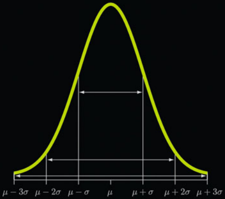
Γεώργιος Γρηγορίου Ρούσσας

Διακεκριμένος Καθηγητής του Πανεπιστημίου Davis της Καλιφόρνιας
Ομότιμος Καθηγητής του Πανεπιστημίου Πατρών
Αντεπιστέλλον Μέλος της Ακαδημίας Αθηνών

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΘΕΩΡΙΑ




$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Μετάφραση - Επιμέλεια:
Κωνσταντίνος Χ. Χατζησάββας

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα και την σφραγίδα του εκδότη.

Τίτλος αγγλικής έκδοσης:
George Roussas, Introduction to Probability, Elsevier Inc., USA, 2007
ISBN 987-0-12-088595-4

Στοιχειοθετήθηκε με το LaTeX και τη γραμματοσειρά "Κέρκης"
(Κέρκης © Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου).

ISBN 978-960-456-281-7



**Φωτοστοιχειοθεσία**
**Εκτύπωση**
**Βιβλιοδεσία**

**Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ**
18$^o$ χλμ Θεσσαλονίκης - Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392 072.222 - Fax: 2392 072.229 • e-mail: info@ziti.gr

**ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ**
Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη • Τηλ.: 2310 203.720
Fax: 2310 211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

**ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ**
**ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ**
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) - 105 64 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.-Fax: 210 3211.097

**ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ-ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ**
Ασκληπιού 60 - Εξάρχεια 114 71, Αθήνα
Τηλ.-Fax: 210 3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

**ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ**
www.ziti.gr

# Πρόλογος της Έκδοσης στην Ελληνική

Στο μεταφρασμένο από την Αγγλική πρόλογο, ο αναγνώστης θα βρει μια σύντομη επισκόπηση της ύλης, μια μάλλον λεπτομερή περιγραφή του περιεχομένου του συγγράμματος αυτού ανά κεφάλαιο, την περιγραφή ορισμένων ιδιοτύπως χαρακτηριστικών του βιβλίου τούτου, όπως επίσης και μερικά συμπερασματικά σχόλια.

Στον παρόντα σύντομο πρόλογο του μεταφρασμένου κειμένου επιθυμώ να παραθέσω εν συντομία ορισμένα ουσιώδη πληροφοριακά στοιχεία.

Καταρχήν, ο αντικειμενικός σκοπός της μετάφρασης του βιβλίου είναι η φιλοδοξία να συμβάλει στον εμπλουτισμό της υπάρχουσας ελληνικής βιβλιογραφίας στο υπό μελέτη αντικείμενο.

Η ύλη που περιλαμβάνεται εδώ είναι πλέον ή αρκετή για ένα εξαμηνιαίο μάθημα στην πιθανοθεωρία σε προπτυχιακό επίπεδο. Με άνετο ρυθμό παρουσίασης της ύλης και πλήρη κάλυψη όλων των κεφαλαίων, η διδασκαλία μπορεί να επεκταθεί σε δύο διδακτικά εξάμηνα.

Κατά τη μετάφραση καταβλήθηκε έντονη προσπάθεια, αφενός μεν να χρησιμοποιηθούν δόκιμοι όροι στην Ελληνική και αφετέρου να αποφευχθεί εξολοκλήρου η χρήση ξενόγλωσσων όρων.

Τα κύρια χαρακτηριστικά του εγχειριδίου αυτού μπορεί να συνοψισθούν ως εξής:

- Η χρησιμοποίηση πληθώρας παραδειγμάτων, τα οποία συζητούνται με σημαντική λεπτομέρεια.

- Η περίληψη ενός εκτενούς αριθμού ασκήσεων κατανεμημένων ανά ενότητα. Σκοπός των ασκήσεων είναι να συμπληρώσουν τα παραδείγματα και να εμπεδώσουν τη θεωρία που αναπτύσσεται στο κύριο μέρος του βιβλίου. Επίσης οι ασκήσεις διατρανώνουν το σημαντικό ρόλο που διαδραματίζει η πιθανοθεωρία σχεδόν σε κάθε φάση της ανθρώπινης δραστηριότητας.

Το θεωρητικό επίπεδο διαπραγμάτευσης της ύλης ουδέποτε υπερβαίνει τα προαπαιτούμενα. Εξάλλου, σχεδόν κανένα αποτέλεσμα δεν διατυπώνεται χωρίς να δοθεί το ανάλογο θεωρητικό υπόβαθρο. Στο πλαίσιο τούτο έχει καταβληθεί εξαιρετική προσπάθεια προς δύο κατευθύνσεις: Να μην περιληφθεί τίποτε που δεν είναι απόλυτα αναγκαίο, και να μη διατυπωθεί τίποτε χωρίς να δοθεί ταυτόχρονα και το απαιτούμενο θεωρητικό υπόβαθρο. Υπό το πνεύμα αυτό, το βιβλίο είναι στο σύνολό του, τόσο “εφαρμοσμένο” όσο και “θεωρητικό”, εντός των προδιαγεγραμμένων πάντοτε ορίων. Παρέχει μια συμπαγή γνώση του αντικειμένου της πιθανοθεωρίας εμπλουτισμένο με εφαρμογές, όπως θα επιθυμούσε ο χρήστης του αντικειμένου αυτού. Επίσης δίνει στερεό υπόβαθρο για όσους σκοπεύουν να συνεχίσου σπουδές σε μεταπτυχιακό επίπεδο.

