

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Ιωάννης Θωμαΐδης

Διονύσιος Λάμπας

Τεύκρος Μιχαηλίδης

Στυλιανός Νεγρεπόντης

Θεόδωρος Πάσχος

Κωνσταντίνος Τζανάκης

Βασιλική Φαρμάκη

Δημήτριος Χασάπης

Ιωάννης Χριστιανίδης

Κωνσταντίνος Χρυσανθόπουλος

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

ISBN978-960-456-182-7

© Copyright, 2009, Εκδόσεις ΖΗΤΗ, «Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών»

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις του ελληνικού νόμου (Ν.2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής άδειας του εκδότη κατά οποιοδήποτε τρόπο ή μέσο αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή (ηλεκτρονική, μηχανική ή άλλη) και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

Φωτοστοιχειοθεσία

Εκτύπωση

Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ

18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας

Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19

Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr



www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:

Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη

Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:

Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) - 105 64 ΑΘΗΝΑ • Τηλ.-Fax: 210.3211.097

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:

Ασκληπιού 60 - Εξάρχεια 114 71, Αθήνα

Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Πρόλογος

Είναι δυνατή η αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών; Με ποιο τρόπο; Ποια είναι τα πλεονεκτήματα και ποια τα μειονεκτήματα της προσπάθειας διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας στη διδακτική πρακτική; Υπάρχουν πειστικά παραδείγματα σύνδεσης διδασκαλίας και Ιστορίας των μαθηματικών;

Αυτά είναι μερικά από τα ερωτήματα που πραγματεύονται οι συγγραφείς του συλλογικού τόμου που κρατάτε στα χέρια σας.

Ο τόμος περιλαμβάνει μια συλλογή επιστημονικών άρθρων τα οποία προέκυψαν ως αποτέλεσμα σειράς διαλέξεων και Ημερίδας με θέμα τη *Διδακτική Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία*, που διοργανώθηκαν πρόσφατα από την **Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών**. Η έκδοση αυτή είναι ένα πρώτο βήμα στην υλοποίηση του κύριου στόχου της Ένωσης: στη **σύνδεση θεωρίας και πράξης στο σχολικό περιβάλλον** και στην προώθηση καινοτόμων διδακτικών προσεγγίσεων και πειραματισμών.

Οι συγγραφείς των άρθρων είναι έγκριτοι πανεπιστημιακοί (μαθηματικοί, ιστορικοί των μαθηματικών, παιδαγωγοί) αλλά και μάχιμοι εκπαιδευτικοί με μεταπτυχιακές και διδακτορικές σπουδές, καθώς και ερευνητικό έργο στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών. Οι εργασίες καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα σχετικών θεμάτων, όπως η αναζήτηση μεθοδολογίας, ιστορικού και διδακτικού υλικού, θεωρητικών πλαισίων και τρόπων ενσωμάτωσης της Ιστορίας στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών, κλπ.

Με δεδομένο ότι η συζήτηση για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών απασχολεί έντονα τη διεθνή κοινότητα της Διδακτικής των Μαθηματικών την τελευταία δεκαετία, ενώ στη χώρα μας οι σχετικές συνεισφορές είναι λιγοστές, ο συλλογικός αυτός τόμος έρχεται να καλύψει ένα κενό στην ελληνική βιβλιογραφία.

Θεωρούμε ότι το σύνολο των άρθρων χαρακτηρίζεται από πρωτοτυπία, επιστημονική εγκυρότητα και, το σημαντικότερο, αφορά στην ελληνική πραγματικότητα. Απευθύνεται δε τόσο στο σύνολο των εκπαιδευτικών, όσο και σε φοιτητές Μαθηματικών και Παιδαγωγικών Τμημάτων, καθώς και σε ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Ευχαριστούμε θερμά τους συγγραφείς, τους Πανεπιστημιακούς Δασκάλους και τους Ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών για τη συνεισφορά τους στο συλλογικό τόμο, τα μέλη της Ένωσης Ξένια Βαμβακούση, Γιάννη Θωμαΐδη και Θεόδωρο Πάσχο, που εργάστηκαν για την άρτια έκδοση αυτού του τόμου, καθώς και τον **εκδοτικό οίκο Ζήτη**, που στήριξε αυτήν την εκδοτική προσπάθεια.

Για την «**Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών**»¹

Το Διοικητικό Συμβούλιο

¹ www.didamath.gr

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	7
<i>Η αξιοποίηση των σχέσεων μεταξύ Ιστορίας των Μαθηματικών και Μαθηματικής Εκπαίδευσης: Συζήτηση σχετικά με τα υπέρ και τα κατά, βάσει της διεθνούς εμπειρίας</i>	17
Κωνσταντίνος Τζανάκης	
<i>Η αρχή της συμβατής περάτωσης του απείρου και η παράδοξη δύναμή της</i>	41
Στυλιανός Νεγρεπόντης, Βασιλική Φαρμάκη	
<i>Θεμελιώδεις γεωμετρικές έννοιες (Μία γενετική προσέγγιση)</i>	83
Διονύσιος Λάππας	
<i>Από τη Λογιστική στην Άλγεβρα: Μερικές διευκρινήσεις για το εγχείρημα του Διοφάντου</i>	97
Γιάννης Χριστιανίδης	
<i>Ιστορικά κείμενα των Μαθηματικών στη σχολική τάξη</i>	129
Δημήτρης Χασάπης	
<i>Η έννοια της «Συνέχειας»: Σύντομη ιστορική εξέλιξη. Έρευνα σε φοιτητές για το επίπεδο κατανόησης της έννοιας</i>	161
Κωνσταντίνος Η. Χρυσανθόπουλος	

