από τις σελίδες του περιοδικού. Θέλουμε να ελπίζουμε ότι θα αναπτυχθεί ένας εποικοδομητικός διάλογος, ο οποίος θα συμβάλει στην προσπάθειά μας αυτή. Για το σκοπό αυτό θα θέλαμε να σας παρακαλέσουμε να συμπληρώσετε και να μας επιστρέψετε το ένθετο ερωτηματολόγιο.*

Ο εκδοτικός μας οίκος, για να κάνει πιο ενδιαφέρουσα τη «συζήτηση» μέσα από τους «Εκπαιδευτικούς ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ», θα σας δωρίζει βιβλία των εκδόσεών του (τα οποία θα επιλέξετε εσείς) αξίας 10.000 δρχ. για κάθε πρότασή σας που θα δημοσιεύεται.

Πελαγία Ζήτη

Υ.Γ. Με την ευκαιρία του 2ου τεύχους:

Η πολλαπλή ανταπόκριση των εκπαιδευτικών μας στο 1ο τεύχος ήταν τόσο μεγάλη –γεγονός που επιβεβαιώνει ότι οι στόχοι μας αγγίζουν τους διδακτικούς προβληματισμούς των εκπαιδευτικών μας– που μας υποχρεώνει να επιδιώξουμε την επικοινωνία με περισσότερους εκπαιδευτικούς. Για το λόγο αυτό τα πρώτα τεύχη θα διανέμονται δωρεάν και μπορούν οι εκπαιδευτικοί να τα προμηθεύονται από τα βιβλιοπωλεία μας. Όταν δεν τα βρίσκουν μπορούν να ζητήσουν, με επιστολή τους ή συμπληρώνοντας το ένθετο ερωτηματολόγιο, να αποστέλλονται στο σχολείο τους.

Το περιοδικό μπορείτε να το ζητήσετε από τα βιβλιοπωλεία:

- **Εκδόσεις ΖΗΤΗ**
  Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη
  Τηλ. (031) 203.720, Fax: (031) 211.305
- **«Ένωση Εκδοτών Βιβλίου Θεσσαλονίκης»**
  Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5), 105 64 Αθήνα
  Τηλ.-Fax: (01) 32 11 097

Αγαπητοί συνάδελφοι,

***Η** έκδοση των «Εκπαιδευτικών ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΩΝ», είναι μια σημαντική πρωτοβουλία του Εκδοτικού Οίκου ΖΗΤΗ στην προσπάθειά του να συμβάλει στην επιτυχία της εκπαιδευτικής διαδικασίας μέσα στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο.*

Εμείς, οι επιστημονικοί υπεύθυνοι των «Εκπαιδευτικών ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΩΝ», κατανοούμε τις δυσκολίες που έχει ένα τέτοιο εγχείρημα αλλά πιστεύουμε ότι με τη δική σας συμβολή θα μπορέσουμε να προσφέρουμε πολύτιμη βοήθεια στο μαχόμενο εκπαιδευτικό μας. Θα επιδιώξουμε:

- ***Οι «Εκπαιδευτικοί ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ» να αποτελέσουν στα χέρια σας ένα σημαντικό βοήθημα στην εκπαιδευτική πράξη και***
- ***να είναι ένας πρακτικός, χρήσιμος και σύντομος οδηγός, ο οποίος θα εξυπηρετεί καθαρά διδακτικούς σκοπούς, ενώ θα μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί και από τους μαθητές. Για το λόγο αυτό θα επιδιώκουμε τα παρουσιαζόμενα θέματα να προέρχονται, κατά προτεραιότητα, από ερεθίσματα και προτάσεις σας. Θεωρούμε αυτονόητο ότι οι προτάσεις σας, τις οποίες η Συντακτική Επιτροπή θεωρεί κατάλληλες, θα δημοσιεύονται επώνυμα.***

Για να γίνει πιο ευχάριστη η ενασχόλησή σας με τους «Εκπαιδευτικούς ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ», θα τους εμπλουτίσουμε με σύντομες αναφορές σε εντυπωσιακές επιστημονικές πληροφορίες, όπως π.χ. η απάντηση στην εικασία του Fermat, το πρόβλημα του όζοντος, τα CD στην εκπαιδευτική διαδικασία, το πρόβλημα της αυτόματης μετάφρασης κ.ά.

Περιμένοντας την ανταπόκρισή σας
Με εκτίμηση

Γεώργιος Παντελίδης
Καθηγητής ΕΜΠ

Από το επόμενο τεύχος θα υπάρχει και
ΣΤΗΛΗ ΤΩΝ ΑΝΑΓΝΩΣΤΩΝ

Οδηγίες προς τους συγγραφείς των προτάσεων

- *Η έκταση της παρουσίασης ενός θέματος δε θα πρέπει να υπερβαίνει τις 4 σελίδες του εντύπου, τουλάχιστον στις θετικές επιστήμες.*
- *Η χρησιμοποίηση της διατύπωσης, της ορολογίας και των συμβολισμών των εγκεκριμένων διδακτικών βιβλίων της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης είναι υποχρεωτική.*
- *Η προσφυγή στη βοήθεια εννοιών και μεθόδων, που είναι εκτός της διδακτέας ύλης, οπωσδήποτε όμως από το "άμεσο περιβάλλον" της, θα πρέπει να είναι περιορισμένη και να επισημαίνεται ότι είναι εκτός διδακτέας ύλης. Στην περίπτωση αυτή μια βιβλιογραφική αναφορά θα είναι πολύ χρήσιμη.*

Ειδικότερα, κατά την παρουσίαση θα πρέπει, εφόσον είναι εφικτό και απαραίτητο,

- *να επισημαίνονται οι επιδιωκόμενοι στόχοι,*
- *να δίνεται το απαραίτητο πληροφοριακό υλικό με αναφορά στα διδακτικά βιβλία,*
- *να γίνονται οι κατάλληλες διδακτικές υποδείξεις,*
- *να γίνονται εκείνες οι αποδείξεις που υποδεικνύουν μεθόδους επεξεργασίας θεμάτων ή επίλυσης προβλημάτων και*
- *να υποδεικνύονται εκείνα τα σημεία, όπου είναι δυνατόν να ξεφύγουν λάθη.*

περιεχόμενα

Μαθηματικά

Εσείς Ρωτάτε - Εμείς προσπαθούμε ν' απαντήσουμε

Φυσική

Χημεία

Φιλολογικά

ΜΙΑ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ σε μια ΑΣΚΗΣΗ

Του **Αν. Σβέρκου,** Καθηγητή Μαθηματικών, Μέλους της συγγραφικής ομάδας των βιβλίων του ΟΕΔΒ

Στο βιβλίο «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» Γ Λυκείου (παράγρ. 3.3, Ασκήσεις Β ομάδας) δίνεται η ακόλουθη άσκηση (διατυπωμένη πιο γενικά): *Δίνονται τα μέσα των πλευρών ενός πενταγώνου και ζητούνται οι συντεταγμένες των κορυφών του.* Επειδή η άσκηση, κατά τη γνώμη μας, έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον θα παρουσιάσουμε τη λύση της σε πιο γενική περίπτωση και θα τη σχολιάσουμε.

Άσκηση

Δίνονται τα μέσα

$$M_1(\alpha_1, \beta_1),\ M_2(\alpha_2, \beta_2),\ \ldots,\ M_5(A_5, \beta_5)$$

των πλευρών ενός πενταγώνου. Ζητούνται οι συντεταγμένες των κορυφών του

$$A_1(x_1, y_1),\ A_2(x_2, y_2),\ \ldots,\ A_5(x_5, y_5).$$

(***Σημείωση:*** Δεν είναι απαραίτητο το πεντάγωνο να είναι κυρτό).

Λύση:

Επειδή τα M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 είναι τα μέσα των πλευρών $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1$, αντίστοιχα, μεταξύ των συντεταγμένων των σημείων αυτών θα ισχύουν οι σχέσεις (συντεταγμένες του μέσου ευθυγράμμου τμήματος):

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 2\alpha_1 \\ x_2 + x_3 = 2\alpha_2 \\ x_3 + x_4 = 2\alpha_3 \\ x_4 + x_5 = 2\alpha_4 \\ x_1 + x_5 = 2\alpha_5 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 = 2\beta_1 \\ y_2 + y_3 = 2\beta_2 \\ y_3 + y_4 = 2\beta_3 \\ y_4 + y_5 = 2\beta_4 \\ y_1 + y_5 = 2\beta_5 \end{cases}$$

Επειδή η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων, τόσο του πρώτου όσο και του δεύτερου συστήματος, είναι

$$(2)\quad D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \ldots = 2 \pi 0$$

τα δύο συστήματα έχουν μια και μοναδική λύση. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μόνο ένα πεντάγωνο, του οποίου τα M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 είναι τα μέσα των πλευρών του.

Γενική περίπτωση: Στην περίπτωση ενός ν-γώνου, του οποίου τα μέσα των πλευρών είναι

$$M_1(\alpha_1, \beta_1),\ \ldots,\ M_\nu(\alpha_\nu, \beta_\nu)$$

και ζητούνται οι κορυφές

$$A_1(x_1, y_1),\ \ldots,\ A_\nu(x_\nu, y_\nu).$$

Τα αντίστοιχα των (1) συστήματα για την περίπτωση αυτή είναι

$$(3)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 2\alpha_1 \\ x_2 + x_3 = 2\alpha_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 + x_\nu = 2\alpha_\nu \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 = 2\beta_1 \\ y_2 + y_3 = 2\beta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1 + y_\nu = 2\beta_\nu \end{cases}$$

και έχει ορίζουσα συντελεστών.

$$(4)\quad D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{(αναπτύσσουμε} \\ \text{κατά τα στοιχεία} \\ \text{της τελευταίας} \\ \text{γραμμής)}}}{=}$$

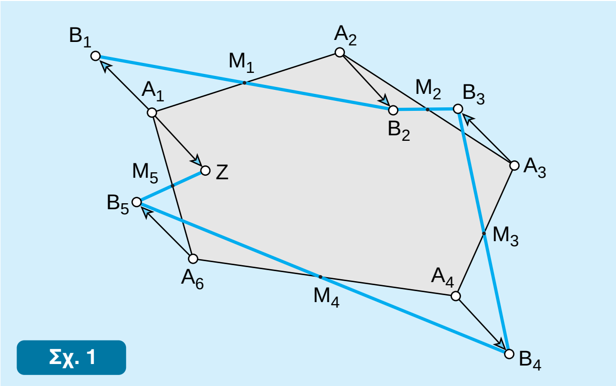
$$= (-1)^{\nu+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{\nu+\nu} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\nu+1} + 1$$

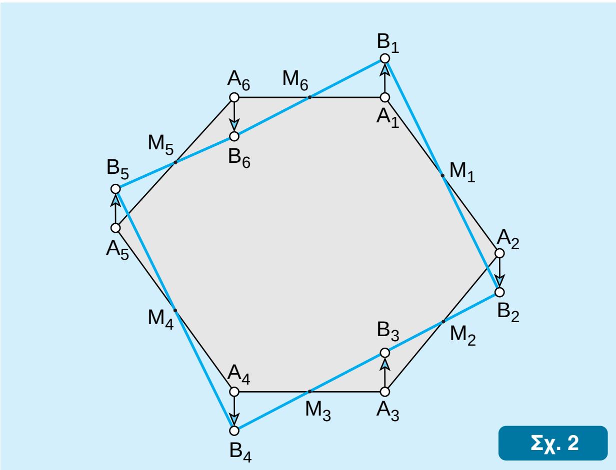
Συμπέρασμα:

1. Αν ο ν είναι περιττός, τότε $D = 2 \pi 0$ και τα συστήματα έχουν μοναδική λύση.
2. Αν ο ν είναι άρτιος, τότε $D = 0$ και τα συστήματα μπορεί να μην έχουν λύση ή να έχουν άπειρες λύσεις.

Σημείωση: Στην περίπτωση 2 για να έχει το σύστημα (3) λύση (και επομένως άπειρες), σύμφωνα με μια πρόταση της Γραμμικής Άλγεβρας που δεν περιέχεται στη διδακτέα ύλη, θα πρέπει ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων ενός εκάστου των συστημάτων (3) να είναι του ιδίου βαθμού με τον επαυξημένο τους.



Σχ. 1



Σχ. 2

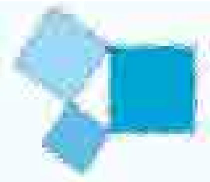
Σχόλια

- *Στο σχ. 1 το πεντάγωνο* $A_1A_2A_3A_4A_5$ *είναι εκείνο το μοναδικό που αντιστοιχεί τα σημεία* M_1, M_2, M_3, M_4, M_5. *Ας δούμε γιατί είναι το μοναδικό. Σε ένα άλλο πεντάγωνο (μπλε) η πλευρά που θα έχει τη μια κορυφή σ' ένα σημείο* B_1 *και μέσο το* M_1 *θα είναι η* B_1B_2 $(B_1M_1=M_1B_2)$. *Με τον ίδιο τρόπο βρίσκω τις κορυφές* B_3, B_4, B_5. *Το συμμετρικό του* B_5 *ως προς το* M_5 *είναι το* Z. *Η μελέτη των διανυσμάτων* A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_5B_5 *και* A_1Z *μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα* A_1B_1 *και* A_1Z *είναι αντίθετα. Επομένως για να ταυτιστεί το σημείο* Z *με το* B_1 *και να προκύψει ένα νέο πεντάγωνο, θα πρέπει* $A_1B_1 = A_1Z$, *που σημαίνει ότι τα διανύσματα αυτά είναι ίσα με το* 0. *Αυτό συνεπάγεται το μηδενισμό όλων των διανυσμάτων και την ταύτιση όλων των κορυφών με τις κορυφές του αρχικού πενταγώνου.*
- *Μελετείστε την περίπτωση που τα σημεία* M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 *βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία, για παράδειγμα τα* $M_1(1, 1)$, $M_2(2, 2)$, $M_3(3, 3)$, $M_4(4, 4)$, $M_5(5, 5)$ *που βρίσκονται πάνω στην ευθεία* $y=x$. *Θα βρείτε το εκφυλισμένο πεντάγωνο με κορυφές τα σημεία* $A(3, 3)$, $B(-1, -1)$, $\Gamma(5, 5)$, $\Delta(1, 1)$ *και* $E(7, 7)$.
- *Ας δούμε τι συμβαίνει στην περίπτωση του ν-γώνου με το ν άρτιο, π.χ. ενός εξαγώνου. Έστω ότι υπάρχει ένα εξάγωνο, το* $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ *που αντιστοιχεί στα μέσα των πλευρών* M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6. *Ας εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία, όπως και στο πεντάγωνο, που μας δίνει τα σημεία* B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 *και* B_6. *Τότε από την κορυφή* B_6 *στο* M_6 *φτάνουμε πάλι στο* B_1. *Αυτό είναι γεωμετρικά προφανές γιατί η ανάλογη με του πενταγώνου μελέτη των διανυσμάτων* A_iB_i, $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$ *οδηγεί στη δημιουργία του νέου εξαγώνου* $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$. *Επομένως όταν υπάρχει ένα εξάγωνο που ικανοποιεί τις δοθείσες συνθήκες, τότε ξεκινώντας από ένα οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου του μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα άλλο εξάγωνο που να ικανοποιεί τις ίδιες συνθήκες.*
- *Ας εξετάσουμε μια περίπτωση ν-γώνου (ν άρτιος) που δεν υπάρχει λύση, π.χ. ενός τετραπλεύρου. Επειδή τα μέσα των πλευρών* M_1, M_2, M_3, M_4 *ενός τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου, θα πρέπει* $M_1M_2 = M_4M_3$ *και επομένως οι συντεταγμένες των μέσων να ικανοποιούν τις συνθήκες*

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_3 - \alpha_4 \quad \text{και} \quad \beta_2 - \beta_1 = \beta_3 - \beta_4 \, .$$

Αν αυτό δεν συμβαίνει δεν μπορεί να υπάρχει τετράπλευρο που να έχει μέσα των πλευρών του τα σημεία αυτά.

Στις ίδιες συνθήκες καταλήγουμε και από την απαίτηση που περιέχεται στη σημείωση. ◆



ΤΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Γνωστές αποδείξεις με γεωμετρικές κατασκευές

Του **Γ. Παντελίδη,** Καθηγητή Ε.Μ.Πολυτεχνείου

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα, ένεκα των πολυάριθμων εφαρμογών του, θεωρείται το σημαντικότερο θεώρημα των Μαθηματικών και ειδικότερα της Γεωμετρίας. Είναι ισοδύναμο τόσο με το **Θεώρημα του Ευκλείδη**, όσο και με το **Θεώρημα των υψών**, δηλ. το ένα προκύπτει από το άλλο και αντιστρόφως.

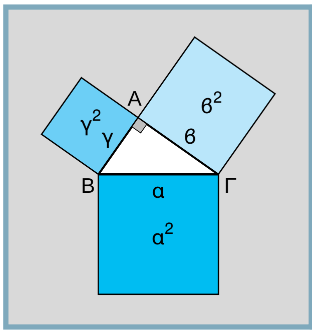
Υπάρχει ένας πολύ μεγάλος αριθμός, περισσότερες από 100, αποδείξεων του Πυθαγορείου Θεωρήματος, εδώ θα παρουσιάσουμε τις, κατά τη γνώμη μας, πιο σύντομες από αυτές. Επίσης θα διατυπώσουμε τις γενικεύσεις του θεωρήματος.

Πυθαγόρειο Θεώρημα: ***Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων με πλευρές τις κάθετες πλευρές του είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο με πλευρά την υποτείνουσα.***

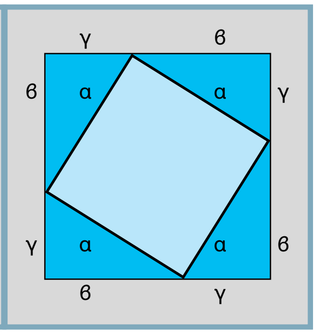
ή

Πυθαγόρειο Θεώρημα: ***Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τις κάθετες πλευρές του είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά την υποτείνουσα.***

$$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$$



Σχ.1



Σχ.2

Απόδειξη 1η: Στο σχ. 2 το εξωτερικό τετράγωνο έχει, σύμφωνα με τον τύπου του διωνύμου, το εμβαδόν

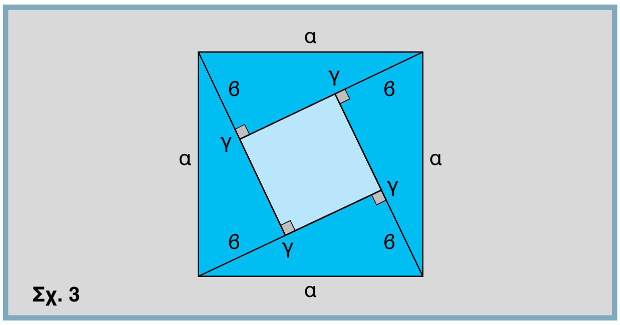
$$(\beta + \gamma)^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma.$$

Τα τέσσερα ίσα ορθογώνια τρίγωνα έχουν συνολικά το εμβαδόν 2βγ. Επομένως το εσωτερικό τετράγωνο έχει το εμβαδόν

$$(\beta + \gamma)^2 - 2\beta\gamma = \beta^2 + \gamma^2\ (=\alpha^2).$$

Απόδειξη 2η: Στο σχ. 3 το εσωτερικό τετράγωνο έχει, σύμφωνα με τον τύπο του διωνύμου, το εμβαδόν

$$(\gamma - \beta)^2 = \gamma^2 + \beta^2 - 2\gamma\beta.$$

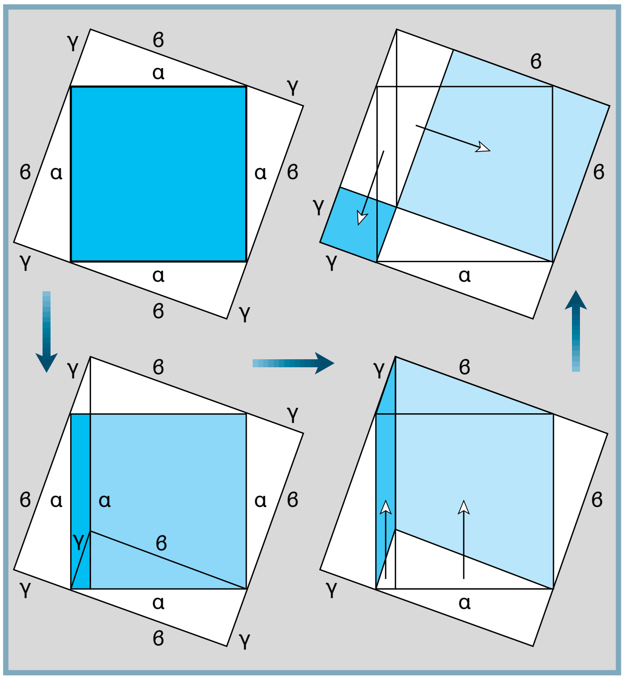


Σχ. 3

Τα τέσσερα ίσα ορθογώνια τρίγωνα έχουν συνολικά το εμβαδόν 2γβ. Το εξωτερικό τετράγωνο έχει επομένως το εμβαδόν

$$(\gamma - \beta)^2 + 2\gamma\beta = \gamma^2 + \beta^2\ (=\alpha^2).$$

Απόδειξη 3η: Η απόδειξη αυτή στηρίζεται στους ισεμβαδικούς μετασχηματισμούς, δηλ. σε μετασχηματισμούς που διατηρούν τα εμβαδά των σχημάτων (βλ. Θεωρητική Γεωμετρία, Β Λυκείου), που φαίνονται στα διαδοχικά βήματα του σχ. 4:



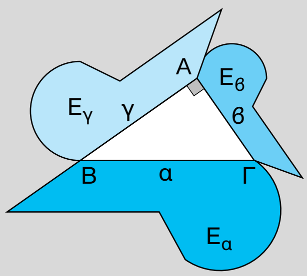
Σχ. 4

Το επεκτεταμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα

Δεν ανήκει στη διδακτέα ύλη

Με την ονομασία αυτή είναι γνωστό το εξής θεώρημα:

Αν κατασκευάσουμε πάνω από τις κάθετες πλευρές και την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου όμοια σχήματα (σχ. 5), τότε το άθροισμα των εμβαδών των σχημάτων που είναι πάνω από τις κάθετες είναι ίσο με το εμβαδόν του σχήματος που είναι πάνω από την υποτείνουσα.

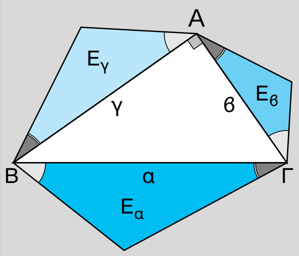


Σχ.5

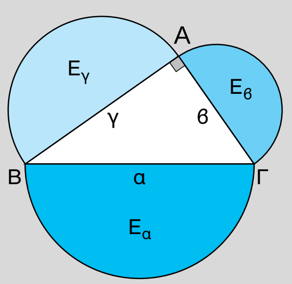
Αν λοιπόν E_α, E_β και E_γ είναι τα εμβαδά των σχημάτων πάνω στην υποτείνουσα α και στις κάθετες πλευρές β, γ (σχ. 5), τότε, σύμφωνα με το επεκτεταμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα ισχύει:

$$E_\beta + E_\gamma = E_\alpha.$$

Στα σχήματα 6 και 7 δίνονται τέτοιες περιπτώσεις, όπου τα E_α, E_β και Εγ έχουν το νόημα που δώσαμε πιο πάνω

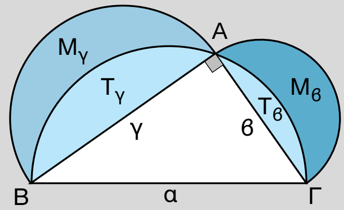


Σχ.6



Σχ.7

Άμεση συνέπεια του επεκτεταμένου Πυθαγόρειο Θεωρήματος και του θεωρήματος που διατυπώνεται με το σχ. 7 προκύπτει το γνωστό θεώρημα των μηνίσκων του Ιπποκράτη. Εγγράφουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 8) σε ημικύκλιο και εξωτερικά του τριγώνου με διαμέτρους τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ κατασκευάζουμε ημικύκλια. Μεταξύ των ημικυκλίων αυτών και του αρχικού ημικυκλίου της υποτείνουσας ΒΓ σχηματίζονται δύο σχήματα (γραμμοσκιασμένα), οι **μηνίσκοι του Ιπποκράτη**.



Σχ.8

Θεώρημα των μηνίσκων του Ιπποκράτη: *Το άθροισμα των εμβαδών των δύο μηνίσκων ισούται με το εμβαδόν του δοθέντος ορθογωνίου τριγώνου.*

Απόδειξη: Αν Ε είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, M_β, M_γ τα εμβαδά των μηνίσκων και T_β, T_γ τα εμβαδά των κυκλικών τμημάτων (σχ. 8) που αποκόπτουν οι χορδές ΑΓ και ΑΒ από το ημικύκλιο της υποτείνουσας, τότε, σύμφωνα με το θεώρημα που εκφράζει το σχήμα 7, ισχύει η ισότητα:

$$E + T_\beta + T_\gamma = (T_\beta + M_\beta) + (T_\gamma + M_\gamma)$$

δηλαδή

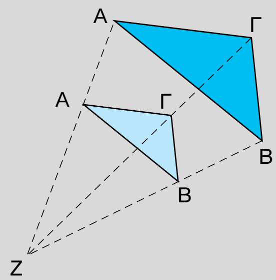
$$E = M_\beta + M_\gamma.$$

Σημείωση: Δύο σχήματα του επιπέδου ή του χώρου ονομάζονται **όμοια**, όταν το ένα προκύπτει από το άλλο μέσω μιας **απεικονίσεως ομοιότητας**.

Μια **απεικόνιση ομοιότητας** είναι σύνθεση μιας **μεταφοράς** (αξονική ή κεντρική συμμετρία, στροφή, ή παράλληλη μεταφορά) και μιας **ομοιοθεσίας**.

Μια **ομοιοθεσία** ορίζεται ως εξής (σχ. 9): Δίνεται ένα σημείο Ζ (κέντρο ομοιοθεσίας) και ένας θετικός αριθμός k (λόγος ομοιοθεσίας). Το Ζ είναι σταθερό σημείο και για κάθε Ρ≠Ζ η εικόνα Ρ ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

- Το Ρ βρίσκεται πάνω στην ευθεία ΖΡ και
- ΖΡ = k·ΖΡ



Σχ.9

Ειδικές περιπτώσεις αποτελούν οι ορισμοί των όμοιων τριγώνων και κυρτών πολυγώνων της Α Λυκείου: Δύο τρίγωνα (αντ. κυρτά πολύγωνα) είναι όμοια, όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που είναι απέναντι (αντ. που σχηματίζονται) από τις ομόλογες πλευρές ίσες μία προς μία.

Βιβλιογραφία

1. Ασκήσεις Γεωμετρίας (Ιησουϊτών).
2. Εγκυκλοπαίδεια Μαθηματικών, Εκδόσεις Παγουλάτου.
3. Μαθηματικό Λεξικό, Εκδόσεις Πατάκη (Μετάφραση του γερμανικού Rechnen und Mathematik, Dudenverlag).

ΑΡΡΗΤΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ και ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Του **Θ. Ξένου,** Καθηγητή Μαθηματικών Μ.Ε.

Άρρητες εξισώσεις (αντ. ανισώσεις) χαρακτηρίζονται εκείνες οι εξισώσεις (αντ. ανιστώσεις), όπου πολυωνυμικές παραστάσεις του άγνωστου εμφανίζονται κάτω από ριζικά.

Για παράδειγμα, η

$$3x - \sqrt{5x+1} = 7 \quad (\text{αντ. } \sqrt{3x-1} > 7 - x)$$

είναι άρρητη εξίσωση (αντ. αντίσωση).

● Στη γενική περίπτωση οι άρρητες εξισώσεις εμφανίζονται με τη μορφή

(*) $$\sqrt{P(x)} = Q(x),$$

όπου τα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι πολυώνυμα.

1. Στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας Β Λύκειου (παράγρ. 2.4) προτείνεται η λύση:

- Υψώνουμε τα δύο μέλη της ισότητας (*) στο τετράγωνο (ή σε κατάλληλη δύναμη ανάλογα με την τάξη της ρίζας) και λύνουμε την πολυωνυμική εξίσωση που προκύπτει.
- Επειδή κατά τη διαδικασία αυτή, όπως σχολιάζει και το σχολικό βιβλίο, η πολυωνυμική εξίσωση που θα προκύψει μπορεί να έχει και άλλες ρίζες, πρέπει με επαλήθευση να βρούμε τις λύσεις της (*).

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε την εξίσωση

(1) $$\sqrt{2x-3} = x - 2$$

Η εξίσωση ορίζεται όταν $2x - 3 \geq 0$, δηλαδή $x \geq \frac{3}{2}$. Αν υψώσουμε τα δύο μέλη της στο τετράγωνο, η (1) γίνεται

$$x^2 - 6x + 7 = 0$$

η οποία έχει ρίζες $x_1 = 3 + \sqrt{2}$ και $x_2 = 3 - \sqrt{2}$.

Η επαλήθευση όμως ότι οι ρίζες αυτές ικανοποιούν την (1) πολλές φορές, τουλάχιστον για το μαθητή, είναι αρκετά δύσκολη.

2. Είναι όμως πολλές φορές ευκολότερη η λύση της εξίσωσης (*), χωρίς να απαιτείται η σχετική επαλήθευση, αν θέσουμε από την αρχή την προϋπόθεση

$$Q(x) \geq 0$$

για να ισχύει η ισοδυναμία

$$\sqrt{P(x)} = Q(x) \qquad P(x) = [Q(x)]^2$$

(βλ. Άλγεβρα Α Λυκείου, παράγρ. 1.4).

Η προϋπόθεση $P(x) \geq 0$, για να έχει νόημα η $\sqrt{P(x)}$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, δηλαδή να έχει νόημα η δοθείσα εξίσωση (*), πρέπει να τεθεί από την αρχή.

Έτσι, για την εξίσωση (1) με την προϋπόθεση $x \geq 2$ η λύση $x_2 = 3 - \sqrt{2}$ απορρίπτεται.

Σημείωση: Με τη μέθοδο που αναφέραμε παραπάνω, επιλύεται κάθε άρρητη εξίσωση της μορφής $\sqrt[\kappa]{P(x)} = Q(x)$, όπου κ ακέραιος με $\kappa \geq 2$.

Γενικά, όταν επιλύουμε μια άρρητη εξίσωση, πριν υψώσουμε στο τετράγωνο (ή στην κατάλλη δύναμη), για να προκύπτει **ισοδύναμη εξίσωση**, θα πρέπει να έχουμε θέσει τέτοιους περιορισμούς, ώστε τα δύο μέλη της να είναι μη αρνητικά.

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε την άρρητη εξίσωση

(2) $$\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-5} = \sqrt{x-1},$$

η οποία έχει νόημα όταν οι υπόριζες ποσότητες είναι μη αρνητικές, δηλαδή όταν $x \geq \frac{5}{3}$.

Η (2) γράφεται

(3) $$\sqrt{x+2} = \sqrt{3x-5} + \sqrt{x-1}$$

και έτσι τα μέλη της είναι μη αρνητικά.

Η (3) είναι ισοδύναμη με την

$$(\sqrt{x+2})^2 = (\sqrt{3x-5} + \sqrt{x-1})^2,$$

η οποία γράφεται

$$2\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{3x-5} = 8 - 3x$$

Η τελευταία εξίσωση, επειδή οι υπόριζες ποσότητες για $x \geq \frac{5}{3}$ είναι μη αρνητικές, είναι ισοδύναμη με την

(4) $$2\sqrt{(x-1)\cdot(3x-5)} = 8 - 3x$$

Πρέπει να είναι $8 - 3x \geq 0$, δηλαδή $x \leq \frac{8}{3}$. Έτσι, για $x \left[\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right]$, η (4) είναι ισοδύναμη με την

$$4(x-1)(3x-5) = (8-3x)^2 \quad \text{ή} \quad 3x^2 + 16x - 44 = 0,$$

η οποία έχει ρίζες $x = 2$ και $x_2 = -\frac{22}{3}$.

Δεκτή είναι μόνον η λύση $x_1 = 2 \left[\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right]$.

Σημείωση: Υπενθυμίζουμε ότι η ισότητα

$$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\cdot\beta}$$

σχύει όταν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$.

- Θεωρούμε την άρρητη ανίσωση

(**) $$\sqrt{P(x)} > Q(x)$$

όπου τα P(x) και Q(x) είναι πολυώνυμα.

Η ανίσωση αυτή έχει νόημα όταν ισχύει $P(x) \geq 0$.

☛ Αν $Q(x) < 0$, τότε είναι φανερό ότι η (**) αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $P(x) \geq 0$.

☛ Αν $Q(x) \geq 0$, τότε η (**) είναι ισοδύναμη με την

$$P(x) > [Q(x)]^2$$

Σημείωση: Στην περίπτωση που η ανίσωση έχει τη μορφή

$$\sqrt{P(x)} < Q(x)$$

και είναι $Q(x) \leq 0$, τότε είναι αδύνατη.

Παράδειγμα 3

Θεωρούμε την άρρητη ανίσωση

(5) $$3 - \sqrt{x-4} < \sqrt{x-7},$$

η οποία έχει νόημα όταν $x - 4 \geq 0$ και $x - 7 \geq 0$, δηλαδή $x \geq 7$.