Άλλα χαρακτηριστικά του βιβλίου τούτου είναι:

- Η περίληψη ενός κεφαλαίου, του Κεφαλαίου 13, εισαγωγικό στη στατιστική συμπερασματολογία.
- Η περίληψη μιας εκτενούς κατάστασης όλων των συμβολισμών και συντμήσεων που χρησιμοποιούνται στο βιβλίο.
- Η περίληψη εκτενών πινάκων των κατανομών: διωνυμικής, Poisson, κανονική και $\chi^2$.
- Η περίληψη μιας κατάστασης μερικών μαθηματικών τύπων που χρησιμοποιούνται στο κείμενο.
- Η περίληψη μάλλον εκτενών απαντήσεων σε όλες τις ασκήσεις με άρτιο αύξοντα αριθμό.

Ευελεπιστούμε ότι το Ελληνικό αναγνωστικό κοινό —κυρίως η φοιτητιώσα νεολαία— θα επωφεληθεί από τη διαθεσιμότητα του συγγράμματος αυτού, είτε υπό μορφή απαιτούμενου διδακτικού εγχειριδίου, είτε ως συμπλήρωμα άλλου βιβλίου.

Κλείνοντας τον πρόλογο τούτο, επιθυμώ να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου στον Δρ. Κωνσταντίνο Χατζησάββα του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, που είχε την καλωσύνη να αναλάβει τη μετάφραση του Αγγλικού κειμένου, όπως και για το αριστοτεχνικό, πράγματι, έργο που εκτέλεσε.

Τέλος, επιθυμώ να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον εκδοτικό οίκο ΖΗΤΗ για την απόφασή του να αναλάβει τη μετάφραση του συγγράμματος αυτού από την Αγγλική γλώσσα και να προβεί στην έκδοση του επιμελημένου και καλαίσθητου αυτού τόμου.

*Γεώργιος Γρ. Ρούσσας*

Πανεπιστήμιο Καλιφόρνιας, Davis

(Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2011)

# Πρόλογος

## Επισκόπηση

Το βιβλίο τούτο είναι ένα εισαγωγικό βιβλίο στη θεωρία της πιθανότητας. Δεν απαιτείται προηγούμενη γνώση του αντικειμένου· πάντως, αν ο αναγνώστης έχει μια εμπειρία σε θέματα στοιχειώδους ανάλυσης και πιθανοτήτων θα είναι προς όφελός του, υπό την έννοια ότι δε θα συναντήσει για πρώτη φορά εδώ, τις βασικές έννοιες.

Τα προαπαιτούμενα από μαθηματικής πλευράς είναι ένα τυπικό μάθημα λογισμού, πρώτου έτους. Σε συγκεκριμένες περιπτώσεις μπορεί να αποδειχθεί χρήσιμη και η γνώση των βασικών εννοιών της γραμμικής άλγεβρας. Συχνά, οι φοιτητές συναντούν κάποιες από αυτές τις βασικές έννοιες στα πλαίσια του λογισμού. Στοιχειώδεις γνώσεις στη διαφόριση και την ολοκλήρωση είναι επαρκείς για το μεγαλύτερο μέρος του βιβλίου. Σε μερικά μέρη των Κεφαλαίων 7 ως 11, χρησιμοποιείται η έννοια του πολλαπλού ολοκληρώματος. Στο Κεφάλαιο 11, ο φοιτητής είναι καλό να έχει μια στοιχειώδη ευχέρεια με τις βασικές τεχνικές αλλαγής μεταβλητών σε ένα απλό ή πολλαπλό ολοκλήρωμα.

## Περιγραφή των Κεφαλαίων

Το υλικό που συζητείται στο βιβλίο αυτό είναι αρκετό για να καλύψει ένα εξαμηνιαίο μάθημα σε εισαγωγικές πιθανότητες. Ένα τέτοιο μάθημα περιλαμβάνει μια σχετικά εκτενή συζήτηση των Κεφαλαίων 1 εως 12, εκτός, ίσως, από τις εξαγωγές των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας που ακολουθεί τους Ορισμούς 1 και 2 του Κεφαλαίου 11. Θα μπορούσε επίσης να περιλάβει μια σύντομη συζήτηση του Κεφαλαίου 13.

