Θεόδωρος Κουτρουμανίδης
Καθηγητής Δ.Π.Θ

Ελένη Ζαφειρίου
Λέκτορας Δ.Π.Θ.

Ποσοτική Οικονομική Ανάλυση

Μέθοδοι & Εφαρμογές

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο υπογράφεται από το συγγραφέα

ISBN 978-960-456-322-7

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18^{o} χλμ Θεσσαλονίκης - Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη • Τηλ.: 2310-203.720 • Fax 2310-211.305
e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) - 105 64 ΑΘΗΝΑ • Τηλ.-Fax: 210-3211.097

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Ασκληπιού 60 - Εξάρχεια 114 71, Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210-3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Πρόλογος

Το παρόν βιβλίο γράφτηκε με σκοπό να εμπλουτίσει την γνώση των φοιτητών του Τομέα Αγροτικής Οικονομίας αλλά και φοιτητών Οικονομικών Τμημάτων στην χρήση μεθόδων ποσοτικής ανάλυσης ως εργαλείο για την επίλυση οικονομικών προβλημάτων.

Το βιβλίο εξετάζει την εφαρμογή της Άλγεβρας μητρών, του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού σε ζητήματα της οικονομικής θεωρίας όπως για παράδειγμα της επίλυσης υποδειγμάτων με την μορφή γραμμικών εξισώσεων, ζητήματα βελτιστοποίησης με και χωρίς περιορισμούς, υπολογισμούς συνολικών μεγεθών από τα οριακά μεγέθη και το αντίστροφο, μελέτη διαχρονικών συναρτήσεων παραγωγών και καταναλωτών, υπολογισμούς παρούσας αξίας αέναων ροών κ.α. Παρατίθενται σε περιορισμένη έκταση μία ανάλυση της θεωρίας και στην συνέχεια δίνονται οι σημαντικότερες κατά την άποψη των συγγραφέων οικονομικές εφαρμογές, συγκεκριμένα παραδείγματα καθώς και ασκήσεις προς λύση.

Οι απαιτήσεις του βιβλίου περιορίζονται στις στοιχειώδεις γνώσεις των μαθηματικών. Για την συγγραφή του βιβλίου απαιτήθηκαν αρκετά έτη διδασκαλίας, και σημαντικές ώρες μελέτης για την συγκέντρωση εφαρμογών σε ζητήματα οικονομικής θεωρίας. Οφείλουμε πολλά στις οικογένειές μας για την συμπαράσταση σε όλη τη διάρκεια της προσπάθειάς μας. Η ευθύνη για τυχόν λάθη και παραλείψεις βαρύνει αποκλειστικά τους συγγραφείς.

Θεσσαλονίκη, Απρίλιος 2012

Θεόδωρος Κουτρουμανίδης
Ελένη Ζαφειρίου

Περιεχόμενα

3. Η χρήση των παραγώγων στην συγκριτική στατική ανάλυση των οικονομικών συστημάτων

4. Βελτιστοποίηση οικονομικών συναρτήσεων

5. Βελτιστοποίηση συναρτήσεων υπό περιορισμό

Κεφάλαιο 1

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.1 Η αναγκαιότητα της χρήσης των οικονομικών υποδειγμάτων

Μία προσέγγιση της οικονομικής ανάλυσης γίνεται εφικτή μέσω της χρήσης των οικονομικών υποδειγμάτων. Ο στόχος κάθε θεωρητικής ανάλυσης είναι η εξαγωγή συμπερασμάτων ή θεωρημάτων που βασίζεται σε ένα σύνολο υποθέσεων ή τεκμηριώνεται μέσω της διαδικασίας της λογικής.

Τα οικονομικά υποδείγματα χρησιμοποιούν μαθηματικά σύμβολα για την διατύπωση των υποθέσεων ή των συμπερασμάτων καθώς και εξισώσεις που αντιπροσωπεύουν τις προτάσεις.

Η χρήση των μαθηματικών οικονομικών υποδειγμάτων παρουσιάζει μία σειρά πλεονεκτημάτων από τα οποία τα σημαντικότερα είναι τα εξής:

1. Η χρήση της γλώσσας των μαθηματικών χαρακτηρίζεται από ακρίβεια και σαφήνεια.
2. Υπάρχει μία σειρά μαθηματικών θεωρημάτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν
3. Με δεδομένο τον προκαθορισμό συγκεκριμένων υποθέσεων για τη χρήση των μαθηματικών θεωρημάτων, είναι δυνατόν να αποφύγουμε την υιοθέτηση υποθέσεων που δεν θα συντελέσουν ουσιαστικά στην επίτευξη του επιδιωκόμενου σκοπού.
4. Τέλος καθιστά δυνατή την ανάλυση της περίπτωσης n-μεταβλητών.

Θα πρέπει όμως να αναφερθεί και ένα σημαντικό μειονέκτημα στη χρήση των μαθηματικών υποδειγμάτων στην οικονομική ανάλυση. Ειδικότερα, έχει διατυπωθεί η άποψη πως η οικονομική ανάλυση που βασίζεται στη χρήση μαθηματικών είναι αναπόφευκτα μη ρεαλιστική. Κάτι τέτοιο όμως ισχύει γενικά στην οικονομική ανάλυση, με δεδομένο πως απαιτείται η αφαιρετική διαδικασία στη λειτουργία της υπό μελέτη οικονομίας για την εξαγωγή συμπερασμάτων σε ότι αφορά τους μηχανισμούς που διέπουν αυτή.

Ένα σημαντικό παράδειγμα είναι η χρήση της υπόθεσης του τέλειου ανταγωνισμού στην λειτουργία όλων των αγορών. Η υπόθεση αυτή είναι απλουστευτική με δεδομένο πως στην πλειοψηφία τους οι αγορές λειτουργούν υπό συνθήκες ολιγοπωλίου ή μονοπωλιακού ανταγωνισμού.

1.2 Συστατικά ενός οικονομικού υποδείγματος

Ένα μαθηματικό οικονομικό υπόδειγμα αποτελείται από μία σειρά **εξισώσεων** σχεδιασμένες να περιγράψουν τη βασική δομή του υποδείγματος. Η κάθε εξίσωση συνδέει τις **μεταβλητές** με συγκεκριμένες σχέσεις αποδίδοντας μαθηματικά τις υποθέσεις του υποδείγματος. Η εφαρμογή των μαθηματικών πράξεων που αποδίδονται από τις μαθηματικές εξισώσεις συντελεί στην εξαγωγή συμπερασμάτων τα οποία βασίζονται στις αρχικές υποθέσεις.

Ως **μεταβλητή** ορίζεται το συστατικό εκείνο του οικονομικού υποδείγματος του οποίου το μέγεθος μπορεί να μεταβληθεί. Σημαντικές μεταβλητές των οικονομικών υποδειγμάτων είναι η τιμή, τα κέρδη, το εθνικό εισόδημα, η κατανάλωση, οι επενδύσεις, οι εισαγωγές και οι εξαγωγές.