<i>Η Ιστορία των Μαθηματικών ως πηγή ιδεών και υλικού για διδακτικές επιλογές και δραστηριότητες: Η περίπτωση των αρνητικών αριθμών</i>	193
Γιάννης Θωμάϊδης	
<i>Σχεδιασμός διδακτικών δραστηριοτήτων εισαγωγής σε έννοιες της Ανάλυσης αξιοποιώντας την ιστορία των Μαθηματικών</i>	221
Θόδωρος Πάσχος	
<i>Το λάπτοπ του Αρχιμήδη</i>	269
Τεύκρος Μιχαηλίδης	
Οι συγγραφείς	299
Ευρετήριο Ονομάτων	301

Εισαγωγή

Ο τόμος αυτός περιέχει τα τελικά κείμενα των εισηγήσεων που παρουσιάστηκαν στο Σεμινάριο με θέμα *Η αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους*, που διοργάνωσε την περίοδο Οκτωβρίου – Δεκεμβρίου 2008 η Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών.

Η επιλογή του συγκεκριμένου θέματος, το οποίο έχει μακρά παράδοση και συνδέεται με τα ονόματα σπουδαίων μαθηματικών², δεν υπήρξε τυχαία. Τα τελευταία χρόνια αναπτύσσονται διεθνώς σημαντικές δραστηριότητες, στις οποίες υπάρχει αξιοσημείωτη συμβολή Ελλήνων ερευνητών. Μεταξύ αυτών των δραστηριοτήτων περιλαμβάνονται η έκδοση του συλλογικού τόμου με τίτλο *History in Mathematics Education* στη σειρά μελετών της Διεθνούς Επιτροπής για τη Μαθηματική Εκπαίδευση (Fauvel & Maanen, 2000), η ανά τριετία διοργάνωση των Ευρωπαϊκών Θερινών Πανεπιστημίων Ιστορίας και Επιστημολογίας στη Μαθηματική Εκπαίδευση, καθώς και ειδικά αφιερώματα περιοδικών όπως το *Educational Studies in Mathematics* (Volume 66, No 2, 2007). Συνδεδειγμένος κρίκος όλων αυτών των δραστηριοτήτων είναι η ομάδα με την επωνυμία *International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics* (HPM), που τελεί υπό την αιγίδα της Διεθνούς Επιτροπής για τη Μαθηματική Εκπαίδευση (ICMI: *The International Commission on Mathematical Instruction*).

Στο Σεμινάριο της Ένωσης και στην Ημερίδα με την οποία έκλεισε ο κύκλος των διαλέξεων, προσκλήθηκαν ως ομιλητές Έλληνες πανεπιστημιακοί (μαθηματικοί, ιστορικοί των μαθηματικών, παιδαγωγοί) αλλά και εκπαιδευτικοί με μεταπτυχιακές και διδακτορικές σπουδές, καθώς και ερευνητικό έργο στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Τα κύρια ερωτήματα και οι βασικοί άξονες γύρω από τους οποίους περιστράφηκαν οι εισηγήσεις ήταν τα εξής:

² Αρκεί να αναφερθούν τα ονόματα των Felix Klein (1849 – 1925), Henri Poincaré (1854 – 1912), George Pólya (1887 – 1985) και René Thom (1923 – 2002).

- α)** Πώς μπορούν να ενταχθούν στοιχεία της Ιστορίας των Μαθηματικών τα οποία απετέλεσαν κρίσιμες γενετικές στιγμές μαθηματικών εννοιών, όπως π.χ. τα μαθηματικά παράδοξα – που απετέλεσαν το εφαλτήριο για τη μετάβαση σε ένα ανώτερο επίπεδο μαθηματικής σκέψης στο πολιτισμικό περιβάλλον που τα γέννησε – στη μαθηματική εκπαίδευση; Με ποιο προγραμματισμό; Με ποιους διδακτικούς στόχους; Σε ποιές βαθμίδες της εκπαίδευσης;
- β)** Μπορεί η γνώση της ιστορικής ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών να αξιοποιηθεί στην πρόβλεψη κάποιων δυσκολιών που θα αντιμετωπίσουν οι μαθητές/φοιτητές; Μπορεί, για παράδειγμα, η μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα που πραγματοποιείται στα *Αριθμητικά* του Διόφαντου να αξιοποιηθεί διδακτικά προκειμένου να αντιμετωπιστεί η καταγεγραμμένη στη διεθνή βιβλιογραφία δυσκολία των μαθητών στην αντίστοιχη νοητική μετάβαση;
- γ)** Είναι δυνατή η πειραματική εφαρμογή διδακτικών δραστηριοτήτων που ενσωματώνουν ιστορικά στοιχεία, με δεδομένα το υπάρχον αναλυτικό πρόγραμμα, τον όγκο της διδακτέας ύλης και τις παγιωμένες αντιλήψεις της πλειονότητας των δασκάλων των Μαθηματικών, των μαθητών και των γονιών τους; Με ποιο τρόπο; Με ποιο βοηθητικό διδακτικό υλικό;
- δ)** Τι μπορεί να προσφέρει στον ελληνικό χώρο η διεθνής εμπειρία αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών;