Η (5) είναι ισοδύναμη με την

$$3 < \sqrt{x-4} + \sqrt{x-7},$$

η οποία με τη σειρά της είναι ισοδύναμη με την

$$9 < (\sqrt{x-4} + \sqrt{x-7})^2 \text{ ή } \sqrt{(x-4)(x-7)} > 10-x$$

i) Αν $10 - x < 0$, δηλαδή $x > 10$, τότε η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x > 10$.

ii) Αν $10 - x \geq 0$, δηλαδή $x \leq 10$ και επομένως $x \in [7, 10]$, τότε η ανίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$(x-4)(x-7) > (10-x)^2$$

απ' όπου βρίσκουμε $x > 8$ και επομένως $x \in (8, 10]$. Άρα λοιπόν το σύνολο λύσεων της (5) είναι το

$$(8, 10] \cup (10, +\infty) = (8, +\infty).$$

◆

Εσεις ρωτάτε — Εμεις προσπαθούμε ν' απαντήσουμε

Μπορούμε από το πρόσημο της παραγώγου σ' ένα σημείο να αποφανθούμε για τη μονοτονία στην περιοχή του σημείου;

Απαντάει ο Γ. Παντελίδης, Καθηγητής Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Το θέμα δεν ανήκει στη διδακτέα ύλη της Γ' Λυκείου και δεν πρέπει να διδαχτεί. Απλώς στοχεύει στην πληροφόρηση του διδάσκοντα.

Η πρόταση (βλ. Ανάλυση Γ Λυκείου, παράγρ. 6.11)

- **Πρόταση**: *Για κάθε συνάρτηση f, συνεχή στο διάστημα [α, β], ισχύει:*

*Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο [α, β]**

αποτελεί ένα σημαντικό όπλο στη μελέτη της μονοτονίας μιας συναρτήσεως και κυρίως του είδους της μονοτονίας της. Το ερώτημα λοιπόν είναι:

Αν για κάποιο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ισχύει $f'(x_0) > 0$, είναι η f γνησίως αύξουσα σε μια περιοχή του x_0;

Η απάντηση είναι: **Όχι απαραίτητα.**

1. Αν η συνάρτηση της παραγώγου f είναι συνεχής στο x_0, τότε, σύμφωνα με την πρόταση 2α (βλ. Ανάλυση Γ Λυκείου, παράγρ. 3.2), υπάρχει μια περιοχή $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ όπου $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Αυτό όμως σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση σημαίνει ότι η f είναι **γνησίως αύξουσα στην περιοχή αυτή του x_0**.
2. Αν δεν είναι γνωστή η συνέχεια ή μη της f στο x_0, τότε την απάντηση δίνει η επόμενη πρόταση:

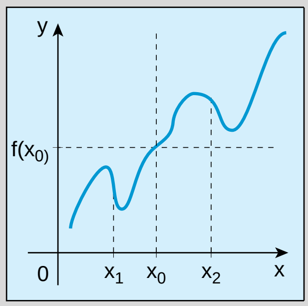
- **Πρόταση**: *Αν η συνάρτηση f έχει παράγωγο στο εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και $f'(x_0) > 0$, τότε υπάρχει διάστημα $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ τέτοιο, ώστε για κάθε*

$$x_1, x_2 \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \quad \text{με} \quad x_1 < x_0 < x_2$$

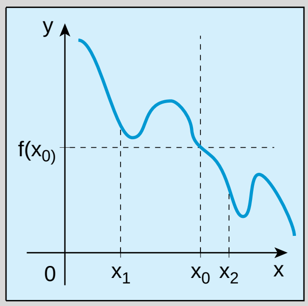
να ισχύει

$$f(x_1) < f(x_0) < f(x_2) \quad (\sigma\chi.\ 1).$$

[Για την περίπτωση $f'(x_0) < 0$ ισχύουν οι $f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$, (σχ. 2)]



Σχ.1



Σχ.2

Με άλλα λόγια η συνάρτηση δεν είναι μονότονη στο διάστημα αυτό, αλλά οι τιμές της πριν (αντ. μετά) από το x_0 είναι μικρότερες (αντ. μεγαλύτερες) από την $f(x_0)$.

Απόδειξη: Από την ισότητα

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0$$

(σύμφωνα με την πρόταση 2α), υπάρχει περιοχή $\pi(\varepsilon) = (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ όπου

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Έτσι για $x_1, x_2 \in \pi(\varepsilon)$, με $x_1 < x_0 < x_2$, ισχύουν

$$f(x_1) - f(x_0) < 0 \;\;\&\;\; f(x_2) - f(x_0) > 0$$

δηλ.

$$f(x_1) < f(x_0) \;\;\&\;\; f(x_0) < f(x_2).$$

◆

* Ανάλογα ισχύουν και για την περίπτωση $f'(x) < 0$

ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ και ΚΩΝΙΚΗΣ ΤΟΜΗΣ

Του **Στ. Σ. Σταματάκη,** Επ. Καθηγητή στο Α.Π.Θ.

Έστω g μια ευθεία και C μια κωνική τομή του επιπέδου. Στο ερώτημα: «Πότε η ευθεία g και η κωνική C έχουν *μοναδικό* κοινό σημείο», μια συνηθισμένη απάντηση, όσων εύλογα ανατρέχουν διαισθητικά στο παράδειγμα ενός κύκλου και των εφαπτομένων του, είναι η επόμενη: «Η ευθεία g και η κωνική C έχουν μοναδικό κοινό σημείο, όταν η g είναι εφαπτόμενη του C». Παρακάτω θα σχολιάσουμε την απάντηση αυτή, μελετώντας το ευρύτερο πρόβλημα των σχετικών θέσεων μιας ευθείας ως προς μια κωνική τομή.

1. *Το πρόβλημα της εφαπτόμενης* σ' ένα σημείο Μ μιας καμπύλης C (G.W. Leibniz 1646-1716) αποτέλεσε ένα από τα πρωταρχικά προβλήματα του διαφορικού λογισμού, και λύνεται εν συντομία ως εξής (σχολικό βιβλίο, Ανάλυση, Κεφ. 6): Θεωρούμε ένα δεύτερο σημείο $N \pi M$ της C και υποθέτουμε, αφενός ότι υπάρχει οριακή θέση της ευθείας, που διέρχεται από τα M, N καθώς το N πλησιάζει το M, και αφετέρου, ότι αυτή η οριακή θέση είναι ανεξάρτητη της πλευράς της καμπύλης C, από την οποία το N πλησιάζει το M. Η οριακή αυτή ευθεία g ονομάζεται **εφαπτόμενη** της C στο σημείο M. Εξάλλου, όταν η C είναι το γράφημα μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $y = f(x)$, η εφαπτόμενη g της C σ' ένα σημείο της $M(x_0, y_0)$ έχει εξίσωση

$$g: y - y_0 = f(x_0)(x - x_0).$$

Έτσι, προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις των εφαπτόμενων των κωνικών τομών (σχολικό βιβλίο, Αναλυτική Γεωμετρία, Κεφ. 6):

Πίνακας 1

Κωνική	Εφαπτόμενη
Έλλειψη $C: \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$	$g: \dfrac{x_0 x}{\alpha^2} + \dfrac{y_0 y}{\beta^2} = 1$
Υπερβολή $C: \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$	$g: \dfrac{x_0 x}{\alpha^2} - \dfrac{y_0 y}{\beta^2} = 1$
Παραβολή $C: y^2 = 2px$	$g: y_0 y = p(x_0 + x)$

2. Είναι εύκολο να αποδείξουμε, ότι

Πρόταση 1: *Η εφαπτόμενη g στο σημείο $M(x_0, y_0)$ μιας κωνικής τομής C έχει μόνον ένα κοινό σημείο μ' αυτήν.*

Πράγματι, θεωρώντας το σύστημα των εξισώσεων καθεμιάς από τις κωνικές του Πίνακα 1 και της αντίστοιχης εφαπτόμενης, το πρόβλημα της εύρεσης των κοινών σημείων τους ανάγεται σε μια *δευτεροβάθμια* εξίσωση ως προς x ή ως προς y, της οποίας η διακρίνουσα μηδενίζεται, που σημαίνει, ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση. Επομένως η C και η g έχουν ένα κοινό σημείο, κι αυτό φυσικά είναι το $M(x_0, y_0)$.

Ας το κάνουμε αυτό για την παραβολή: Η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y_0 y = p(x_0 + x) \end{cases}$$

ανάγεται στη δευτεροβάθμια εξίσωση

$$px^2 + 2(px_0 - y_0^2)x + px_0^2 = 0,$$

της οποίας η διακρίνουσα

$$D = 4(px_0 - y_0^2)^2 - 4p^2x_0^2,$$

λόγω της $y_0^2 = 2px_0$, μηδενίζεται.

Το αντίστροφο της Πρότασης 1 δεν ισχύει, όπως δείχνει το

Παράδειγμα 1

Έστω η παραβολή

$$C: y^2 = 2x$$

και το σημείο της $M(2, 2)$. Η εφαπτόμενη της C στο M έχει, σύμφωνα με τον Πίνακα 1, εξίσωση

$$g: x - 2y + 2 = 0.$$

Θεωρούμε και την ευθεία $h: y = 2$, που προφανώς διέρχεται από το M. Θέτουμε $y = 2$ στην εξίσωση της παραβολής, οπότε προκύπτει *πρωτοβάθμια* εξίσωση ως προς x, η $4 = 2x$, άρα $x = 2$ και βρίσκουμε πάλι τις συντεταγμένες του M, που σημαίνει, ότι η h και η C έχουν μοναδικό σημείο και η h δεν είναι εφαπτόμενη της C.

3. Ας δούμε τώρα, πώς μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το ερώτημα στη γενική περίπτωση.

Έστω

$$\kappa x + \lambda y + \mu = 0, \quad \kappa^2 + \lambda^2 \pi 0,$$

η εξίσωση της ευθείας g και

$$Ax^2 + Bxy + \Gamma y^2 + \Delta x + Ey + Z = 0, \quad A^2+B^2+\Gamma^2 \pi 0,$$

η εξίσωση της κωνικής τομής C. Ζητούμε τα κοινά σημεία αυτών. Θεωρούμε το σύστημα

$$(1) \quad \begin{cases} \kappa x + \lambda y + \mu = 0 \\ Ax^2 + Bxy + \Gamma y^2 + \Delta x + Ey + Z = 0 \end{cases},$$

από τις λύσεις του οποίου προκύπτουν οι συντεταγμένες των κοινών σημείων, και το λύνουμε ως εξής: Ένας από τους συντελεστές κ, λ της εξίσωσης της g είναι διάφορος του μηδενός. Ας είναι αυτός ο λ. Λύνουμε την πρώτη εξίσωση του (1) ως προς y, οπότε

$$y = -\frac{\kappa x + \mu}{\lambda},$$

αντικαθιστούμε στη δεύτερη και παίρνουμε την επόμενη ως προς x εξίσωση:

$$(2)\quad \left(\frac{\kappa^2\Gamma}{\lambda^2} - \frac{\kappa B}{\lambda} + A\right)x^2 + \left(\frac{2\kappa\mu\Gamma}{\lambda^2} - \frac{\mu B + \kappa E}{\lambda} + \Delta\right)x + \left(\frac{\mu^2\Gamma}{\lambda^2} - \frac{\mu E}{\lambda} + Z\right) = 0.$$

Για κάθε λύση x_0 της εξίσωσης (2) θέτουμε

$$y_0 = -\frac{\kappa x_0 + \mu}{\lambda},$$

οπότε προκύπτουν οι συντεταγμένες ενός σημείου $P(x_0, y_0)$ της τομής της ευθείας g και της κωνικής C.

Περίπτωση Ι: Η εξίσωση (2) είναι δευτέρου βαθμού, δηλαδή είναι $\frac{\kappa^2\Gamma}{\lambda^2} - \frac{\kappa B}{\lambda} + A \;\pi\; 0$. Έστω D η διακρίνουσα της (2). Διακρίνουμε τις επόμενες υποπεριπτώσεις:

Ια: *Έστω D>0.* Η εξίσωση (2) έχει δύο διάφορες, πραγματικές λύσεις. Η ευθεία g τέμνει την κωνική C σε δύο διάφορα σημεία, που σημαίνει, ότι δεν είναι εφαπτόμενη της C. Η ευθεία g ονομάζεται **τέμνουσα** της C.

Ιβ: *Έστω D=0.* Η εξίσωση (2) έχει μια διπλή πραγματική λύση, επομένως η g έχει μοναδικό κοινό σημείο με την C (που θεωρείται διπλό). Η ευθεία g είναι **εφαπτόμενη** της κωνικής C.

Ιγ: *Έστω D<0.* Η εξίσωση (2) δεν έχει πραγματικές λύσεις. Η ευθεία g δεν τέμνει την κωνική C.

Περίπτωση ΙΙ: Η εξίσωση (2) είναι πρώτου βαθμού, δηλαδή είναι $\frac{\kappa^2\Gamma}{\lambda^2} - \frac{\kappa B}{\lambda} + A = 0$. Η g τέμνει την C το πολύ σε ένα σημείο, και *δεν είναι εφαπτόμενη* αυτής. Όταν η g τέμνει την C ονομάζεται **ασυμπτωτική τέμνουσα** της κωνικής C.

Ώστε, είναι δυνατό να *τέμνει* μια ευθεία μια κωνική τομή C σε ένα μόνο σημείο, *χωρίς να είναι εφαπτόμενη* αυτής.

4. Εφαρμογές

Α. Έστω ότι η κωνική C είναι η υπερβολή με την κανονική εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

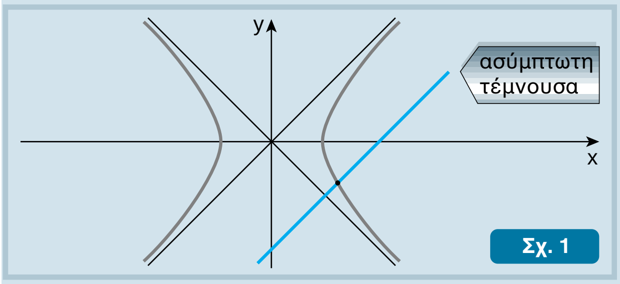
Η εξίσωση (2) παίρνει τη μορφή

$$(3)\quad \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\kappa^2}{\lambda^2}\right)x^2 - \frac{2\kappa\mu}{\lambda^2}x - \left(\frac{\mu^2}{\lambda^2} + \beta^2\right) = 0,$$

η οποία είναι ακριβώς τότε πρωτοβάθμια, όταν $\frac{\kappa}{\lambda} = \pm\frac{\beta}{\alpha}$. Η εξίσωση της g γίνεται

$$\pm\beta x + \alpha y + \frac{\mu\alpha}{\lambda} = 0.$$

- Όταν μ=0 η (3) είναι αδύνατη και η g είναι μια από τις ασύμπτωτες της C.
- Όταν μπ0 η (3) έχει μοναδική λύση και η g είναι ασυμπτωτική τέμνουσα της C. Εξάλλου, στην περίπτωση αυτή η g είναι παράλληλη σε μια από τις ευθείες $\pm\beta x + \alpha y = 0$, δηλαδή σε μια από τις δυο ασύμπτωτες της υπερβολής C (σχ. 1)



Σχ. 1

Ώστε: ***Οι ασυμπτωτικές τέμνουσες μιας υπερβολής είναι οι ευθείες, οι παράλληλες στις ασύμπτωτες αυτής.***

Β. Έστω ότι η κωνική C είναι η έλλειψη με την κανονική εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Η εξίσωση (2) παίρνει τη μορφή

$$\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\kappa^2}{\lambda^2}\right)x^2 + \frac{2\kappa\mu}{\beta^2\lambda^2}x + \left(\frac{\mu^2}{\lambda^2} - \beta^2\right) = 0,$$

η οποία για κάθε κ, λ ℝ είναι δευτεροβάθμια.

Ώστε: ***Η έλλειψη δεν έχει ασυμπτωτικές τέμνουσες.***

Γ. Έστω ότι η κωνική C είναι η παραβολή με την κανονική εξίσωση

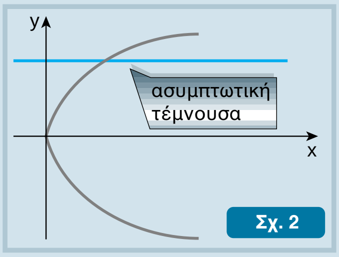
$$y^2 = 2px.$$

Η εξίσωση (2) παίρνει τη μορφή

$$(4)\quad \kappa^2x^2 + 2(\kappa\mu - p\lambda^2)x + \mu^2 = 0,$$

η οποία είναι ακριβώς τότε πρωτοβάθμια όταν κ = 0. Στην περίπτωση αυτή η (4) έχει μοναδική λύση και η g είναι ασυμπτωτική τέμνουσα της C. Η εξίσωση της g γίνεται

$$\lambda y + \mu = 0,$$



Σχ. 2

επομένως είναι παράλληλη στον άξονα της παραβολής C (σχ. 2).

Ώστε: ***Οι ασυμπτωτικές τέμνουσες μιας παραβολής είναι οι ευθείες, οι παράλληλες στον άξονα αυτής.***

Συμπέρασμα: Η απάντηση, που αναφέρεται στην αρχή αυτού του σχολίου, δεν είναι ορθή, αφού αποδείξαμε, ότι υπάρχουν κωνικές τομές (είναι οι υπερβολές και οι παραβολές) και ευθείες (είναι οι ασυμπτωτικές τέμνουσες αυτών), που έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, χωρίς να είναι εφαπτόμενες. Αντίθετα, στην έλλειψη, κάθε ευθεία, που έχει ένα μόνον κοινό σημείο μ' αυτήν, είναι εφαπτόμενη. ◆

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Του **Σ. Καρανάσιου,** Επ. Καθηγητή Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Θα αναλύσουμε εδώ τις προϋποθέσεις για να είναι παραγωγίσιμη η αντίστροφη μιας παραγωγίσιμης συναρτήσεως και στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε το σχετικό τύπο, ο οποίος δεν περιλαμβάνεται στη διδακτέα ύλη της Γ Λυκείου. Οι περιπτώσεις είναι πολλές και σημαντικές.

Οι σχετικές προτάσεις είναι:

Πρόταση 1: *Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $f(x)$, τότε η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο x και ισχύει*

$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x). \qquad (1)$$

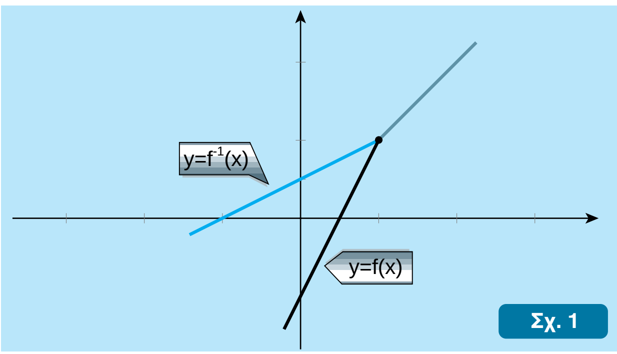
Προσοχή: Η σύνθεση δύο συναρτήσεων μπορεί να είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση χωρίς κάθε μια από αυτές να είναι παραγωγίσιμη. Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{αν } x < 1 \\ x, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

και η αντίστροφή της

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x + 1), & \text{αν } x < 1 \\ x, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

δεν είναι παραγωγίσιμες (σχ. 1) στο $x = 1$. (Είναι γνησίως μονότονες και συνεχείς).



Σχ. 1

Πρόταση 2: *Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με $f'(x_0) \neq 0$, $x_0 \in \Delta$, τότε υπάρχει η αντίστροφή της f^{-1} και είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$.*

(Ανάλυση Γ Λυκείου, προτάσεις 1 & 2, παραγρ. 6.7).

Για τη συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και την αντίστροφή της $f^{-1}: f(A) \to \mathbb{R}$ ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

(α) $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$, για κάθε $x \in A$.

(β) $f\big(f^{-1}(y)\big) = y$, για κάθε $y \in f(A)$.

(Ανάλυση Γ Λυκείου, παράγρ. 1.8).

Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις της προτάσεως 2, τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο (1) στις περιπτώσεις των ισοτήτων (α) και (β) και για τις θέσεις x_0 και $y_0 = f(x_0)$.

Έτσι από τη σχέση (α) και με τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συναρτήσεως έχουμε:

$$\left[f^{-1}\big(f(x)\big)\right]'_{x=x_0} = 1 \Rightarrow \left[\left(f^{-1}\right)'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)\right]_{x=x_0} = 1$$

οπότε προκύπτει ο τύπος (αφού $f'(x_0) \neq 0$):

$$\left(f^{-1}\right)'\big(f(x_0)\big) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad (2)$$

Τι γίνεται όμως αν $f'(x_0) = 0$; Αν η f^{-1} ήταν παραγωγίσιμη στο $f(x_0) = y_0$ τότε από τη σχέση (β) θα είχαμε:

$$\left[f\big(f^{-1}(y)\big)\right]'_{y=y_0} = 1 \Rightarrow f'(x_0) \cdot \left(f^{-1}\right)'(y_0) = 1 \Rightarrow 0 \cdot \left(f^{-1}\right)'(y_0) = 1,$$

που είναι άτοπο. Άρα, αν $f'(x_0) = 0$, τότε η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$.

Σημείωση: Στην περίπτωση αυτή όταν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντ. γνησίως φθίνουσα), τότε η f^{-1} έχει στο σημείο y_0 παράγωγο $+\infty$ (αντ. $-\infty$). Αφού για την f π.χ. γνησίως αύξουσα και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0, \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

οπότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = +\infty$$

Ας δούμε στη συνέχεια δύο συγκεκριμένα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \text{ημ}x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

που έχει ως σύνολο τιμών το ανοικτό διάστημα $(-1, 1)$. Να βρεθεί η παράγωγος της f^{-1}.

(Είναι γνωστό ότι $f^{-1}(y) = \text{τοξημ}y$, $y \in (-1, 1)$, που είναι εκτός διδακτέας ύλης).

Η f(x)=ημx είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και άρα υπάρχει η f^{-1}: (–1, 1) $\mathbb{R}$. Είναι

$$f\ (x) = συνx > 0,$$

για κάθε x $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Επομένως υπάρχει η παράγωγος της f^{-1}(y), για κάθε y (–1, 1).

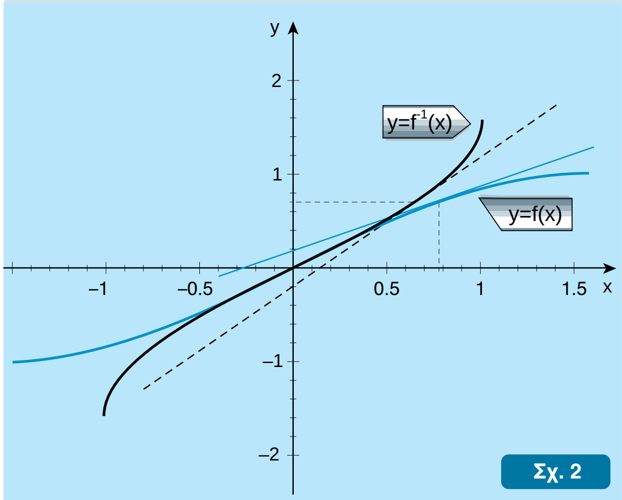
Από τον τύπο (2) έχουμε:

$$(f^{-1})\ \big(f(x)\big) = \frac{1}{f\ (x)} = \frac{1}{συνx} \qquad (f^{-1})\ (ημx) = \frac{1}{\sqrt{1-ημ^2x}},$$

οπότε, θέτοντας y = ημx, παίρνουμε

$$(f^{-1})\ (y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad y\ \ (-1, 1).$$

Στο Σχήμα 2, φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} και οι εφαπτόμενές τους στις θέσεις $x = \frac{\pi}{4}$ και $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ αντιστοίχως.



Σχ. 2

Παράδειγμα 2

Όμοια για τη συνάρτηση

$$f(x) = εφx,\quad x\ \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και παραγωγίσιμη με

$$(εφx)\ = \frac{1}{συν^2x} = \frac{ημ^2x + συν^2x}{συν^2x} = 1 + εφ^2x$$

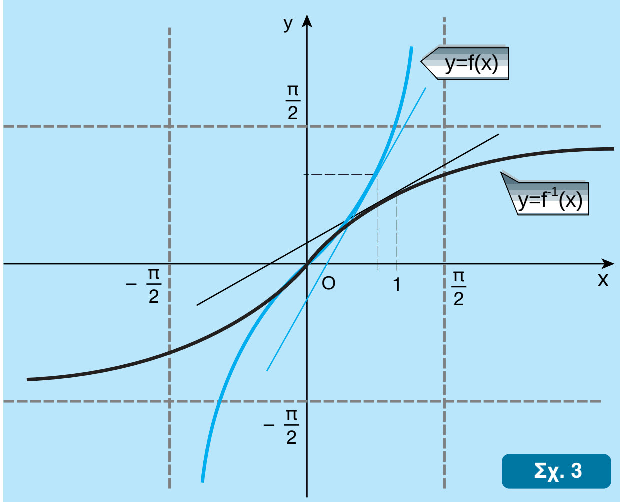
για κάθε x $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Επομένως πάλι από τη σχέση (2) θα έχουμε:

$$(f^{-1})\ (εφx) = \frac{1}{(εφx)} = \frac{1}{1 + εφ^2x},$$

οπότε

$$(f^{-1})\ (y) = \frac{1}{1+y^2},\quad y\ \ \mathbb{R}.$$

Στο Σχήμα 3, φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} και οι εφαπτόμενές τους στις θέσεις x = π/4 και y = 1 αντιστοίχως.



Σχ. 3

ΑΣΚΗΣΗ στο ΘΕΩΡΗΜΑ ΩΘΗΣΗΣ-ΟΡΜΗΣ με ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΔΥΝΑΜΗ υπό ΓΩΝΙΑ

Των **Στ. Σαμαρά και Ελ. Πατιά,** Φυσικών

Η συγκεκριμένη άσκηση μπορεί να θεωρηθεί κορυφαία του είδους της.

Συμβουλεύουμε τους μαθητές της Γ΄ Λυκείου, Α΄ και Β΄ Δέσμης, να ασχοληθούν μαζί της, αφού πρώτα διδαχθούν πολύ καλά τα πρώτα δύο κεφάλαια.

ΑΣΚΗΣΗ

Σώμα μάζας m = 1 kgr βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο και ηρεμεί. Ξαφνικά αρχίζει να ασκείται πάνω του δύναμη:

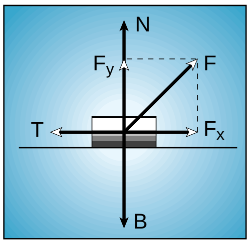
$$F = \begin{cases} 2t & \text{αν } 0 \le t < 4\ \text{sec} \\ 12-t & \text{αν } 4\ \text{sec} \le t \le 12\ \text{sec} \\ 0 & \text{αν } t > 12\ \text{sec} \end{cases}$$

η οποία σχηματίζει γωνία $\varphi=60^\circ$ προς τα πάνω με το οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής στατικής τριβής ισούται με το συντελεστή τριβής ολίσθησης και είναι $n = 0{,}2$. Αν $g = 10\ \text{m/sec}^2$ και $\sqrt{3} = 1{,}8$ να υπολογίσετε:

α) Το μέτρο της τριβής συναρτήσει του χρόνου.
β) Τη μέγιστη ταχύτητα που αναπτύσσει το σώμα.
γ) Τη χρονική στιγμή που το σώμα θα σταματήσει.

Λύση

α) Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Οι συνιστώσες της $\vec{F}$ θα είναι:



$$F_x = F\cdot\text{συνφ} = F\cdot\frac{1}{2} = \frac{F}{2}$$

$$F_y = F\cdot\text{ημφ} = F\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = F\cdot 0{,}9$$

Για το υπολογισμό του μέτρου της τριβής $\vec{T}$, πρέπει να προσέξουμε το εξής:
Το σώμα δεν αρχίζει να κινείται από τη χρονική στιγμή t=0, διότι για να αρχίσει να κινείται στο χρονικό διάστημα από 0 εώς 4 sec θα πρέπει το μέτρο της συνιστώσας $\vec{F}_x$ της δύναμης $\vec{F}$ να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μέτρου της οριακής τριβής. Η χρονική στιγμή t_1 από την οποία αρχίζει να κινείται το σώμα υπολογίζεται:

$$F_x = T \qquad \frac{F}{2} = nN \qquad \frac{F}{2} = n(B - F_y)$$

$$\frac{F}{2} = n\cdot(B - F\cdot 0{,}9) \qquad \frac{2t_1}{2} = n(mg - 2t_1\cdot 0{,}9)$$

$$t_1 = 1{,}47\ \text{sec}$$

Έτσι, για τον υπολογισμό της τριβής, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) ***0 ≤ t < 1,47 sec:***

$$T = F_x \qquad T = \frac{F}{2} \qquad T = \frac{2t}{2} \qquad \mathbf{T = t}$$

ii) ***1,47 sec ≤ t < 4 sec:***

$$T = nN \qquad T = n(B - F_y) \qquad T = n(mg - F\cdot 0.9)$$

$$T = 2 - 0{,}18F \qquad T = 2 - 0{,}18\cdot 2t$$

$$\mathbf{T = 2 - 0{,}36t}$$

iii) ***4 sec ≤ t ≤ 12 sec:***

$$T = nN \qquad T = n(B - F_y) \qquad T = n(mg - F\cdot 0{,}9)$$

$$T = 2 - 0{,}18F \qquad T = 2 - 0{,}18\cdot(12 - t)$$

$$\mathbf{T = 0{,}18t - 0{,}16}$$

iv) ***t > 12 sec:***

$$T = nN \qquad T = n(B - F_y) \qquad T = n(mg - F\cdot 0{,}9)$$

$$T = 2 - 0{,}18F \qquad \mathbf{T = 2N}$$

Άρα

$$T = \begin{cases} t & \text{αν } 0 \le t < 1{,}47\ \text{sec} \\ 2 - 0{,}36t & \text{αν } 1{,}47\ \text{sec} \le t < 4\ \text{sec} \\ 0{,}18t - 0{,}16 & \text{αν } 4\ \text{sec} \le t \le 12\ \text{sec} \\ 2 & \text{αν } t > 12\ \text{sec} \end{cases}$$

όπου η τριβή T δίνεται σε Newton.

β) Για να βρούμε τη μέγιστη ταχύτητα που αναπτύσσει το σώμα θα χρειαστούμε το θεώρημα ώθησης-ορμής. Άρα θα πρέπει να κάνουμε τα διαγράμματα F_x–t και T–t αφού οι δυνάμεις $\vec{F}_x$ και $\vec{T}$ είναι μεταβλητές συναρτήσει του χρόνου, και από τα εμβαδά θα υπολογίσουμε τις ωθήσεις.

Ξέρουμε ότι $F_x = \frac{F}{2}$. Άρα:

$$
Fx = \begin{cases} t & \text{αν } \ 0 \le t < 4 \text{ sec} \\ \dfrac{12-t}{2} & \text{αν } \ 4 \text{ sec} \le t \le 12 \text{ sec} \\ 0 & \text{αν } \ t > 12 \text{ sec} \end{cases}
$$

Διαπιστώνουμε ότι οι δυνάμεις έχουν γραμμική εξάρτηση από το χρόνο. Επομένως αρκούν τα αρχικά και τελικά σημεία στα διαγράμματα και το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει.