Η επίλυση ενός οικονομικού υποδείγματος μας δίνει την τιμή λύσης ενός συνόλου μεταβλητών που χρησιμοποιούνται στα υποδείγματα, όπως είναι η τιμή εκκαθάρισης της αγοράς ή το επίπεδο του προϊόντος που μεγιστοποιεί το κέρδος.

Οι μεταβλητές διακρίνονται σε δύο κατηγορίες, τις εξωγενείς μεταβλητές και τις ενδογενείς μεταβλητές. Ως **ενδογενείς μεταβλητές** χαρακτηρίζονται αυτές των οποίων η λύση προέρχεται από το υπό εξέταση υπόδειγμα. Οι δε μεταβλητές που καθορίζονται από δυνάμεις που δεν ανήκουν στο υπόδειγμα και των οποίων το μέγεθος λαμβάνεται ως δεδομένο χαρακτηρίζονται ως **εξωγενείς μεταβλητές**.

Έστω για παράδειγμα ότι στόχος του υποδείγματος είναι ο καθορισμός της τιμής του βόειου κρέατος για την Ελλάδα. Η τιμή σε αυτή την περίπτωση αποτελεί μία ενδογενή μεταβλητή. Στην περίπτωση που στόχος του υποδείγματος είναι ο προσδιορισμός των δαπανών του καταναλωτή για βόειο κρέας τότε η τιμή του βόειου κρέατος είναι μία εξωγενής μεταβλητή.

Μία μεταβλητή είναι δυνατόν να συνδέεται στις εξισώσεις του υποδείγματος με μία σταθερά. Η **σταθερά** είναι ένα μέγεθος του οποίου η τιμή παραμένει αμετάβλητη. Όταν συνδέεται πολλαπλασιαστικά μία σταθερά με μία μεταβλητή, τότε η σταθερά χαρακτηρίζεται ως συντελεστής. Σε περίπτωση που ο συντελεστής δεν εμφανίζεται με σταθερή τιμή αλλά χρησιμοποιείται ένα σύμβολο τότε η σταθερά αποκαλείται **παράμετρος**.

Επιβεβλημένη είναι η δυνατότητα διάκρισης των εξωγενών από τις ενδογενείς μεταβλητές ενός υποδείγματος. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια συμβολισμών. Ειδικότερα, οι ενδογενείς μεταβλητές συμβολίζονται με τον αντίστοιχο λατινικό χαρακτήρα, ενώ οι εξωγενείς συμβολίζονται με το λατινικό χαρακτήρα και τη χρήση του δείκτη 0. Για παράδειγμα όταν ο δείκτης τιμών καταναλωτή είναι ενδογενής μεταβλητή συμβολίζεται με P, στην περίπτωση όμως που ορίζεται εξωγενώς στο υπόδειγμα, τότε συμβολίζεται με P_0.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην πλειοψηφία τους τα υποδείγματα περιγράφονται από μία σειρά εξισώσεων. Οι εξισώσεις συνδέουν τις μεταβλητές μεταξύ τους, ενώ για το σύνολο των οικονομικών εφαρμογών μπορούμε να διακρίνουμε τρεις διαφορετικές κατηγορίες εξισώσεων.

Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τις προσδιοριστικές εξισώσεις, η δεύτερη τις εξισώσεις συμπεριφοράς και τέλος η τρίτη τις συνθήκες συμπεριφοράς. Μία προσδιοριστική εξίσωση είναι ουσιαστικά μία ταυτότητα, αφού εκφράζει μία ισότητα μεταξύ δύο εναλλακτικών εκφράσεων του ίδιου πράγματος. Μία τέτοια ταυτοτική εξίσωση είναι αυτή που εκφράζει το εθνικό εισόδημα ως συνάρτηση της εθνικής κατανάλωσης και των επενδύσεων. Σε μαθηματικούς όρους η σχέση θα είναι η εξής:

$$Y \equiv C + I \tag{1}$$

Ως εξίσωση συμπεριφοράς νοείται εκείνη που εξειδικεύει την αντίδραση μιας μεταβλητής στις μεταβολές των υπολοίπων. Μία τέτοια εξίσωση είναι δυνατόν να περιγράψει είτε την ανθρώπινη, είτε τη μη ανθρώπινη συμπεριφορά. Γενικά όμως, μία εξίσωση συμπεριφοράς περιγράφει το θεσμικό πλαίσιο ενός υποδείγματος, το οποίο και μπορεί να αφορά είτε τεχνολογική εξέλιξη η οποία εκφράζεται μέσω της συνάρτησης παραγωγής είτε νομικά ζητήματα, όπως είναι για παράδειγμα η δομή του φορολογικού συστήματος μιας οικονομίας. Για την εξειδίκευση μια εξίσωσης συμπεριφοράς θα πρέπει να υιοθετηθούν κάποιες υποθέσεις που να συντελούν στον προσδιορισμό της συμπεριφοράς της υπό εξέταση μεταβλητής.

Έστω για παράδειγμα οι συναρτήσεις παραγωγής ενός προϊόντος που δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} Y &= AKL^{1/2} \\ Y &= A_1KL \end{aligned} \tag{2}$$

Και οι δύο συναρτήσεις παραγωγής δίνουν το παραγόμενο προϊόν ως συνάρτηση των δύο συντελεστών παραγωγής, κεφαλαίου και εργασίας. Όμως στην πρώτη περίπτωση η τιμή του συντελεστή της τεχνολογίας διαφέρει από τη δεύτερη και ο διπλασιασμός της εργασίας στην πρώτη περίπτωση σημαίνει υποδιπλασιασμό του προϊόντος, ενώ στην δεύτερη περίπτωση συνεπάγεται και διπλασιασμό του προϊόντος. Συνεπώς είναι απαραίτητη η υιοθέτηση εκ προοιμίου κάποιων υποθέσεων για την εξειδίκευση και στην συνέχεια την μαθηματική έκφραση μιας εξίσωσης συμπεριφοράς.

Στην τελευταία κατηγορία ανήκουν οι συνθήκες ισορροπίας, όπως η συνθήκη εκκαθάρισης της αγοράς η οποία εκφράζεται με την εξίσωση ζητούμενης Q_d και προσφερόμενης ποσότητας Q_s ή μέσω της εξίσωσης επένδυσης I και αποταμίευσης S. Οι δύο προαναφερθείσες συνθήκες ισορροπίας δίνονται μαθηματικά από τις σχέσεις:

$$Q_d = Q_s \quad \text{(Συνθήκη ισορροπίας μιας αγοράς προϊόντος)} \tag{3}$$

$$S = I \quad \text{(Συνθήκη Ισορροπίας του Υποδείγματος Εθνικού Εισοδήματος, Αποταμίευση = Επένδυση)}$$

Οι εν λόγω εξισώσεις αποτελούν ξεχωριστή κατηγορία με δεδομένο ότι δεν μπορούν να υπαχθούν σε καμία από τις δύο παραπάνω προαναφερθείσες κατηγορίες.