Τις ομιλίες του σεμιναρίου και της Ημερίδας παρακολούθησαν τα μέλη και πολλοί φίλοι της Ένωσης με ιδιαίτερο ενδιαφέρον, το οποίο αποτυπώθηκε στο μεγάλο αριθμό των ερωτήσεων και παρεμβάσεων καθώς και στην ευρεία συζήτηση που ακολούθησε μετά από κάθε εισήγηση. Το γεγονός αυτό ώθησε το Διοικητικό Συμβούλιο της Ένωσης να προτείνει στους εισηγητές την έκδοση των κειμένων των εισηγήσεών τους στο συλλογικό τόμο που κρατάτε στα χέρια σας.

Ο τόμος αυτός απαρτίζεται από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος παρατίθενται τα κείμενα των Κ. Τζανάκη, Σ. Νεγρεπόντη και Β. Φαρμάκη, Δ. Λάππα, Ι. Χριστιανίδη και Δ. Χασάπη. Οι συγγραφείς θέτουν θεωρητικά και ιστορικά ζητήματα τα οποία είναι δυνατόν να αξιοποιηθούν στο αναπροσανατολισμό της Μαθηματικής Εκπαίδευσης σε μια δημιουργική κατεύθυνση, αναζητώντας το ουσιώδες στη Μαθηματική παιδεία.

Στο δεύτερο μέρος παρατίθενται τα κείμενα των Κ. Χρυσανθόπουλου, Ι. Θωμαΐδη, Θ. Πάσχου και Τ. Μιχαηλίδη, στα οποία επιχειρείται η σύνδεση της Ιστορίας των Μαθηματικών με συγκεκριμένα ζητήματα μάθησης και διδασκαλίας,

ενώ παρουσιάζονται και συγκεκριμένες διδακτικές προτάσεις διδακτικής αξιοποίησής της.

Το πρώτο μέρος του τόμου ξεκινά με το κείμενο του Κώστα Τζανάκη με τίτλο *Η αξιοποίηση των σχέσεων μεταξύ Ιστορίας των Μαθηματικών και μαθηματικής εκπαίδευσης: Συζήτηση σχετικά με τα υπέρ και τα κατά, βάσει της διεθνούς εμπειρίας*. Ο συγγραφέας μεταφέρει τη μακροχρόνια εμπειρία από την ενεργό συμμετοχή του στις δραστηριότητες της ΗΡΜ (διετέλεσε, μεταξύ άλλων, πρόεδρος την τετραετία 2004-2008) και επιχειρεί μια κριτική ανάλυση των επιχειρημάτων υπέρ και κατά της ενσωμάτωσης στοιχείων της Ιστορίας των Μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση. Στη συνέχεια εστιάζει την ανάλυσή του σε αυτό που φαίνεται να αποτελεί τη “λυδία λίθο” του ζητήματος, δηλαδή στους διάφορους τρόπους με τους οποίους μπορούν να υλοποιηθούν πρακτικά οι πολυάριθμες και ενδιαφέρουσες προτάσεις που έχουν διατυπωθεί για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών. Η ανάλυση αυτή συνοδεύεται από συγκεκριμένα παραδείγματα και βιβλιογραφικές παραπομπές. Τέλος, η εργασία ολοκληρώνεται με μια λεπτομερή καταγραφή των πολλαπλών δραστηριοτήτων που έχει αναπτύξει η ΗΡΜ στη διάρκεια των τριών τελευταίων δεκαετιών. Πέρα από το γεγονός ότι υπενθυμίζει ότι στο ζήτημα της διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών δεν ξεκινάμε από το μηδέν, κείμενο αυτό προσφέρει μια αξιολογική βάση σχετικών πληροφοριών για τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη .