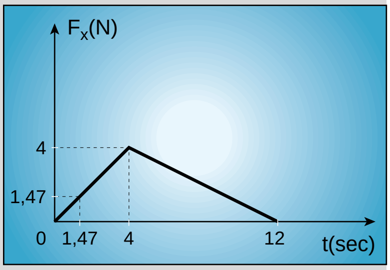
Με τη βοήθεια πινάκων τιμών, μπορούμε να κάνουμε το διάγραμμα F_x–t:

$F_x = t$

t(sec)	0	1,47	4
F_x(N)	0	1,47	4

$F_x = \dfrac{12-t}{2}$

t(sec)	4	12
F_x(N)	4	0



Ομοίως, για την τριβή έχουμε:

T = t

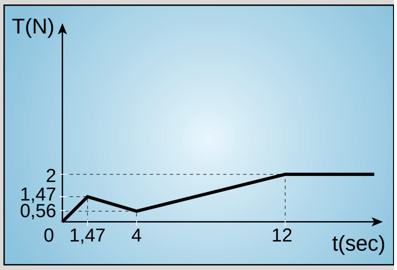
t(sec)	0	1,47
T(N)	0	1,47

T = 2 – 0,36 t

t(sec)	1,47	4
T(N)	1,47	0,56

T = 0,18t – 0,16

t(sec)	4	12
T(N)	0,56	2



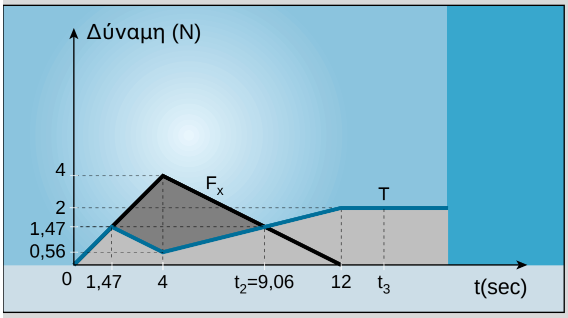
Για το χρονικό διάστημα στο οποίο ισχύει $F_x > T$ η κίνηση είναι επιταχυνόμενη, ενώ όταν $F_x < T$ η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη. Άρα τη μέγιστη ταχύτητα $υ_{max}$ θα την έχουμε όταν για δεύτερη φορά θα ισχύει $F_x = T$. Αν συμβολίσουμε με t_2 αυτή τη χρονική στιγμή, θα ισχύει:

$$F_x = T \qquad \frac{12-t_2}{2} = 0{,}18t_2 - 0{,}16 \qquad t_2 = 9{,}06 \text{ sec.}$$

Τη χρονική στιγμή t_2 θα έχουμε:

$$F_x = T = \frac{12-9{,}06}{2} = 1{,}47 \text{ N.}$$

Μπορούμε να κάνουμε κοινό διάγραμμα δυνάμεων-χρόνου:



Για να βρούμε τη $υ_{max}$ θα εφαρμόσουμε θεώρημα ώθησης-ορμής από τη χρονική στιγμή t_1 έως την t_2, όπου $Ω_{F_x} - Ω_T$ είναι το γραμμοσκιασμένο εμβαδό που περικλείεται ανάμεσα στις δύο καμπύλες (δύο τρίγωνα):

$$ΔJ = Ω_{F_x} - Ω_T$$

$$mυ_{max} - 0 = \frac{(4-0{,}56)(4-1{,}47)}{2} + \frac{(4-0{,}56)(9{,}06-4)}{2}$$

$$\mathbf{υ_{max} = 13{,}05 \ m/sec}$$

γ) Έστω t_3 η χρονική στιγμή που το σώμα θα σταματήσει. Για να την υπολογίσουμε θα εφαρμόσουμε θεώρημα ώθησης-ορμής, από τη χρονική στιγμή t_2 εώς την t_3.

$$0 - mυ_{max} = Ω_{F_x} - Ω_T$$

$$-13{,}05 =$$

$$= \frac{1{,}47(12-9{,}06)}{2} - \left[\frac{1{,}47+2}{2} \cdot (12-9{,}06) + 2 \cdot (t_3-12)\right]$$

$$\mathbf{t_3 = 17{,}05 \ sec.}$$

◆

ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ της ΕΙΔΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ (ΕΘΣ)

Του **Μ. Μιχαήλ,** Φυσικού

Η ΕΘΣ θεμελιώνεται με δύο αξιώματα:

Πρώτο αξίωμα: *Όλοι οι νόμοι της Φυσικής είναι οι ίδιοι για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.*

Δεύτερο αξίωμα: *Η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι η μέγιστη ταχύτητα και η ίδια για όλους τους παρατηρητές που βρίσκονται πάνω σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς.*

• Συμπεράσματα της ΕΘΣ

1ο αξίωμα

α) Παρατηρώντας τα φαινόμενα μέσα σ' ένα αδρανειακό σύστημα είναι αδύνατο να καταλάβουμε αν το σύστημα αυτό είναι ακίνητο ή κινείται με ευθύγραμμη ομαλή μεταφορική κίνηση, γιατί και στις δύο περιπτώσεις τα φαινόμενα εξελίσσονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Η ΕΘΣ λοιπόν ασχολείται με συστήματα που κινούνται **ευθύγραμμα και ομαλά**. Προϋπόθεση βέβαια για να υπάρχουν τέτοια συστήμα είναι να βρίσκονται σε χώρο όπου η συνολική εξωτερική δύναμη θα είναι μηδέν. ($\Sigma\vec{F}_{\varepsilon\xi}=0$).

β) Πρέπει να διευκρινίσουμε πως σύμφωνα με το 1ο αξίωμα όχι μόνο οι νόμοι είναι οι ίδιοι για τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς αλλά και οι σταθερές που συνοδεύουν αυτούς τους νόμους (π.χ. σταθερά της βαρύτητας, σταθερά του Planck).

Έτσι η σταθερά C που εμφανίζεται στις εξισώσεις του Maxwell και έχει διαστάσεις ταχύτητας εκφράζει την ταχύτητα των ΗΜ επιδράσεων. Αυτή λοιπόν η σταθερά θα πρέπει να έχει την ίδια τιμή σ' όλα τα αδρανειακά συστήμα συντεταγμένων. Η C ισούται αριθμητικά με την ταχύτητα του φωτός.

Αποδεικνύεται όμως ότι η ίδια σταθερά (ταχύτητα) εμφανίζεται όχι μόνο στις ΗΜ επιδράσεις αλλά σε οποιεσδήποτε άλλες (π.χ. βαρυτικές).

Σύμφωνα λοιπόν με την ΕΘΣ η ταχύτητα μετάδοσης των επιδράσεων στο κενό που συχνά ονομάζονται *σήματα* είναι η ίδια για όλα τα σώματα και ανεξάρτητη από τη φύση τους.

γ) Συμπερασματικά λοιπόν η ταχύτητα των σημάτων (επιδράσεων) είναι σταθερή και ίση με C ανεξάρτητη από το σύστημα συντεταγμένων, ενώ η ταχύτητα των σωμάτων είναι σχετική και εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων.

2ο αξίωμα

α) Το 2ο αξίωμα βάζει ένα **ανώτερο** όριο στην ταχύτητα έτσι η C δεν είναι μόνο κοινή για όλους τους παρατηρητές όπως λέει το 1ο αξίωμα αλλά είναι και η **μέγιστη** ταχύτητα.

β) Έχετε σκεφτεί ποτέ πως κάποια από τα αστέρια που βλέπουμε στον ουρανό μπορεί και να μην υπάρχου;

Το γεγονός αυτό είναι συνέπεια του 2ου αξιώματος αφού δεν υπάρχει άπειρη ταχύτητα, αλλά μόνο η μέγιστη πεπερασμένη ταχύτητα του φωτός.

Αυτό σημαίνει πως τα αστέρια που η απόστασή τους ήταν πολύ μακρινή «έσβησαν» μέσα στο χρόνο που χρειάστηκε το φως τους να έρθει στη γη.

Δεν θα συνέβαινε όμως κάτι τέτοιο αν υπήρχε άπειρη ταχύτητα, οπότε θα παρατηρούσαμε το γεγονός τη στιγμή που πραγματοποιούνταν.

«Τα τελευταία μόνο χρόνια διατυπώθηκε η υπόθεση ότι υπάρχουν στη φύση οντότητες, (ταχυόνια) που κινούνται ταχύτερα από το φως. Η ύπαρξη των ταχυονίων δεν έχει διαπιστωθεί πειραματικά».

Η παγκοσμιότητα του χρόνου (ο χρόνος είναι ίδιος για όλους τους παρατηρητές) στην Κλασική Μηχανική υπαγορεύτηκε από το γενονός ότι δεν υπάρχει όριο στην ταχύτητα. Στην κλασική μηχανική ένα σώμα μπορεί να επιταχύνεται έτσι ώστε η ταχύτητά του να αυξάνεται συνεχώς και απεριόριστα παίρνοντας άπειρη τιμή. Από τη σχέση

$$\upsilon = \upsilon_0 + \gamma \cdot t$$

βλέπουμε πως για t • και υ • . Δηλαδή τα σώματα μπορούσαν να αλληλεπιδράσουν «ακαριαία» αφού υπήρχε η έννοια της άπειρης ταχύτητας, οπότε όλοι οι παρατηρητές έβλεπαν ταυτόχρονα το ίδιο γεγονός.

Το δεύτερο όμως αξίωμα βάζει όπως είπαμε ένα ανώτερο όριο στην ταχύτητα και το παγκόσμιο σταθερό μέγεθος είναι η C και όχι ο χρόνος αφού δεν υπάρχει άπειρη ταχύτητα.

γ) Αν ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα $\upsilon_1 = 50$ km/h και ένα δεύτερο αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα $\upsilon_2 = 50$ Km/h αντίθετης φοράς τότε το ένα ως προς το άλλο κινείται με $υ_{σχ}$ = 100 Km/h.

Αν όμως και τα δυο αυτοκίνητα κινούνται με την ταχύτητα του φωτός με αντίθετη φορά τότε το ένα ως προς το άλλο δεν θα κινείται με 2C όπως ίσως θα υποθέταμε αλλά κινείται πάλι με την ταχύτητα του φωτός C.

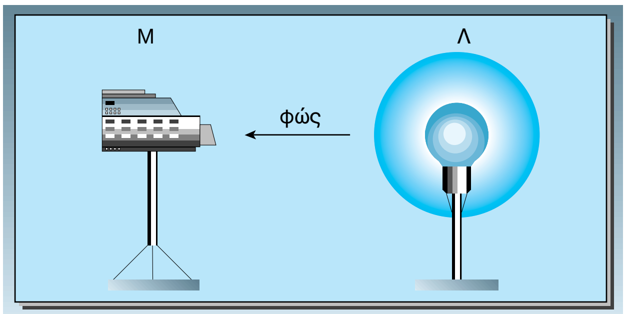
Και αυτό το υπαγορεύει πάλι το ανώτερο όριο ταχύτητας, που είναι η ταχύτητα του φωτός και που διατυπώνεται με το δεύτερο αξίωμα της ΕΘΣ.

Ακόμη όμως και στην περίπτωση που κινούνται τα δύο αυτοκίνητα με την ίδια φορά θα έχουν πάλι το ένα ως προς το άλλο ταχύτητα C.

δ) Σύμφωνα ακόμη με το δεύτερο αξίωμα όταν ένα σώμα κινείται με την ταχύτητα του φωτός και εξασκήσουμε μια δύναμη η ταχύτητά του θα παραμείνει σταθερή και ίση με την ταχύτητα του φωτός. Άρα η επιτάχυνση του σώματος θα είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι δεν ισχύει ο γνωστός τύπος $γ = \frac{F}{m}$. Έτσι θα πρέπει ο παραπάνω νόμος να αλλάξει ώστε η επιτάχυνση να μην μπορεί να οδηγήσει σε ταχύτητες μεγαλύτερες από τη μέγιστη. Στην πραγματικότητα και με βάση τους μετασχηματισμούς Lorentz υπολογίζεται η ορμή, απ' όπου προκύπτει ότι η μάζα (αδράνεια) του σώματος απειρίζεται όταν η ταχύτητα προσεγγίζει την ταχύτητα του φωτός, $m = \frac{m_0}{1-\left(\frac{u}{C}\right)^2}$ όπου m_0 η μάζα ηρεμίας.

• Ερωτήσεις

1) *Σύμφωνα με την πρώτη αρχή της σχετικότητας, δεν μπορούμε και δεν υπάρχει καμιά δυνατότητα να μπορέσουμε ποτέ, να διακρίνουμε, αν μετέχουμε σε μια ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ή αν ισορροπούμε. Αυτό όμως δεν θα ήταν αλήθεια, αν το φως διαδίδονταν στο κενό, όπως όλα τα άλλα κύματα (π.χ. όπως ο ήχος στον αέρα). Να προτείνετε ένα πείραμα που να αποδεικνύει τον παραπάνω ισχυρισμό.*



Έχουμε πάνω στο έδαφος μια λάμπα (Λ) και έναν μετρητή (Μ) που μετράει την ταχύτητα του φωτός όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω πως ο μετρητής μας μετράει μια ταχύτητα για το φως ίση με c.

Αν τη λάμπα της διάταξης του σχήματός μας την τοποθετούσαμε πάνω σ' ένα τραίνο που κινείται έστω με σταθερή ταχύτητα $υ_τ$ κατά μήκος της ευθείας λάμπας μετρήτη τότε ο μετρητής θα μετρούσε ταχύτητα φωτός διαφορετική. Π.χ. η ταχύτητα του φωτός κατά τη φορά κίνησης του τραίνου θα ήταν μικρότερη και μάλιστα $c = c - υ_τ$. Τότε όμως θα μπορούσαμε κάθε φορά να ξέρουμε αν μετέχουμε σε μια ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ή αν ισορροπούσαμε αφού κάθε φορά θα μετρούσαμε διαφορετική ταχύτητα για το φως.

Όμως σύμφωνα με την *πρώτη αρχή* της σχετικότητας αυτό δεν ισχύει αφού η ταχύτητα του φωτός είναι πάντα σταθερή.

2) *Ποιοι νόμοι της Κλασικής Φυσικής καταρρέουν με την ειδική θεωρία της σχετικότητας;*

α) Σύμφωνα με την ΕΘΣ όταν υ C τότε η m • . Όμως η μάζα μετράει την αδράνεια του σώματος. Έτσι ένα σώμα που πλησιάζει την ταχύτητα του φωτός παρουσιάζει άπειρη περίπου αδράνεια. Σε αντίθεση με την κλασική φυσική που η μάζα ενός σώματος θεωρείται σταθερή και ανεξάρτητα της ταχύτητας.

β) Η επιτάχυνση που προκαλεί μια δύναμη εξαρτάται και από την ταχύτητα του σώματος και είναι τόσο μικρότερη όσο η ταχύτητά του πλησιάζε τη μέγιστη ταχύτητα. Ούτε και αυτό ισχύει στην κλασική φυσική.

γ) Ακόμη σύμφωνα με την κλασική φυσική δεν υπάρχει ανώτερο όριο στην ταχύτητα η οποία μπορεί να γίνει και άπειρη. Σύμφωνα όμως με την ΕΘΣ αυτό είναι λάθος αφού η ταχύτητα τείνει σε μια μέγιστη τιμή την ταχύτητα του φωτός ίδια για όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές (παγκόσμιο μέγεθος).

3) *Είπαμε πως ΕΘΣ ασχολείται με συστήματα που κινούνται ευθύγραμμα και ομαλά (ή ισοδύναμα ισορροπούν), όπως ακριβώς γίνεται και με τη Νευτώνεια μηχανική. Προϋπόθεση βέβαια για να υπάρχουν τέτοια συστήματα είναι να βρίσκονται σε χώρο όπου η συνολική εξωτερική δύναμη θα είναι μηδέν. ($ΣF_{εξ}=0$)*

Υπάρχει όμως έστω και ένα αδρανειακό σύστημα; ή θα μπορούσε κάποιος να υποθέσει πως μέσα στο Σύμπαν είναι μάλλον απίθανο να βρεθεί ένας τέτοιος χώρος (λόγω βαρυτικών δυνάμεων). Άρα προς τι λοιπόν όλη αυτή η φασαρία;

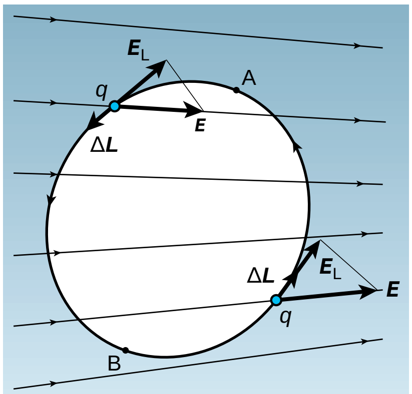
Το ερώτημα είναι σοβαρό, αλλά οι επιστήμονες σήμερα δέχονται ότι στον κόσμο (σύμπαν) υπάρχει ένα τουλάχιστον σύστημα αδρανείας, και με άξονες που κατευθύνονται σε επιλεγμένα απλανή αστέρια. Έτσι και κάθε άλλο σύστημα αναφοράς που κινείται ευθύγραμμα και ισοταχώς ως προς το ηλιοκεντρικό είναι και αυτό αδρανειακό σύστημα αναφοράς. ◆

Η ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑ των ΦΟΡΤΙΩΝ σε ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΚΥΚΛΩΜΑ ή ΟΙ ΕΝΝΟΙΕΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ, ΗΛΕΚΤΡΕΓΕΡΤΙΚΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ και ΤΑΣΗΣ

Του **Δ. Σ. Κυριάκου,** Αν. Καθηγητή, Τομέα Φυσικής Στερεάς Κατάστασης, Τμήμα Φυσικής, Α.Π.Θ.

Κατά τη μελέτη των ηλεκτρικών κυκλωμάτων εμφανίζονται οι έννοιες και τα μεγέθη **διαφορά δυναμικού** (γνωστή ήδη από το στατικό ηλεκτρισμό), **ηλεκτρεγερτική δύναμη** (ΗΕΔ) και **πτώση τάσης** ή απλά **τάση**. Τα δύο τελευταία μεγέθη συγχέονται ή εμφανίζονται λίγο ή πολύ ταυτόσημα με τη διαφορά δυναμικού (βλ. σελ. 149 φυσικής Γ Λυκείου, αρχή). Λέμε, για παράδειγμα, ότι η τάση είναι η διαφορά δυναμικού στα άκρα αντίστασης που διαρρέεται από ρεύμα ή η ΗΕΔ πηγής είναι ίση με τη διαφορά δυναμικού στους πόλους της όταν δεν διαρρέεται από ρεύμα (ανοικτό κύκλωμα). Η σύγχυση επιτείνεται από το γεγονός ότι και τα τρία μεγέθη μετρώνται με την ίδια μονάδα, το Volt (Joule/Coulomb).

Στην πραγματικότητα πρόκειται για τρία διαφορετικά μεγέθη, που σχετίζονται όμως με την κίνηση των φορτίων και το έργο που χρειάζεται γι' αυτήν. Η κίνηση των φορτίων μπορεί να προκληθεί από ηλεκροστατικές δυνάμεις αλλά και από δυνάμεις που δεν έχουν ηλεκτροστατική προέλευση. Η προέλευση των ηλεκτρικών δυνάμεων είναι αυτή που προσδίδει την ιδιαιτερότητα στα προαναφερθέντα τρία μεγέθη.



Σχήμα 1. Η κυκλοφορία του ηλεκτροστατικού πεδίου κατά μήκος κλειστής διαδρομής είναι μηδέν.

Στο σχήμα 1 θετικό φορτίο q κινείται μέσα σε ηλεκτροστατικό πεδίο. Για μια διαδρομή ΑΒ, κατά τη φορά του βέλους, το έργο των ηλεκτροστατικών δυνάμεων ανά μονάδα θετικού φορτίου είναι

$$W(A\quad B)=\frac{\sum_{A}^{B}F_L\Delta L}{q}=\sum_{A}^{B}E_L\Delta L,$$

όπου E_L η τιμή της ορθής προβολής του **E** πάνω στη στοιχειώδη μετατόπιση Δ**L**. Όπως είναι γνωστό, το έργο αυτό δίνει τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Α και Β, δηλαδή

$$V_A-V_B=\sum_{A}^{B}E_L\Delta L. \qquad (1)$$

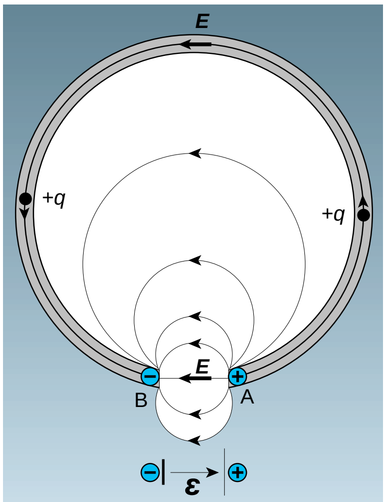
Αν το φορτίο επανέλθει στο σημείο Α, διαγράφοντας έτσι μια κλειστή διαδρομή, τότε η διαφορά δυναμικού έχει γίνει μηδέν και επομένως για τον κύκλο ισχύει η σχέση

$$W(A\quad B)+W(B\quad A)=0.$$

Το ηλεκτρικό φορτίο έχει κυκλοφορίσει κατά μήκος κλειστής διαδρομής, η ενέργειά του όμως στο τέλος παραμένει αμετάβλητη. Ένα άθροισμα, σαν αυτό της εξίσωσης (1), όταν αναφέρεται σε κλειστή διαδρομή ονομάζεται **κυκλοφορία** της έντασης του πεδίου. Για ηλεκτροστατικό πεδίο η κυκλοφορία του είναι μηδέν.

Στην πραγματικότητα το ηλεκτροστατικό πεδίο δεν μπορεί να κυκλοφορίσει τα ηλεκτρικά φορτία σε κλειστές διαδρομές. Στο σχήμα 2 μέσα στο αγώγιμο υλικό φορτία (θετικά) υπό την επίδραση υπάρχουσας διαφοράς δυναμικού κινούνται από το Α μέχρι το Β και εκεί σταματούν. Δεν μπορούν να κλείσουν τη διαδρομή από το Β στο Α γιατί το ηλεκτροστατικό πεδίο **E** είναι τώρα αντίθετο. Σιγά-σιγά η διαφορά δυναμικού θα μειωθεί μέχρι μηδενισμού της και κάθε ροή ηλεκτρικού ρεύματος θα σταματήσει.

Για να κλείσει η διαδρομή, να κυκλοφορίσει ηλεκτρικό ρεύμα και να μείνει αμείωτη η διαφορά δυναμικού μεταξύ των Α και Β συνδέουμε ανάμεσά τους μια ηλεκτρική πηγή που χαρακτηριστικό της γνώρισμα είναι η ΗΕΔ της ε. Η πηγή παρέχει την απαιτούμενη ενέργεια για την κίνηση των φορτίων ενάντια στις ηλεκτροστατικές δυνάμεις. Ο ρόλος της δηλαδή είναι η *άντληση* φορτίων από τον αρνητικό της πόλο Β και η μεταφορά τους στο θετικό πόλο Α. Οι δυνάμεις που ασκούνται από την πηγή στα φορτία δεν έχουν ηλεκτροστατική προέλευση και θεωρούνται ως **εξωτερικές**. Σε μια απλή μπαταρία ξοδεύεται χημική ενέργεια, σε μια βιομηχανική γεννήτρια, μηχανική ενέργεια, με την ενδιάμεση δράση των μαγνητικών δυνάμεων, μετατρέπεται σε ηλεκτρική ενέργεια. Η κυκλοφορία του πεδίου των εξωτερικών (μη ηλεκτροστατικών) δυνάμεων *δεν είναι μηδέν* και δίνει την ΗΕΔ ε της πηγής. Ώστε η



Σχήμα 2. Η ΗΕΔ ε αναγκάζει τα φορτία να κινηθούν ενάντια στις ηλεκτροστατικές δυνάμεις.

ΗΕΔ ισούται με το ανά μονάδα θετικού φορτίου έργο των εξωτερικών δυνάμεων για τη μετακίνηση των φορτίων και φυσικά μονάδα μέτρησής της είναι το Volt.

Γενικά, όταν σε μια διαδρομή ΑΒ των φορτίων συνυπάρχουν και το ηλεκτροστατικό πεδίο και το πεδίο των εξωτερικών δυνάμεων έχουμε έργο από όλες τις δυνάμεις. Το συνολικό έργο ανά μονάδα θετικού φορτίου ονομάζεται πτώση τάσης ή απλά τάση U στη συγκεκριμένη διαδρομή ή το τμήμα του ηλεκτρικού κυκλώματος. Από τα παραπάνω φαίνεται ότι τα τρία μεγέθη συνδέονται με τη γενική σχέση

$$U_{AB} = V_A - V_B + \varepsilon_{AB}.$$

Κατά συνέπεια η πτώση τάσης μετριέται με μονάδα το Volt. Συνοψίζοντας έχουμε:

Έργο ηλεκτροστατικών δυνάμεων — **Διαφορά δυναμικού**
Έργο εξωτερικών δυνάμεων — **Ηλεκτρεγερτική δύναμη**
Έργο ηλεκτροστατικών και εξωτερικών δυνάμεων — **Τάση**

Σύμφωνα με το νόμο του Ohm, αν το τμήμα ΑΒ έχει αντίσταση R και διαρρέεται από ρεύμα I η τάση είναι ίση με $U_{AB} = IR$ και συνεπώς η γενική έκφραση του νόμου του Ohm είναι

$$U_{AB} = IR = V_A - V_B + \varepsilon_{AB}. \qquad (2)$$

Αν δεν υπάρχει ΗΕΔ η πτώση τάσης είναι ίση με τη διαφορά δυναμικού. Μπορεί όμως να είναι ίση και με την ΗΕΔ αν δεν υπάρχει διαφορά δυναμικού. Αυτό συμβαίνει, όπως είδαμε, για κλειστές διαδρομές των φορτίων και εκφράζεται πολύ καλά από το β κανόνα του Kirchhoff για βρόχο κυκλώματος,

$$\sum IR = \sum \varepsilon\ .$$

Κοιτάξτε τη διατύπωση που υπάρχει στη σελίδα 150 του σχολικού βιβλίου!

Για την ορθή εφαρμογή της εξίσωσης (2) το ρεύμα και η ΗΕΔ θεωρούνται αλγεβρικές ποσότητες. Διαλέγουμε μια φορά διαγραφής του τμήματος του κυκλώματος και αν η ένταση του ρεύματος έχει την ίδια φορά είναι θετική, αλλιώς αρνητική. Επίσης αν η ΗΕΔ προκαλεί ένταση (δηλαδή κίνηση των θετικών φορέων) κατά τη φορά διαγραφής θεωρείται θετική. Στην αντίθετη περίπτωση είναι αρνητική.

Στα εναλλασσόμενα ρεύματα, τα ηλεκτρικά φορτία κινούνται, παλινδρομούν για την ακρίβεια αλλά δεν κυκλοφορούν. Τα τρία μεγέθη διατηρούν την ιδιαιτερότητα προέλευσης, γενικά όμως επικράτησε για όλα ο όρος τάση. Ενέργεια πάντως ξοδεύεται και αυτό φαίνεται στους λογαριασμούς της ΔΕΗ που πληρώνουμε.

Παράδειγμα

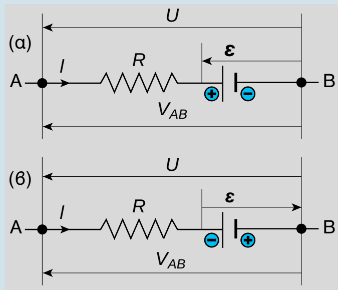
Ένα αγώγιμο τμήμα ΑΒ ηλεκτρικού κυκλώματος περιέχει αντίσταση R = 12 Ω και πηγή ΗΕΔ ε = 6 V. Αν το ρεύμα που διέρχεται είναι I = 2 A να υπολογίσετε την τάση U και τη διαφορά δυναμικού $V_{AB} = V_A - V_B$ για τις δύο περιπτώσεις του σχήματος 3. Επίσης την ισχύ των ηλεκτροστατικών δυνάμεων, των εξωτερικών δυνάμεων καθώς και την ολική ισχύ στο τμήμα ΑΒ.

Λύση

Στο τμήμα ΑΒ επειδή περιέχει ΗΕΔ ισχύει ο νόμος του Ohm με τη μορφή

$U = IR = V_A - V_B + \varepsilon.$

Παίρνουμε ως θετική φορά διαγραφής τη φορά του ρεύματος.



Σχήμα 3

α) Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει είναι

$$U = V_A - V_B - \varepsilon.$$

Αλλά

$$U = IR = 2 \quad 12 = 24\ V$$

και συνεπώς

$$V_A - V_B = V_{AB} = U + \varepsilon = 24 + 6 = 30\ V.$$

Η ισχύς των ηλεκτροστατικών και εξωτερικών δυνάμεων είναι αντίστοιχα

$$P_{AB} = V_{AB}I = 30 \quad 2 = 60\ W, \qquad P_{\varepsilon\xi} = \varepsilon I = 6 \quad 2 = 12\ W.$$

Οι εξωτερικές δυνάμεις δρουν αντίθετα προς τις ηλεκτροστατικές και επομένως η ολική ισχύς που καταναλώνεται είναι

$$P_{o\lambda} = P_{AB} - P_{\varepsilon\xi} = 60 - 12 = 48\ W.$$

Παρατηρούμε ότι

$$P_{o\lambda} = UI = 24 \quad 2 = 48\ W = I^2 R.$$

β) Τώρα ισχύει η

$$U = V_A - V_B + \varepsilon.$$

Αλλά

$$U = IR = 2 \quad 12 = 24\ V$$

και συνεπώς

$$V_A - V_B = V_{AB} = U - \varepsilon = 24 - 6 = 18V.$$

Η ισχύς των ηλεκτροστατικών και εξωτερικών δυνάμεων είναι αντίστοιχα

$$P_{AB} = V_{AB}I = 18 \quad 2 = 36\ W, \qquad P_{\varepsilon\xi} = \varepsilon I = 6 \quad 2 = 12\ W.$$

Εδώ οι εξωτερικές δυνάμεις δρουν ομόρροπα προς τις ηλεκτροστατικές και επομένως η ολική ισχύς είναι

$$P_{o\lambda} = P_{AB} + P_{\varepsilon\xi} = 36 + 12 = 48\ W.$$

Παρατηρούμε πάλι ότι

$$P_{o\lambda} = UI = 24 \quad 2 = 48\ W = I^2 R.$$

Η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ στις ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Του **Γ. Γιουβανούδη,** Φυσικού

Μέρος 2ο

Στο προηγούμενο τεύχος, σας είχαμε προτείνει μία μέθοδο επίλυσης προβλημάτων Φυσικής, η φιλοσοφία της οποίας είναι η παρακάτω:

Κάθε άσκηση την αντιμετωπίζουμε σαν «ιστορία», ένα «σενάριο», στο οποίο συμβαίνουν διάφορα φυσικά φαινόμενα. Εμείς λοιπόν αν μελετήσουμε όλα τα φυσικά φαινόμενα, που συμβαίνουν σε μια άσκηση, τότε λογικά θα πρέπει να βρούμε οτιδήποτε μας ζητάνε.

Η όλη η μεθοδολογία συνοψίζεται σε τρεις προτάσεις-στάδια.

1) Μελετάμε όλα τα φυσικά φαινόμενα, που συμβαίνουν.
2) Με ποια σειρά τα μελετάμε; Με τη σειρά που συμβαίνουν, δηλαδή χρονολογικά.
3) Πώς τα μελετάμε; Με τι τρόπο; Χρησιμοποιώντας τα εργαλεία της Φυσικής, δηλαδή τους νόμους, θεωρήματα και αρχές.

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται πάρα πολύ καλά στα κεφάλαια της Μηχανικής. Αν θέλουμε να είμαστε πιο συγκεκριμένοι και μιλήσουμε για Φυσική 1ης και 2ης δέσμης, τότε μπορούμε να εφαρμόζουμε τη συγκεκριμένη μεθοδολογία με τέλεια αποτελέσματα στα κεφάλαια ΕΡΓΟ-ΕΝΕΡΓΕΙΑ (1ο), ΟΡΜΗ - ΚΡΟΥΣΗ (2ο), ΠΕΔΙΑ-ΔΥΝΑΜΕΩΝ (3ο), ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΠΕΔΙΑ ΔΥΝΑΜΕΩΝ (4ο) και ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ (11ο).

Τα εργαλεία τα οποία χρησιμοποιούμε στα συγκεκριμένα κεφάλαια είναι εν συντομία:

1. Τύποι κινητικής και νόμοι του Νεύτωνα.
2. Θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.).
3. Αρχή διατήρησης της ενέργειας (Α.Δ.Ε.).
4. Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.).
5. Δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για την καπυλόγραμμη κίνηση ή «Συνθήκη καμπυλόγραμμης κίνησης» (Σ.Κ.Κ.).
6. Αρχή διατήρησης της ορμής (Α.Δ.Ο.).
7. Θεώρημα ώθησης - ορμής (Θ.Ω.Ο.).

Σ' αυτό το τεύχος, όπως σας είχαμε προαναγγείλει στο προηγούμενο, θα ασχοληθούμε με τη σωστή εφαρμογή και χρήση κάθε «εργαλείου».

1) Τύποι κινητικής και νόμοι του Νεύτωνα

Κίνηση ευθύγραμμη ομαλή:

$$S = \upsilon \cdot t$$

Κίνηση ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη:

$$S = \upsilon_0 t \pm \frac{1}{2}\gamma t^2 \quad \text{και} \quad \upsilon = \upsilon_0 \pm \gamma \cdot t$$

Πρώτος νόμος του Νεύτωνα: (Νόμος της αδράνειας).

«Αν σ' ένα σώμα δεν ασκούνται δυνάμεις ή αν ασκούνται και έχουν συνισταμένη μηδέν, τότε το σώμα ηρεμεί ή κινείται ευθύγραμμα και ομαλά», ή

«Κάθε σώμα διατηρεί την κατάσταση ηρεμίας ή ομαλής κίνησής του, σε ευθεία γραμμή, εκτός αν αναγκαστεί να μεταβάλει την κατάσταση αυτή, από δυνάμεις που ασκούνται πάνω του».

$\Sigma F = 0$ *Σώμα ημερεί ή κινείται ευθύγραμμα και ομαλά.*

Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα:

«Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος, ισούται με τη συνισταμένη δύναμη που έδρασε σ' αυτό και έχει την κατεύθυνσή της».

$$\Sigma F = m \cdot \gamma \quad \text{ή} \quad \Sigma F = \frac{\Delta J}{\Delta t}$$

Τρίτος Νόμος του Νεύτωνα:

«Σε κάθε δράση αντιτίθεται πάντα μια ίση αντίδραση».

Παρατηρήσεις:

α) Οι παραπάνω τύποι της κινητικής μπορούν να χρησιμοποιούνται σε ευθύγραμμες κινήσεις, **με την προϋπόθεση ότι η επιτάχυνση είναι σταθερού μέτρου, δηλαδή η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα, είναι σταθερού μέτρου.** Επομένως, πριν εφαρμόσετε τον τύπο της μετατόπισης, ή της ταχύτητας, σιγουρευτείτε ότι δεν ασκούνται δυνάμεις μεταβλητού μέτρου ή αν ασκούνται, τότε ελέγξτε το μέτρο της συνισταμένης δύναμης και σιγουρευτείτε ότι είναι σταθερό.

β) Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα ($\Sigma F = m \cdot \gamma$) ισχύει και μπορεί να εφαρμοστεί ακόμη και αν η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μεταβλητού μέτρου, οπότε η προκύπτουσα τιμή της επιτάχυνσης θα είναι στιγμιαία.

γ) Το «εργαλείο αυτό, δηλαδή οι τύποι κινητικής και οι Νόμοι του Νεύτωνα, μας εξυπηρετεί να το χρησιμοποιούμε αν στην άσκηση υπεισέρχονται σαν δεδομένα ή ζητούμενα η επιτάχυνση και ο χρόνος.

δ) Ο συνδετικός κρίκος, ή αν προτιμάτε, το μοναδικό κοινό φυσικό μέγεθος μεταξύ των τύπων της κινητικής και των νόμων του Νεύτωνα, είναι η επιτάχυνση. Αυτό σημαίνει, ότι είτε βρίσκουμε το μέτρο της επιτάχυνσης από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα ($\Sigma F = m \cdot \gamma$) και το αντικαθιστούμε στους τύπους κινητικής, είτε το αντίστροφο.

ε) Προσοχή στην εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα $\Sigma F = m \cdot \gamma$. Για να «βγουν» τα διανύσματα και να δουλέψουμε με μέτρα, θα πρέπει να ορίσουμε αυθαίρετα κάποια θετική φορά. Είναι φρόνιμο και πρακτικό, η θετική φορά που ορίζουμε να είναι πάντα η φορά της επιτάσυνσης γ, γιατί αν ορίσουμε σαν θετική φορά τη φορά της επιβράδυνσης, τότε θα πρέπει στον τύπο $\Sigma F = m \cdot \gamma$ να βάλουμε την επιτάχυνση γ, αρνητική.

2. Θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.)

Διατύπωση: *«Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σώματος, ισούται με την ενέργεια που προστίθεται ή αφαιρείται στο σώμα, μέσω του έργου των δυνάμεων που ασκούνται σ' αυτό».*

Μαθηματική διατύπωση:

$$\Delta E_{κιν} = \Sigma W \quad ή \quad E_{K_{τελ}} - E_{K_{αρχ}} = \Sigma W$$

Παρατηρήσεις:

α) Σε ποια φαινόμενα μπορώ να το χρησιμοποιήσω;

Απάντηση

Μπορώ να το χρησιμοποιώ, οποτεδήποτε ένα σώμα κινείται από μία θέση, σε μία άλλη θέση.

β) Τι πρέπει να κάνω για να το εφαρμόσω σωστά;

Απάντηση

i) Πρέπει να καθορίσω για ποιο σώμα το εφαρμόζω. (Σε μια άσκηση μπορεί να εμπλέκονται τρία, τέσσερα... ν σώματα. Πρέπει λοιπόν να ξεκαθαρίσω σε ποιο από τα σώματα το χρησιμοποιώ).

ii) Πρέπει να καθορίσω δύο συγκεκριμένες θέσεις της κίνησης του σώματος, μεταξύ των οποίων θα εφαρμόσω το Θ.Μ.Κ.Ε.

iii) Πρέπει να βάλω **όλες** τις δυνάμεις που ασκούνται στο θεωρούμενο σώμα, μεταξύ των δύο θέσεων που καθόρισα.

γ) Ποια τα πλεονεκτήματα του Θ.Μ.Κ.Ε.;

Απάντηση

Το μεγάλο πλεονέκτημα είναι ότι το *Θ.Μ.Κ.Ε. ισχύει πάντα* δηλαδή χωρίς προϋποθέσεις. Συγκεκριμένα, δεν μας ενδιαφέρει πόσες δυνάμεις ασκούνται στο σώμα, αν οι δυνάμεις είναι σταθερού μέτρου ή μεταβλητού, αν είναι σταθερής κατεύθυνσης ή όχι, αν είναι συντηρητικές ή μη. Ακόμη δεν μας ενδιαφέρει ούτε το είδος της κίνησης, ούτε το είδος της τροχιάς.

δ) Ποια τα μειονεκτήματα του Θ.Μ.Κ.Ε.;

Απάντηση

i) Ένα πρώτο μειονέκτημα αυτού του «εργαλείου», είναι ότι περιλαμβάνει έργα δυνάμεων, τα οποία σε αρκετές περιπτώσεις είναι δύσκολο και σχετικά πολύπλοκο να υπολογιστούν, όπως όταν έχουμε δυνάμεις μεταβλητού μέτρου, ή τροχιές πολύπλοκες κ.λπ.

ii) Ένα δεύτερο μειονέκτημα του Θ.Μ.Κ.Ε., είναι ότι εφαρμόζεται πολύ δύσκολα (σε μερικές περιπτώσεις δεν εφαρμόζεται) σε σύστημα σωμάτων. Στην πραγματικότητα όταν έχουμε σύστημα σωμάτων, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για κάθε σώμα χωριστά και κατόπιν –αν θέλουμε– προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις που προκύπτουν.

3. Αρχή διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.)

Διατύπωση: *«Η μηχανική ενέργεια συστήματος σωμάτων, παραμένει σταθερή, αν στα σώματα ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις».*

Μαθηματική διατύπωση:

$$E_{MHX} = ct$$

ή $$E_{KIN} + E_{\Delta YN} = ct$$

ή $$E^{(1)}_{KIN} + E^{(1)}_{\Delta YN} = E^{(2)}_{KIN} + E^{(2)}_{\Delta YN}$$

ή $$\Delta E_{KIN} + \Delta E_{\Delta YN} = 0$$

Παρατηρήσεις:

α) Σε ποια φαινόμενα μπορώ να χρησιμοποιώ την Α.Δ.Μ.Ε.;

Απάντηση

Όταν έχω ένα σύστημα σωμάτων, στο οποίο τουλάχιστον ένα από τα σώματα μετακινείται αλλάζοντας θέση.

β) Τι πρέπει να κάνω για να εφαρμόσω σωστά την Α.Δ.Μ.Ε.;

Απάντηση

i) Πρέπει να καθορίσω το σύστημα των σωμάτων, για το οποίο θα την εφαρμόσω.

ii) Πρέπει να καθορίσω δύο συγκεκριμένες θέσεις-καταστάσεις του συστήματος, μεταξύ των οποίων θα εφαρμόσω την ΑΔΜΕ.

iii) Πρέπει να καθορίσω αυθαίρετα επίπεδο βαρυτικής δυναμικής ενέργειας μηδέν (επίπεδο αναφοράς), εκτός αν ορίζει η άσκηση δικό της επίπεδο αναφοράς ή μας καθορίζει η θεωρία σημείο αναφοράς όπου $E_{ΔΥΝ}=0$, όπως π.χ. για κινήσεις που φθάνουν σε μεγάλα ύψη από την επιφάνεια της γης.

γ) Ποια τα πλεονεκτήματα της Α.Δ.Μ.Ε.;

Απάντηση

i) Το πρώτο πλεονέκτημα είναι ότι εφαρμόζεται για σύστημα σωμάτων και όχι για μεμονωμένα σώματα. Μ' αυτό τον τρόπο μπορούμε να μελετάμε συνολικά τις μεταβολές που παρατηρούνται σ' ένα σύστημα σωμάτων.

ii) Το δεύτερο πλεονέκτημα της ΑΔΜΕ είναι ότι εφαρμόζεται πάρα πολύ εύκολα, κι αυτό γιατί περιλαμβάνει μόνο κινητικές και δυναμικές ενέργειες, σε αντίθεση π.χ. με το ΘΜΚΕ που είναι πιο πολύπλοκο στην εφαρμογή του, λόγω έργων.

δ) Ποια τα μειονεκτήματα της Α.Δ.Μ.Ε.;

Απάντηση

Όπως είπαμε παραπάνω, η Α.Δ.Μ.Ε., είναι πολύ εύκολη στην εφαρμογή της, έχει όμως ένα πολύ μεγάλο μειονέκτημα. Δεν ισχύει πάντα, παρά μόνο αν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα είναι συντηρητικές. Έτσι δεν θα εφαρμόζουμε ΑΔΜΕ, αν στα σώματα ασκούνται τριβές, αντιστάσεις ή άγνωστες δυνάμεις.

4. Συνθήκη Καμπυλόγραμμης Κίνησης (Σ.Κ.Κ.) ή ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για την καμπυλόγραμμη κίνηση

Διατύπωση: *«Όταν ένα σώμα εκτελεί καμπυλόγραμμη κίνηση, τότε η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σ' αυτό κατά τη διεύθυνση της ακτίνας καμπυλότητας, ισούται με την κεντρομόλο».*

Μαθηματική Διατύπωση:

$$\Sigma F_{ακτ} = F_{KEN}$$

α) Σε ποια φαινόμενα μπορώ να χρησιμοποιώ την Σ.Κ.Κ.;

Απάντηση

Όταν ένα σώμα εκτελεί καμπυλόγραμμη κίνηση. Εννοείται, ότι όταν λέμε καμπυλόγραμμη κίνηση συμπεριλαμβάνεται και η κυκλική.

β) Τι πρέπει να κάνω για να την εφαρμόσω σωστά;

Απάντηση

i) Καθορίζω το σώμα για το οποίο θα εφαρμόσω την Σ.Κ.Κ.

ii) Καθορίζω τη θέση όπου θα την εφαρμόσω.

iii) Αναλύω τις δυνάμεις σε δύο κάθετους άξονες, οι οποίοι είναι άξονες της ακτίνας και ο άξονας της εφαπτομένης, στο σημείο που βρισκόμαστε.

γ) Τι μεγέθη μπορούμε να βρούμε από την Σ.Κ.Κ.;

Απάντηση

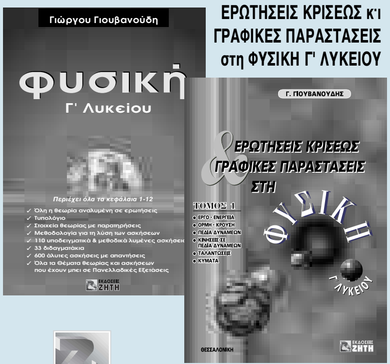
Μπορούμε να βρούμε δύναμη ή ταχύτητα σε μια συγκεκριμένη θέση.

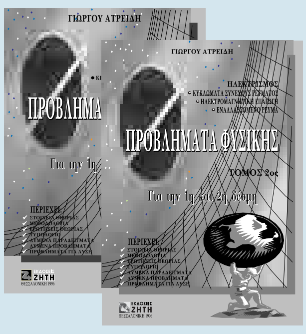
Υ.Γ. Στα επόμενα τεύχη, θα μας δοθεί η ευκαιρία να εφαρμόσουμε όλα τα «εργαλεία» σε χαρακτηριστικές-υποδειγματικές ασκήσεις αφού πρώτα ολοκληρώσουμε την παρουσίασή τους με την Α.Δ.Ο. και το Θ.Ω.Ο. ◆

ΠΛΗΡΕΙΣ ΣΕΙΡΕΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
για το Λύκειο και τις Δέσμες

Π. ΙΑΚΩΒΟΥ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ - ΤΕΧΝΙΚΕΣ

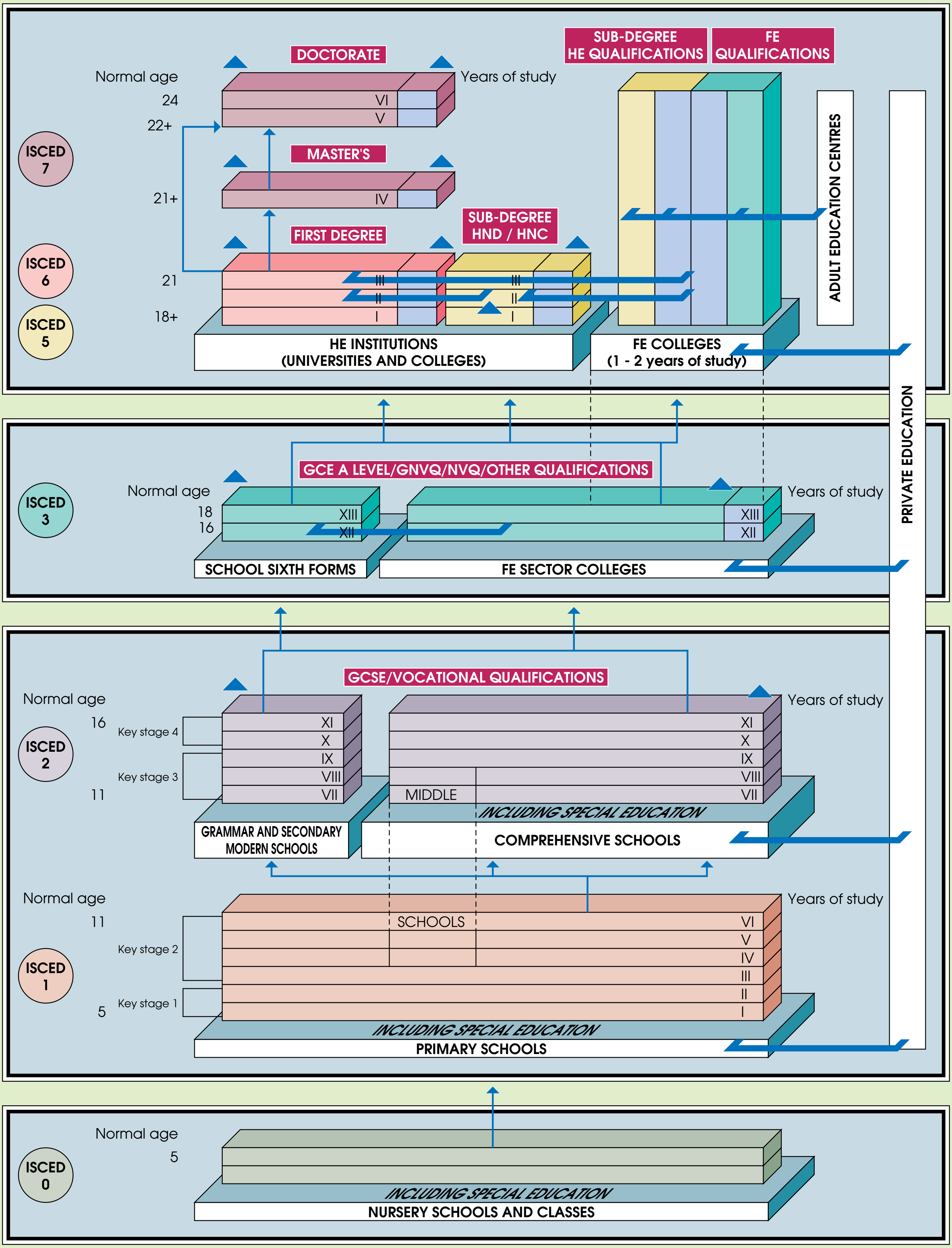
Γ. ΓΙΟΥΒΑΝΟΥΔΗΣ
ΦΥΣΙΚΗ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΡΙΣΕΩΣ κ' ι ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ στη ΦΥΣΙΚΗ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ



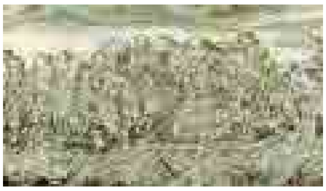


Γ. ΑΤΡΕΙΔΗΣ
ΦΥΣΙΚΗ (1η-2η ΔΕΣΜΗ)
Τ.1: ΜΗΧΑΝΙΚΗ, Τ.2: ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ
Υπό έκδοση:
Τ.3: ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ, ΝΟΜΟΙ ΑΕΡΙΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ, ΚΥΜΑΤΑ

Δομή και διάρθρωση του αγγλικού εκπαιδευτικού συστήματος



Πηγή: Ο.Ο.Σ.Α./CERI: Education at a Glance: OECD Indicators, Paris, 1995



Η ΓΕΝΕΣΗ ΤΩΝ ΣΕΙΣΜΩΝ

Του **Γ. Καρακαΐση,** Αν. Καθηγητή στο Εργαστήριο Γεωφυσικής του ΑΠΘ

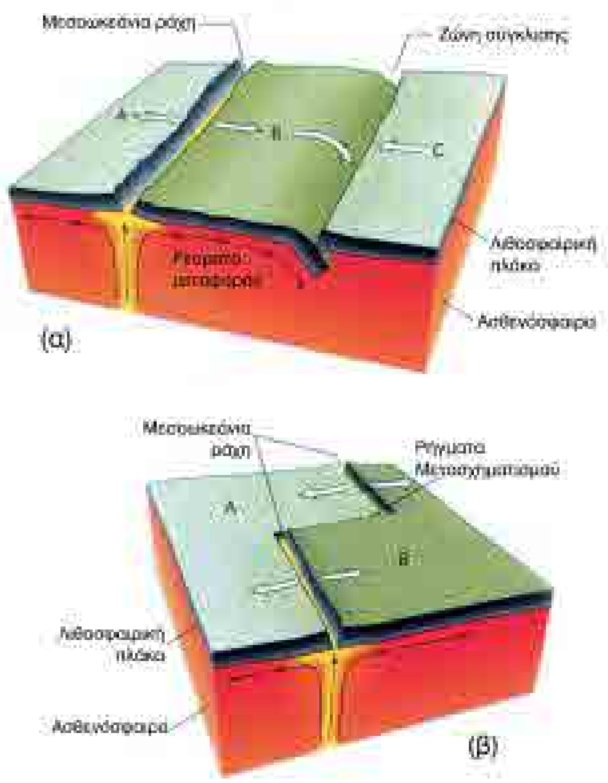
1. Εισαγωγή

Κατά τη δεκαετία του ‘60 διατυπώθηκε, από ορισμένους γεωεπιστήμονες, μία επαναστατική άποψη η οποία δημιούργησε ένα νέο θεωρητικό σύστημα για την εξέλιξη της Γης. Οι επιστήμονες αυτοί (McKenzie και Parker 1967, Isacks, Oliver και Sykes 1967, Morgan 1968) διατύπωσαν τη γνώμη οτι τα περισσότερα γεωδυναμικά φαινόμενα, δηλαδή, η ορογένεση, η ηφαιστειότητα, οι σεισμοί κλπ., δεν έχουν ως αίτια τη βαρύτητα ή τη συστολή της Γης, αλλά είναι αποτελέσματα της κίνησης των **λιθοσφαιρικών πλακών**.

Η **λιθόσφαιρα**, δηλαδή το δύσκαμπτο επιφανειακό στρώμα που καλύπτει ολόκληρη τη Γη και αποτελείται από το φλοιό και μέρος του πάνω μανδύα, με μέσο πάχος 80 Km, χωρίζεται σε μεγάλα τεμάχη, όπως φαίνεται στο σχήμα (1). Τα τεμάχη αυτά κινούνται πάνω στην **ασθενόσφαιρα** και η κίνηση τους έχει ως αποτέλεσμα τη σύγκλιση των λιθοσφαιρικών πλακών σε κάποιες περιοχές και την απομάκρυνση τους σε κάποιες άλλες περιοχές. Οι περιοχές σύγκλισης και απομάκρυνσης αποτελούν τα **δύο παγκόσμια συστήματα ζωνών διάρρηξης** και είναι αυτές στις οποίες παρατηρούνται τα περισσότερα γεωδυναμικά φαινόμενα. Οι ζώνες διάρρηξης διακρίνονται, από την άποψη της συμπεριφοράς τους, σ' αυτές που ανήκουν στο **ηπειρωτικό σύστημα διάρρηξης** και σ' αυτές που ανήκουν στο **σύστημα των μεσοωκεάνιων ράχεων**.

Σχ. 1. Επίκεντρα 30.000 περίπου σεισμών που έγιναν σε χρονικό διάστημα 6 χρονών με εστιακά βάθη μεταξύ 0 και 700 Km. Οι μπλε γραμμές αντιστοιχούν στα όρια των λιθοσφαιρικών πλακών (Press and Siever, 1994).

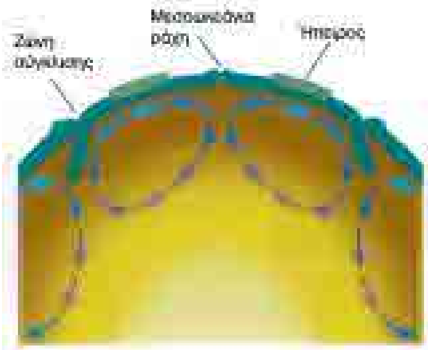
Στο ηπειρωτικό σύστημα διάρρηξης, δηλαδή, στις περιοχές όπου συγκλίνουν οι λιθοσφαιρικές πλάκες, κατά μήκος των ζωνών κατάδυσης, συντελείται καταστροφή του υλικού του φλοιού καθώς αυτός, καταδυόμενος μέχρι βάθους 700 Km, τήκεται (σχ. 2α). Στο σύστημα των μεσοωκεάνιων ράχεων, δηλαδή στις περιοχές απομάκρυνσης των λιθοσφαιρικών πλακών, παρατηρείται γένεση νέου φλοιού, καθώς το θερμό υλικό που προέρχεται από το εσωτερικό της Γης με την άνοδο του κατά μήκος των μεσοωκεάνιων ράχεων ψύχεται. Οι πλάκες που βρίσκονται εκατέρωθεν μιάς ράχης, απομακρύνονται από αυτήν με σχετικές ολισθήσεις πάνω στα **ρήγματα μετασχηματισμού** (σχ. 2β). Η αέναη αυτή κίνηση των λιθοσφαιρικών πλακών έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη ισχυρών τάσεων και την παραμόρφωση του υλικού που βρίσκεται στις παρυφές (όρια) των πλακών.



*Σχ. 2. **(α)** Σύγκρουση δύο λιθοσφαιρικών πλακών και πλάγια κατάδυση της μίας κάτω από την άλλη, **(β)** Απομάκρυνση δύο λιθοσφαιρικών πλακών με σχετικές ολισθήσεις στα ρήγματα μετασχηματισμού (Press and Siever, 1994).*

Στο σχήμα (1) φαίνονται τα επίκεντρα των σεισμών που έγιναν σε διάστημα 6 χρόνων, με εστιακά βάθη από 0 ως 700 Km. Παρατηρείται οτι οι περισσότεροι σεισμοί γίνονται κατά μήκος των παρυφών των λιθοσφαιρικών πλακών (μπλέ γραμμές). Φαίνονται επίσης και οι λιθοσφαιρικές πλάκες καθώς και οι διευθύνσεις των κινήσεων τους. Το ηπειρωτικό σύστημα διάρρηξης αποτελείται από την **περιειρηνική ζώνη**, η οποία είναι σχεδόν παράλληλη των δυτικών και βόρειων ακτών του Ειρηνικού ωκεανού καθώς και του κεντρικού και νότιου τμήματος των ανατολικών ακτών του και την **ευρασιατική ζώνη**, η οποία αρχίζει δυτικά του Γιβραλτάρ, συνεχίζει κατά μήκος των βόρειων ακτών της Μεσογείου, περνάει από τα Βαλκάνια, την Περσία, τα Ιμαλάϊα, τη Βιρμανία και τελικά ενώνεται με την περιειρηνική ζώνη. Οι μεσοωκεάνιες ράχες διασχίζουν το Βόρειο Παγωμένο ωκεανό, τον Ατλαντικό ωκεανό, τον Ινδικό ωκεανό, το νότιο και τον ανατολικό Ειρηνικό ωκεανό. Στο σχήμα αυτό φαίνεται, επίσης, οτι η περιοχή του Αιγαίου βρίσκεται στη ζώνη σύγκρουσης της Ευρασιατικής με την Αφρικανική λιθοσφαιρική πλάκα (Παπαζάχος, 1990).

Οσο αφορά τα αίτια κίνησης των λιθοσφαιρικών πλακών, έχουν γίνει διάφορες υποθέσεις, από τις οποίες η υπόθεση των ρευμάτων μεταφοράς φαίνεται να προσεγγίζει περισσότερο προς την πραγματικότητα. Σύμφωνα με την υπόθεση αυτή, οι κινήσεις των λιθοσφαιρικών πλακών οφείλονται πιθανώς σε οριζόντιες εφαπτομενικές δυνάμεις οι οποίες ασκούνται στο κάτω μέρος των λιθοσφαιρικών πλακών από θερμικά ρεύματα μεταφοράς υλικού που δημιουργούνται στην ασθενόσφαιρα, όπως φαίνεται στο σχήμα (3). Τα ρεύματα μεταφοράς προκαλούνται λόγω της μεγάλης θερμοκρασίας που επικρατεί στο κάτω μέρος του μανδύα.

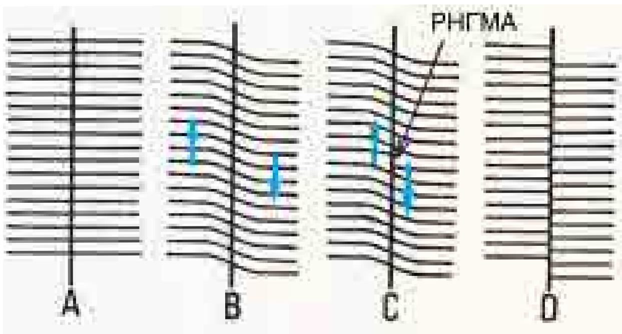


Σχ. 3. *Τα ρεύματα μεταφοράς κατά την άνοδο τους ασκούν οριζόντιες δυνάμεις στον πυθμένα των λιθοσφαιρικών πλακών με αποτέλεσμα την κίνηση τους (Press and Siever, 1994).*

2. Η Γένεση των Σεισμών

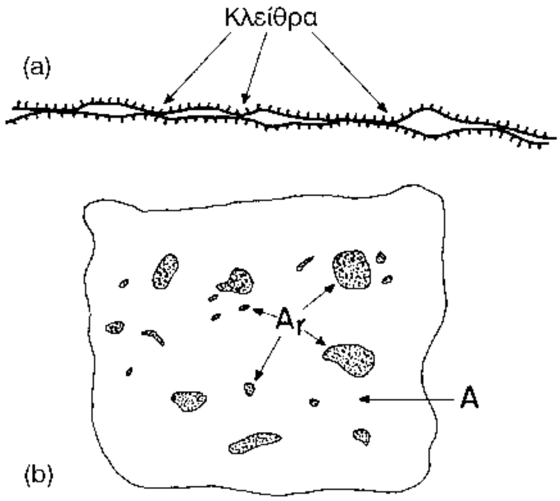
Σεισμός είναι η παροδική δόνηση του εδάφους που οφείλεται σε αίτια που βρίσκονται στο εσωτερικό της Γης. Σεισμός γίνεται όταν πετρώματα που βρίσκονται σε κατάσταση ελαστικής παραμόρφωσης σπάζουν απότομα κατά μήκος ενός ρήγματος. Η απότομη ολίσθηση των δύο τεμαχών στις δύο πλευρές του ρήγματος προκαλεί την γένεση των σεισμικών κυμάτων, που είναι ελαστικά κύματα τα οποία φθάνουν στην επιφάνεια της Γης και έτσι αντιλαμβανόμαστε το σεισμό.

Ο σεισμός του Αγίου Φραγκίσκου το 1906 (που έγινε σε τμήμα του ρήγματος του Αγίου Ανδρέα) είναι ο πρώτος σεισμός για τον οποίο προτάθηκε αξιόπιστη θεωρία γένεσης, της οποίας οι βασικές αρχές ισχύουν και σήμερα. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, που ονομάσθηκε **θεωρία ελαστικής ανάπαλσης**, τα δύο τεμάχη εκατέρωθεν ενός ρήγματος είναι στην αρχή κολλημένα μεταξύ τους (σχ. 4α). Υπό την επίδραση γεωλογικών δυνάμεων, που δημιουργούν **διατμητικές τάσεις**, τα δύο τεμάχη τείνουν να κινηθούν προς αντίθετες διευθύνσεις κατά μήκος του ρήγματος (σχ. 4β). Ετσι, αν είχαν χαραχθεί πριν από την έναρξη της διαδικασίας αυτής γραμμές κάθετες στη διεύθυνση του ρήγματος, παρατηρείται τώρα οτι οι γραμμές αυτές παραμορφώνονται κοντά στο ρήγμα. Με την πάροδο του χρόνου η παραμόρφωση αυτή αυξάνει (σχ. 4γ) και κάποια στιγμή η τριβή, η οποία αντιστέκεται στη σχετική κίνηση των δύο τεμαχών υπερνικιέται με αποτέλεσμα την απότομη σχετική ολίσθηση των δύο τεμαχών κατά μήκος του ρήγματος και την απελευθέρωση της ενέργειας παραμόρφωσης σε κινητική ενέργεια ταλάντωσης των υλικών σημείων των επιφανειών του ρήγματος. Η διάδοση των ταλαντώσεων αυτών αποτελεί τα σεισμικά κύματα. Μετά από την απότομη ολίσθηση, οι γραμμές ξαναγίνονται κάθετες στη διεύθυνση του ρήγματος (σχ. 4δ) (Παπαζάχος και Δρακόπουλος, 1992).

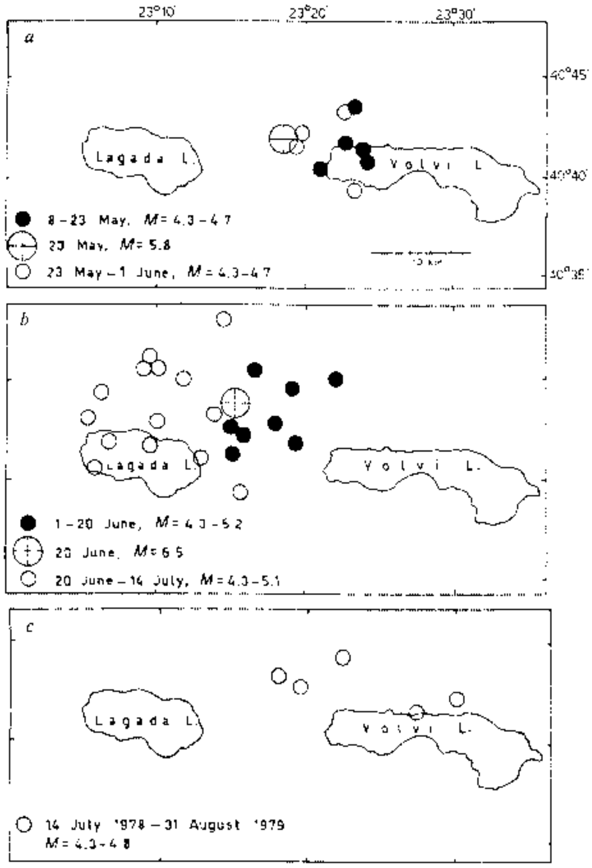


Σχ. 4. (α) *Τρόπος γένεσης σεισμού. Λίγους μήνες μετά τον προηγούμενο σεισμό (Α), πριν από το σεισμό (Β), κατά τη γένεση του σεισμού (C), λίγους μήνες μετά το σεισμό(D) (Παπαζάχος και Δρακόπουλος, 1992).*

Πρόσφατες έρευνες έχουν δείξει οτι η ολίσθηση κατά μήκος των επιφανειών του ρήγματος δεν είναι ομοιόμορφη, επειδή και η επιφάνεια του ρήγματος δεν είναι ομοιόμορφη. Η ανομοιομορφία αυτή της επιφάνειας του ρήγματος (ετερογένεια) μπορεί να οφείλεται σε ανωμαλίες της γεωμετρίας του ρήγματος (κάμψεις), σε εξογκώματα (εξάρματα), σε τμήματα μεγάλης τραχύτητας κλπ., τα οποία λέγονται **κλείθρα**. Στο σχήμα (5) φαίνεται τομή κάθετη στην επιφάνεια του ρήγματος (5α) και η ίδια η επιφάνεια του ρήγματος (5β). Τα κλείθρα (γκρίζες περιοχές) είναι οι περιοχές της επιφάνειας του ρήγματος τα οποία παρουσιάζουν ισχυρή αντίσταση στη θραύση τους και στα οποία συγκεντρώνεται η παραμόρφωση. Αυτά τα κλείθρα θα αποτελέσουν και τις εστίες των σεισμών.