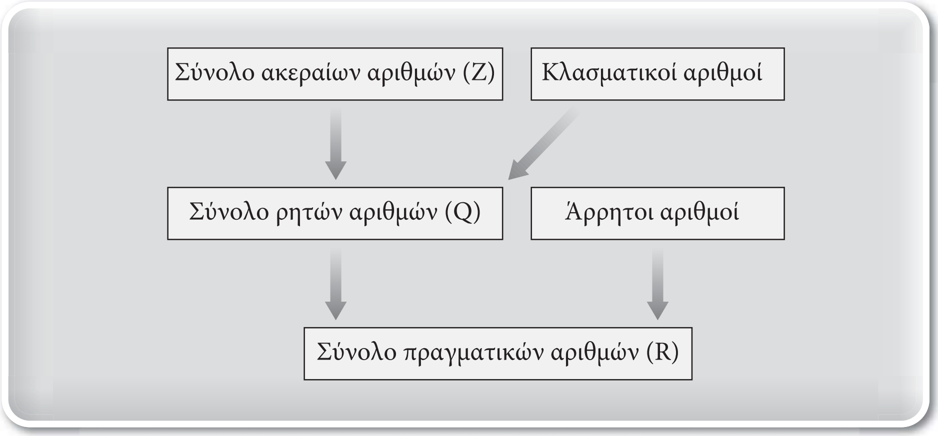
1.3 Βασικές μαθηματικές έννοιες για την περιγραφή των οικονομικών υποδειγμάτων

1.3.1 Το σύστημα των πραγματικών αριθμών

Οι εξισώσεις καθώς και οι οικονομικές μεταβλητές παίρνουν αριθμητικές τιμές. Το γεγονός αυτό επιβάλλει την μελέτη του συστήματος των πραγματικών αριθμών. Το σύνολο των θετικών ακεραίων (φυσικών) αριθμών περιλαμβάνει θετικούς αριθμούς 1, 2, 3, …, οι αντίστοιχοι αρνητικοί αποτελούν το σύνολο των αρνητικών ακεραίων −1, −2, −3, …, ενώ ο αριθμός 0 είναι ο μοναδικός που δεν ανήκει σε κανένα από τα δύο σύνολα. Αθροιστικά τα δύο σύνολα αποτελούν το σύνολο των ακεραίων αριθμών.

Το σύνολο αυτό δεν εξαντλεί το σύνολο των πιθανών αριθμών και για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε και κλασματικούς αριθμούς. Οι αριθμοί αυτοί βρίσκονται μεταξύ των ακεραίων και συνιστούν το σύνολο των κλασμάτων. Ο κάθε κλασματικός αριθμός ορίζεται ως ο λόγος δύο ακεραίων αριθμών. Το σύνολο των ακεραίων και των κλασματικών αριθμών συνιστά το σύνολο των ρητών αριθμών. Οι μη ρητοί αριθμοί δηλαδή αυτοί που δεν είναι δυνατόν να γραφούν ως πηλίκο δύο ακεραίων αποτελούν τους άρρητους αριθμούς. Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν οι δεκαδικοί αριθμοί με μη επαναλαμβανόμενα ατέρμονα δεκαδικά στοιχεία. Το σύνολο των ρητών και άρρητων στοιχείων αποτελούν το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Η δομή του συστήματος των αριθμών αποδίδεται σχηματικά από το διάγραμμα του σχήματος 1:



Σχήμα 1: *Το σύστημα των πραγματικών αριθμών*

1.3.2 Η έννοια του συνόλου

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφέρθηκε η έννοια του συνόλου. Ως σύνολο χαρακτηρίζεται γενικά μία συλλογή διακριτών αντικειμένων. Η περιγραφή ενός συνόλου είναι δυνατή είτε με την απαρίθμηση των στοιχείων που περιλαμβάνει είτε με την περιγραφή αυτών. Αν ο αριθμός των στοιχείων είναι πεπερασμένος και μικρός τότε η απαρίθμηση των στοιχείων είναι ο ενδεικνυόμενος τρόπος παρουσίασης του συνόλου. Για παράδειγμα έστω τα στοιχεία 1, 3, 5, 7, 9 είναι τα στοιχεία ενός συνόλου M.

Το σύνολο M σε αυτή την περίπτωση περιγράφεται ως εξής:

$$\mathrm{M}=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\} \tag{4}$$

Στην περίπτωση που η περιγραφή ενός συνόλου, είναι δύσκολη με την απαρίθμηση των στοιχείων παρουσιάζουμε το σύνολο με περιγραφή των στοιχείων του.

Έστω ότι θέλουμε να παρουσιάσουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών, N.

$$N=\{n/n \text{ θετικός ακέραιος αριθμός}\} \tag{5}$$

Δηλαδή το σύνολο N αποτελεί ένα σύνολο αριθμών n που είναι οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Έτσι προκειμένου να περιγράψουμε το αναγκαίο διάστημα (1, 3) χρησιμοποιούμε την ακόλουθη συμβολική πρόταση:

$$H=\{x/1<x<3\} \tag{6}$$

Στο παραπάνω παράδειγμα, δίνεται με συμβολικό τρόπο η περιγραφή του συνόλου, αν και αυτός θα μπορούσε να ήταν και περιγραφικός.

Όταν ο αριθμός των στοιχείων που περιλαμβάνει ένα σύνολο είναι πεπερασμένος τότε το σύνολο λέγεται πεπερασμένο. Στην περίπτωση που ο αριθμός των στοιχείων του συνόλου είναι άπειρος τότε και το σύνολο χαρακτηρίζεται ως άπειρο. Ένα πεπερασμένο σύνολο είναι πάντα μετρήσιμο σε αντίθεση με ένα σύνολο άπειρων αριθμών που είναι μη μετρήσιμο. Όταν ένα στοιχείο είναι μέρος ενός συνόλου τότε χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\in$, στην αντίθετη περίπτωση χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\notin$. Για παράδειγμα στο σύνολο Η ανήκει ο αριθμός 2 όχι όμως και ο αριθμός 3. Οι σχέσεις αυτές συμβολικά δίνονται ως εξής:

$$\begin{aligned} 2 &\in H \\ 3 &\notin H \end{aligned} \tag{7}$$

1.3.3 Σχέσεις μεταξύ των συνόλων

Δύο σύνολα είναι δυνατόν είτε να ταυτίζονται, είτε το ένα να είναι υποσύνολο γνήσιο ή μη του άλλου, είτε να περιέχονται κάποια κοινά στοιχεία και στα δύο είτε τέλος να μην περιέχουν κοινά στοιχεία οπότε λέμε ότι η τομή τους είναι το κενό σύνολο. Έστω για παράδειγμα τα σύνολα:

$$M_1=\{5,\ 4,\ 7,\ 1\}, \quad \text{και} \quad M_2=\{1,\ 4,\ 5,\ 7\} \tag{8}$$

Εφόσον τα στοιχεία των δύο συνόλων είναι ίδια αυτό σημαίνει πως τα δύο σύνολα ταυτίζονται. Η σειρά παράθεσης των στοιχείων του συνόλου δεν παίζει κανέναν ρόλο.