Στην εργασία τους με τίτλο *Η αρχή της συμβατής περάτωσης του απείρου και η παράδοξη δύναμη της*, οι συγγραφείς Στυλιανός Νεγρεπόντης και Βασιλική Φαρμάκη εισάγουν την αρχή της συμβατής περάτωσης του απείρου εξετάζοντας την παράδοξη αποδεικτική της δύναμη και την αποτελεσματικότητά της στις Φυσικές Επιστήμες. Σύμφωνα με τους συγγραφείς, η αρχή αυτή βασίζεται στην παρατήρηση ότι η συνεπαγωγή ‘αν a τότε β ’ είναι αληθής, αν η πρόταση a είναι αντιφατική και ψευδής. Οι συγγραφείς αναπτύσσουν τη θέση ότι η κινητήρια δύναμη των μαθηματικών πρέπει να αναζητηθεί στις ‘συμβατές προσεγγίσεις της αντίφασης’ και ειδικότερα στις ‘συμβατές περατώσεις του απείρου’, και ότι η ιστορία των Μαθηματικών, από την αρχαιότητα μέχρι και τις ημέρες μας, γίνεται κατανοητή ως αποτελούμενη από περιόδους στις οποίες συντελείται είτε η προετοιμασία για την πραγματοποίηση μιας νέας συμβατής περάτωσης του απείρου είτε η ίδια η πραγματοποίηση μιας τέτοιας περάτωσης. Με αυτήν την οπτική, οι συγγραφείς διακρίνουν τέσσερις ιστορικές περιόδους, αναδεικνύοντας τα χαρακτηριστικά της κάθε μιας. Ξεκινούν από την περίοδο των προ-αποδεικτικών βαβυλωνιακών και αιγυπτια-

κών Μαθηματικών και τις απαρχές της Γεωμετρίας με αποδείξεις από τον Θαλή, που κατά τους συγγραφείς εμπεριέχουν *το σπόρο του παράδοξου του απείρου*. Συνεχίζουν με την περίοδο από τους Πυθαγόρειους μέχρι τον Πλάτωνα και τον Θεαίτητο, στην οποία το κεντρικό θέμα των μαθηματικών ήταν η ασυμμετρία, σημειώνοντας ότι *το μεγαλύτερο μέρος των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών και της φιλοσοφίας ερμηνεύεται με τη συμβατή περάτωση του απείρου που βασίζεται στην περιοδική ανθυφαίρεση*. Ακολουθεί η περίοδος των Ευδόξου και Αρχιμήδη, η οποία ερμηνεύεται *ως προετοιμασία για τη σύγχρονη συμβατή περάτωση του απείρου, η οποία βασίζεται στην πληρότητα των τομών Dedekind*. Τέλος, στη σύγχρονη περίοδο, από τον 17^ο μέχρι το τέλος του 19^ο αιώνα, στην οποία ο Απειροστικός Λογισμός αναπτύχθηκε στην Ευρώπη, η συμβατή περάτωση του απείρου βασίζεται στην ύπαρξη supremum (*ισοδύναμα στη συμπάγεια των κλειστών και φραγμένων διαστημάτων των πραγματικών αριθμών, ισοδύναμα στην διαγώνια διαδικασία, η οποία είναι το βασικό εργαλείο για το θεώρημα μη-πληρότητας του Gödel*). Οι συγγραφείς εντοπίζουν *μία τρίτη αρχή συμβατής περάτωσης του απείρου, η οποία βρίσκεται στη βάση του προγράμματος του Gödel για την επίλυση του προβλήματος του συνεχούς (αλλά και άλλων προβλημάτων στην Συνολοθεωρία)*.

Γίνεται μια προσπάθεια να ερμηνευθεί η «παράλογη», κατά Wigner, αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών στις Φυσικές επιστήμες από την ίδια αιτία, των συμβατών περατώσεων του απείρου.

Σημειώνουν, τέλος, ότι η ερμηνεία της Ιστορίας των Μαθηματικών με βάση την αρχή της συμβατής περάτωσης του απείρου έχει σημαντικές επιπτώσεις στις βασικές κατευθύνσεις της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο σχολείο -ως προς το περιεχόμενο και ως προς τη στόχευση- και προτείνουν συγκεκριμένες προσεγγίσεις στη διδασκαλία τόσο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας όσο και του Απειροστικού Λογισμού.

Ο Διονύσης Λάμπας στην εργασία του *Θεμελιώδεις γεωμετρικές έννοιες (μια γενετική προσέγγιση)* προσεγγίζει μέσω μιας επιστημολογικής και ιστορικής ανάλυσης το πάντοτε επίκαιρο και ανοιχτό θέμα της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ο συγγραφέας προσδιορίζει αρχικά ότι οι έννοιες πάνω στις οποίες δομείται η ανάπτυξη της Γεωμετρίας είναι η ισότητα, η ομοιότητα, το εμβαδόν και ο όγκος. Η εργασία εστιάζεται στην έννοια της ομοιότητας, η οποία θεωρείται ως η πλέον φυσική ιδιότητα που συνδέει τη Γεωμετρία με τον περιβάλλοντα χώρο και συνδέεται στενά με την έννοια της γωνίας. Με αναφορές σε βαβυλωνιακά, αιγυπτιακά και ελληνικά κείμενα αποκαλύπτεται η μακρά πορεία προς τη θεωρητικοποίηση της έννοιας της γωνίας, από τις πρώτες απόπειρες επινόησης “εργαλείων”

για τον καθορισμό της μορφής των σχημάτων μέχρι την αξιωματική διαπραγμάτευση και τη χρήση της στον ορισμό της ομοιότητας των σχημάτων που περιέχουν τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Αυτή η θεωρητικοποίηση όμως δεν αποκλείει τις άμεσες εφαρμογές στο φυσικό κόσμο, όπως δείχνει η μελέτη των οπτικών φαινομένων στα *Οπτικά* του Ευκλείδη.