Σχ. 5. *Τομή κάθετη στην επιφάνεια του ρήγματος* ***(a)*** *και η ίδια η επιφάνεια του ρήγματος* ***(b)****. Οι γκρίζες περιοχές παριστάνουν τα κλείθρα, δηλαδή, τμήματα της επιφάνειας του ρήγματος με ισχυρή αντίσταση στη θραύση (Scholz, 1990).*



Σχ. 6. *Επίκεντρα των σεισμών της σεισμικής ακολουθίας του 1978 στη Μυγδονία λεκάνη. Οι προσεισμοί σημειώνονται με μαύρες κουκίδες, οι μετασεισμοί με κύκλους και ο κύριος σεισμός της 20ης Ιουνίου 1978 (M_S=6,5) με κύκλο και σταυρό:* ***(a)*** *σεισμοί της περιόδου 8 Μαΐου - 1 Ιουνίου 1978,* ***(b)*** *σεισμοί της περιόδου 1 Ιουνίου - 14 Ιουλίου 1978,* ***(c)*** *σεισμοί της περιόδου 14 Ιουλίου - 31 Αυγούστου 1978 (Papazachos et al., 1982).*

3. Ο σεισμός της 20ης Ιουνίου 1978 στη Μυγδονία Λεκάνη

Το επίκεντρο του κύριου σεισμού, που είχε μέγεθος M_S=6,5, βρίσκεται στην περιοχή μεταξύ των λιμνών Βόλβης και Λαγκαδά, ενώ η εστία του βρίσκεται σε ένα ρήγμα με διεύθυνση περίπου ανατολής-δύσης και κλίση προς το βορρά. Προσεισμοί προηγήθηκαν του κύριου σεισμού στο ανατολικό τμήμα του ρήγματος (μαύρες κουκίδες στο σχήμα 6α, Παπαζάχος και συνεργάτες, 1982). Στο χρονικό διάστημα 8 Μαΐου 1978-20 Ιουνίου 1978 η προσεισμική δραστηριότητα μετανάστευε από το ανατολικό τμήμα του ρήγματος προς το κεντρικό τμήμα του. Φαίνεται οτι σε αυτή την περιοχή του ρήγματος υπάρχει κάποιο ισχυρό κλείθρο, το οποίο αντιστεκόταν στη διάδοση της διάρρηξης προς τη δυτική πλευρά του ρήγματος. Η συγκέντρωση των τάσεων στη γειτονιά του κλείθρου αυτού (το οποίο ονομάζεται φράγμα), κατά τη διάρκεια της προσεισμικής περιόδου, ξεπέρασε κάποια στιγμή την αντοχή του κλείθρου το οποίο διαρρήχθηκε προκαλώντας τον κύριο σεισμό.

Σήμερα, με τη χρησιμοποίηση ψηφιακών σεισμογράφων που εγκαθίστανται στην περιοχή στην οποία εκδηλώνεται μία σεισμική ακολουθία, είναι δυνατό να εντοπίζονται οι περιοχές εκείνες του ρήγματος που αποτελούν ισχυρά κλείθρα και που μπορεί να αποτελέσουν τις εστίες μελλοντικών σεισμών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Isacks, B. L., Oliver, J. and Sykes, L. R., (1967). *Seismology and the new global tectonics.* J. Geophysical Res., 73, 5855-5899.

McKenzie, D. and Parker, R. L., (1967). *The North Pacific: an example of tectonics on a sphere.* Nature, Vol. 216, 1276-1280.

Morgan, W. J., (1968). *Rises, trenches, great faults and crustal blocks.* J. Geophysical Res., 75, 285-309.

Παπαζάχος, Β. Κ., (1990). *Εισαγωγή στη Σεισμολογία.* Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, σελ. 382.

Παπαζάχος, Β. Κ. και Δρακόπουλος, Ι. Κ., (1992). *Σεισμοί και μέτρα προστασίας.* Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, σελ. 109.

Papazachos, B. C., Tsapanos, T. M. and Panagiotopoulos, D. G., (1982). *A premonitory pattern of earthquakes in northern Greece.* Nature, Vol. 296, 232-235.

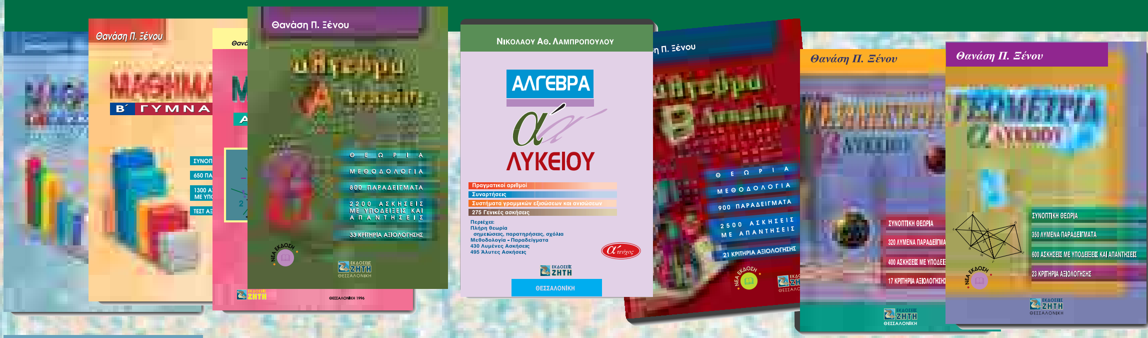
Press, F. and Siever, R., (1994). *Understanding Earth.* W. H. Freeman and Company, New York, pp. 593.

ΤΕΧΝΙΚΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑ ΓΙΑ ΤΑ ΑΕΙ, ΤΕΙ, ΙΕΚ ΒΙΒΛΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ και τις ΔΕΣΜΕΣ

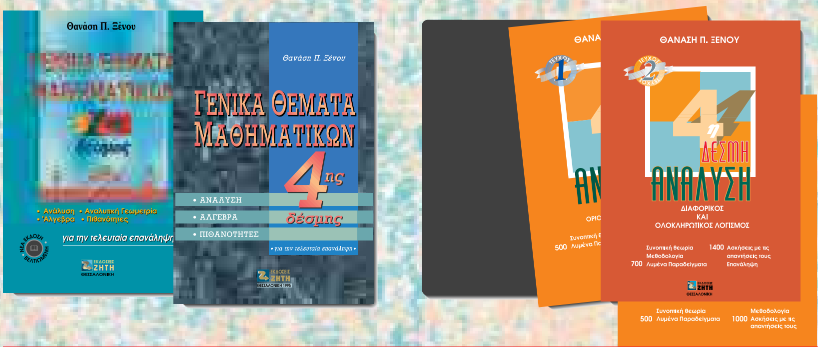
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

• ΑΡΜΕΝΟΠΟΥΛΟΥ 27, (πίσω από τη Ροτόντα) • Τηλ.: (031) 203.720, Fax: 211.305 • ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 546 35 •

ΘΑΝΑΣΗ ΞΕΝΟΥ



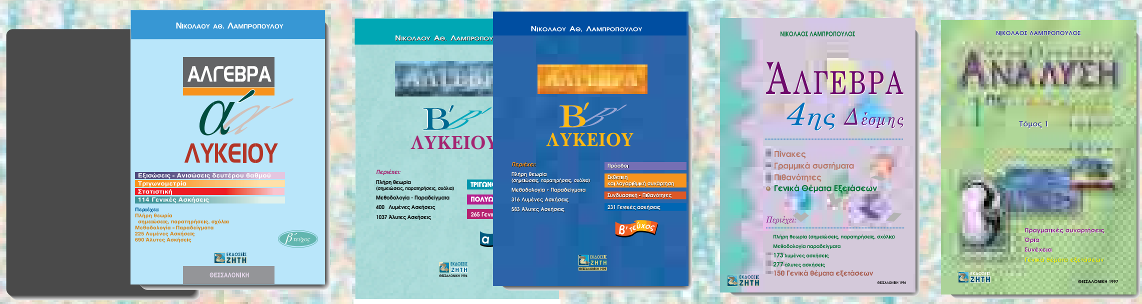
- ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α', Β' & Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
- ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 1ης & 4ης ΔΕΣΜΗΣ
- ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α' & Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
- ΑΛΓΕΒΡΑ Α' & Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
- ΑΝΑΛΥΣΗ 1ης Δέσμης τομ. 1, 2, 3
- ΑΛΓΕΒΡΑ & ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ τομ. 1, 2
- ΑΛΓΕΒΡΑ 4ης Δέσμης
- ΑΝΑΛΥΣΗ 4ης Δέσμης, τομ. 1, 2
- ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' Τ.Ε.Λ.



Πλήρεις Σειρές ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Για το ΓΥΜΝΑΣΙΟ
το ΛΥΚΕΙΟ, τα ΤΕΛ
και τις ΔΕΣΜΕΣ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ



ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ 2 ΤΟΜΟΙ

ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ 2 ΤΟΜΟΙ

ΑΛΓΕΒΡΑ 4ης ΔΕΣΜΗΣ

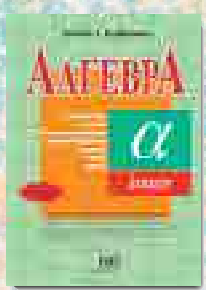
ΑΛΓΕΒΡΑ 1ης ΔΕΣΜΗΣ, Τομ.1

ΥΠΟ ΕΚΔΟΣΗ:

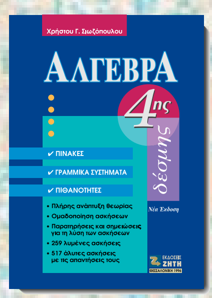
Ανάλυση 1ης Δέσμης, Τόμοι 2
Ανάλυση 4ης Δέσμης, Τόμοι 2

Στους κ.κ. καθηγητές γίνεται έκπτωση

ΧΡΗΣΤΟΥ ΣΙΩΖΟΠΟΥΛΟΥ



ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ



ΑΛΓΕΒΡΑ 4ης ΔΕΣΜΗΣ

ΥΠΟ ΕΚΔΟΣΗ:

Ανάλυση 4ης Δέσμης, Τόμ.1

- Ζητήστε να σας στείλουμε τον αναλυτικό τιμοκατάλογο των εκδόσεών μας
- Τώρα μπορείτε να δείτε τις εκδόσεις μας και στο βιβλιοπωλείο της «Ένωσης Εκδοτών Βιβλίου Θεσσαλονίκης» στη Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου-Ακαδημίας) στην Αθήνα

Το Βιβλιοπωλείο μας αναλαμβάνει την ταχυδρομική αποστολή των βιβλίων που σας χρειάζονται, με αντικαταβολή.

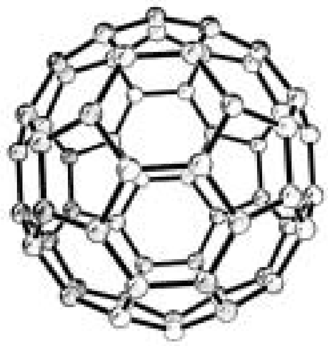
Ο ΑΝΘΡΑΚΑΣ ΜΕ ΝΕΑ ΠΡΟΣΩΠΑ

Του **Α. Βάρβογλη,** Καθηγητή Χημείας του Α.Π.Θ.

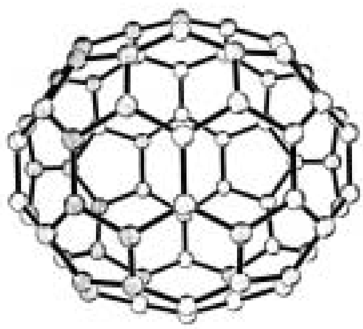
Μια πραγματική επιστημονική επανάσταση που συναρπάζει χημικούς, φυσικούς, αστρονόμους και άλλους ακόμη επιστήμονες έχει συντελεστεί αθόρυβα τα τελευταία χρόνια. Πρόκειται για την ανακάλυψη νέων αλλοτροπικών μορφών του άνθρακα, που παράγονται τεχνητά από τον γραφίτη με διάφορους τρόπους, κυρίως κατά την ισχυρή του θέρμανση με ακτίνες λέηζερ. Τα άτομα του άνθρακα τότε εξαερώνονται και κατά τη συμπύκνωσή τους προτιμούν να εμφανιστούν με νέα απροσδόκητα πρόσωπα που χαρακτηρίζονται από νέες συναρπαστικές ιδιότητες.

Οι ως πριν λίγα χρόνια γνωστές μορφές του άνθρακα –το διαμάντι και ο γραφίτης– έχουν ατέρμονα δομή, δηλαδή αποτελούνται από απειράριθμα άτομα άνθρακα, τοποθετημένα στις κορυφές ιδεατών εξαγώνων, είτε επίπεδων –στο γραφίτη– είτε πτυχωμένων –στο διαμάντι. Αντίθετα, οι νέες μορφές συγκροτούν σφαιρόμορφα μόρια αποτελούμενα από καθορισμένο αριθμό ατόμων σε διευθετήσεις όπου κυριαρχούν τα επίπεδα εξάγωνα, εναλλασσόμενα και με πεντάγωνα. Παρόμοια ανθρακούχα συσσωματώματα έχουν επισημανθεί στο διάστημα, χωρίς όμως να έχει διευκρινισθεί πώς ακριβώς συναρμολογούνται τα άτομα του άνθρακα. Χημικοί και αστρονόμοι συμφώνησαν να τα αποκαλούν κλάστερ (cluster, σμήνος), καθώς ήταν φανερή η αναλογία με τα σμήνη των αστέρων. Στη χημεία είναι γνωστά διάφορα κλάστερ, αποτελούμενα όχι μόνο από άνθρακα αλλά και από συνδυασμούς άνθρακα-μετάλλων ή μόνο μέταλλα.

Μετά από σύντονες έρευνες αποκαλύφθηκε ότι κατά την εξαέρωση του γραφίτη σχηματίζονται κυρίως σφαιρικά μόρια αποτελούμενα από 60 άτομα. Η ακριβής τους μορφή έχει τη γεωμετρία ενός κόλουρου εικοσαέδρου, το οποίο συγκροτείται από 30 εξαγωνικές και 12 πενταγωνικές έδρες. Η ομοιότητα με μια μπάλα ποδοσφαίρου είναι εντυπωσιακή και έγινε αφορμή να το ονομάσουν μερικοί φουτμπολένιο. Εντούτοις, τελικά επικράτησε το αρχικό του όνομα –μπακμινστερφουλερένιο– που του δόθηκε για να τιμηθεί ο Αμερικανός αρχιτέκτονας και φιλόσοφος Richard Buckminster Fuller, ο οποίος στις δεκαετίες 1950-1960 κατασκεύασε ανάλογους γεωδετικούς θόλους όπου συνδυάζονταν η μεγάλη αντοχή με την οικονομία υλικών. Στη χημεία συνηθίζονται τα υποκοριστικά ή παρατσούκλια των μορίων. Ένα τέτοιο χαϊδευτικό του νέου μορίου, που θα συναντήσει κανείς ακόμη και σε σοβαρά περιοδικά είναι το αμετάφραστο buckyball.



Σχήμα 1. *Το μόριο του C_{60}*



Σχήμα 2. *Το μόριο του C_{70}*

Το δυσκολοπρόφερτο «επίσημο» όνομα του μπακμινστερφουλερένιου, σε συνδυασμό με την αδυναμία μας να σχεδιάσουμε τη δομή του χωρίς τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή, ώθησε τους ερευνητές να απλοποιήσουν τα πράγματα. Έτσι, στον προφορικό λόγο αναφέρεται ως φουλερένιο-60, ενώ στο γραπτό λόγο συμβολίζεται ως C_{60}, με το πλεονέκτημα να μας υποδεικνύεται ο αριθμός των ατόμων του άνθρακα. Τα άλλα φουλερένια που έχουν ως τώρα απομονωθεί σε καθαρή μορφή έχουν 70, 76, 78, 84, κ.λπ. άτομα άνθρακα. Γράφονται με ανάλογο τρόπο και έχουν σφαιροειδή δομή, όχι όμως τόσο συμμετρική όσο του C_{60}.

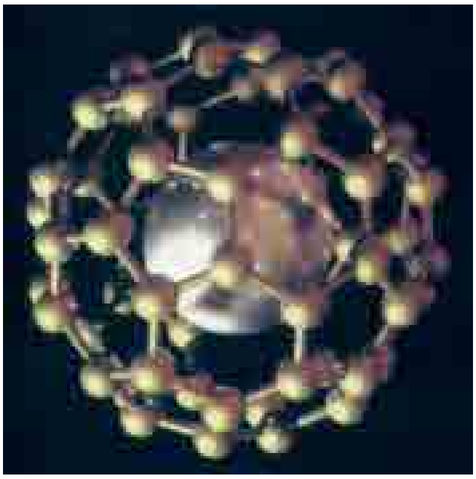
Όταν αναγγέλθηκε το 1985 η διαπίστωση της ταυτότητας του C_{60}, δημιουργήθηκε αίσθηση στους επιστημονικούς κύκλους, αλλά η περίπτωση φαινόταν να ανήκει μάλλον στα παράδοξα που κατά καιρούς εξαγγέλλονται, χωρίς να διαφαίνεται κάποια ουσιαστική συνέχεια. Ο λόγος θα πρέπει να αναζητηθεί στο ότι το C_{60} επισημάνθηκε με φασματοσκοπικές μεθόδους σε απειροελάχιστες ποσότητες.

Χρειάστηκε να γίνει μια δεύτερη μικρή επανάσταση, το 1990, οπότε το C_{60} παρασκευάστηκε σε υπολογίσιμες ποσότητες, με την εφαρμογή ηλεκτρικού τόξου μεταξύ ηλεκτροδίων γραφίτη. Αρχικά απομονώθηκαν λίγα χιλιοστά του γραμμαρίου μιας κοκκινωπής σκόνης και αργότερα ολόκληρα γραμμάρια. Εξίσου σημαντική από πρακτική πλευρά ήταν και η ανάπτυξη ικανοποιητικών μεθόδων καθαρισμού του, με τους οποίους απαλλάσσεται από τα άλλα συγγενή μόρια με λιγότερα ή περισσότερα άτομα άνθρακα που το συνοδεύουν. Σήμερα είναι διαθέσιμο στο εμπόριο σε προσιτή τιμή (~30.000 δρχ/gr) ενώ πριν δύο χρόνια κόστιζε 50 φορές περισσότερο! Πρόσφατα πειράματα έδειξαν ότι το C_{60} σχηματίζεται γενικά κατά τις καύσεις, δηλαδή με πολύ ήπιες συνθήκες. Υπάρχει ακόμη και στην αιθάλη ενός κεριού και αποτελεί μάλιστα περιβαλλοντικό ρύπο.

Αξίζει να υπογραμμιστεί η μεγάλη καθαρότητα που μπορούμε να πετύχουμε στο C_{60}, ως αποτέλεσμα θεωρητικών μάλλον παρά πρακτικών λόγων. Πράγματι, όλα τα άτομα του άνθρακα απαντούν με την ίδια μορφή όπως στο βενζόλιο, με αποτέλεσμα οι αντιδράσεις του C_{60} να απαιτούν δραστικές συνθήκες και το μόριο να μην αλλοιώνεται εύκολα. Αντίθετα, στο διαμάντι που όταν δεν είναι χρωματισμένο θεωρείται ως μια από τις καθαρότερες ουσίες, τα επιφανειακά του άτομα είναι εξ ορισμού τρισθενή. Γι' αυτό μόλις δημιουργούνται, κατά την κοπή του, καλύπτονται αμέσως από ένα μονομοριακό στρώμα υδρογόνου, προκειμένου να αποκτήσουν τη σταθερή τετρασθενή κατάσταση. Στο μεσοαστρικό χώρο, όπου επικρατούν χαμηλές θερμοκρασίες και δεν υπάρχουν υδρατμοί και οξυγόνο, έχουν καταγραφεί δεκάδες ασταθών μορίων με τρισθενή άνθρακα, ακόμη και το ζεύγος άνθρακα-υδρογόνου, με μονοσθενή θετικά φορτισμένο άνθρακα!

Οι ιδιότητες του C_{60} –φυσικές και χημικές– παρουσιάζουν ξεχωριστό ενδιαφέρον. Για παράδειγμα, με τη χρησιμοποίηση του ηλεκτρονικού μικροσκοπίου σήραγγας διαπιστώθηκε ότι όταν το C_{60} αποτίθεται σε μια κρυσταλλική επιφάνεια, τα μόριά του διευθετούνται με τον ίδιο τρόπο που παίρνουν οι μπάλες του μπιλιάρδου. Οι κρύσταλλοι που προκύπτουν είναι μαλακοί σαν το γραφίτη, αλλά με ισχυρή πίεση, κατά την οποία επέρχεται μείωση του όγκου κατά 70%, γίνονται σκληρότεροι και από το διαμάντι, για να επανέλθουν στην αρχική τους κατάσταση με την άρση της πίεσης.

Στα διάκενα που αφήνουν μεταξύ τους οι «μπάλες» του C_{60} χωρούν διάφορα μέταλλα ή μικρά μόρια. Εκεί, κατά την ανάμιξη του C_{60} με μεταλλικό νάτριο εγκλωβίζονται άτομά του και προκύπτει ένα υλικό που συμπεριφέρεται σαν ένα μέταλλο τριών διαστάσεων. Όταν ψυχθεί σε χαμηλή θερμοκρασία (18 βαθμούς Κέλβιν), το υλικό γίνεται υπεραγώγιμο. Με άλλα μέταλλα η θερμοκρασία της υπεραγωγιμότητας έχει φθάσει προς το παρόν στους 43 βαθμούς Κέλβιν. Αντίθετα, το καθαρό C_{60} σε λεπτά φιλμ είναι μονωτής, τόσο της θερμότητας όσο και του ηλεκτρισμού. Εντυπωσιακή είναι επίσης η μηχανική αντοχή του: ακόμη και μετά από επιτάχυνση των σφαιριδίων στα 30000 km/h, η πρόσκρουσή τους σε ατσάλινη επιφάνεια τα αφήνει άθικτα.



Σχήμα 3. *Το μόριο του C_{60} με εγκλωβισμένο άτομο νατρίου: $Na@C_{60}$.*

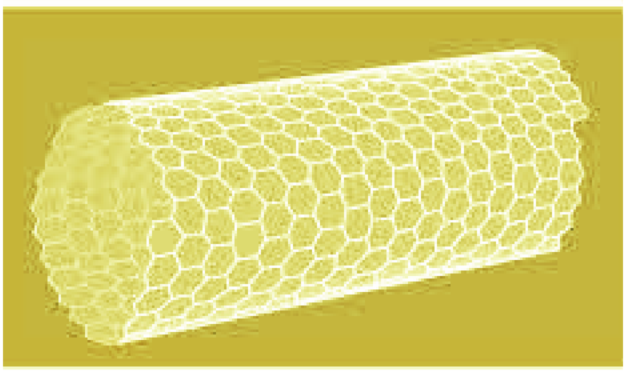
Αν ο γραφίτης που χρησιμεύει για την παρασκευή του C_{60} έχει προηγουμένως διαποτιστεί με οξείδια μετάλλων, τότε παράγονται «μπάλες» που περιέχουν στο εσωτερικό τους το μέταλλο. Το μεγάλο μέγεθος του C_{60} επιτρέπει να χωρέσει στην κοιλότητά του οποιοδήποτε μέταλλο. Τα πρωτόγνωρα αυτά μόρια με τον περίεργο συνδυασμό άνθρακα-μετάλλου ονομάστηκαν με κάποια φιλοπαίγμονα διάθεση μόρια-κουδουνίστρες. Για να τα παραστήσουμε συμβολικά χρησιμοποιούμε το γνωστό σε όσους αλληλογραφούν με ηλεκτρονικό ταχυδρομείο σύμβολο @. Έτσι, το νάτριο μέσα στο φουλερένιο-60 γράφεται $Na@C_{60}$. Στην πραγματικότητα, το νάτριο δίνει ένα ηλεκτρόνιο στο ανθρακούχο περίβλημα που φορτίζεται αρνητικά, ενώ το ίδιο αποκτά θετικό φορτίο. Πρόκειται λοιπόν για άλατα νέου τύπου, διαφορετικά από εκείνα που σχηματίζονται όταν το μέταλλο καταλάβει τα διάκενα του C_{60}. Είναι εντυπωσιακή η ικανότητα του C_{60} να συγκρατεί ηλεκτρόνια, ως και έξι, γι' αυτό και έχει χαρακτηρισθεί ως σφουγγάρι ηλεκτρονίων.

Ίχνη του C_{60} βρέθηκαν πρόσφατα στο Οντάριο του Καναδά. Εντοπίστηκαν σε έναν κρατήρα που δημιουργήθηκε πριν από 2 δισεκατομμύρια χρόνια από την πρόσκρουση μετεωρίτη. Προς μεγάλη ικανοποίηση των ερευνητών, στο εσωτερικό των ανθρακούχων σφαιρών ανιχνεύθηκε εγκλωβισμένο αέριο ήλιο, η αναλογία των ισοτόπων του οποίου ήταν διαφορετική από εκείνη του γήινου ηλίου. Το εύρημα αυτό συνηγορεί υπέρ της εξωγήινης προέλευσης του συγκεκριμένου δείγματος, αφού αν προερχόταν από γήινες δράσεις θα είχε την αναμενόμενη ισοτοπική αναλογία του ηλίου.

Από χημική άποψη, το C_{60} μοιάζει και στη δραστικότητα με το βενζόλιο. Μπορεί για παράδειγμα να υδρογονωθεί ή να προσλάβει αλογόνα σε διάφορες ποσότητες, έως και ισοδύναμες προς τον αριθμό των ατόμων του. Η ένωση με 60 άτομα φθορίου έχει παρασκευαστεί και ίσως κάποτε αποτελέσει το ιδεώδες λιπαντικό, καθώς το φθοριούχο περίβλημα των σφαιρών υπολογίζεται ότι θα εμποδίζει την προσέγγισή τους και οι τριβές θα είναι ελάχιστες. Μια πιο πολύπλοκη ακολουθία αντιδράσεων οδήγησε στο σχηματισμό πολυμερών, στα οποία σε μια μεγάλου μήκους ευθεία ανθρακική αλυσίδα «κρέμονται» σε κανονικά διαστήματα τα μόρια του C_{60}, όπως σε ένα περιδέραιο!

Κατά την παρασκευή του C_{60} σχηματίζονται και άλλες σφαιροειδείς μορφές άνθρακα με περισσότερα άτομα. Το πιο ενδιαφέρον από αυτά τα ελάσσονα φουλερένια είναι το C_{76} που δεν έχει τη μεγάλη συμετρία του C_{60}. Αυτό το χαρακτηριστικό του το κάνει να απαντά σε δυο διαφορετικές (χειρόμορφες) μορφές, με σχέση ειδώλου προς το αντικείμενο, όπως είναι τα χέρια μας. Την ίδια ιδιότητα έχουν, όπως είναι γνωστό και τα περισσότερα βιομόρια. Τελευταία, διαπιστώθηκε πειραματικά, μετά από θεωρητικούς υπολογισμούς, ότι χειρομορφία έχουν επίσης γενικά τα άτομα των στοιχείων, τα οποία δεν πρέπει πια να θεωρούμε ως ιδανικές σφαίρες.

Άλλου είδους μοριακά συγκροτήματα αποτελούν οι μοριακές «υπερδομές». Μια από αυτές αποτελείται από συγκεντρικούς φλοιούς εξαγωνικών φύλλων άνθρακα. Προκύπτει από το γραφίτη, όταν βομβαρδιστεί με ηλεκτρόνια υψηλής ενέργειας και αποτελεί ένα «γραφιτικό κρεμμύδι». Πράγματι, η δομή αυτών των συσσωματωμάτων θυμίζει το κρεμμύδι ή πιο παραστατικά τις ρωσικές κούκλες που η μια περιέχει την άλλη. Τελείως διαφορετικοί από τους σφαιρόμορφους άνθρακες είναι οι νανοσωλήνες. Όπως υποδεικνύει το όνομά τους, πρόκειται για μικροσκοπικούς κυλίνδρους με ελικοειδή δομή που σχηματίζονται αποκλειστικά από επίπεδα γραφιτικά εξάγωνα. Παράγονται σε διάφορα μεγέθη κατά την καταλυτική ισχυρή θέρμανση διαφόρων υδρογονανθράκων, όπως το ακετυλένιο. Οι νανοσωλήνες προβλέπεται ότι θα έχουν χρησιμότητα ως ηλεκτρονικά υλικά, ενώ μοναδική είναι και η μηχανική αντοχή τους που ξεπερνά τις ίνες του άνθρακα.



Σχήμα 4. *Νανοσωλήνας άνθρακα*

Οι νέες μορφές άνθρακα δεν τελειώνουν εδώ. Έχουν ανιχνευθεί πολλά ακόμη νέα είδη, άλλα τύπου κλάστερ και άλλα αποτελούμενα από εκατοντάδες άτομα άνθρακα ενωμένα γραμμικά ή κυκλικά. Ακόμη, υπάρχουν τα διάφορα πολυμερή του άνθρακα. Θα χρειαζόταν ολόκληρη πραγματεία για μια καλύτερη γνωριμία μαζί τους. Ας περιοριστούμε λοιπόν εδώ μόνο σε μια γλωσσική παρατήρηση, ότι είναι λάθος να λέμε τον άνθρακα κάρβουνο, επειδή τα κάρβουνα αποτελούνται από πολυκυκλικές ενώσεις του άνθρακα μεγάλου μοριακού βάρους που περιέχουν και άλλα στοιχεία.

Χιλιάδες επιστήμονες, χωρίς υπερβολή, σε εκατοντάδες εργαστήρια, ερευνούν εντατικά τις νέες μορφές του άνθρακα. Καθημερινά αναφέρονται στον επιστημονικό τύπο συναρπαστικά ευρήματα, που πλουτίζουν τις γνώσεις μας σ' αυτό το νέο πεδίο με γεωμετρική πρόοδο. Τι μπορεί άραγε να περιμένουμε από τη χειμαρρώδη αυτή δραστηριότητα; Παρόλο που είναι ακόμη πολύ νωρίς, δεν είναι λίγοι αυτοί που πιστεύουν ότι δε θα αργήσει η εξαγγελία των πρώτων εφαρμογών. Ήδη στο χώρο της υψηλής τεχνολογίας έχουν προταθεί ορισμένες δυνατότητες, που βασίζονται στις μοναδικές αλλαγές ιδιοτήτων που επέρχονται κατά τη φωτοβόληση του C_{60}, όπως π.χ. για την κατασκευή νέων υπερυπολογιστών. Επίσης, έχει ανιχνευθεί σε παράγωγα του C_{60} πολλά υποσχόμενη βιολογική δραστικότητα. Οπωσδήποτε, η αξία μιας ανακάλυψης δεν έχει σχέση με τις εφαρμογές της, παρόλο που αυτές προκύπτουν πολύ συχνά χωρίς να αναμένονται. Ένας ιδεαλιστής θα υποστήριζε πάντως ότι ακόμη και αν τελικά δεν προκύψει τίποτα χρήσιμο, η αποκάλυψη αυτών των νέων μορφών της ύλης και των μυστικών τους αξίζει σίγουρα την προσπάθεια –και τα έξοδα– καθώς η ύπαρξή τους έχει αλλάξει τον τρόπο με τον οποίο οι επιστήμονες αντιμετωπίζουν τον κόσμο τους.

Σημείωση. Το βραβείο Nobel Χημείας 1996 μοιράστηκαν οι επιστήμονες R. Curl, H. Kroto και R. Smalley για τις μελέτες τους, με τις οποίες αποδείχτηκε η ύπαρξη του C_{60}.

Η ΟΞΙΝΗ ΒΡΟΧΗ και το ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΜΑΣ

Του **Β. Παπαγιάγκου**, Χημικού

«Και ο πρώτος άγγελος εσάλπισε και έγινε χάλαζα και πυρ μεμιγμένα με αίμα και ερρίφθησαν εις την γην· και το τρίτον των δένδρων κατεκάη και πας χλωρός χόρτος κατεκάη».

(Ιωάννου Αποκάλυψις, Κεφ. Η στ. 7)

Τις δύο τελευταίες δεκαετίες η οξύτητα της βροχής και του χιονιού σε μεγάλες περιοχές των ΗΠΑ και της Ευρώπης έχει αυξηθεί, καθώς όλο και περισσότερες ρυπαντικές ουσίες, όπως διοξείδιο του θείου (SO_2) και οξείδια του αζώτου παράγονται από την καύση διαφόρων καύσιμων υλών (πετρέλαιο, λιθάνθρακες κ.ά.) σε παγκόσμια κλίμακα.

Η όξινη βροχή (acid rain) έχει προκαλέσει μια αξιοσημείωτη μείωση στους αριθμούς των ζώων μερικών ευαίσθητων ειδών, όπως ο σολωμός και η πέστροφα, και σοβαρές βλάβες στο φυτικό βασίλειο.

Ορισμένη οξύτητα είναι φυσιολογική τόσο στις βροχοπτώσεις, όσο και στις χιονοπτώσεις, αφού το αέριο διοξείδιο του άνθρακα της ατμόσφαιρας διαλυόμενο στο νερό δίνει ένα ελαφρώς όξινο διάλυμα με αναμενόμενη τιμή pH περίπου 5,6. Όμως, το pH της βροχής και του χιονιού που πέφτει στο μεγαλύτερο μέρος της βόρειας Ευρώπης και των ανατολικών περιοχών των ΗΠΑ τα τελευταία χρόνια, έχει τιμή περίπου ίση με 5,0 και μερικές φορές ακόμη μικρότερη ίση με 3,0. Η αυξανόμενη οξύτητα τόσο της βροχής, όσο και του χιονιού οφείλεται κατά κύριο λόγο στην παρουσία θειϊκού και νατρικού οξέος, με ποσοστιαία αναλογία συμμετοχής τους περίπου 60 και 30%, αντίστοιχα.

Τα αποτελέσματα της όξινης βροχόπτωσης έχουν ιδιαίτερα συζητηθεί στη Σκανδιναβία. Οι ρυπαντικές ουσίες κατευθύνονται Βόρεια και Ανατολικά, αφού άνεμοι και μέτωπα κακοκαιρίας που προκαλούν τις βροχές περάσουν προηγούμενα από πηγές εκπομπής οξειδίων αζώτου και θείου (Αγγλία-Γαλλία κ.ά.) εναποθέτοντας την ρυπογόνο ύλη κυρίως στα Σκανδιναβικά κράτη. Το νερό περίπου 5000 λιμνών στη Σουηδία υπολογίζεται να έχει τιμή pH 5,0 ή και μικρότερη, ενώ οι πληθυσμοί των ψαριών είναι σαφώς επηρεασμένοι.