Όπως προαναφέρθηκε μία άλλη πιθανή σχέση μεταξύ των συνόλων είναι το ένα να είναι γνήσιο ή μη υποσύνολο του άλλου. Έστω τα δύο σύνολα:

$$M_1=\{1,\ 2,\ 5,\ 7\} \quad \text{και} \quad M_2=\{5,\ 7\} \tag{9}$$

Το σύνολο M_2 είναι υποσύνολο (και μάλιστα γνήσιο) του συνόλου M_1, αφού κάθε στοιχείο του είναι και στοιχείο του M_1.

Ο ορισμός του γνήσιου υποσυνόλου είναι ο εξής: Ένα σύνολο M_2 είναι γνήσιο υποσύνολο του M_1 αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του M_2 είναι και στοιχείο του M_1 και υπάρχουν επιπλέον στοιχεία στο σύνολο M_1. Με τη χρήση των μαθηματικών συμβόλων, ο παραπάνω ορισμός εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{gathered} M_2 \subset M_1 \quad \text{αν και μόνο αν για κάθε} \quad x \in M_2 \\ \text{συνεπάγεται} \quad x \in M_1 \quad \text{και επιπλέον} \quad \exists\, y \in M_1 : y \notin M_2 \end{gathered} \tag{10}$$

Όσον αφορά τον ορισμό του μη γνήσιου υποσυνόλου αναφέρουμε ότι το σύνολο M_2 είναι υποσύνολο του συνόλου M_1, όταν κάθε στοιχείο του είναι και στοιχείο του M_1. Υπό αυτή την έννοια κάθε σύνολο είναι υποσύνολο του εαυτού του και συμβολίζουμε την σχέση αυτή ως εξής:

$$M_2 \subseteq M_1 \tag{11}$$

Σε ότι αφορά τον αριθμό των υποσυνόλων που προέρχεται από ένα σύνολο θα πρέπει να σημειωθούν τα εξής: Κάθε μεμονωμένο στοιχείο ενός συνόλου αποτελεί υποσύνολο αυτού. Επιπλέον και το ίδιο το σύνολο αποτελεί το μεγαλύτερο υποσύνολο του συνόλου αυτού. Τέλος κάθε σύνολο έχει ως υποσύνολο το κενό σύνολο, δηλαδή αυτό που δεν περιλαμβάνει κανένα στοιχείο. Το κενό σύνολο συμβολίζεται ως εξής: $\varnothing$ ή εναλλακτικά $\{\ \}$.

Γενικά ο αριθμός των υποσυνόλων ενός συνόλου που περιλαμβάνει n-στοιχεία δίνεται από την σχέση 2^n.

Σε ότι αφορά τα σύνολα των οποίων η τομή τους είναι το κενό σύνολο (δηλαδή δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο) εκφράζουν την τελευταία κατηγορία σχέσης μεταξύ δύο συνόλων τα ξένα σύνολα. Για παράδειγμα το σύνολο των θετικών με το σύνολο των αρνητικών ακεραίων δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο, δηλαδή η τομή τους είναι το κενό σύνολο.

1.4 Πράξεις συνόλων

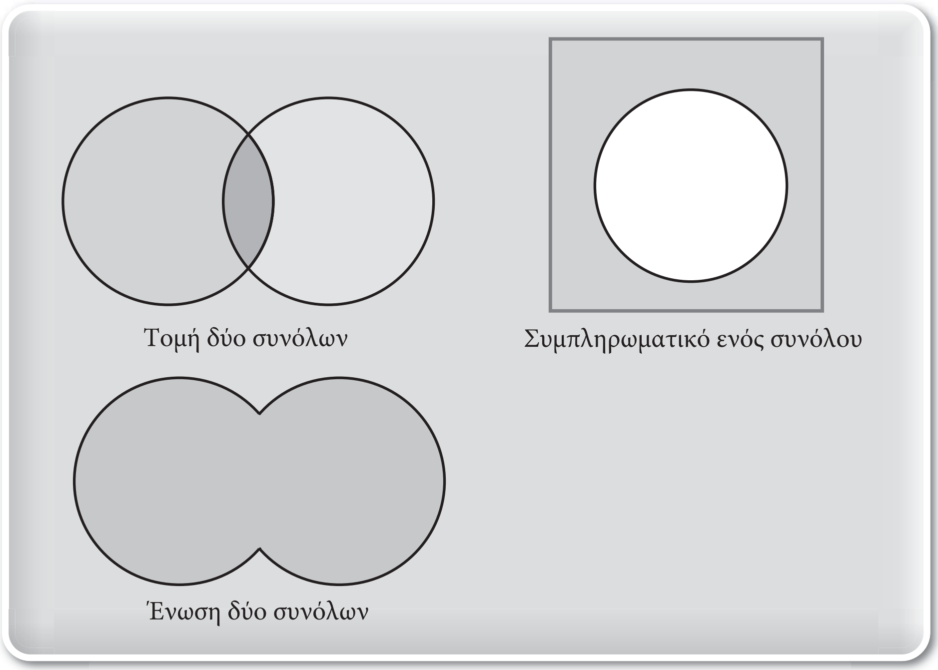
Στην περίπτωση των συνόλων η έννοια των πράξεων μεταξύ αυτών διαφοροποιείται. Οι βασικές πράξεις μεταξύ των συνόλων είναι η ένωση, η τομή, διαφορά και η εύρεση του συμπληρωματικού συνόλου. Ως ένωση δύο συνόλων Χ και Ψ, ορίζουμε ένα νέο σύνολο που απαρτίζεται από τα στοιχεία (και μόνο αυτά) και των δύο αρχικών συνόλων.

Ως τομή δύο συνόλων Χ και Ψ ορίζουμε ένα νέο σύνολο που στοιχεία του είναι τα κοινά στοιχεία και των δύο συνόλων. Η διαφορά δύο συνόλων Χ και Ψ ορίζεται ως ένα νέο σύνολο που στοιχεία του είναι αυτά που ανήκουν στο X και δεν ανήκουν στο Ψ και τέλος συμπληρωματικό ενός συνόλου X ορίζουμε ένα σύνολο $\tilde{X}$ του οποίου τα στοιχεία είναι αυτά που δεν ανήκουν στο X αλλά ανήκουν στο γενικό σύνολο του X, το σύνολο Ω. $(X \cup \tilde{X} = \Omega)$.