Ο Γιάννης Χριστιανίδης στο κεφάλαιο με τίτλο *Από τη Λογιστική στην Άλγεβρα: Μερικές διευκρινήσεις για το εγχείρημα του Διοφάντου*, επιχειρεί μια διείσδυση στην πρώιμη ιστορία της Άλγεβρας εξετάζοντας ορισμένα ζητήματα σχετικά με τη μεθοδολογία επίλυσης αριθμητικών προβλημάτων στο έργο *Αριθμητικά* του Αλεξανδρινού Διοφάντου. Αν και έχει ως αφετηρία ανοικτά ιστοριογραφικά ερωτήματα, η εργασία συνδέεται στενά με το ζήτημα της μετάβασης από την Αριθμητική στην Άλγεβρα, το οποίο αποτελεί σημείο αιχμής στις σύγχρονες έρευνες της Διδακτικής των Μαθηματικών. Ο συγγραφέας αναλύει το εισαγωγικό τμήμα των *Αριθμητικών*, στο οποίο ο Διοφάντος εκθέτει τα διαδοχικά στάδια μετατροπής ενός αριθμητικού προβλήματος, που είναι διατυπωμένο με γενικό και αφηρημένο τρόπο, σε εξίσωση, με χρήση κατάλληλων συντομογραφιών για τον άγνωστο και τις δυνάμεις του. Στη συνέχεια αυτή η εξίσωση μετασχηματίζεται σε μια απλοποιημένη, τελική μορφή από την οποία προσδιορίζεται η τιμή του αγνώστου και από την τελευταία οι ζητούμενοι αριθμοί του προβλήματος. Ο συγγραφέας δείχνει τον τρόπο εφαρμογής αυτής της διαδικασίας σε συγκεκριμένα προβλήματα των *Αριθμητικών*, και παραθέτει σειρά επιχειρημάτων υπέρ της άποψης ότι η μέθοδος του Διοφάντου –παρά την αντίθετη άποψη ορισμένων σύγχρονων ιστορικών των Μαθηματικών– είναι γενική και έχει σαφή αλγεβρικά γνωρίσματα, αν και όχι ταυτόσημα με εκείνα των μεταγενέστερων μαθηματικών του Ισλάμ οι οποίοι υπήρξαν εισηγητές του όρου “άλγεβρα”.

Το πρώτο μέρος του τόμου ολοκληρώνεται με το κεφάλαιο *Ιστορικά κείμενα των μαθηματικών στη σχολική τάξη* από τον Δημήτρη Χασάπη, ο οποίος προτείνει την αξιοποίηση στη διδασκαλία των μαθηματικών επιλεγμένων αποσπασμάτων πρωτότυπων μαθηματικών κειμένων διαφόρων περιόδων της ιστορίας των μαθηματικών. Ο συγγραφέας, υιοθετώντας τη φιλοσοφική θεώρηση των μαθηματικών ως ανθρώπινης δραστηριότητας, θεωρεί ότι η μαθηματική σκέψη αναπτύσσεται σ’ ένα εξελισσόμενο ιστορικό process. Υποστηρίζει ότι μια διδακτική πρακτική η οποία αξιοποιεί αυτό το ιστορικό υλικό καταδεικνύει ότι τα μαθηματικά δεν είναι ανεξάρτητα από τα ιστορικά καθορισμένα κοινωνικά και πολιτισμικά πλαίσια του σταδίου ανάπτυξής τους. Ως εκ τούτου προβάλλεται η μαθηματική δραστηριότητα

τα ως κοινωνική πρακτική και η παραγόμενη μαθηματική γνώση δεν αποτελεί ένα κλειστό και τελεσίδικα περατωμένο σώμα γνώσης, αλλά υπόκειται σε διαψεύσεις και αναθεωρήσεις.

Ο συγγραφέας τεκμηριώνει με πέντε «θέσεις» την πρόταση εισαγωγής αποσπασμάτων πρωτότυπων μαθηματικών κειμένων στην αίθουσα διδασκαλίας. Θεωρεί τις θέσεις αυτές αναγκαίες «ακριβώς επειδή κάθε πρόταση και κάθε εγχείρημα χρήσης πρωτότυπων μαθηματικών κειμένων ή εισαγωγής ιστορικών τεκμηρίων στη διδασκαλία των μαθηματικών εκκινεί από διαφορετικές αφετηρίες και επιδιώκει διάφορους στόχους», όπως αναφέρει χαρακτηριστικά.

Τέλος, παρατίθεται μια σειρά μικρών αποσπασμάτων πρωτότυπων κειμένων (και οι μεταφράσεις τους) σπουδαίων μαθηματικών διάφορων εποχών, όπως των: Ευκλείδη, Διοφάντου, Stevin, Newton, Cantor, Peano, Russel, Johann Bernoulli, Euler, Gauss, D'Alembert, Lagrange, Fourier, Lobatchevsky, Cournot, Bourbaki κ.ά.