Μελέτες έχουν δείξει ότι η μέση οξύτητα τόσο των βροχοπτώσεων, όσο και των χιονοπτώσεων στη νότια Νορβηγία κυμαίνεται σε τιμή pH 4,6 και ότι ο αριθμός των λιμνών χωρίς σολωμούς και πέστροφες έχει αυξηθεί επικίνδυνα.

Το ίδιο αποτέλεσμα έχει παρατηρηθεί και στις λίμνες των βουνών στην περιοχή της Νέας Υόρκης. Μια μελέτη του 1930 έδειξε ότι μόνο το 4% των 217 λιμνών είχε τιμή pH ίση με 5,0 ή μικρότερη και στις λίμνες αυτές δεν υπήρχαν καθόλου ψάρια. Στις αρχές του 1970 άλλη έρευνα έδειξε ότι οι μισές από τις 217 λίμνες είχαν τιμές pH χαμηλότερες του 5,0, και το 90% των λιμών με χαμηλό pH δεν είχε ψάρια.

Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι, σύμφωνα με την επικρατούσα άποψη, ο θάνατος των ψαριών οφείλεται στις αυξημένες συγκεντρώσεις ιόντων αργιλίου που προκαλούνται από την όξινη βροχή. Τα ιόντα αργιλίου ερεθίζουν τα βράγχια των ψαριών που σταδιακά αποφράζουν, με αποτέλεσμα το θάνατο των ψαριών.

Πρόσφατες μελέτες των δασών των Βορειανατολικών περιοχών των ΗΠΑ και της Σκανδιναβίας έδειξαν εκτεταμένη καταστροφή των δέντρων η οποία κατά πάσα πιθανότητα οφείλεται τόσο στην όξινη βροχόπτωση, όσο και στην όξινη χιονόπτωση. Ωστόσο, όμως, μια τέτοια έχει αμφισβητηθεί. Ο κύριος λόγος της διγνωμίας και των αντιπαραθέσεων σχετικά με τις καταστροφικές συνέπειες της όξινης βροχής αποτελεί το γεγονός ότι το θέμα αφορά κύριο οικονομικό και πολιτικό ζήτημα που διασταυρώνει εθνικά και διακρατικά συμφέροντα. Στις ΗΠΑ π.χ. οι δημόσιες υπηρεσίες ηλεκτρισμού και οι βιομηχανίες στα μεσοδυτικά, έχουν αμφισβητήσει ανοικτά επιστημονικές μελέτες οι οποίες απέδωσαν την καταστροφή που συνέβη λόγω της όξινης βροχής στα βορειανατολικά, σε εκπομπές αερίων από τις καμινάδες τους.

Στην Ευρώπη, ο ισχυρισμός των Σκανδιναβικών κρατών ότι οι εκπομπές αερίων από άλλα κράτη της Κεντρικής Ευρώπης, είναι υπεύθυνες για το πρόβλημα της όξινης βροχής στη Σκανδιναβία, έχει επίσης αμφισβητηθεί.

Γρήγορη επίλυση του ζητήματος δεν φαίνεται να διαγράφεται στο άμεσο μέλλον. Ακόμη και αν οι κυβερνήσεις και βιομηχανίες συμφωνήσουν στην προέλευση της όξινης βροχής, θα χρειαστούν χρόνια και πολλά δισεκατομμύρια δολλάρια για την εγκατάσταση των απαραίτητων μέσων που θα επιφέρουν μια σημαντική μείωση των ρυπαντικών ουσιών του αέρα. Και ενώ οι συζητήσεις για την εξεύρεση λύσεων που αφορούν τη μείωση των εκπομπών οξειδίων του αζώτου και οξειδίων του θείου συνεχίζονται, το πρόβλημα της όξινης βροχής παραμένει μαζί μας και μαζί και ο κίνδυνος να μετατραπεί η γη πάνω από τον 45ο παράλληλο σε χημική έρημο, αν οι εκπομπές των ρυπογόνων υλών και της όξινης απόθεσης, αφεθούν ανεξέλεγκτες...

Το ΘΕΙΟ

Της **Αικ. Γιούρη-Τσοχατζή,** Επ. Καθηγήτριας Ανόργανης Χημείας του Α.Π.Θ.

Το θείο (το κοινό θειάφι) είναι χημικό στοιχείο με σύμβολο **S** (από το λατινικό **S**ulphurium). Ανήκει στην έκτη ομάδα του περιοδικού πίνακα, έχει ατομικό αριθμό 16, ατομικό βάρος 32,06 και δέκα ισότοπα (τέσσερα φυσικά, έξι ραδιενεργά).

Είναι γνωστό από την αρχαιότητα και αναφέρεται στον Όμηρο και στη Βίβλο (Γένεση). Οι αλχημιστές θεωρούσαν το μείγμα θείου-υδραργύρου «ιδανικό», τα δύο δε στοιχεία συνδυασμένα σε διάφορες αναλογίες και βαθμούς καθαρότητας, σχημάτιζαν τα διάφορα μέταλλα και ορυκτά. Η θεωρία «θείου-υδραργύρου» αποτέλεσε βασικό μέρος της ευρωπαϊκής και ισλαμικής αλχημείας και με μερικές προσθήκες και τροποποιήσεις επεκράτησε μέχρι τον 13ο αιώνα, την αρχή δηλαδή της σύγχρονης χημείας. Θείο βρέθηκε στους μετεωρίτες και στο φεγγάρι μία σκοτεινή περιοχή δίπλα στον κρατήρα Αρίσταρχο που μελετήθηκε από τον R.W. Wood με υπεριώδεις ακτίνες έδειξε ότι αποτελεί αποθήκη θείου.

• ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ

Το θείο βρίσκεται στη Γη, ως ελεύθερο ή ενωμένο με άλλα στοιχεία

α) ΕΛΕΥΘΕΡΟ βρίσκεται στο ακατέργαστο πετρέλαιο, στο φυσικό αέριο (από τα οποία πρέπει ν' απομακρυνθεί), στις ιαματικές πηγές και σε μεγάλες ποσότητες με τη μορφή **θειοστρωμάτων** ή **θειορυχείων** (ΗΠΑ) και **θειοχωμάτων** σε ηφαιστειογενείς περιοχές, όπως Σικελία, Ν. Ιταλία, Ιαπωνία, Μεξικό, Ελλάδα (Μήλο, Θήρα, Σουσάκι κ.ά.) κ.λπ.

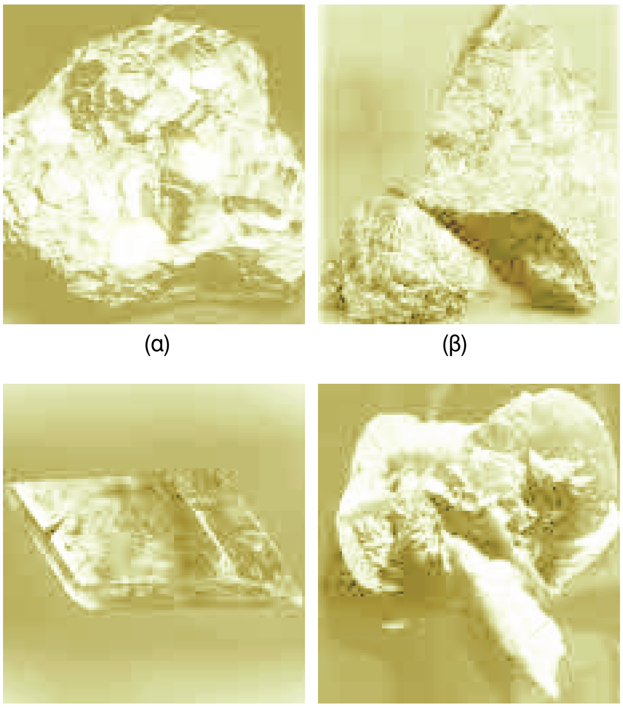
Στα **θειοστρώματα** ή **θειορυχεία** το θείο βρίσκεται ως κοίτασμα συγκεντρωμένο σε σωρούς ή σε φλέβες μέσα σε ασβεστολιθικά ή αργιλοασβεστολιθικά πετρώματα, σε βάθος 50-300 μέτρων στο φλοιό της Γης. Κοιτάσματα θείου μεγάλης καθαρότητας ανακαλύφθηκαν στην Λουϊζιάνα και στο Τέξας (ΗΠΑ) πριν από ένα αιώνα σε μεγάλες ποσότητες, ώστε οι ΗΠΑ καλύπτουν ως σήμερα τα 3/4 της παγκόσμιας παραγωγής.

Τα **θειοχώματα** διακρίνονται από τα θειοστρώματα επειδή έχουν σχηματιστεί σε ηφαιστειογενείς περιοχές και βρίσκονται στους κρατήρες ακόμη και μη ενεργών ηφαιστείων.

β) ΕΝΩΜΕΝΟ βρίσκεται α) Στα *θειούχα ορυκτά (πυρίτες)* π.χ. σιδηροπυρίτης (FeS_2)(εικόνα 1α), χαλκοπυρίτης ($CuFeS_2$), (εικόνα 1β) γαληνίτης (PbS), σφαλερίτης (ZnS), κιννάβαρι (HgS) κ.ά.

β) Στα *θειικά άλατα* π.χ. γύψος ($CaSO_4 \cdot 2H_2O$) (εικόνα 1γ-δ), βαρυτίτης ($BaSO_4$), χαλκάνθη ($CuSO_4 \cdot 5H_2O$), στυπτηρίες κ.ά.

γ) Σε πολλές οργανικές ενώσεις, όπως οι θειούχες πρωτεΐνες που βρίσκονται στα αυγά, τις τρίχες κ.ά.



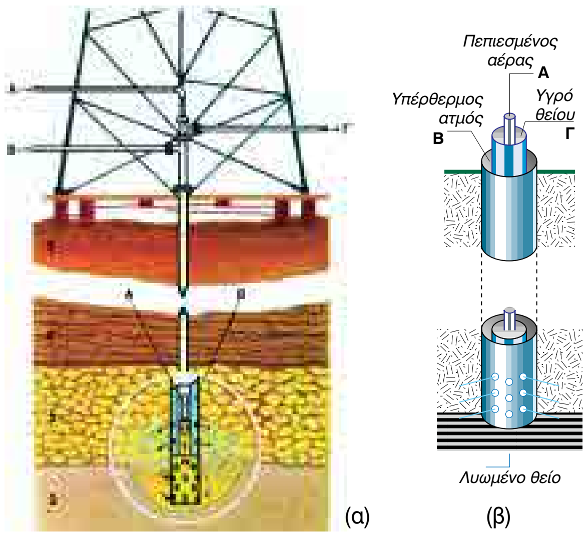
(α) (β)

(γ) (δ)

***Εικόνα 1.** α) Σιδηροπυρίτης, β) Χαλκοπυρίτης, γ) Κρύσταλλος γύψου, δ) Κρύσταλλοι γύψου ενωμένοι σχηματίζουν το «ρόδο της ερήμου», χαρακτηριστική μορφή γύψου των άνυδρων περιοχών.*

• ΕΞΑΓΩΓΗ ΘΕΙΟΥ ΑΠΟ ΤΑ ΘΕΙΟΣΤΡΩΜΑΤΑ

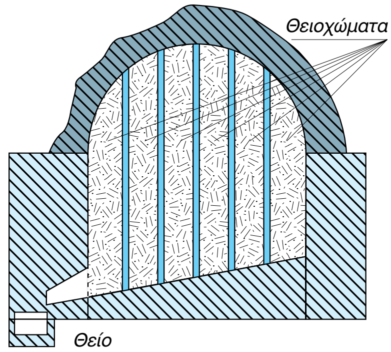
Για την εξαγωγή του θείου από τα θειοστρώματα χρησιμοποιείται η μέθοδος Φρας (Frasch). Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, ανοίγονται φρέατα μέχρι το βάθος των θειοστρωμάτων και σε κάθε φρέαρ εισάγεται ένα σύστημα από τρεις ομόκεντρους σιδερένιους σωλήνες με διαμέτρους περίπου 25 εκ., 17 εκ., 15 εκ. (εικόνα 2). Από τον εξωτερικό σωλήνα διαβιβάζεται υπέρθερμος υδρατμός θερμοκρασίας 160-170 °C με πίεση 6-7 atm, οπότε στο βάθος προκαλείται τήξη του θείου. Το λυωμένο θείο από την πίεση του ατμού και του πεπιεσμένου αέρα που διαβιβάζεται από τον κεντρικό σωλήνα, εισέρχεται στο μεσαίο σωλήνα και ανεβαίνει στην επιφάνεια με τη μορφή γαλακτώματος (νερό και ορυκτό θείο), όπου χύνεται σε μολύβδινες δεξαμενές και στερεοποιείται. Με τη μέθοδο Φρας η καθαρότητα του θείου είναι περίπου 99,5%.



Εικόνα 2. *α) Μέθοδος Φρας για την εξαγωγή του θείου. β) Οι τρείς ομόκεντροι σωλήνες στον κύκλο της εικόνας α, σε μεγέθυνση: Α) πεπιεσμένος αέρας, Β) υπέρθερμος ατμός, Γ) υγρό θείο.*

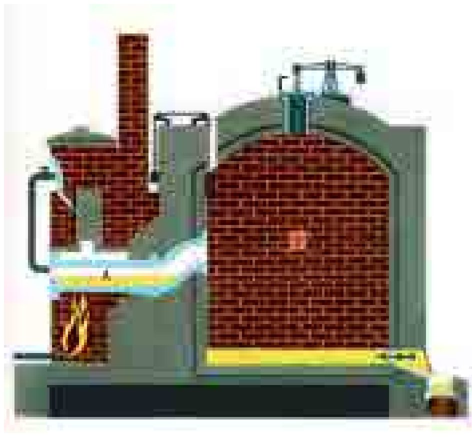
• ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΟΥ ΘΕΙΟΥ ΑΠΟ ΤΑ ΘΕΙΟΧΩΜΑΤΑ

Η μέθοδος εφαρμοζόταν από παλιά στη Σικελία. Τα θειοχώματα τοποθετούνται σε μεγάλους σωρούς κωνικού σχήματος (calcaroni) με κυκλική βάση εικόνα 3) και καλύπτονται με υπολείμματα από προηγούμενες εξαγωγές για να περιορίζεται το ρεύμα του αέρα, ενώ ανοίγονται οπές και δίοδοι για την κυκλοφορία του αέρα. Κατόπιν προκαλείται ανάφλεξη εσωτερικά, στο κάτω μέρος του σωρού, οπότε το 1/3 περίπου του θείου (απώλεια 30-40%) καίγεται προς διοξείδιο του θείου, SO_2, η δε θερμότητα που παράγεται βραδέως, προκαλεί την τήξη του υπόλοιπου θείου. Το λυωμένο θείο ρέει προς τη βάση που είναι επικλινής, για να διευκολύνεται η ροή και κατά την έξοδο συλλέγεται σε ξύλινα καλούπια, όπου στερεοποιείται σε πλάκες 50-60 kg. Η απλοϊκή αυτή μέθοδος χρησιμοποιείται ακόμη στη Σικελία παρά τη μικρή απόδοση και τις μεγάλες ποσότητες διοξειδίου του θείου, SO_2, που είναι επικίνδυνες για το περιβάλλον.



Εικόνα 3. Εξαγωγή του θείου από τα θειοχώματα.

Το παραγόμενο θείο είναι καθαρότητας 90-98%. Για την πλήρη απομάκρυνση των ακαθαρσιών που περιέχει, υποβάλλεται σε απόσταξη με απουσία αέρα, σε ειδικούς καμίνους όπως φαίνεται στην εικόνα 4.



Σχήμα 4. Κάμινος απόσταξης του θείου. *Το λυωμένο θείο χύνεται σε κύλινδρο από χυτοσίδηρο Α και θερμαίνεται σε θερμοκρασία υψηλότερη από το σ.τ. του θείου. Οι ατμοί οδηγούνται σε πλινθόκτιστο θάλαμο Β με βαλβίδα ασφαλείας Γ όπου ψύχονται. Αν η θερμοκρασία του θαλάμου Β είναι κατώτερη των 112˚C οι ατμοί συμπυκνώνονται στα τοιχώματα με τη μορφή πολύ λεπτής σκόνης, τα «άνθη θείου». Αν η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη των 112˚C οι ατμοί συμπυκνώνονται προς υγρό θείο, που συγκεντρώνεται σε ειδικά ξύλινα καλούπια και στερεοποιείται σε πλάκες.*

Σήμερα εφαρμόζεται και άλλη μέθοδος εξαγωγής θείου με την κάμινο Τζιλ, που όπως και στην προηγούμενη μέθοδο η καύση γίνεται σε βάρος του θείου, η απώλεια όμως περιορίζεται σε 20-25%.

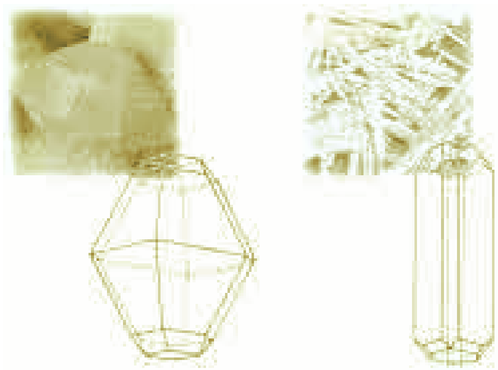
• ΦΥΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Το θείο είναι στερεό με κίτρινο χρώμα, άοσμο, άγευστο, αδιάλυτο στο νερό και τα περισσότερα οξέα, ευδιάλυτο στο διθειάνθρακα, CS_2, κακός αγωγός της θερμότητας και του ηλεκτρισμού. Είναι στοιχείο πολυατομικό, εμφανίζει το φαινόμενο της αλλοτροπίας ή του πολυμορφισμού, δηλαδή εμφανίζεται με διάφορες μορφές σ' όλες τις φυσικές καταστάσεις, που περιγράφονται παρακάτω:

Α. ΚΡΥΣΤΑΛΛΙΚΟ ΘΕΙΟ

Ως κρυσταλλικό το θείο εμφανίζεται με τις μορφές:

1. **Ρομβικό ή οκταεδρικό ή α-θείο** (εικόνα 5α). Παραλαμβάνεται καθαρό με βραδεία εξάτμιση διαλύματος θείου σε διθειάνθρακα, CS_2. Είναι κίτρινο διαλυτό σε CS_2, σ.τ. 112 °C, σταθερό κάτω από 95,5 °C, ενώ με βραδεία θέρμανση πάνω από 95,5 °C μετατρέπεται σε μονοκλινές θείο.

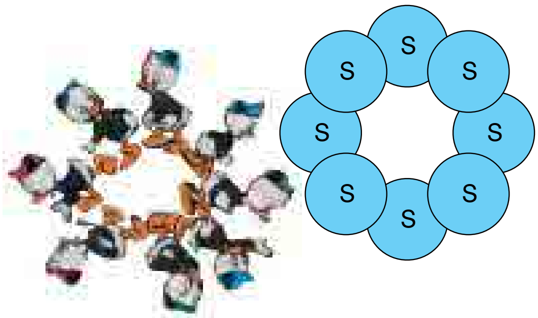


(α) (β)

Εικόνα 5. *α) Κρύσταλλος ρομβικού θείου, β) Κρύσταλλοι μονοκλινούς θείου*

2. **Μονοκλινές ή πρισματικό ή β-θείο** (εικόνα 5β). Παραλαμβάνεται με ψύξη λυωμένου θείου. Είναι διαυγές διαλυτό σε CS_2, σταθερό μεταξύ των θερμοκρασιών 95,5-119,5 °C και κατά την παραμονή μετατρέπεται σε ρομβικό θείο. Στη θερμοκρασία των 95,5 °C συνυπάρχουν οι δύο μορφές κρυσταλλικού θείου και η θερμοκρασία αυτή ονομάζεται **σημείο μετατροπής**, Το φυσικό θείο (εικόνα 6) είναι τέτοιο θείο. Σταθερότερη μορφή κρυσταλλικού θείου είναι το ρομβικό αποτελούμενο από οκτώ άτομα (εικόνα 7)

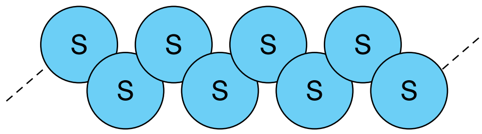
Εικόνα 6. *Φυσικό θείο*



Εικόνα 7. *Το μόριο του θείου είναι κυκλικό*

Β. ΑΜΟΡΦΟ ΘΕΙΟ

Στο άμορφο θείο τα μόρια είναι πολυατομικά και σχηματίζουν μακρές ανοιχτές αλυσίδες (εικόνα 8).



Εικόνα 8. *Ανοικτή αλυσίδα μορίων θείου*

Το άμορφο θείο εμφανίζεται με τις παρακάτω μορφές:

1. **Πλαστικό ή ελαστικό ή γ-θείο**. Παραλαμβάνεται με απόχυση λυωμένου θείου μέσα σε ψυχρό νερό (εικόνα 9). Έχει καστανοκόκκινο χρώμα, είναι αδιάλυτο σε CS_2, κατά την παραμονή χάνει την ελαστικότητά του και μετατρέπεται σε ρομβικό θείο.

Εικόνα 9.
Παρασκευή πλαστικού θείου

2. **Γάλα του θείου ή δ-θείο**. Παράγεται κατά την οξείδωση θειούχων ενώσεων π.χ. από θειούχο αμμώνιο, $(NH_4)_2S$ και νιτρικό οξύ, HNO_3. Έχει λευκό χρώμα και χρησιμοποιείται στη θεραπεία διαφόρων δερματικών παθήσεων.

3. **Κολλοειδές θείο**. Είναι κολλοειδής διασπορά του θείου μέσα σε νερό.

Γ. ΥΓΡΟ ΘΕΙΟ

Αν το θείο θερμανθεί στους 119,5 °C λυώνει και δίνει ένα λεπτόρευστο ανοιχτοκίτρινο υγρό που ονομάζεται *θείο λάμδα* (S_λ). Αύξηση της θερμοκρασίας μετατρέπει το κίτρινο υγρό σε πυκνόρευστο καστανοκόκκινο υγρό, που δεν αποχύνεται ακόμη και αν αντιστρέψουμε το δοχείο στο οποίο θερμαίνεται. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το μεγαλύτερο μέρος των δακτυλίων (εικόνα 7), διασπάται και εμφανίζονται μακρομόρια θείου με μορφή αλυσίδας (εικόνα 8), που περιέχουν μεγάλο αριθμό ατόμων θείου (μέχρι 100.000). Αν ανυψωθεί η θερμοκρασία το πυκνόρευστο υγρό γίνεται ξανά λεπτόρευστο και παραμένει έτσι μέχρι τους 446 °C, ενώ διατηρεί το σκοτεινό του χρώμα και είναι το *θείο-μι* (S_μ). Αυτό συμβαίνει επειδή σπάζουν οι μακρές αλυσίδες σε μικρότερες.

Δ. ΑΤΜΟΙ ΘΕΙΟΥ

Στους ατμούς θείου υπάρχουν μόρια με διάφορο αριθμό ατόμων (S_8, S_6, S_4, S_2). Σε χαμηλότερη θερμοκρασία επικρατεί η μορφή S_8, πάνω από 1000 °C η μορφή S_6 και πάνω από 2000 °C επικρατούν τα μονοατομικά μόρια. Με ψύξη των ατμών θείου λαμβάνονται τα «άνθη θείου». Η μορφή αυτή είναι λεπτή σκόνη αδιάλυτη στο διθειάνθρακα, CS_2 και αποτελεί μείγμα διαφόρων αλλοτροπικών μορφών.

• ΧΗΜΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Επειδή το θείο ανήκει στην $6^η$ ομάδα του περιοδικού πίνακα περιέχει 6e, οπότε τείνει ν' αποκτήσει τη δομή ευγενούς αερίου είτε με πρόσληψη 2e οπότε σχηματίζει ιοντικές ενώσεις (δρα ως οξειδωτικό) είτε με σχηματισμό ομοιοπολικών δεσμών (δρα ως αναγωγικό). Ιοντικές ενώσεις σχηματίζει μόνο με δραστικά μέταλλα (αλκάλια, αλκαλικές γαίες) και το υδρογόνο, ενώ σχηματίζει ομοιοπολικές ενώσεις παρουσία οξειδωτικών στοιχείων π.χ. οξυγόνο, χλώριο όπου εμφανίζεται συνήθως με αριθμό οξειδώσεως −2, +4, +6.

Αντιδράσεις με αμέταλλα

Αντιδρά απευθείας ή με θέρμανση μ' όλα τα αμέταλλα, εκτός του ιωδίου, I_2, του αζώτου, N_2 και των ευγενών αερίων και σχηματίζει διάφορες θειούχες ενώσεις. Απ' τις σπουδαιότερες αντιδράσεις είναι οι εξής:

$$S + O_2 \quad SO_2 \quad (1) \qquad H_2 + S \quad H_2S \quad (2)$$

$$C + 2S \quad CS_2 \quad (3)$$

Αντιδράσεις με μέταλλα

Ενώνεται με θέρμανση με τα περισσότερα μέταλλα και σχηματίζει σουλφίδια (αντίστοιχα προς τα οξείδια) π.χ.

$$Fe + FeS \quad FeS \quad (4) \qquad Zn + S \quad ZnS \quad (5)$$

Αντιδράσεις με διάφορες ενώσεις

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η οξείδωση του θείου από θερμό H_2SO_4 προς SO_2 και από πυκνό HNO_3 προς H_2SO_4 όπως:

$$S + 2H_2SO_4 \quad 3SO_2 + 2H_2O \qquad (7)$$

$$S + 6HNO_3 \quad H_2SO_4 + 6NO_2 + 2H_2O \qquad (8)$$

• ΧΡΗΣΕΙΣ

Το θείο χρησιμοποιείται:

α) Στην παρασκευή διοξειδίου του θείου, SO_2 και θειϊκού οξέος, H_2SO_4.

β) Στην παρασκευή σπίρτων, πυροτεχνημάτων και μαύρης πυρίτιδας.

γ) Στην παρασκευή σουλφιδίων, διθειάνθρακα, CS_2 και οργανικών χρωμάτων (θειοχρωμάτων).

δ) Στη θείωση του καουτσούκ (βουλκανισμός) που του προσδίδει ελαστικότητα και την παρασκευή εβονίτη (θειωμένο καουτσούκ με θείο 30%) που χρησιμοποιείται ως μονωτικό.

ε) Στη θείωση των αμπέλων και την καταπολέμηση του ωιδίου της αμπέλου.

στ) Στην Ιατρική στην παρασκευή αλοιφών για δερματικές παθήσεις, ενώ μερικά παράγωγα του θείου συνιστώνται στις χρόνιες αρθροπάθειες. ◆

Οι φιγούρες του Disney προσαρμόστηκαν στο κείμενο από τη φοιτήτρια του Χημικού Φωτεινή Κυρίτση στα πλαίσια του μαθήματος «Διδακτική της Χημείας»

Το ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ της ΔΙΑΛΥΣΗΣ

Του **Κωνσταντίνου Α. Τσίπη,** Καθηγητή Κβαντικής Χημείας του Α.Π.Θ.

Η εμπειρία μας έχει διδάξει, ότι οι ουσίες διαφέρουν πάρα πολύ ως προς τις διαλυτότητές τους σε διάφορους διαλύτες. Για παράδειγμα, όλοι γνωρίζουμε ότι το λάδι δεν αναμειγνύεται με το νερό και ότι για ν' αναπομακρύνουμε ένα λεκέ λαδιού από ένα ύφασμα χρησιμοποιούμε σαν διαλύτη βενζίνη. Αντίθετα, η ζάχαρη διαλύεται στο νερό, όχι όμως και στη βενζίνη. *Τι είναι, λοιπόν, εκείνο που μπορεί να εξηγήσει τη διαφορετική αυτή συμπεριφορά των ουσιών απέναντι σε διάφορους διαλύτες;* Η απάντηση στο ερώτημα αυτό μπορεί να δοθεί με την κατανόηση του φαινομένου της διάλυσης.

Εικόνα 1. *Διάλυση ζάχαρης σε καφέ.*

Όταν μια ουσία διαλύεται σ' ένα διαλύτη, σωματίδια της ουσίας (μόρια, άτομα, ή ιόντα) κατανέμονται ομοιόμορφα μέσα στη μάζα του διαλύτη. Με άλλα λόγια, θα λέγαμε ότι τα σωματίδια της διαλυμένης ουσίας καταλαμβάνουν θέσεις μέσα στη μάζα του διαλύτη που ανήκαν σε μόρια του διαλύτη. Όμως, *πώς, πότε και γιατί συμβαίνει αυτό;*

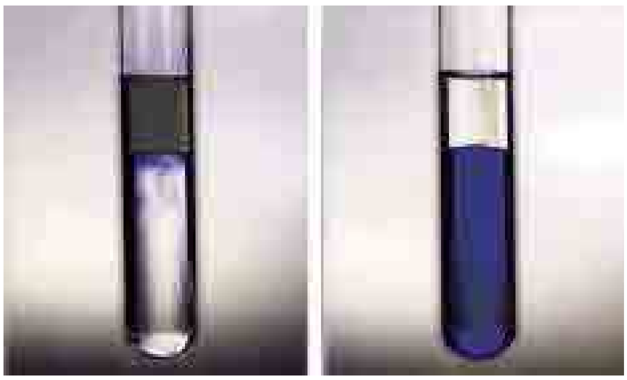
Γνωρίζουμε ότι μεταξύ των σωματιδίων μιας ουσίας υφίστανται ελκτικές δυνάμεις, που ανάλογα με τη φύση της ουσίας μπορεί να είναι ηλεκτροστατικής φύσης (ιονικές ενώσεις), τύπου διπόλου-διπόλου (πολικές ενώσεις) ή τύπου δυνάμεων van der Waals (ομοιοπολικές ενώσεις). Ανάλογα είδη δυνάμεων υφίστανται και μεταξύ των μορίων ενός διαλύτη, αλλά και μεταξύ των μορίων ενός διαλύτη και των σωματιδίων μιας ουσίας που θα έλθει σ' επαφή με το διαλύτη. Είναι φανερό, λοιπόν, ότι στο σύστημα μιας ουσίας και ενός διαλύτη θα έχουμε τους εξής συνδυασμούς διαμοριακών ελκτικών δυνάμεων:

1) δυνάμεις ουσίας - ουσίας,
2) δυνάμεις διαλύτη - διαλύτη,
3) δυνάμεις ουσίας - διαλύτη.

Όταν τα τρία αυτά είδη των δυνάμεων (αλληλεπιδράσεων) είναι συγκρίσιμου μεγέθους, τότε η ουσία διαλύεται στο διαλύτη, διαφορετικά όχι. Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα ότι για να διαλυθεί μια ουσία σ' ένα διαλύτη θα πρέπει οι δυνάμεις ουσίας-διαλύτη να είναι συγκρίσιμου μεγέθους των δυνάμεων ουσίας-ουσίας και διαλύτη-διαλύτη. Με άλλα λόγια, θα πρέπει η ουσία να έχει κάποια «συγγένεια» με το διαλύτη. Αυτό είχε διαπιστωθεί ακόμη πολύ παλαιά από τους Ρωμαίους οι οποίοι έλεγαν χαρακτηριστικά τη φράση: *όμοια ομοίοις διαλύονται (similia similibus solvuntur)*. Και η ομοιότητα αυτή δεν είναι τίποτα άλλο από την ομοιότητα ως προς τις δυνάμεις που αναφέραμε. Στη θέση της φράσης των Ρωμαίων εμείς σήμερα λέμε, ότι: *πολικά μόρια διαλύονται σε πολικούς διαλύτες και μη πολικά μόρια διαλύονται σε μη πολικούς διαλύτες.*

Για την καλύτερη κατανόηση του φαινομένου της διάλυσης, ας δούμε ορισμένα παραδείγματα.

Ο τετραχλωράνθρακας, CCl_4, είναι μια μη πολική υγρή ουσία. Από την άλλη μεριά, το νερό, H_2O, είναι μια πολική υγρή ουσία. Ποτέ οι δύο αυτές ουσίες δεν μπορούν να αναμειχθούν μεταξύ τους. Με άλλα λόγια, ο τετραχλωράνθρακας δεν διαλύεται στο νερό. Αυτό οφείλεται στο γεγονός, ότι οι δυνάμεις νερού - νερού (γέφυρα υδρογόνου) είναι πολύ ισχυρότερες από τις



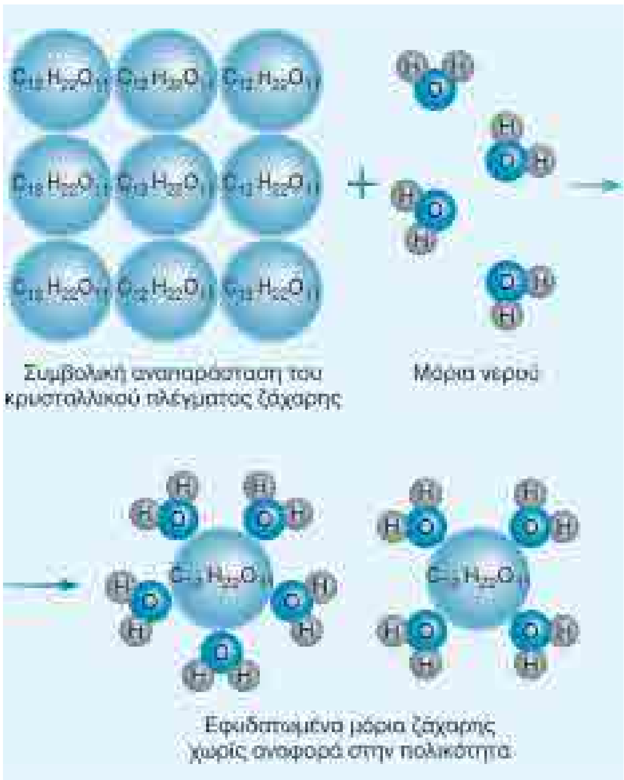
(α) (β)

Εικόνα 2. *(α) Το νερό (πολικό μόριο) δεν διαλύεται στον τετραχλωράνθρακα (μη πολικό μόριο).*
(β) Το ιώδιο (μη πολικό μόριο) διαλύεται εύκολα στον τετραχλωράνθρακα. Στον πρώτο δοκιμαστικό σωλήνα η στιβάδα του νερού (πάνω στιβάδα) περιέχει διαλυμένο ιώδιο, γι' αυτό και το καστανό χρώμα της στιβάδας. Ανακατεύοντας ισχυρά το περιεχόμενο του δοκιμαστικού σωλήνα, το ιώδιο περνάει στη στιβάδα του τετραχλωράνθρακα εξαιτίας της μεγαλύτερης διαλυτότητάς του (δοκιμαστικός σωλήνας β).