Παράδειγμα

Έστω τα σύνολα: $M_1 = \{1, 2, 5, 7\}$ και $M_2 = \{5, 7\}$.
Η ένωση των δύο συνόλων είναι το σύνολο $M = M_1 \cup M_2 = \{1, 2, 5, 7\}$, η διαφορά $M_1 - M_2 = \{1, 2\}$, η τομή των δύο συνόλων είναι το σύνολο $J = M_1 \cap M_2 = \{5, 7\}$. Στην περίπτωση που το σύνολο M_1 θεωρηθεί το γενικό σύνολο ως προς το M_2 τότε το συμπληρωματικό σύνολο του M_2 ως προς το M_1 είναι το $\tilde{M}_2 = \{1, 2\}$.

Οι πράξεις των συνόλων είναι δυνατόν να αποδοθούν και διαγραμματικά με τη βοήθεια των διαγραμμάτων Venn. Τα διαγράμματα για τις πράξεις τομή, ένωση και συμπληρωματικό των συνόλων δίνονται στο σχήμα 2.



Σχήμα 2: *Διαγράμματα Venn των πράξεων τομή, ένωση και συμπληρωματικό των συνόλων.*

Στην περίπτωση της ένωσης το διάγραμμα είναι η σκιασμένη περιοχή που καλύπτει και τους δύο κύκλους. Η τομή των δύο συνόλων αποδίδεται από την αλληλεπικαλυπτόμενη περιοχή των δύο κύκλων. Τέλος, όταν το αρχικό σύνολο αποδίδεται από το τετράγωνο το συμπληρωματικό σύνολο του συνόλου Α θα είναι η σκιασμένη περιοχή περιμετρικά του κύκλου.

Οι νόμοι που διέπουν τις πράξεις των συνόλων είναι οι εξής:

1. Η *αντιμεταθετική ιδιότητα*
2. Η *προσεταιριστική ιδιότητα*
3. Η *επιμεριστική ιδιότητα.*

Έστω τα σύνολα Α, Β, Γ, Δ. Η ισχύς της αντιμεταθετικής ιδιότητας στην περίπτωση της ένωσης και της τομής αποδίδεται μαθηματικά ως εξής:

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{(στην περίπτωση της ένωσης).}$$

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{(στην περίπτωση της τομής).}$$

Η προσεταιριστική ιδιότητα συνεπάγεται την ισχύ της ακόλουθης σχέσης:

$$(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma) \quad \text{(στην περίπτωση της ένωσης).}$$

$$(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma) \quad \text{(στην περίπτωση της τομής).}$$

Τέλος σε ότι αφορά την επιμεριστική ιδιότητα, η ισχύς της αποδίδεται με την εξής σχέση:

$$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma) \quad \text{(στην περίπτωση της ένωσης).}$$

$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) \quad \text{(στην περίπτωση της τομής).}$$

1.5 Οι συναρτήσεις

Ένα ζεύγος στοιχείων των οποίων η σειρά μας ενδιαφέρει αναφέρεται ως διατεταγμένο ζεύγος. Ένα ζεύγος στοιχείων είναι δυνατόν να αποδοθεί γραφικά σε ένα ορθοκανονικό ή καρτεσιανό σύστημα αξόνων. Έστω, το ζεύγος (x, y) το οποίο μπορεί να αντιστοιχεί σε άπειρο αριθμό σημείων αν οι τιμές των x και y δεν είναι καθορισμένες.

Το καρτεσιανό γινόμενο που προκύπτει αν χρησιμοποιηθούν πραγματικοί αριθμοί μπορεί να δοθεί με την εξής περιγραφική μορφή:

$$x \times y = \{(a,\ b) / a \in R,\ b \in R\} \tag{12}$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών με στοιχεία πραγματικές τιμές.

Στην περίπτωση που θεωρήσουμε πως τα παραπάνω είναι συγκεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί το κάθε διατεταγμένο ζεύγος αντιστοιχεί σε ένα σημείο, ενώ ισχύει και το αντίστροφο δηλαδή σε κάθε σημείο του ορθοκανονικού συστήματος αναφοράς αντιστοιχεί ένα μόνο σημείο. Επιπλέον κάθε σύνολο $x \times y$ (με $x \in R$, $y \in R$) μπορεί να αποδοθεί ως $R \times R$ ή εναλλακτικά R^2.

Στην περίπτωση που χρησιμοποιηθούν τριάδες (x, y, z) πραγματικών αριθμών και αυτές αποδοθούν γραφικά σε τρισδιάστατο σύστημα αξόνων προκύπτει ο χώρος τριών διαστάσεων. Επιπλέον, επειδή αναφερόμαστε σε πραγματικούς αριθμούς ο χώρος συμβολίζεται $R \times R \times R$ ή εναλλακτικά R^3.

1.5.1 Η έννοια της συνάρτησης

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο κάθε διατεταγμένο ζεύγος (x, y) αποτελεί μία σχέση μεταξύ των δύο τιμών x και y. Σε κάθε x, μπορεί να αντιστοιχεί μία ή περισσότερες τιμές του y.

Στην περίπτωση που σε κάθε τιμή του x, αντιστοιχεί μία και μόνη τιμή του y, τότε λέμε πως το y αποτελεί συνάρτηση του x, και συμβολίζεται $y = f(x)$. Η έννοια της συνάρτησης επομένως αποδίδει ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών με την ιδιότητα πως κάθε τιμή του x, καθορίζει με μοναδικό τρόπο μία τιμή του y. Μία συνάρτηση είναι σχέση ενώ δεν ισχύει το αντίστροφο. Επιπλέον κάθε τιμή του y, στα πλαίσια μιας συνάρτησης μπορεί να αντιστοιχεί σε περισσότερα του ενός x, ενώ όπως ήδη αναφέρθηκε δεν μπορεί να ισχύει το αντίστροφο.

Η συνάρτηση αποκαλείται επίσης και μετασχηματισμός. Η συναρτησιακή σχέση $y = f(x)$ αποδίδει έναν κανόνα με τον οποίο το σύνολο των x μετασχηματίζεται στο σύνολο των y. Για το λόγο αυτό μία συνάρτηση μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$f : x \to y \tag{13}$$

Με αυτόν τον τρόπο το f συμβολίζει τον κανόνα απεικόνισης ή μετασχηματισμού ενώ το βέλος δηλώνει την κατεύθυνση του μετασχηματισμού. Προκειμένου να αποδώσουμε διαφορετικούς κανόνες μετασχηματισμού χρησιμοποιούμε διαφορετικούς συμβολισμούς. Αρκετά ευρεία είναι η χρήση των φ και ψ, ή τους λατινικούς χαρακτήρες g, z.