Το κεφάλαιο που συμπεριλαμβάνονται στο πρώτο μέρος του τόμου αναδεικνύουν την πολυπλοκότητα του εγχειρήματος της διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών. Όπως γίνεται ήδη φανερό από το εισαγωγικό κεφάλαιο του Κ. Τζανάκη, παρά το γεγονός ότι υπάρχει μια σημαντική παρακαταθήκη διεθνούς εμπειρίας, δεν υπάρχει ένας και μόνο ενδεδειγμένος τρόπος αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους. Το γεγονός αυτό τονίζεται και στο κεφάλαιο του Δ. Χασάπη, ο οποίος υπογραμμίζει ότι ακόμα και αν κανείς επιλέξει μια συγκεκριμένη προσέγγιση, όπως για παράδειγμα τη χρήση πρωτότυπων μαθηματικών κειμένων και ιστορικών τεκμηρίων, η επιλογή αυτή μπορεί να εκκινεί από διαφορετικές αφετηρίες και να εξυπηρετεί διαφορετικούς διδακτικούς σκοπούς.

Αλλά η πολυπλοκότητα του εγχειρήματος δεν έγκειται μόνο στην πολλαπλότητα των διδακτικών επιλογών – είναι σύμφυτος με τον ίδιο το χαρακτήρα της Ιστορίας των Μαθηματικών. Στα κεφάλαια των Σ. Νεγρεπόντη και Β. Φαρμάκη, Δ. Λάππα και Ι. Χριστιανίδη αναδεικνύεται με τον καλύτερο τρόπο το γεγονός ότι δεν υπάρχει ένας τρόπος για να «διαβάσει» κανείς την Ιστορία των Μαθηματικών. Τα ενδιαφέροντα και οι οπτικές των μελετητών φωτίζουν με διαφορετικό τρόπο την Ιστορία, αναδεικνύοντας διαφορετικές πτυχές της.

Διαβάζοντας κανείς τα τρία αυτά κεφάλαια είναι δύσκολο να αποφύγει το συμπέρασμα ότι η μελέτη σε βάθος της Ιστορίας των Μαθηματικών, από ανθρώπους που είναι ευαίσθητοποιημένοι για το ζήτημα της διδασκαλίας των μαθηματικών, μπορεί να προσφέρει πολύτιμες προσεγγίσεις στα σχολικά μαθηματικά,

τόσο ως προς το περιεχόμενο όσο και ως προς την οργάνωσή τους. Κι αυτό γιατί μπορεί να αναδείξει το σημαντικό και ουσιώδες, το οποίο δεν εξαντλείται, όπως υπογραμμίζουν οι Νεγρεπόντης και Φαρμάκη, στο «λογιστικό» και «τακτοποιητικό» κομμάτι των Μαθηματικών.

Το δεύτερο μέρος του τόμου ξεκινά με την εργασία του Κωνσταντίνου Χρυσανθόπουλου με τίτλο *Η έννοια της συνέχειας: Σύντομη ιστορική εξέλιξη – Έρευνα σε φοιτητές για το επίπεδο κατανόησης της έννοιας*. Αρχικά ο συγγραφέας επιχειρεί μια σύντομη αναδρομή στην ιστορική εξέλιξη της έννοιας της συνέχειας από την αρχαιότητα μέχρι και το 19^ο αιώνα. Ο συγγραφέας αναδεικνύει το ρόλο της διαισθητικής κατανόησης για τη συνέχεια, για παράδειγμα ως χαρακτηριστική ιδιότητα μια συνεκτικής γραμμής, στις πρώτες απόπειρες των μαθηματικών για τον ορισμό της έννοιας, και περιγράφει την αργή και επίπονη διαδικασία που κατέληξε στον αυστηρό μαθηματικό ορισμό της. Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου, ο συγγραφέας παρουσιάζει μια εμπειρική μελέτη, κατά την οποία διερεύνησε την κατανόηση από φοιτητές Μαθηματικού Τμήματος της έννοιας της ασυνέχειας. Τα ευρήματα της έρευνας αυτής δείχνουν ότι παρά το γεγονός ότι οι σημερινοί μαθητές και φοιτητές έρχονται από νωρίς σε επαφή με τον αυστηρό ορισμό της συνέχειας, η διαισθητική κατανόηση της έννοιας παραμένει το κύριο υπόβαθρο του συλλογισμού τους, όταν το ερώτημα που πρέπει να αντιμετωπίσουν απαιτεί περισσότερα από την απλή αναπαράγωγή του ορισμού.