δυνάμεις τετραχλωράνθρακα - νερού και τετραχλωράνθρακα - τετραχλωράνθρακα (δυνάμεις van der Waals). Έτσι, τα μόρια του CCl_4 δεν μπορούν να καταλάβουν θέσεις που καταλαμβάνουν τα μόρια του νερού, γι' αυτό και τα δύο υγρά δεν αναμειγνύονται.

Τελείως διαφορετική είναι η συμπεριφορά για το σύστημα CCl_4 και I_2. Το ιώδιο είναι μια ομοιοπολική στερεή ένωση, που διαλύεται εύκολα στον τετραχλωράνθρακα, όχι όμως και στο νερό. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι δυνάμεις ιωδίου - τετραχλωράνθρακα είναι συγκρίσιμου μεγέθους των δυνάμεων ιωδίου - ιωδίου και τετραχλωράνθρακα-τετραχλωράνθρακα, με αποτέλεσμα το ιώδιο μπορεί να καταλάβει θέσεις που ανήκουν σε μόρια τετραχλωράνθρακα. Εύκολα μπορείτε να εξηγήσετε γιατί το ιώδιο δεν διαλύεται στο νερό.

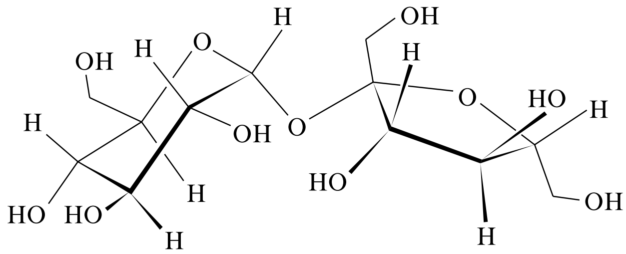
Έστω, τώρα, η διάλυση της ζάχαρης στο νερό. Η ζάχαρη που έχει το μοριακό τύπο $C_{12}H_{22}O_{11}$ είναι ένα πολικό στερεό. Όταν η ζάχαρη έλθει σ' επαφή με το νερό που είναι ένας πολικός διαλύτης, τα μόρια του νερού προσανατολίζονται πάνω στην επιφάνεια της ζάχαρης και αναπτύσουν πάνω στα μόρια της ζάχαρης δυνάμεις τύπου διπόλου - διπόλου. Οι δυνάμεις αυτές που είναι συγκρίσιμου μεγέθους των δυνάμεων νερού - νερού και ζάχαρης - ζάχαρης έχουν σαν αποτέλεσμα ν' αποσπούν μόρια ζάχαρης από την επιφάνεια του στερεού και να τα μεταφέρουν μέσα στη μάζα του διαλύματος. Η διεργασία αυτή που δίνεται σχηματικά ως εξής,



μπορεί να παρασταθεί με την εξίσωση:

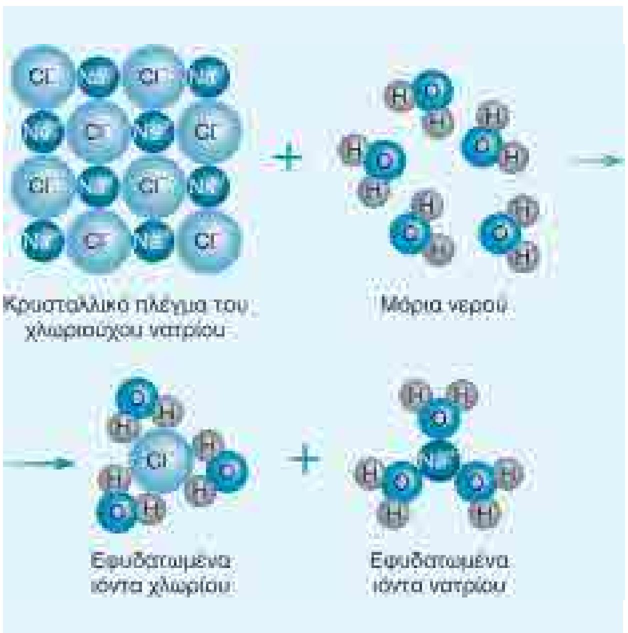
$$C_{12}H_{22}O_{11}(s) + xH_2O \qquad C_{12}H_{22}O_{11}(aq)$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι τα μόρια της ζάχαρης μέσα στο διάλυμα δεν είναι μόνα τους, αλλά περιβάλλονται από ορισμένο αριθμό μορίων νερού. Με άλλα λόγια, τα μόρια της ζάχαρης είναι **εφυδατωμένα (aq)**. Το φαινόμενο αυτό είναι γενικότερο και αναφέρεται ως **επιδιαλύτωση**. Έτσι, τα σωματίδια μιας διαλυμένης ουσίας σ' ένα διαλύτη είναι πάντοτε επιδιαλυτωμένα με ορισμένο αριθμό μορίων διαλύτη. Μάλιστα, όταν ο διαλύτης είναι το νερό τα σωματίδια της ουσίας λέμε ότι είναι εφυδατωμένα.



Σχήμα 4. Συντακτικός τύπος του μορίου της ζάχαρης. Η ζάχαρη ανήκει στους υδατάνθρακες.

Το νερό είναι ένας από τους πιο κοινούς πολικούς διαλύτες, με αποτέλεσμα να διαλύει ένα σημαντικό αριθμό πολικών ενώσεων. Μεταξύ των ενώσεων αυτών είναι και οι ιονικές ενώσεις, όπως είναι π.χ. το NaCl κ.ά. Η διάλυση του NaCl στο νερό δίνεται σχηματικά ως εξής,



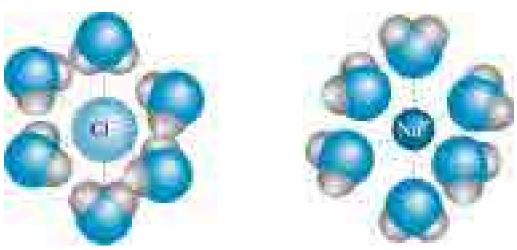
και μπορεί να παρασταθεί με την εξίσωση:

$$NaCl(s) + xH_2O \qquad Na^{+}(aq) + Cl^{-}(aq)$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι η επαφή του NaCl με το νερό έχει σαν αποτέλεσμα τον προσανατολισμό των μορίων του νερού πάνω στην επιφάνεια του στερεού NaCl (εικόνα 5) κατά τέτοιον τρόπο ώστε τα κατιόντα Na^+ να έλκονται από τους αρνητικούς πόλους των μορίων του νερού, ενώ τα ανιόντα Cl^- από τους

Εικόνα 5. Σχηματική παράσταση της διεργασίας της διάλυσης του NaCl στο νερό που περιλαμβάνει και την εφυδάτωση των ιόντων Na^+ και Cl^-.

θετικούς πόλους των μορίων του νερού. Αποτέλεσμα αυτών των έλξεων είναι ο διαχωρισμός των ιόντων Na^+ και Cl^-, τα οποία περιβαλλόμενα από ορισμένο αριθμό μορίων νερού εισέρχονται στο διάλυμα. Τα διαλύματα αυτού του τύπου είναι τα γνωστά ιονικά ή ηλεκτρολυτικά διαλύματα κι' αυτό γιατί τα σωματίδια της διαλυμένης ουσίας είναι επιδιαλυτωμένα ιόντα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι τα εφυδατωμένα ιόντα Na^+(aq) και Cl^-(aq), τα οποία έχουν τη δομή που δίνεται στην εικόνα 6.



Εικόνα 6. Δομή των εφυδατωμένων ιόντων Na^+ και Cl^-.

Σημειώστε, ότι όλα τα ιόντα σε υδατικά διαλύματα είναι εφυδατωμένα. Μάλιστα δε, αυτό αποτελεί και την αιτία που πολλές από τις ιονικές ενώσεις, όταν κρυσταλλώνονται από υδατικά διαλύματα, φέρουν στην τυπική τους μονάδα και ορισμένο αριθμό μορίων νερού, όταν βρίσκονται σε στερεή κατάσταση. Στην περίπτωση αυτή αναφερόμαστε σε ένυδρες ουσίες. Τέτοιες ένυδρες ουσίες είναι πολλά άλατα, όπως π.χ. $FeCl_3 \cdot 6H_2O$, $BeCl_2 \cdot 4H_2O$, $NiSO_4 \cdot 7H_2O$, $CuSO_4 \cdot 5H_2O$, $BaCl_2 \cdot 2H_2O$ κ.ά. Σημειώστε τον τρόπο που παριστάνουμε τα μόρια του νερού στις ένυδρες ουσίες. Γράφουμε τον αριθμό τους μετά από τον τύπο της ουσίας, παρεμβάλλοντας μεταξύ τους μια τελεία. Ως επί το πλείστον τα μόρια του νερού στις ένυδρες ενώσεις είναι χαλαρά συνδεμένα στο κρυσταλλικό πλέγμα (συνήθως με δυνάμεις του τύπου διπόλου - διπόλου), οπότε και απομακρύνονται εύκολα με θέρμανση για να προκύψει έτσι η άνυδρη ουσία. Όμως, υπάρχουν και πολλές περιπτώσεις, όπου το νερό βρίσκεται ενωμένο ισχυρά με το κατιόν (με ομοιοπολικό δεσμό συναρμογής), οπότε και δεν είναι δυνατό ν' απομακρυνθεί με θέρμανση. Η κατηγορία των ενώσεων αυτών αποτελεί τα γνωστά ύδατο- σύμπλοκα, όπου το νερό αποτελεί τον υποκαταστάτη δότη ζεύγους ηλεκτρονίων προς το κεντρικό μεταλλικό ιόν. Π.χ. το ένυδρο άλας $FeCl_3 \cdot 6H_2O$ αντιστοιχεί στον τύπο $[Fe(OH_2)_6]Cl_3$, όπου, όπως βλέπουμε, υπάρχουν τα κατιόντα $[Fe(OH_2)_6]^{3+}$ και τα ανιόντα Cl^- σε τέτοια αναλογία, ώστε η σύμπλοκη ένωση να είναι ηλεκτρικώς ουδέτερη.

Πέραν από τις ιονικές ενώσεις που κατά τη διάλυσή τους στο νερό διαχωρίζονται σε ιόντα (κατιόντα και ανιόντα), υπάρχουν και πολλές άλλες ισχυρά πολικές ενώσεις που συμπεριφέρονται κατά τον ίδιο τρόπο. Ένα παράδειγμα αποτελεί το υδροχλώριο, HCl, που είναι μια ισχυρά πολική ουσία. Όταν το υδροχλώριο διαλυθεί στο νερό, τότε δημιουργούνται εφυδατωμένα ιόντα υδρογόνου και εφυδατωμένα ιόντα χλωρίου.

Έτσι, έχουμε την εξίσωση

$$HCl(g) + xH_2O \qquad H^+(aq) + Cl^-(aq)$$

όπου το H^+(aq) έχει κατά κανόνα τη μορφή $H^+ \cdot H_2O$ ή $\mathbf{H_3O^+}$, που είναι γνωστή ως **υδροξώνιο** και το Cl^-(aq) έχει τη μορφή $Cl^- \cdot 6H_2O$.

Είναι φανερό ότι το HCl(g) δεν περιέχει ιόντα H^+ και Cl^- στην αέρια κατάσταση, όμως διαχωρίζεται στα ιόντα αυτά, όταν διαλυθεί στο νερό. Γι' αυτό και το HCl(g) διαλυμένο στο νερό έχει ιδιότητες οξέος, ενώ στην αέριά του κατάσταση όχι.

Εσεις ρωτάτε — Εμεις προσπαθούμε ν' απαντήσουμε

Μπορεί μια συνάρτηση f να είναι «ένα προς ένα» και να μην είναι γνησίως μονότονη;

Απαντάει ο Γ. Παντελίδης, Καθηγητής Ε.Μ. Πολυτεχνείου

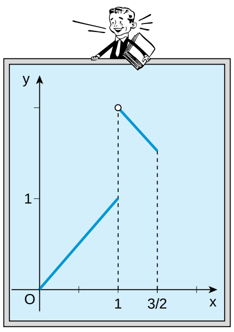
Στην ουσία ζητάμε να μάθουμε αν ισχύει το αντίστροφο της προτάσεως

- **Πρόταση:** *Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της, τότε είναι «ένα προς ένα».*

(βλ. Ανάλυση Γ' Λυκείου).

Το αντίστροφο της προτάσεως δεν ισχύει πάντοτε, όπως διαπιστώνεται από τη συνάρτηση $\frac{1}{x}$, της οποίας όμως το πεδίο ορισμού είναι δύο διαστήματα ξένα μεταξύ τους. Δεν ισχύει όμως ακόμη και όταν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι διάστημα. Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 3-x, & 1 < x \le \frac{3}{2} \end{cases}$$



είναι «ένα προς ένα» χωρίς να είναι γνησίως μονότομη στο διάστημα $\left[0, \frac{3}{2}\right]$.

Παρατηρείστε, ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο

$x = 1$.

Το αντίστροφο της προτάσεως ισχύει στην περίπτωση που η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα όπου είναι «ένα προς ένα», δηλαδή ισχύει:

- **Πρόταση:** *Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και «ένα προς ένα» σ' ένα διάστημα I, τότε είναι γνησίως μονότονη.*

Απόδειξη: Για να μην είναι η συνάρτηση f γνησίως μονότονη θα πρέπει να υπάρχουν τρία σημεία

(*) $\quad x_1, x_2, x_3 \quad I,\ \text{με}\ x_1 < x_2 < x_3$ και

$$f(x_1) \ge f(x_2) \ \& \ f(x_3) \ge f(x_2)$$

ή

(**) $\quad x_1, x_2, x_3 \quad I,\ \text{με}\ x_1 < x_2 < x_3$ και

$$f(x_1) \le f(x_2) \ \& \ f(x_3) \le f(x_2).$$

Υποθέτουμε ότι συντρέχει η (*).

Αν μία από τις ανισότητες

$$f(x_1) \ge f(x_2), \quad f(x_3) \ge f(x_2)$$

είναι ισότητα, τότε προφανώς η f δεν είναι «ένα προς ένα», αφού σε δύο διαφορετικά x_i, $i=1, 2, 3$, η συνάρτηση έχει την ίδια τιμή. Ισχύουν λοιπόν οι ανισότητες

$$f(x_1) > f(x_2), \quad f(x_3) > f(x_2).$$

Στην περίπτωση αυτή υπάρχει ένας αριθμός k τέτοιος, ώστε

$$f(x_1) > k > f(x_2) \quad \text{και} \quad f(x_3) > k > f(x_2).$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχουν

$$\xi_1 \quad [x_1, x_2] \quad \text{και} \quad \xi_2 \quad [x_2, x_3]$$

(οπότε ξ_1 π ξ_2) για τα οποία ισχύουν

$$f(\xi_1) = k \quad \text{και} \quad f(\xi_2) = k.$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού η συνάρτηση f είναι από την υπόθεση «ένα προς ένα».

ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ της ΠΟΙΗΣΗΣ

Της **Π. Αλατζόγλου,** Φιλολόγου

Όλοι μας ξέρουμε πόσο επίπονη δουλειά είναι η διδασκαλία της λογοτεχνίας σε παιδιά που τα ενδιαφέροντά τους κάθε άλλο παρά λογοτεχνικά είναι. Στην προσπάθειά μου να βρω κάποιους τρόπους, ώστε να μην επαναλαμβάνομαι κάθε φορά μέσα στην τάξη συμβάλλοντας έτσι στη γενικότερη απροθυμία των μαθητών μου να ανακαλύψουν μαζί μου τη μαγεία του λογοτεχνικού κειμένου, θέλησα να ασχοληθώ με το θέμα «μορφή του ποιητικού λόγου». Όχι, γιατί θεωρώ ότι αυτός είναι ο καλύτερος τρόπος, για να προσεγγίσω ένα ποιητικό κείμενο, αλλά γιατί χρειάζομαι, χρειαζόμαστε εναλλακτικές λύσεις, ώστε το αγαθό της γνώσης και της ευχαρίστησης που προκύπτει από αυτήν να φτάσει σε όσο γίνεται περισσότερους μαθητές.

Νομίζω, λοιπόν, ότι, αν μια φορά μιλήσουμε για το «εργαστήρι του ποιητή», αν άλλη φορά επιμείνουμε στη σχέση μορφής-περιεχομένου του ποιήματος, αν άλλη φορά αναφερθούμε στη σχέση ποίησης και μουσικής ή αν κάνουμε συγκριτικές αναγνώσεις περισσότερων κειμένων κ.ο.κ. θα καταφέρουμε να γίνεται το μάθημα της λογοτεχνίας ενδιαφέρον για τους μαθητές μας και ίσως πετύχουμε να τους πείσουμε ότι όντως αξίζει η ενασχόληση με την τέχνη της ποίησης, που παραμένει το πιο δύσκολα προσπελάσιμο είδος της λογοτεχνίας. Ιδιαίτερα, μάλιστα, η λυρική ποίηση, που είναι το καθαρότερο είδος ποίησης, δεν αποκαλύπτει εύκολα τα βαθύτερα νοήματά της.

Και σίγουρα αξίζει η ενασχόληση των νέων ανθρώπων με την ποίηση, γιατί αυτή ξυπνάει μέσα τους, όπως και σε κάθε αναγνώστη άλλωστε, μια συναισθηματική αντίδραση, μιαν εμπειρία αισθητικού περιεχομένου και εντέλει στοχασμό, σκέψη.

Συνήθως, η ερμηνεία ενός ποιήματος μέσα στην τάξη στοχεύει στη γνωστική του κυρίως προσέγγιση. Αυτή η προσπάθεια για την ανεύρεση του κρυμμένου νοήματος του ποιητικού κειμένου βάζει σε δευτερεύουσα μοίρα και θεωρεί ήσσονος σημασίας την προσπάθεια να μάθει ο μαθητής και μελλοντικός αναγνώστης να εκτιμάει την «τέχνη της κάλυψης», μέσω της οποίας έφθασε η όποια αλήθεια του ποιητή στο βασίλειο της τέχνης. Αλλά και πώς θα μπορούσε να είναι αλλιώς, αφού σύνηθες είναι να μην είναι ο δάσκαλος της λογοτεχνίας και λογοτέχνης ο ίδιος. Στα πανεπιστήμιά μας διδασκόμαστε στην ουσία ιστορία της λογοτεχνίας· όχι μόνο πώς φτιάχνεται ένα ποίημα δεν μαθαίνουμε, αλλά ούτε καν σωστή ανάγνωσή του, απαγγελία, που είναι το πρώτο ερέθισμα, για να υπάρξει ενδιαφέρον στη συνέχεια και από τους μαθητές μας.

Με δεδομένο ότι το συγκεκριμένο κάθε φορά κείμενο με το οποίο ασχολούμαστε μας αποκαλύπτει μιαν αλήθεια όχι μοναδική, με την έννοια ότι το ίδιο το μήνυμα έχει μια πανανθρώπινη διάσταση και ότι έχει γραφεί ή ειπωθεί και από άλλους άλλοτε, εκείνο που καθιστά ένα ποίημα μοναδικό είναι η μορφή του, η γλωσσική του διατύπωση. Ένα παράδειγμα πάνω σ' αυτό είναι το τρίτο στάσιμο στην «Αντιγόνη» του Σοφοκλή, το περίφημο «ἔρως ἀνίκατε μάχαν», που είναι ένας ύμνος στον έρωτα. Είναι άραγε το θέμα του που το έκανε ένα από τα αριστουργήματα της παγκόσμιας λογοτεχνίας; Σίγουρα όχι, γιατί σε πολλά κείμενα έχει υμνηθεί ο έρωτας. Τι το κάνει, λοιπόν, να ξεχωρίζει, αν όχι η γλωσσική του διατύπωση, η ιδιαίτερη μορφή που του έδωσε ο ποιητής;

Θα ήταν σημαντικό να δούμε τι μπορούμε να κάνουμε, με ποιους τρόπους θα μπορούσαμε να στρέψουμε τους μαθητές μας στο «φτιάξιμο» του κειμένου, να τους βοηθήσουμε να πλησιάσουν το ποίημα ως δημιουργία και να βρουν την ιδιαίτερη γοητεία του, το στοιχείο εκείνο που του επέτρεψε να επιζήσει, ενώ πολλά άλλα ξεχάστηκαν. Ας προσπαθήσουμε μαζί τους να μπούμε στο εργαστήρι του ποιητή και να τον δούμε σαν δημιουργό. Έναν δημιουργό που ζωντανεύει ιδέες και συναισθήματα με τη βοήθεια λέξεων που αποτελούν μορφικά σημαίνοντα και συστοιχούν με ψυχικά σημαινόμενα αποτελώντας μαζί τους μιαν άρρηκτη ενότητα. Μ' άλλα λόγια μιλάμε για μορφή και περιεχόμενο και για το ότι αυτά είναι αχώριστα. Έτσι, κάθε αλλαγή στη μορφή θα επηρεάσει το περιεχόμενο και αντίθετα. Για παράδειγμα στο Α σχεδίασμα των Ελεύθερων Πολιορκημένων του Δ. Σολωμού μία στροφική μονάδα αποτελεί συγχρόνως και μία νοηματική ενότητα (εικόνα):

«Παράμερα στέκει
ο άντρας και κλαίει
αργά το τουφέκι
σηκώνει και λέει:
Σε τούτο το χέρι
τι κάνεις εσύ;
Ο εχθρός μου το ξέρει
πως μου είσαι βαρύ».

Άλλη στροφική μονάδα είναι και μια άλλη νοηματική ενότητα:

«Της μάνας ω λαύρα!
Τα τέκνα τριγύρου
Φθαρμένα και μαύρα
Σαν ίσκιους ονείρου
Λαλεί το πουλάκι
Στου πόνου τη γη
Και βρίσκει σπυράκι
Και μάνα φθονεί».

Κάθε αλλαγή σ' αυτή τη μορφή του κειμένου θα επιφέρει αναπόφευκτα αλλοίωση και στο περιεχόμενό του. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγει κανείς, αν διαβάσει και το ποίημα του Μ. Αναγνωστάκη, Ποιήματα που μας διάβασε ένα βράδυ ο λοχίας Otto V... (ΚΝΛ Γ Γυμνασίου), όπου μια οκτάστιχη πρώτη στροφική ενότητα ακολουθείται από μια δίστιχη δεύτερη, λόγω διαφορετικής συναισθηματικής φόρτισης των δύο στροφικών μονάδων.

Επίσης το ποίημα του Μίλτου Σαχτούρη. Η αποκριά (ΚΝΛ Β Λυκείου), όπου η κάθε στροφική ενότητα έχει αυτοτελές νόημα.

Ας μιλήσουμε, λοιπόν, για τη μορφή του ποιητικού κειμένου και τι μπορούμε να κάνουμε μ' αυτήν σαν δάσκαλοι.

Ένα βασικότατο στοιχείο στη γραφή ενός ποιήματος είναι η **επανάληψη λέξεων**. Από μόνη της η επανάληψη λέξεων θα οδηγούσε μάλλον σ' ένα μονότονο και πληκτικό δημιούργημα, αρκεί να σκεφθούμε έναν στίχο του τύπου

η αυγή, η αυγή, η αυγή, η αυγή, η αυγή.

Ένα κείμενο γίνεται ποιητικό, όταν σπάει τη μονοτονία της επανάληψης και δεν επαναλαμβάνει τα στοιχεία του αυτούσια, αλλά με κάποια **ποικιλία**. Η εναλλαγή επανάληψης και ποικιλίας είναι μια βασική αρχή για τη δημιουργία ποιητικού κειμένου και τούτο γιατί, ενώ στην καθημερινή επικοινωνία η γλώσσα προχωρεί ομαλά, σύμφωνα με τη διαδοχή χρονικών διαστημάτων και τα μηνύματα αποκρυπτογραφούνται μία μόνο φορά, στην ποίηση αρκετά από τα στοιχεία της επιστρέφουν συνεχώς στο κείμενο και μας αναγκάζουν να κάνουμε όλο και νέες συσχετίσεις που τυχόν λάνθαναν σε προηγούμενη ανάγνωση. Ένα καλό παράδειγμα αυτού είναι το κείμενο της Μελισσάνθης, Στη νύχτα που έρχεται (από τα ΚΝΛ της Β Λυκείου)

Ξεκινάμε ανάλαφροι καθώς η γύρη
που ταξιδεύει στον άνεμο
Γρήγορα πέφτουμε στο χώμα
***ρίχνουμε** ρίζες, **ρίχνουμε** κλαδιά*
γινόμαστε δέντρα που διψούν ουρανό
κι όλο αρπαζόμαστε με δύναμη απ' τη γη
*Μας βρίσκουν **τ' ατέλειωτα καλοκαίρια***
***τα μεγάλα κάματα**. Οι άνεμοι, τα νερά*
παίρνουν τα φύλλα μας. Αργότερα
*πλακώνουν οι **βαριές συννεφιές***
*μας τυραννούν **οι χειμώνες** κι οι **καταιγίδες***
*Μα πάντα **αντιστεκόμαστε, ορθωνόμαστε***
*πάντα **ντυνόμαστε με νέο** φύλλωμα*
Ωσότου, φτάνει ένας άνεμος παράξενος
–κανείς δεν ξέρει πότε κι από πού ξακινά–
μας ρίχνει κάτω μ' όλες τις ρίζες στον αέρα.
Για λίγο ακόμη μες στη φυλλωσιά μας
κάθεται κρυμμένο –να πει μια τρίλλια του
στη νύχτα που έρχεται– ένα πουλί.

Ακόμη καλύτερο παράδειγμα για το στοιχείο της επανάληψης είναι τα δημοτικά τραγούδια, όπου ο μηχανισμός αυτός συντελεί στην κλιμάκωση της έντασης, όπως συμβαίνει για παράδειγμα στο κείμενο [Ήλιε μου και τρισήλιε μου] πάλι από τα ΚΝΛ Α Λυκείου, που οδηγεί στον τελευταίο στίχο στο φιλοσοφικό συμπέρασμα πάνω στο γεγονός του θανάτου.

Ένα δεύτερο μορφικό στοιχείο της ποίησης που συνδέεται στενά με το προηγούμενο, γιατί ενέχει το χαρακτηριστικό της επανάληψης, είναι η ομοιοκαταληξία. Και τούτο, γιατί η ρίμα μας ξαναγυρίζει στον προηγούμενο στίχο, μας κάνει να τον θυμηθούμε, κάνει όλους τους στίχους που εκφράζουν μιαν άποψη να κρατιούνται μαζί. Η ανακάλυψη και η χρησιμοποίηση της ομοιοκαταληξίας απορρέει από αυτήν την αναγκαιότητα της επανάληψης με στόχο την επίτευξη της επιστροφής και της διασύνδεσης του συνόλου, της υπογράμμισης της ακεραιότητας της δομής του ποιήματος.

Στη νεότερη κυρίως ποίηση μπορούμε να τονίσουμε το περίεργο πάντρεμα λέξεων που δημιουργεί εικόνες παράτολμες. Έχω στο νου μου τους στίχους του Γ. Ρίτσου.

... Κάθε νύχτα απ' το ξερό πηγάδι βγαίνουν τ' αγάλματα
προσεχτικά κι ανεβαίνουν στα δένδρα...

από το κείμενό του «Ο τόπος μας» (ΚΝΛ Α Λυκείου). Άλλο σχετικό παράδειγμα ο στίχος

Τινάζοντας ένα μαντίλι φύλλων από δροσερή φωτιά...

από το κείμενο του Οδ. Ελύτη, Η τρελή ροδιά (από το ίδιο σχολικό βιβλίο).

Για να δείξουμε στους μαθητές μας την αξία των λέξεων και του ρυθμού σ' ένα ποίημα, μπορούμε ν' αλλάξουμε κάποιες λέξεις στο κείμενο που διδάσκουμε. Έτσι, ποιο θα είναι το αποτέλεσμα, αν στο στίχο του Ρίτσου

Μικρό πουλί τριανταφυλλί, δεμένο με κλωστίτσα

(από τα «Τρία Λιανοτράγουδα», ΚΝΛ Α Γυμνασίου) αντικαταστήσουμε τη λέξη **τριανταφυλλί** με τη λέξη **κόκκινο** ή αν στο στίχο του Ελύτη

Κείνοι που επράξαν το κακό –τους πήρε μαύρο σύγνεφο

(από το «Άσμα ηρωϊκό και πένθιμο για το χαμένο ανθυπολοχαγό της Αλβανίας– ΚΝΛ Α Γυμνασίου) αντικαθιστούσαμε το **σύγνεφο** με την αναμφίβολα πιο ποιητική λέξη **νεφέλη**;

Βλέπουμε πως και στις δύο περιπτώσεις η επέμβασή μας καταστρέφει το ρυθμό, τη μουσικότητα του κειμένου.

Ένα άλλο σημείο στο οποίο μπορούμε να σταθούμε είναι η στίξη. Στη μοντέρνα ποίηση πολύ συχνός είναι άστικτος ή ο επιφωνηματικός λόγος, όπως για παράδειγμα στο κείμενο του Ν. Εγγονόπουλου, ΝΕΑ ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΘΑΝΑΤΟΥ... (ΚΝΛ Α Λυκείου), όπου τα μοναδικά σημεία στίξης είναι μια άνω-κάτω τελεία και ένα θαυμαστικό. Ορισμένοι ποιητές έχουν ιδιαίτερη αδυναμία σε ορισμένο ή ορισμένα είδη στίξης, όπως ο Καβάφης χρησιμοποιεί συχνά τις παύλες, τις παρενθέσεις και τα κόμματα, ο Βάρναλης και ο Παλαμάς το θαυμαστικό, ο Καββαδίας τα αποσιωπητικά, ο Ελύτης ουσιαστικά καταλύει τη στίξη στοχεύοντας στο να γίνει η μονόσημη ανάγνωση ελεύθερη και γι' αυτό πολύσημη. Ένα ενδιαφέρον παράδειγμα για τη λειτουργία της στίξης παίρνω από το βιβλίο του Ν. Παπασταϊκούδη, Κειμενοδιφική Ανάλυση, όπου ο συγγραφέας παραθέτει την «Άρνηση» του Σεφέρη και σχολιάζει τα σημεία στίξης.

Το κείμενο:

Στο περιγιάλι το κρυφό
κι άσπρο σαν περιστέρι
διψάσαμε το μεσημέρι·
μα το νερό γλυφό.

Πάνω στην άμμο την ξανθή
γράψαμε τ' όνομά της·
ωραία που φύσηξεν ο μπάτης
και σβήστηκε η γραφή.

Με τι καρδιά, με τι πνοή,
τι πόθους και τι πάθος
πήραμε τη ζωή μας· λάθος!
κι αλλάξαμε ζωή.

Όπως βλέπουμε τα σημεία στίξης είναι η τελεία, η άνω τελεία, το κόμμα και το θαυμαστικό. Οποιαδήποτε αντικατάστασή τους, της άνω τελείας, για παράδειγμα, με κόμμα θα επηρέαζε τη μουσική ανάγνωση του κειμένου, ενώ στην τρίτη στροφή η άνω τελεία λειτουργεί καθοριστικά ως προς το περιεχόμενο που εκφράζεται μονολεκτικά με την επόμενη λέξη: λάθος

Επίσης, στο κείμενο του Α. Εμπειρίκου,

Η ποίησις είναι ανάπτυξι στίλβοντος ποδηλάτου

(ΚΝΛ Α Λυκείου) το μοναδικό σημείο στίξης είναι η κάτω τελεία. Αυτό το στοιχείο σύνθεσης δίνει την εντύπωση, ότι ο ποιητής εκφράζει κάτι το οριστικό και κυρίως κατασταλαγμένο και που μαρτυρά βεβαιότητα και σιγουριά στις απόψεις του.