Σε μία συνάρτηση η τιμή y χαρακτηρίζεται ως τιμή της συνάρτησης, η εξαρτημένη μεταβλητή, ενώ η μεταβλητή x αποτελεί την ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης ή όρισμα αυτής. Επιπλέον το σύνολο τιμών που μπορεί να πάρει η μεταβλητή x αποτελεί το πεδίο ορισμού, ενώ το σύνολο των τιμών που μπορεί να πάρει η μεταβλητή y αποτελεί το πεδίο τιμών.

Σημαντικές είναι οι συναρτήσεις στην μελέτη των οικονομικών υποδειγμάτων με δεδομένο πως οι εξισώσεις συμπεριφοράς αποτελούν στην πλειοψηφία τους συναρτησιακές μορφές. Βασικό χαρακτηριστικό των πεδίων ορισμού και των πεδίων τιμών στα οικονομικά υποδείγματα είναι ο περιορισμός αυτών στις θετικές τιμές και συνεπώς ο περιορισμός της γραφικής τους απεικόνισης στο πρώτο τεταρτημόριο ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων. Γενικά όταν θέλουμε να προσδιορίσουμε ένα οικονομικό μέγεθος μέσω μιας συναρτησιακής μορφής είναι αυτονόητο πως το πεδίο τιμών και το πεδίο ορισμού θα πρέπει να έχει οικονομικό νόημα.

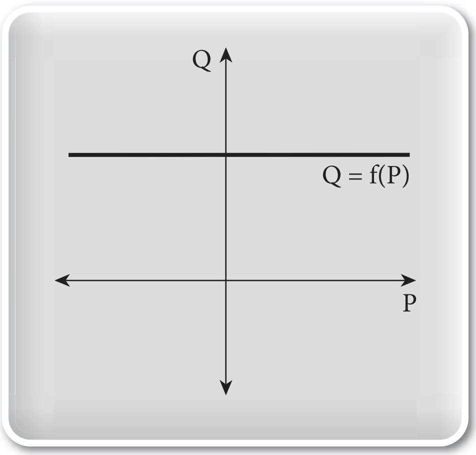
1.5.2 Τύποι Συναρτήσεων

I. Συναρτήσεις μιας ανεξάρτητης μεταβλητής

Η μορφή της συνάρτησης $y = f(x)$ είναι γενική, ενώ ο πραγματικός κανόνας είναι δυνατόν να αναλυθεί. Στις παραγράφους που ακολουθούν παρατίθενται μία σειρά από συγκεκριμένους τύπους συναρτήσεων που ο καθένας αντιπροσωπεύει ένα διαφορετικό κανόνα απεικόνισης.

Σταθερή Συνάρτηση

Μία συνάρτηση λέγεται σταθερή όταν το πεδίο τιμών της συνάρτησης αποτελείται από ένα και μοναδικό στοιχείο. Μία τέτοια συνάρτηση απεικονίζεται διαγραμματικά ως μία ευθεία παράλληλη στον άξονα των x με δεδομένο πως ανεξάρτητα από την τιμή του x, η τιμή του y παραμένει αμετάβλητη.



Σχήμα 3:
Ανελαστική συνάρτηση ζήτησης

Ως σταθερή σε επίπεδο οικονομικής ανάλυσης παραμένει η ποσότητα ανεξάρτητα από την μεταβολή της τιμής όταν η ελαστικότητα ζήτησης για το εν λόγω προϊόν είναι τέλεια ανελαστική. Ένα τέτοιο παράδειγμα απεικονίζεται στο σχήμα 3.

Ασκήσεις

1. Ποια από τα ακόλουθα σχήματα αν αποδοθούν γραφικά σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων αποτελούν συναρτήσεις:
   α) Τρίγωνο, β) Τετράγωνο, γ) Κύκλος.
2. Αν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $y=7+2x$, είναι το σύνολο $\left[1,\ 3\right]$, να υπολογιστεί το πεδίο τιμών της συνάρτησης.
3. Να βρεθεί το πεδίο τιμών της συνάρτησης $y=-x^2$, με δεδομένη την θετικότητα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης

Πολυωνυμική Συνάρτηση

Η πολυωνυμική συνάρτηση n-βαθμού μιας μόνο μεταβλητής x έχει την ακόλουθη μορφή:

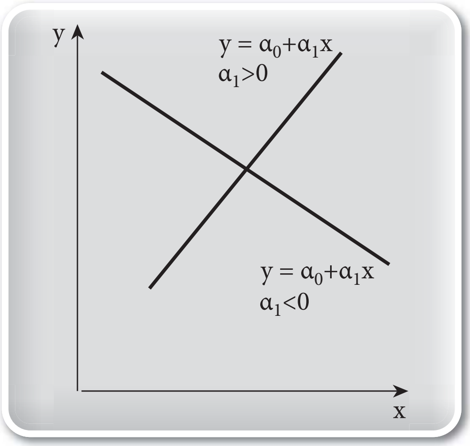
$$y=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_n x^n \qquad (14)$$

Ο κάθε όρος της παραπάνω συνάρτησης περιλαμβάνει έναν συντελεστή και ο κάθε όρος x είναι υψωμένος σε μία μη αρνητική δύναμη. Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί πως ο κάθε όρος που είναι υψωμένος σε μία δύναμη ακολουθεί έναν συντελεστή με δείκτη τη δύναμη στην οποία είναι υψωμένος ο αντίστοιχος όρος x.

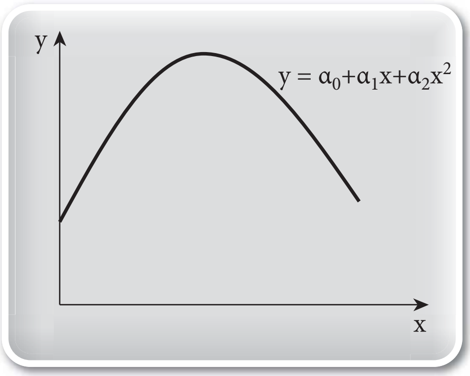
Βάσει της μεγαλύτερης δύναμης στην οποία είναι υψωμένη η μεταβλητή x μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τις συναρτήσεις στις ακόλουθες κατηγορίες:

$y=\alpha_0$	(Σταθερή Συνάρτηση)
$y=\alpha_0+\alpha_1 x$	(Γραμμική Συνάρτηση ή πολυωνυμική συνάρτηση 1ου βαθμού)
$y=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2$	(Τετραγωνική Συνάρτηση ή Πολυωνυμική Συνάρτηση 2ου βαθμού)
$y=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3$	(Κυβική Συνάρτηση ή Πολυωνυμική Συνάρτηση 3ου βαθμού) κ.ο.κ.