Όπως είναι φανερό από τον τίτλο της εργασίας του, *Η Ιστορία των Μαθηματικών ως πηγή ιδεών και υλικού για διδακτικές επιλογές και δραστηριότητες: Η περίπτωση των αρνητικών αριθμών*, ο Γιάννης Θωμαΐδης εστιάζει στο πρόβλημα της διδασκαλίας και της μάθησης των αρνητικών αριθμών. Με δεδομένη τη δυσκολία των μαθητών να αποδώσουν νόημα στις πράξεις με τους αρνητικούς αριθμούς, ο συγγραφέας σκιαγραφεί μια τακτική παρουσιάσής τους, κατά την οποία καταρχάς η χρήση τους αποφεύγεται, παρόμοια με ό,τι συνέβη στην ιστορική πορεία εξέλιξής τους. Στη συνέχεια γίνεται η προσπάθεια απόδοσης νοήματος στις πράξεις με αρνητικούς με τη βοήθεια μοντέλων που είναι κοντά στη διαισθητική κατανόηση των παιδιών, για να αναδειχθεί σταδιακά η αναγκαιότητα απαγκίστρωσης από αυτά τα μοντέλα και η απόδοση νοήματος στις πράξεις των αρνητικών μέσα στο πλαίσιο ενός συστήματος θετικών και αρνητικών αριθμών που ‘οφείλουν’ να συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο ως προς ορισμένες ιδιότητες, όπως π.χ. της επιμεριστικής ιδιότητας.

Στην εργασία με τίτλο *Σχεδιασμός διδακτικών δραστηριοτήτων εισαγωγής σε έννοιες της Ανάλυσης αξιοποιώντας την Ιστορία των Μαθηματικών*, ο Θεόδωρος Πάσχος παρουσιάζει και εξηγεί το σκεπτικό βάσει του οποίου σχεδίασε μια σειρά από διδακτικές δραστηριότητες με στόχο την εισαγωγή των διδασκομένων στην έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος και στο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού. Υιοθετώντας μια ιστορικο-γενετική προσέγγιση στη διδασκαλία των μαθηματικών, ο συγγραφέας ανατρέχει στη μελέτη της κίνησης κατά τον ύστερο Μεσαίωνα, προσδιορίζει σημαντικές στιγμές της εξέλιξης των εννοιών που σχετίζονται με την κίνηση, και ανακατασκευάζει τα ιστορικά στοιχεία προκειμένου να είναι αξιοποιήσιμα από διδακτική άποψη. Ολόκληρος ο σχεδιασμός (οι δραστηριότητες σε φύλλα εργασίας) παρατίθεται σε παράρτημα, ενώ ο συγγραφέας αναφέρεται σύντομα σε θεωρητικά συμπεράσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων κατά την πειραματική εφαρμογή της διδακτικής αυτής πρότασης σε πρωτοετείς φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών.

Ο Τεύκρος Μιχαηλίδης στην εργασία του με τίτλο *Το λάπτοπ του Αρχιμήδη* παρουσιάζει τρεις διδακτικές δραστηριότητες οι οποίες σχεδιάστηκαν με στόχο την ανακάλυψη από τους ίδιους τους μαθητές θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών. Οι δραστηριότητες αυτές, οι οποίες βασίζονται σε πραγματικά προβλήματα που τέθηκαν στην ιστορική διαδρομή ανάπτυξης των Μαθηματικών, αναλύονται λεπτομερώς από τον συγγραφέα σε φύλλα εργασίας όπως εφαρμόστηκαν πειραματικά στην αίθουσα διδασκαλίας των Μαθηματικών. Η κάθε δραστηριότητα ξεκινά με την παρουσίαση ενός προβλήματος στο ιστορικό και κοινωνικό του πλαίσιο, με στόχο να οδηγηθούν οι μαθητές στα βήματα που έφεραν σταδιακά τη λύση. Οι δραστηριότητες υλοποιούνται από τους μαθητές σε υπολογιστικό περιβάλλον στο οποίο ο ηλεκτρονικός υπολογιστής χρησιμοποιείται ως αρωγός στην επίλυση των προβλημάτων, κυρίως απαλλάσσοντας τους μαθητές από άχαρους τεχνικούς υπολογισμούς.

Οι δυο πρώτες δραστηριότητες σχετίζονται με το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και αναφέρονται: (1) στον προσδιορισμό των ψηφίων του π , (2) στην έννοια της τετραγωνικής ρίζας. Η τρίτη δραστηριότητα αποσκοπεί αφενός σε μια πρώτη εισαγωγή των μαθητών στο αριθμητικό τρίγωνο και στις εφαρμογές του στη συνδυαστική και τις πιθανότητες, και αφετέρου, στη σύνδεση του τριγώνου του Πασκάλ με το τρίγωνο Σιερίνσκι ως μια πρώτη επαφή με τα φράκταλ.