Ενδιαφέρουσα επισήμανση είναι και εκείνη που έχει να κάνει με τις παρηχήσεις φθόγγων στην ποίηση. Η επανάληψη ενός φθόγγου ή συμπλέγματος φθόγγων στο στίχο οδηγεί σ' ένα ορισμένο αισθητικό αποτέλεσμα, χωρίς, βέβαια, να υπάρχουν κάποιες αντικειμενικές και μόνιμες ιδιότητες των φθόγγων που να τους φορτίζουν με συγκεκριμένο περιεχόμενο. Και μόνο το γεγονός ότι μ' αυτόν τον τρόπο αποκλίνει ο ποιητής από τη γλωσσική νόρμα συντελεί στο να υπάρχει κλιμάκωση της ποιητικότητας του κειμένου. Παραδείγματα παρήχησης: στην τρίτη στροφή της «Άρνησης» του Σεφέρη έχουμε παρήχηση του φθόγγου –θ– (πόθους-πάθος-λάθος), ενώ σ' όλο το ποίημα επικρατεί το φωνήεν –α–. Στο κείμενο του Α. Εμπειρίκου, Η ποίησις είναι ανάπτυξι στίλβοντος ποδηλάτου (ΚΝΛ Α Λυκείου) οι παρηχήσεις των φθόγγων –λ– και –τ–, που εμφανίζονται ο καθένας από οκτώ φορές, δημιουργούν ένα ευχάριστο αισθητικό - μουσικό αποτέλεσμα.

Η λειτουργία του ειδικού λεξιλογίου στην ποίηση είναι άλλο ένα σημείο, όπου μπορούμε να σταματήσουμε. Υπάρχουν στα βιβλία γυμνασίου-λυκείου κείμενα, όπως για παράδειγμα το «Περιηγητές στη Λειτουργία» του Τ.Κ. Παπατσώνη (ΚΝΛ Α Λυκείου) ή το «Πούσι» του Ν. Καββαδία (ΚΝΛ Β Λυκείου), στα οποία η συζήτηση για το ειδικό λεξιλόγιο και μόνο που χρησιμοποιεί ο ποιητής (π.χ. στις πρωινές Λειτουργίες, κράταγε τις Ώρες της, τραβούσε τον Κανόνα και πούσι, τιμονιέρα, σαλαμάστρα κ.λπ. αντίστοιχα) μπορεί να καλύψει ολόκληρη διδακτική ώρα.

Το γεγονός ακόμη ότι σε κάποια ποιητικά κείμενα πλεονάζουν ή και απουσιάζουν κάποιες γραμματικές κατηγορίες λέξεων μπορεί να γίνει θέμα συζήτησης. Αναφέρω τη «Σελίδα γραπτού» του Ζακ Πρεβέρ (ΚΝΛ Β Γυμνασίου), που διαπιστώνουμε απουσία επιθέτων στο κείμενο, ενώ στο όμοιο θεματικά ποίημα του Κ. Παλαμά, «Τα σχολειά χτίστε» (στο ίδιο βιβλίο) υπάρχει αφθονία επιθέτων.

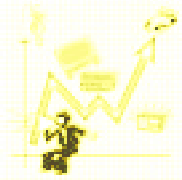
Τέλος, μπορούμε να σχολιάσουμε με τους μαθητές μας τον τίτλο ενός ποιήματος (όπου, βέβαια, υπάρχει γραμμένος από τον ποιητή) και να βγάλουμε ενδιαφέροντα συμπεράσματα, όπως π.χ. με την «Ξανθούλα» του Δ. Σολωμού (ΚΝΛ Α Γυμνασίου): τι θα συνέβαινε, αν στη θέση αυτού του τίτλου βάζαμε τον τίτλο «Αγαπημένη». Το ίδιο ενδιαφέρων είναι και ο σχολιασμός του τίτλου του ποιήματος του Γ. Σεφέρη, «Επί ασπαλάθων...» (ΚΝΛ Α Λυκείου).

Κλείνονας θέλω να τονίσω ότι το κείμενο αυτό δεν έχει ούτε κατά διάνοια την αξίωση να θεωρείται επιστημονικό. Ούτε και καλύπτει βεβαίως το θέμα του. Αντίθετα, το έγραψα, επειδή θέλησα να μοιραστώ τις σκέψεις μου με τους συναδέλφους μου που αγωνίζονται, όπως κι εγώ.

Ακριβώς, επειδή το κείμενο αυτό έχει το χαρακτήρα σημειώσεων, δεν θέλησα να το φορτώσω με παραπομπές. Ωστόσο, χρησιμοποίησα κάποια βιβλιογραφία, που συνοψίζεται στα εξής:

1. Νίκος Ι. Παπασταϊκούδης, Κειμενοδιφική Ανάλυση, Κώδικας, Θεσσαλονίκη 1989.
2. Γιάννης Μότσιος, Δομική ανάλυση ποιητικών κειμένων, Αθήνα 1983.
3. Νάσος Βαγενάς, Για έναν ορισμό του μοντέρνου στην ποίηση, Στιγμή, Αθήνα 1984.
4. Β.Κ. Αναστασιάδη, Γύρω από τη μοντέρνα ή σύγχρονη ποίηση: Περ. Νέα Παιδεία 48 (Φθινόπωρο 1988) σελ. 101-116.
5. Hans-Dieter Gelfert. Wie interpretiert man ein Gedicht?, Reclam, Stuttgart 1994.
6. Ευχαριστίες οφείλω στον κ. Γ. Φράγκογλου, καθηγητή φιλόλογο στο Πειραματικό Λύκειο Θεσσαλονίκης, χωρίς τις παραδόσεις του οποίου στο 2ο Π.Ε.Κ. Θεσσαλονίκης (Απρίλιος-Ιούνιος 1996) δεν θα υπήρχε το έναυσμα και μεγάλο μέρος του πληροφοριακού υλικού γι' αυτήν την εργασία.

◆



ΜΟΡΦΕΣ ΑΓΟΡΑΣ και ο ΡΟΛΟΣ της ΔΙΑΦΗΜΙΣΗΣ

Του **Θ. Κουτρούκη,** Οικονομολόγου, Μ.Α.

Ο ρόλος που διαδραματίζει η διαφήμιση εξαρτάται από τη μορφή της συγκεκριμένης αγοράς. Στην ιδεατή μορφή αγοράς, τον πλήρη ανταγωνισμό κανένας μεμονωμένος παραγωγός δεν μπορεί να επηρεάσει την τιμή του προϊόντος γιατί η προσφερόμενη ποσότητα από την καθεμιά επιχείρηση είναι αμελητέα σε σχέση με τη συνολική προσφορά στον κλάδο. Επιπλέον το προϊόν όλων των επιχειρήσεων είναι απόλυτα ομοιογενές και οι καταναλωτές είναι άρτια πληροφορημένοι για τις συνθήκες που επικρατούν στην αγορά. Συνεπώς οι επιχειρήσεις δε συμφέρει να διαθέτουν κονδύλια για διαφημιστικές εκστρατείες, παρά μόνο στην περίπτωση που μια νέα επιχείρηση θα ήθελε να ενημερώσει το καταναλωτικό κοινό για την είσοδό της στον κλάδο.

Στο μονοπώλιο, σκοπός της διαφήμισης είναι να πείσει τους καταναλωτές να προτιμήσουν το διαφημιζόμενο προϊόν έναντι άλλων υποκατάστατων προϊόντων, και όταν δεν υπάρχουν υποκατάστατα αγαθά να πείσει τα άτομα που δεν καταναλώνουν το προϊόν να γίνουν καταναλωτές του, ώστε να αυξηθεί η αγοραία ζήτηση προς όφελος της μονοπωλιακής επιχείρησης.

Στο ολιγοπώλιο ο ανταγωνισμός δεν αφορά στην τιμή του προϊόντος, που καθορίζεται από την ηγετική επιχείρηση, εξαιτίας της μεγάλης αλληλεξάρτησης των επιχειρήσεων του κλάδου, αλλά στην προβολή των διαφοροποιημένων χαρακτηριστικών του προϊόντος της καθεμιάς επιχείρησης.

Τέλος, στο μονοπωλιακό ανταγωνισμό οι διαφημιστικές εκστρατείες φτάνουν στην κορύφωσή τους, μια και δεν προβάλλουν μόνο τις πραγματικές διαφοροποιήσεις του προϊόντος μιας επιχείρησης αλλά συχνά προσδίδουν πλασματικές ιδιότητες στο προϊόν με σκοπό να προσελκύσουν το ενδιαφέρον του καταναλωτικού κοινού.

Η διαφήμιση περιέχει δύο σημαντικές λειτουργίες: την πληροφόρηση και την πειθώ. Η πρώτη είναι χρήσιμη και αναγκαία. Όμως εκείνη που μας ενδιαφέρει εδώ είναι η λειτουργία της πειθούς.

Η προπαγανδιστική διαφήμιση –απόρροια του μηχανισμού της πειθούς– συχνά προβάλλει ορισμένες πλευρές του προϊόντος διογκώνοντάς τις, με σκοπό να προκαλέσει εντυπώσεις στο κοινό. Εξάλλου, η προώθηση καταναλωτικών προτύπων μέσα από την ενσωμάτωση ανύπαρκτων ιδιοτήτων στα διαφημιζόμενα προϊόντα οδηγούν σε τραγελαφικά φαινόμενα.

Έτσι, σε διαφημιστικές καμπάνιες παρουσιάζεται η επαγγελματική επιτυχία συμπορευόμενη με τη χρήση κάποιου αποσμητικού, η συζυγική αγάπη εξαρτημένη από ορισμένες γαστρονομικές δημιουργίες και η ερωτική σχέση σαν υπόθεση μιας συγκεκριμένης οδοντόκρεμας. Παρόμοιες ρεκλάμες, πέρα από την αναλήθεια που τις διέπει, συνδράμουν τη γελοιοποίηση των ανθρώπινων σχέσεων, εξευτελίζουν την ανθρώπινη υπόσταση και προσβάλλουν τη νοημοσύνη του αγοραστικού κοινού.

Οδηγούμαστε, λοιπόν, στο συμπέρασμα ότι η διαφήμιση δεν ακολούθησε απλά το ρόλο της πληροφόρησης αλλά εξελίχθηκε σε ένα αυξημένης βαρύτητας όπλο στα χέρια του παραγωγού, ο οποίος με γνώμονα το προσωπικό του συμφέρον χρησιμοποιεί την προπαγανδιστική διαφήμιση για να στρέψει το αγοραστικό κοινό, σε εκείνα τα καταναλωτικά πρότυπα, που θα του επιτρέψουν να μεγιστοποιήσει το κέρδος του.

Συγκεφαλαιώνοντας θα υποστηρίζουμε ότι για όλους τους παραπάνω λόγους είναι αναγκαία η χαλιναγώγηση της διαφήμισης, ώστε να περιοριστούν οι δυσμενείς επιπτώσεις στο καταναλωτικό κοινό. Μερικά μέσα αντιμετώπισης θα ήταν η παροχή ανθρωπιστικής παιδείας στους νέους ανθρώπους ώστε να γνωρίσουν τις πραγματικές τους ανάγκες και να μην υποκύπτουν στις «σειρήνες» της διαφήμισης, αλλά και η ορθή εφαρμογή της υφιστάμενης νομοθεσίας για την παραπλανητική διαφήμιση. ◆

ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΚΘΕΣΗ από το ΒΙΒΛΙΟ «ΕΚΦΡΑΣΗ-ΕΚΘΕΣΗ» της Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Του **Δ. Πασχαλίδη,** Φιλολόγου

Τα βιβλία της «Έκφρασης-Έκθεσης», που καθιερώθηκαν από το σχολικό έτος 1988-89, είναι αλήθεια ότι άνοιξαν νέους ορίζοντες στη γλωσσική διδασκαλία, καθώς στηρίζονται στη μέθοδο που ανακαλύπτει και αξιοποιεί τη λειτουργική διαμόρφωση του λόγου. Η «παραγωγή» αποτελεσματικού λόγου αποτελεί τη φιλοσοφία των βιβλίων αυτών. Γι' αυτό και τα θέματα των γραπτών εκθέσεων, σύμφωνα με τις οδηγίες διδασκαλίας του μαθήματος, πρέπει να απορρέουν «από το διδακτικό υλικό που συζητήθηκε στην τάξη, από τους συναφείς προβληματισμούς που αναδύθηκαν κατά τις αναλύσεις των κειμένων και τις απαντήσεις των ασκήσεων».

Η καταγραφή των θεμάτων έκθεσης, που απορρέουν από τις αντίστοιχες θεματικές ενότητες του βιβλίου «Έκφραση-Έκθεση» της Α΄ Λυκείου, έγινε με σκοπό να προσφέρουμε ένα αξιόλογο υλικό στο φιλόλογο που θα ήθελε να το αξιοποιήσει. Εξάλλου, δύο από αυτά τα θέματα έχουν δοθεί με αυτούσια σχεδόν διατύπωση στις Γενικές Εξετάσεις.

ΓΛΩΣΣΑ

1. «Η κατάκτηση της μητρικής γλώσσας είναι από τις πιο σημαντικές ανακαλύψεις του παιδιού. Σε ολόκληρη τη ζωή του, είπε ο Δανός φιλόσοφος Sibbern, δεν κατορθώνει ο άνθρωπος τίποτε που να είναι τόσο θαυμάσιο, όσο εκείνο που πραγματοποίησε με το να μάθει να μιλάει».

2. «Χωρίς τη γλώσσα δε θα ήταν δυνατό να συγκροτηθούν ανθρώπινες κοινωνίες, και φαίνεται εξαιρετικά αμφίβολο αν θα μπορούσαμε να σκεφτούμε χωρίς αυτή».

ΓΛΩΣΣΑ - ΦΥΛΟ

3. «Οι ρόλοι τους οποίους “μοιράζει” η κοινωνία στα δύο φύλα, τους άνδρες και τις γυναίκες, φαίνεται ότι είναι τέτοιοι ώστε πολλοί κοινωνιογλωσσολόγοι να υποστηρίζουν ότι επηρεάζουν και διαφοροποιούν τη γλώσσα που αυτά χρησιμοποιούν».

ΓΛΩΣΣΟΜΑΘΕΙΑ

4. «Η σημασία που έχει η γλωσσομάθεια, το να έχει μάθει κανείς και να ξέρει πλάι στη δική του μία ή περισσότερες ξένες γλώσσες, και η ανάγκη να γίνει αυτό, στα χρόνια προπάντων που ετοιμάζεται για τη ζωή, είναι τόσο μεγάλη, σχεδόν αυτονόητη –ιδίως στην εποχή μας με την τόσο στενή και έντονη διεθνική συγκοινωνία και επικοινωνία– που δε χρειάζεται να γίνει διεξοδικός λόγος».

5. «Ένας Γερμανός ποιητής είπε πως με κάθε γλώσσα που μαθαίνεις παραπάνω, ελευθερώνεις μέσα σου ένα πνεύμα δεμένο ως τότε».

6. «Όσο απαιτητική και αν είναι η ανάγκη των ξένων γλωσσών για μικρούς λαούς, έχουμε από το άλλο μέρος το ζήτημα ως ποιο σημείο μπορούμε να πραγματώσουμε αυτό χωρίς ζημία μας».

ΛΟΓΟΣ: ΠΡΟΦΟΡΙΚΟΣ - ΓΡΑΠΤΟΣ

7. «Η ιστορία του ανθρώπου είναι η ιστορία του λόγου».

8. «... Γλώσσα και πατρίδα είναι το ίδιο. Να πολεμά κανείς για την πατρίδα του ή για την εθνική τη γλώσσα, ένας είναι ο αγώνας. Πάντα αμύνεται περί πάτρης».

ΑΝΑΛΦΑΒΗΤΙΣΜΟΣ

9. «Ο αναλφαβητισμός είναι πρόβλημα κοινωνικό, πολιτικό, πολιτιστικό και οικονομικό. Αναστέλλει τη συμμετοχή των πολιτών στα κοινά, αποτελεί σοβαρό εμπόδιο για την ανάπτυξη των συμμετοχικών θεσμών και ακρωτηριάζει τη δυνατότητα για άσκηση κριτικής».

10. «Ο αναλφαβητισμός δεν είναι ωστόσο μόνο ατομική αναπηρία, είναι τροχοπέδη, ίσως η πιο σημαντική για την κοινωνική και τεχνολογική χειραφέτηση των λαών στις αναπτυσσόμενες χώρες».

ΔΙΑΛΟΓΟΣ

11. «Διάλογος είναι, κατά τη δική μου γνώμη, να παραδεχτείς ότι η αλήθεια είναι πολλαπλή. Ότι είναι ανέφικτη η πλήρης αλήθεια. Και πρέπει να φωτισθεί από πολλές πλευρές, για να τη συλλάβει κανείς».

12. «Πρέπει να παραδεχτεί κανείς ότι, για να πλησιάσει τον άλλον, ένας μόνο τρόπος υπάρχει: να τον πείσει. Του διαλόγου μέθοδος είναι μόνο η πειθώ. Ούτε η γοητεία ούτε η απάτη –η πειθώ».

13. «Η σημασία του διαλόγου για την ατομική και συλλογική ζωή».

14. «Για να είναι ο διάλογος γόνιμος και εποικοδομητικός,

απαιτούνται εκτός από τις αντικειμενικές –εξωτερικές προϋποθέσεις[1] και ορισμένες υποκειμενικές– ατομικές προϋποθέσεις[2]. Να προσδιορίσετε με μεγαλύτερη ακρίβεια τις υποκειμενικές προϋποθέσεις και να δείξετε πώς αυτές συμβάλλουν στην επιτυχία ενός διαλόγου με στόχο την αναζήτηση της αλήθειας».

1. (ελευθερία λόγου, δημοκρατικό κλίμα και γενικά, λειτουργία δημοκρατικών θεσμών)
2. (ικανότητες, προσόντα, στάση, ήθος των ομιλητών).

ΣΕΒΑΣΜΟΣ - ΑΓΩΓΗ

15. «Πώς μπορεί ένας ενήλικας να εμπνεύσει το σεβασμό σ' έναν έφηβο;».

16. «Αγωγή σημαίνει εξουδετέρωση των αρνητικών παραγόντων ή συνθηκών που παρεμποδίζουν την ελεύθερη εξέλιξη του παιδιού, χωρίς άμεσους παρεμβατισμούς. Μόνο με πολλή κατανόηση για την ψυχική κατάσταση και τα προβλήματα του εφήβου μπορεί ο παιδαγωγός να κερδίσει την εμπιστοσύνη του και να επιδράσει έμμεσα αλλά αποτελεσματικά πάνω του. Στόχος πρέπει να είναι να αποκτήσουν οι έφηβοι κριτική σκέψη και υπευθυνότητα, να εκδηλώσουν δημιουργικές πρωτοβουλίες και να συμβάλουν υπεύθυνα στην πρόοδο και εξέλιξη του κοινωνικού συνόλου».

17. «Τι σημαίνει “σεβασμός” προς ένα ηλικιωμένο άτομο; Θα έπρεπε οι νέοι να σέβονται τους ηλικιωμένους μόνο και μόνο επειδή είναι μεγαλύτεροι;»

18. «Ο σεβασμός είναι άγραφος νόμος, μια τάξη αναγκαία για την ισορροπία της ζωής... Δεν είναι όμως προνόμιο, επιταγή δίχως αντίκρυσμα. Η υπεροχή δεν μπορεί να σταθεί σαν κάτι δεδομένο».

19. «Ήταν ένας καιρός, πραγματικά, όπου ο σεβασμός αξιωνόταν με το έτσι θέλω, από εκείνον που τύχαινε να έχει ένα χρονικό και μόνο προβάδισμα... Ο καιρός αυτός, ας το πάρουμε απόφαση, έχει περάσει». Να σχολιάσετε το παράθεμα.

ΠΡΟΤΥΠΑ - ΕΙΔΩΛΑ

20. «Πώς ερμηνεύεται η τάση των εφήβων να αναζητούν κάποια πρότυπα ή είδωλα και πώς η φανατική προσήλωσή τους σε κάποια ομάδα; Από ποιους χώρους αντλούν οι έφηβοι τα πρότυπα ή τα είδωλά τους και σε τι είδους ομάδες εντάσσονται;»

21. «Ποια εικόνα της ζωής και της συμπεριφοράς των ηλικιωμένων προβάλλουν τα μέσα μαζικής ενημέρωσης;»

ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΦΗΒΩΝ ΜΕ ΤΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΟΥΣ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

22. «Ποιες αλλαγές παρατηρούνται στις σχέσεις των εφήβων με τους γονείς τους, με τους ηλικιωμένους συγγενείς τους, με τα αδέλφια τους, με τους φίλους τους, με το άλλο φύλο;»

23. «Με ποιους τρόπους εκδηλώνουν οι έφηβοι την αντίθεσή τους προς τους ενήλικες και γενικά προς το κοινωνικό περιβάλλον;»

24. «Ένα φαινόμενο των τελευταίων, κυρίως, χρόνων είναι η επιθετικότητα, και μάλιστα των νέων, κάτι που φαίνεται άλλωστε από τις περισσότερες εκδηλώσεις τους».

ΧΑΣΜΑ ΓΕΝΕΩΝ

25. «Πολλοί υποστηρίζουν ότι οι έφηβοι και οι ενήλικες έχουν πράγματι διαφορετικές αντιλήψεις σε διάφορα θέματα όπως: θρησκεία, γάμος, βία αγάπη, πόλεμος, αθλητισμός, μόδα κ.ά. Να αναπτύξετε και να δικαιολογήσετε την προσωπική σας άποψη».

26. «Το χάσμα των γενεών: Να προσδιορίσετε τον όρο, να περιγράψετε τις μορφές με τις οποίες εκδηλώνεται το φαινόμενο να εντοπίσετε τις αιτίες που το προκαλούν και να προτείνετε τρόπους για την αντιμετώπισή του».

ΕΛΕΥΘΕΡΟΣ ΧΡΟΝΟΣ

27. «Ο ελεύθερος χρόνος των νέων και η συμβολή του σχολείου και της πολιτείας στην αξιοποίησή του».

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΦΗΒΙΚΗΣ ΗΛΙΚΙΑΣ

28. «Ποια είναι, κατά τη γνώμη σας, τα προβλήματα της εφηβικής ηλικίας; Ποια είναι τα ενδιαφέροντα και ποιες οι ασχολίες των εφήβων;»

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

29. «Να περιγράψετε μια λαϊκή φορεσιά του τόπου σας, που είτε αποτελεί οικογενειακό κειμήλιο είτε απεικονίζεται σε κάποια παλιά φωτογραφία ή βρίσκεται σε λαογραφικό μουσείο της περιοχής σας».

30. «Να παρουσιάσετε τα αξιοθέατα του τόπου σας έτσι ώστε να προσελκύσετε τους επισκέπτες».

31. «Να περιγράψετε μία σύγχρονη πολυκατοικία. Να αναφέρετε τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά της».

32. «Να περιγράψετε μία φωτογραφική μηχανή».

33. «Ο “λόγος” και η “εικόνα” είναι τα δύο βασικά μέσα που χρησιμοποιεί ο άνθρωπος για να περιγράψει ή να αναπαραστήσει ένα αντικείμενο. Να αναφέρετε τα πλεονεκτήματα που παρουσιάζει καθένα από τα δύο αυτά μέσα».

34. «Σε ποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά θα επικεντρώνατε, κυρίως, την προσοχή σας, προκειμένου να χαρακτηρίσετε θετικά ένα άτομο;»

35. «Να περιγράψετε κάποιο συμμαθητή/τριά σας, συσχετίζοντας τα εξωτερικά γνωρίσματα με το χαρακτήρα της».

36. «Πώς εύχεστε να είναι ο κόσμος του μέλλοντος; Υποθέστε ότι ζείτε σε έναν τέτοιο κόσμο και περιγράψτε τα γεγονότα μιας ημέρας στο ημερολόγιό σας».
37. «Το ρούχο ως μέσο επικοινωνίας αλλά και ταξινόμησης των ανθρώπων σε κοινωνικές ομάδες». Να παρουσιάσετε με επιχειρήματα, από τη δική σας οπτική γωνία, τις απόψεις σας για το θέμα.
38. «Υποθέστε ότι είστε ο αυτόπτης μάρτυρας του ατυχήματος και διηγείστε το περιστατικό στους φίλους σας. Προσπαθήστε να ζωντανέψετε την αφήγησή σας εκφράζοντας τα προσωπικά σας συναισθήματα και προσθέτοντας σχόλια δικά σας και των παρευρισκομένων, καθώς και χαρακτηριστικές λεπτομέρειες για το ατύχημα».

ΕΝΔΥΜΑΣΙΑ

39. «Στη σημερινή εποχή οι τοπικές ενδυμασίες έχουν καταργηθεί και η εξάπλωση της μόδας, ξεπερνώντας το τοπικό πλαίσιο, κοντεύει να πάρει διαστάσεις παγκόσμιου φαινομένου. Ποια σημασία λοιπόν έχει η ενδυμασία για τον άνθρωπο σήμερα;»
40. «Το φόρεμα (ανθρώπινη επινόηση και φροντίδα) ως προστασία και στολισμός αποτελειώνει και επισφραγίζει το "πρόσωπό" μας, το συμπληρώνει και το παρουσιάζει». Να αναπτύξετε τη θέση αυτή του Παπανούτσου διατυπώνοντας και την προσωπική σας άποψη.

ΜΟΔΑ

41. «Αν δέχεστε ότι "η μόδα είναι ολοκληρωτική και τρομοκρατική για εκείνους που έχουν αποφασίσει να της εκχωρήσουν το δικαίωμα να τους επιβάλλεται", για ποιους λόγους τότε οι περισσότεροι άνθρωποι την ακολουθούν και συμμορφώνονται με τις επιταγές της;»
42. «Παρά τη μεγάλη δύναμη της μόδας σήμερα, υπάρχουν άνθρωποι που υιοθετούν κάθε φορά ορισμένα μόνο στοιχεία από τη μόδα, ενώ κάποιοι άλλοι αδιαφορούν για τις επιταγές της και ντύνονται σύμφωνα με τις δικές τους προτιμήσεις. Ποιο είναι στην κάθε περίπτωση το κίνητρο που οδηγεί τους ανθρώπους σε διαφορετικές επιλογές; Ποιο κριτήριο καθορίζει τις δικές σας επιλογές σε θέματα μόδας;»
43. «Σε ποιο βαθμό και με ποιο τρόπο οι κοινωνικοοικονομικές και πολιτικές συνθήκες επηρεάζουν την αμφίεση και γενικά την εξωτερική εμφάνιση σε μια ορισμένη εποχή; Να τεκμηριώσετε την άποψή σας».

ΠΕΡΙΘΩΡΙΑΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ

44. «Ποιοι λόγοι συντελούν στη δημιουργία περιθωριακών ομάδων; Πώς αντιμετωπίζετε εσείς τους περιθωριακούς νέους; Ποια μέτρα παίρνει ή πρέπει να πάρει η πολιτεία, για να τους επανεντάξει στην κοινωνία;»

ΠΟΙΝΕΣ

45. «Ποιο είναι, κατά τη γνώμη σας, το νόημα της ποινής και ειδικά των ποινών που επιβάλλονται στους ανηλίκους από τα αρμόδια δικαστήρια;»

ΚΟΙΝΩΝΙΚΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ

46. «Ορισμένοι υποστηρίζουν ότι η ικανότητα προσαρμογής του ανθρώπου στο κοινωνικό περιβάλλον αποτελεί σημαντικό χάρισμα. Άλλοι πάλι ισχυρίζονται ότι το τίμημα της προσαρμογής είναι μεγάλο. Ποια είναι η δική σας άποψη για το θέμα αυτό; Ποιες νομίζετε ότι είναι οι συνέπειες για το άτομο που δεν προσαρμόζεται στο κοινωνικό σύνολο;»

ΧΙΟΥΜΟΡ

47. «Νομίζετε ότι το χιούμορ αποτελεί θετικό στοιχείο για τη σχολική ζωή ή, αντίθετα, πιστεύετε ότι το "γέλιο" είναι ανάρμοστο και ανατρεπτικό για τη σχολική τάξη και πειθαρχία;»

ΦΙΛΑΡΓΥΡΙΑ - ΦΙΛΗΔΟΝΙΑ

48. «Η αγάπη του πλούτου, που η αχόρταγη αναζήτησή του μας έχει γίνει μόνιμη αρρώστια, και η φιληδονία καταδουλώνουν ή, καλύτερα, καταποντίζουν αύτανδρη τη ζωή μας· γιατί δεν υπάρχει αρρώστια που να ταπεινώνει τον άνθρωπο περισσότερο από τη φιλαργυρία ούτε να τον εξευτελίζει περισσότερο από τη φιληδονία».

ΜΕΣΑ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ

49. «Όπως οι περισσότερες τεχνικές πρόοδοι, η υπερτελειοποίηση των μέσων επικοινωνίας αποτελεί ταυτόχρονα μιαν υπόσχεση ελευθερίας και μιαν απειλή καινούριας δουλειάς».
50. «Οι "μάζες" μπορούν να γίνουν (και γίνονται, συχνά) έρμαια εκείνου που ελέγχει τα "μαζικά μέσα επικοινωνίας", να χειραγωγηθούν και δουλαγωγηθούν από τους κατόχους της πιο διάτορης φωνής που γνώρισε ο κόσμος, να μετατραπούν αυτές σε αυτόματα και υπηρέτες της και θύματά της».
51. «Οι κίνδυνοι από την "πολλαπλή τηλεόραση" με την παγκόσμια λήψη είναι πολύ μεγάλοι, επειδή υπάρχει το ενδεχόμενο της μαζικής πνευματικής αλλοτρίωσης των ανθρώπων σε παγκόσμια κλίμακα, γεγονός που μπορεί να εκμεταλλευτούν "ύποπτες" προπαγάνδες».
52. «Ο τρόπος που θα χρησιμοποιήσουμε και θ' αξιοποιήσουμε αυτόν τον γιγάντιο πολύποδα –τα μέσα επικοινωνίας–, θα δείξει αν θα γίνει αυτός "αυτόματος υπηρέτης" μας ή εμείς δουλικά υποχείριά του».

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ

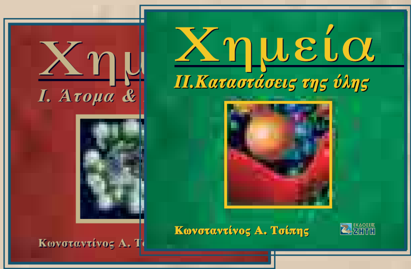
ΑΡΜΕΝΟΠΟΥΛΟΥ 27 (πίσω από τη Ροτόντα)
ΤΗΛ. (031) 203.720, FAX: (031) 211.305 • ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 546 35

ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ
ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ
και τις ΔΕΣΜΕΣ

ΒΙΒΛΙΑ

ΤΕΧΝΙΚΑ
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑ
ΓΙΑ ΤΑ ΑΕΙ, ΤΕΙ, ΙΕΚ

Νέες Εκδόσεις...



Κ.ΤΣΙΠΗΣ
ΧΗΜΕΙΑ: Ι. Άτομα και Μόρια, ΙΙ. Καταστάσεις της ύλης

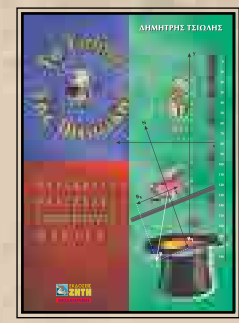
Για το Γυμνάσιο,
το Λύκειο
και τις Δέσμες

ΓΙΑ ΤΑ Τ.Ε.Λ.

Θ. ΞΕΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' Τ.Ε.Λ.

Μ. ΚΑΡΑΦΥΛΛΗ
ΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ
ΧΕΙΡΟΓΡΑΦΟ και ΜΗΧ/ΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Γ. ΑΤΡΕΙΔΗΣ
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΟΜ. Β': ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

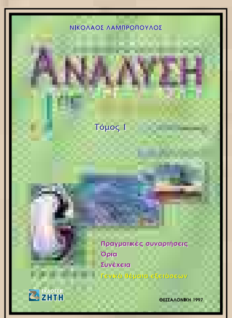


Δ. ΤΣΙΩΛΗΣ
ΤΟ ΤΣΙΡΚΟ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

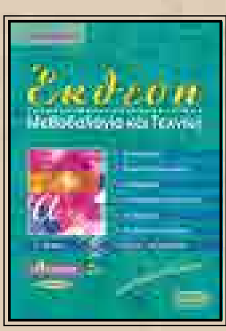
Γ. ΓΙΟΥΒΑΝΟΥΔΗΣ
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΡΙΣΕΩΣ και ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ Γ'ΛΥΚΕΙΟΥ

Θ. ΞΕΝΟΣ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

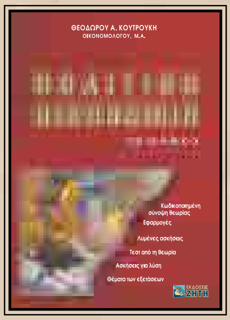
Θ. ΞΕΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ



Ν. ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΣ
ΑΛΓΕΒΡΑ 1ης ΔΕΣΜΗΣ, Ι



Δ. ΦΑΡΜΑΚΗΣ
ΕΚΘΕΣΗ
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ και ΤΕΧΝΙΚΗ



Θ. ΚΟΥΤΡΟΥΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Τα βιβλία μας θα τα βρείτε και σε όλα τα βιβλιοπωλεία της Ελλάδας.

Τώρα μπορείτε να δείτε τις εκδόσεις μας και στο βιβλιοπωλείο "Ένωση Εκδοτών Βιβλίου Θεσσαλονίκης" **Στοά του Βιβλίου, Πανεπιστημίου & Πεσματζόγλου, Αθήνα.**

Για την εξυπηρέτησή σας, το βιβλιοπωλείο μας αναλαμβάνει την ταχυδρομική αποστολή σ' όλη την Ελλάδα των βιβλίων που σας χρειάζονται με αντικαταβολή.

Ζητήστε να σας στείλουμε τον αναλυτικό τιμοκατάλογο των εκδόσεών μας.