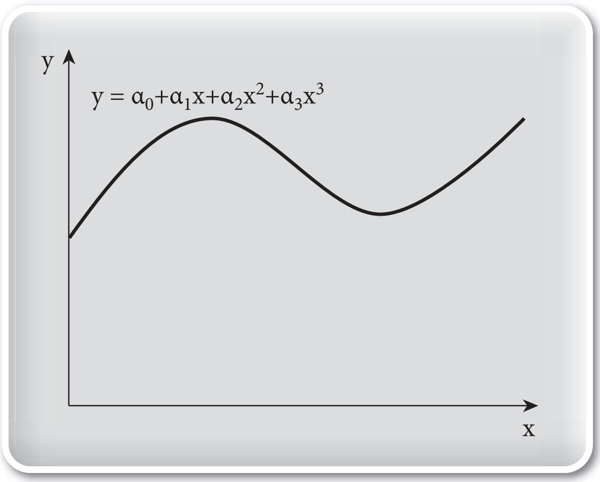
Η μεγαλύτερη δύναμη στην οποία είναι υψωμένη η μεταβλητή x χαρακτηρίζει το βαθμό της πολυωνυμικής συνάρτησης. Για το λόγο αυτό η τετραγωνική



***Σχήμα 4**:*
Γραμμική Συνάρτηση
1ου βαθμού



***Σχήμα 5**:*
Γραμμική Συνάρτηση
2ου βαθμού



***Σχήμα 6**:*
Κυβική συνάρτηση
ή συνάρτηση 3ου βαθμού

συνάρτηση λέγεται και συνάρτηση 2ου βαθμού, ενώ η κυβική συνάρτηση λέγεται πολυωνυμική συνάρτηση 3ου βαθμού κ.ο.κ.

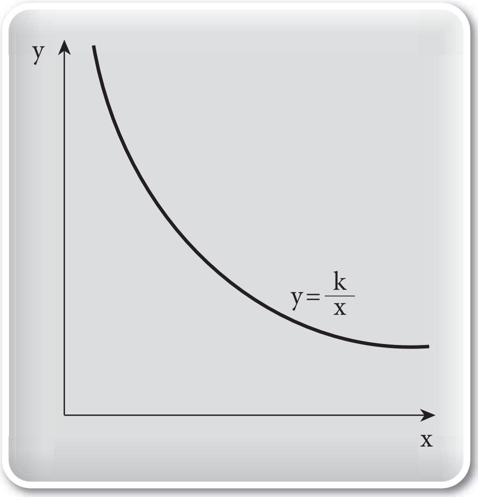
Ρητές Συναρτήσεις

Ως ρητή ορίζεται μία συνάρτηση του πηλίκου δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων. Βάσει του εν λόγω ορισμού κάθε πολυωνυμική συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί ως ρητή συνάρτηση αφού μπορεί να διαιρεθεί με την μονάδα.

Μια ειδικής μορφής ρητή συνάρτηση βαρύνουσας σημασίας για την οικονομική ανάλυση είναι η ορθοκανονική υπερβολή και δίνεται από την σχέση:

$$y = \frac{k}{x} \quad \text{ή εναλλακτικά} \quad xy = k \tag{15}$$

Βάσει αυτής της συνάρτησης το γινόμενο των δύο μεταβλητών είναι σταθερό και αντιπροσωπεύει εκείνη την συνάρτηση ζήτησης για την οποία η τιμή και η ποσότητα δίνουν σταθερό γινόμενο και συνεπώς σταθερές δαπάνες ανεξάρτητα από το επίπεδο των τιμών. Μία τέτοια συνάρτηση ζήτησης είναι η συνάρτηση μοναδιαίας ελαστικότητας ζήτησης.



Σχήμα 7:
Ορθοκανονική Υπερβολή

Άρρητες Συναρτήσεις

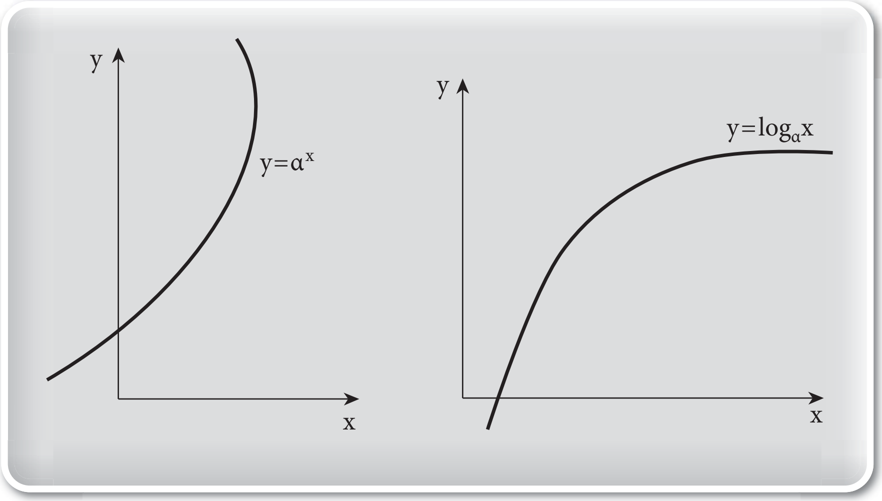
Μία συνάρτηση που εκφράζεται σε όρους πολυωνυμικών συναρτήσεων ή τετραγωνικών ριζών αποτελεί μία αλγεβρική συνάρτηση.

Τέτοιες συναρτήσεις μπορεί να έχουν την μορφή π.χ:

$$y = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 x} \quad \text{κ.λπ.}$$

Μη αλγεβρικές συναρτήσεις

Εκθετικές συναρτήσεις στις οποίες η ανεξάρτητη μεταβλητή φαίνεται στον εκθέτη ή και οι λογαριθμικές συναρτήσεις αποτελούν τις λεγόμενες μη αλγεβρικές συναρτήσεις. Σε αυτό τον τύπο των συναρτήσεων υπάγονται και τριγωνομετρικές συναρτήσεις.



***Σχήμα 8**: Εκθετική και λογαριθμική Συνάρτηση*

Ιδιότητες των εκθετικών συναρτήσεων

Αρκετά συχνά στην οικονομική ανάλυση χρησιμοποιούνται οι εκθετικές συναρτήσεις. Ένα από τα πιο γνωστά οικονομικά υποδείγματα είναι η συνάρτηση παραγωγής Cobb Douglas η οποία είναι εκθετική και θα αναφερθεί στη συνέχεια.

Λόγω της μεγάλης σημασίας αυτής απαιτείται η παρουσίαση των βασικών ιδιοτήτων των εκθετικών συναρτήσεων.

Ο ορισμός της εκθετικής συνάρτησης x^n θα δίνεται από την σχέση:

$$x^n = \underbrace{x \times x \times x \times \ldots \times x}_{n}$$

Στην ειδική περίπτωση για την οποία $n=1$ θα έχουμε $x^1 = x$.

Από τον βασικό ορισμό απορρέουν οι ακόλουθοι κανόνες:

1**^ος^ **Κανόνας $x^m \times x^n = x^{m+n}$

2**^ος^ **Κανόνας $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$, υπό τον περιορισμό πως $x \neq 0$.