Και οι τέσσερις συγγραφείς βασίζονται στην έρευνα για τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών, προκειμένου να τεκμηριώσουν τη σημαντική διάκριση ανάμεσα στη διαδικαστική ευχέρεια και την εννοιολογική κατανόηση στα μαθηματικά. Επίσης, και στις τέσσερις αυτές εργασίες γίνεται η προφανής, αλλά συχνά αγνοούμενη στο πλαίσιο της διδασκαλίας, επισήμανση ότι οι σημερινοί μαθητές και φοιτητές καλούνται να κατανοήσουν έννοιες και να αποδώσουν νόημα σε διαδικασίες οι οποίες είναι προϊόντα μιας μακράιωνης και επίπονης ιστορικής εξέλιξης. Παρά το γεγονός ότι έχουν στη διάθεσή τους εννοιολογικά εργαλεία τα οποία δεν διέθεταν οι μαθηματικοί που αγωνίζονταν να χτίσουν και να οριοθετήσουν τις ίδιες έννοιες, οι σημερινοί μαθητές και φοιτητές δεν έχουν πρόσβαση στα ερωτήματα και τα προβλήματα που οδήγησαν στην αναγκαιότητα εισαγωγής και σταδιακής μαθηματικής εκλέπτυνσης εννοιών όπως η συνέχεια, το ολοκλήρωμα και οι αρνητικοί αριθμοί. Η άμεση (*direct explicit*), ή έμμεση (*indirect implicit*) αξιοποίηση στοιχείων της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία, όπως προτείνεται από τους συγγραφείς, μπορεί να αποτελέσει οδηγό για την ανίχνευση αρχικών, βασιζόμενων στη διαίσθηση, αντιλήψεων των φοιτητών/μαθητών για τις μαθηματικές έννοιες (Κ. Χρυσανθόπουλος), να αποτελέσει πηγή άντλησης υλικού (συγκεκριμένων προβλημάτων και προσεγγίσεων ιστορικά καταγεγραμμένων) που είναι δυνατό να αξιοποιηθεί ως γέφυρα ανάμεσα στις αρχικές αντιλήψεις των μαθητών και τις μαθηματικά πιο εκλεπτυσμένες έννοιες (Θ. Πάσχος, Ι. Θωμαΐδης, Τ. Μιχαηλίδης), να αποτελέσει ευκαιρία ανάπτυξης ενός άλλου είδους μαθηματικού εγγραμματισμού, που επιτρέπει την αναγνώριση των *συμβάσεων* που υπόκεινται της ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών (Ι. Θωμαΐδης). Στις τρεις πρώτες περιπτώσεις (Κ. Χρυσανθόπουλος, Ι. Θωμαΐδης, Θ. Πάσχος) η Ιστορία φαίνεται να μπαίνει στο παιχνίδι της διδασκαλίας *έμμεσα*, μέσω της ευαισθητοποίησης και των επιλογών του διδάσκοντος. Ο Τ. Μιχαηλίδης, αντίθετα, αξιοποιεί *άμεσα* στοιχεία της Ιστορίας των Μαθηματικών προκειμένου να προσεγγίσουν οι μαθητές το διδακτικό αντικείμενο.

Έχει ενδιαφέρον να σημειωθεί εδώ ότι από τα κείμενα τόσο του πρώτου όσο και του δεύτερου μέρους του τόμου φαίνεται να αναδύεται η διάσταση ανάμεσα στις (μεγάλες) μαθηματικές ιδέες και τις τεχνικές υπολογιστικού τύπου, η οποία «μεταφέρεται» και σε ατομικό/ψυχολογικό επίπεδο, μέσω της διαφοροποίησης της εννοιολογικής κατανόησης και της διαδικαστικής ευχέρειας. Φυσικά, η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, είτε φυλογενετικά είτε οντογενετικά, χρειάζεται και τις ιδέες και τις τεχνικές. Φαίνεται όμως ότι στα σχολικά μαθηματικά η έμφαση έχει δοθεί στις τεχνικές, υποσκελίζοντας και πολλές φορές αποκλείοντας την πρόσβαση στις μαθηματικές ιδέες. Δεν είναι τυχαίο, λοιπόν, που μια ισχυρή

πεποίθηση των μαθητών και φοιτητών για τα μαθηματικά είναι ότι πρόκειται για ένα σύνολο κανόνων και διαδικασιών που οφείλουν να αποστηθίζουν και να αναπαράγουν. Μέσω των κειμένων του τόμου αυτού διαφαίνεται η ανάγκη –αλλά και το εφικτό- του εγχειρήματος να προσεγγιστούν τα Μαθηματικά με ένα τρόπο που αναδεικνύει το χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης. Προς αυτή την κατεύθυνση, μια πιο στενή συνεργασία μελετητών της Ιστορίας των Μαθηματικών, ερευνητών της Διδακτικής τους και ευαισθητοποιημένων εκπαιδευτικών θα ήταν ιδιαίτέρως επιθυμητή.

Κλείνοντας το σύντομο αυτό εισαγωγικό σημείωμα, ελπίζουμε ότι η συλλογή των άρθρων που συμπεριλαμβάνονται στον τόμο δίνει στον αναγνώστη μια γεύση από τον πλούτο των απόψεων και προσεγγίσεων που αναπτύσσονται στο χώρο μελέτης της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους και, ταυτόχρονα, ορισμένες αρχικές ιδέες για άμεση διδακτική αξιοποίηση. Περισσότερο όμως ευχόμαστε αυτός ο τόμος να λειτουργήσει ως ερέθισμα για περαιτέρω προσωπική αναζήτηση και ως έναυσμα για επικοινωνία και συνεργασία μεταξύ των ανθρώπων που δραστηριοποιούνται στο χώρο αυτό.

Ξένια Βαμβακούση
Γιάννης Θωμαΐδης
Θόδωρος Πάσχος