3ος Κανόνας $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

4ος Κανόνας $x^0 = 1,\ x \neq 0$

5ος Κανόνας $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$

6ος Κανόνας $\left(x^m\right)^n = x^{mn}$

7ος Κανόνας $x^m y^m = (xy)^m$

Ασκήσεις

1. Να γίνει γραφική απεικόνιση των συναρτήσεων
   - $y = 5 + 2x$
   - $y = 5 - 2x$
   - $y = 7x + 4$

   (Με δεδομένο πως πρόκειται για οικονομικά υποδείγματα το πεδίο ορισμού να είναι το R_+)

2. Να καταγραφεί η διαφορά μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης συνάρτησης και πως αυτή εξάγεται από τη γραφική απεικόνιση του υποδείγματος.

3. Να γίνει η γραφική απεικόνιση της συνάρτησης $y = 49/x$ με δεδομένο πως οι τιμές των x, y είναι θετικές. Στην συνέχεια υπό την υπόθεση πως μπορεί να είναι και αρνητικές οι τιμές της εν λόγω συνάρτηση να επαναληφθεί η γραφική απεικόνιση της συνάρτησης. Πως πρέπει να τροποποιηθεί το γράφημα ώστε να αντανακλά την νέα υπόθεση

4. Να δειχθεί ότι $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$. Να διατυπωθούν οι κανόνες που εφαρμόστηκαν σε κάθε βήμα.

5. Να αποδειχθούν οι κανόνες 5-8, της προηγούμενης παραγράφου.

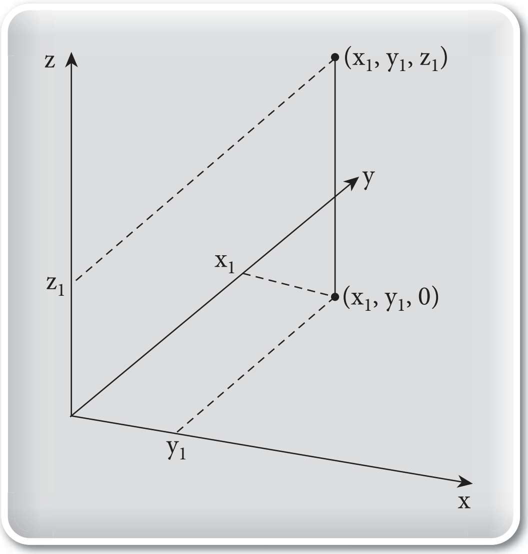
II. Συναρτήσεις δύο ή περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών

Στις προηγούμενες παραγράφους, αντικείμενο μελέτης αποτέλεσαν συναρτήσεις μιας μόνο ανεξάρτητης μεταβλητής. Η έννοια της συνάρτησης είναι δυνατόν να επεκταθεί και στην περίπτωση μεγαλύτερου αριθμού ανεξάρτητων μεταβλητών. Μία τέτοια συναρτησιακή μορφή περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση:

$$z = h(x, y)$$

Αυτό σημαίνει πως η τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής z καθορίζεται με μοναδικό τρόπο από τα ζεύγη των τιμών x, y.

Μία συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών μπορεί να είναι πολυωνυμική (γραμμική ή τετραγωνική), με βασικό χαρακτηριστικό ότι το πεδίο ορισμού αποτελείται όχι από ένα σύνολο αριθμών αλλά από ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών, με δεδομένο ότι για να οριστεί η εξαρτημένη απαιτείται η εξειδίκευση και των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών. Η γραφική απεικόνιση μιας διμεταβλητής συνάρτησης αποτελεί μία απεικόνιση ενός σημείου που ορίζεται σε ένα δισδιάστατο χώρο ειδικότερα σε ένα σημείο που βρίσκεται πάνω σε ένα ευθύγραμμο τμήμα (σημείο ενός μονοδιάστατου χώρου). Η γραφική απεικόνιση μιας διμεταβλητής συνάρτησης δίνεται στο σχήμα 9 που ακολουθεί:



Σχήμα 9: *Γραφική απεικόνιση μιας διμεταβλητής συνάρτησης*

Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει ότι για όλες τις τριάδες των αριθμών x_1, y_1, z_1 αντιστοιχεί ένας τρισδιάστατος χώρος, δηλαδή μία επιφάνεια και όχι ένα επίπεδο όπως στις μονομεταβλητές συναρτήσεις. Σημαντικά οικονομικά υποδείγματα που αποδίδονται από διμεταβλητές συναρτήσεις είναι οι συναρτήσεις παραγωγής, στις οποίες η κάθε μονάδα προϊόντος απαιτεί τη συνεισφορά αντίστοιχων μονάδων συντελεστών παραγωγής. Μία τέτοια συνάρτηση αποδίδεται μαθηματικά από την εξίσωση $Y = F(K, L)$, όπου Y συμβολίζει το παραγόμενο προϊόν, K τις μονάδες κεφαλαίου, και L τις μονάδες εργασίας που απαιτούνται για την παραγωγή του προϊόντος.

Όπως προαναφέρθηκε μία διμεταβλητή συνάρτηση μπορεί να είναι γραμμική ή και μεγαλύτερου βαθμού (δεύτερου, τρίτου κ.τ.λ.). Όταν είναι πρώτου βαθμού τότε όλες οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι υψωμένες στην πρώτη δύναμη, ενώ η δευτέρου βαθμού σημαίνει πως δεν μπορεί κάποια από τις ανεξάρτητες μεταβλητές να είναι υψωμένη σε δύναμη μεγαλύτερη της δεύτερης.

1.6 Διαδικασία επίλυσης οικονομικού υποδείγματος

Για την αντιμετώπιση ενός οικονομικού προβλήματος με τη χρήση των ποσοτικών μεθόδων απαιτείται η υιοθέτηση των ακόλουθων βημάτων:

1. Επιλογή των κατάλληλων μεταβλητών (ενδογενών και εξωγενών).
2. Μετάφραση των επιλεχθέντων αναλυτικών υποθέσεων σε εξισώσεις. Οι υποθέσεις αυτές μπορεί να είναι ανθρώπινοι, θεσμικοί, τεχνολογικοί και άλλοι τομείς του περιβάλλοντος που επιδρούν στην λειτουργία των μεταβλητών.
3. Η διαδικασία αυτή είναι δυνατόν να οδηγήσει στην εξαγωγή συμπερασμάτων μέσω μαθηματικών πράξεων και χειρισμών προκειμένου να είναι δυνατή η οικονομική τους ερμηνεία.

Η επίλυση των οικονομικών υποδειγμάτων στις περισσότερες περιπτώσεις προϋποθέτει γνώσεις σε ζητήματα άλγεβρας μητρών. Η άλγεβρα μητρών αποτελεί αντικείμενο ανάλυσης του επόμενου κεφαλαίου.