Το μεγαλύτερο μέρος της ύλης των Κεφαλαίων 1 εως 12 —με μια σύντομη περιγραφή των βασικών εννοιών του Κεφαλαίου 13— μπορεί επίσης να καλυφθεί σε ένα τριμηνιαίο μάθημα εισαγωγής στις πιθανότητες. Στην περίπτωση αυτή, ο διδάσκων μπορεί να παραλείψει τις προαναφερθείσες εξαγωγές των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας, όπως επίσης και τις Ενότητες 9.4, 10.3, 11.3 και 12.2.3.

Μια περιγραφή ανά κεφάλαιο έχει ως εξής: Το Κεφάλαιο 1 περιλαμβάνει 16 παραδείγματα τα οποία επιλέγονται από ένα ευρή φάσμα εφαρμογών. Στόχος τους είναι να καταστήσουν προφανές στο φοιτητή το εύρος των εφαρμογών της πιθανότητας και να επισύρουν την προσοχή του στην πληθώρα των περιπτώσεων για τις οποίες πιθανοθεωρητικές ερωτήσεις είναι σχετικές. Σ' αυτό το σημείο, τίθενται ερωτήσεις χωρίς τις αντίστοιχες απαντήσεις· οι απαντήσεις απαιτούν τη μεθοδολογία που αναπτύσσεται στα διάφορα κεφάλαια. Οι απαντήσεις στις περισσότερες από τις ερωτήσεις δίνονται υπό μορφή παραδειγμάτων και ασκήσεων στα επόμενα κεφάλαια. Στο Κεφάλαιο 2, εισάγεται η έννοια του πειράματος τύχης μαζί με σχετικές έννοιες και μερικά θεμελιώδη αποτελέσματα. Εδώ εισάγεται επίσης η έννοια της τυχαίας μεταβλητής μαζί με βασικά αποτελέσματα απαρίθμησης. Το Κεφάλαιο 3 αφιερώνεται στην εισαγωγή της έννοιας της πιθανότητας και στη συζήτηση μερικών βασικών ιδιοτήτων και αποτελεσμάτων, που περιλαμβάνουν και την κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται η έννοια της υπό συνθήκης (ή δεσμευμένης) πιθανότητας, σχετικά με αυτή αποτελέσματα, καθώς και η έννοια της ανεξαρτησίας. Ποσότητες όπως η μαθηματική ελπίδα, η διασπορά, η ροπογενήτρια συνάρτηση, η διάμεσος τιμή και η επικρατούσα τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 5, μαζί με μερικές βασικές πιθανοθεωρητικές ανισότητες.

Το επόμενο κεφάλαιο, Κεφάλαιο 6, είναι αφιερωμένο στη συζήτηση μερικών διακριτών και συνεχών κατανομών πιθανοτήτων που χρησιμοποιούνται συχνά στην πράξη.

Σε προβλήματα που αφορούν ταυτόχρονα δύο τυχαίες μεταβλητές, εμφανίζεται η έννοια της από κοινού κατανομής τους, όπως επίσης οι περιθώριες και οι υπό συνθήκη (ή δεσμευμένες) συναρτήσεις πυκνοτήτων πιθανοτήτων, όπως επίσης και οι υπό συνθήκη (ή δεσμευμένη) μαθηματική ελπίδα και διασπορά. Η σχετική ύλη συζητείται στο Κεφάλαιο 7. Η συζήτηση συνεχίζεται στο Κεφάλαιο 8 με την εισαγωγή των εννοιών της συνδιασποράς και του συντελεστή συχέτισης δύο τυχαίων μεταβλητών.

Οι έννοιες του Κεφαλαίου 7, γενικεύονται για περισσότερες από δύο τυχαίες μεταβλητές στο Κεφάλαιο 9, το οποίο ολοκληρώνεται με τη συζήτηση δύο δημοφιλών πολυμεταβλητών κατανομών και την αναφορά σε μια τρίτη κατανομή. Στο Κεφάλαιο 10 μεταφέρεται κατάλληλα η έννοια της ανεξαρτησίας γεγονότων, σε ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών. Επίσης, παρουσιάζονται μερικές από της συνέπειες της ανεξαρτησίας. Επιπλέον, το κεφάλαιο περιλαμβάνει ένα αποτέλεσμα με σημαντική σημασία στη στατιστική, το Θεώρημα 6 της Ενότητας

10.3.

Το επόμενο Κεφάλαιο, Κεφάλαιο 11, αφιερώνεται στο πρόβλημα του υπολογισμού της κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής που είναι το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού μιας δοθείσης τυχαίας μεταβλητής. Επίσης θεωρούμε το ίδιο πρόβλημα όταν δύο ή περισσότερες μεταβλητές μετασχηματίζονται σε ένα ισάριθμο σύνολο νέων τυχαίων μεταβλητών. Τις περισσότερες φορές απλώς παραθέτουμε τα σχετικά αποτελέσματα, εφόσον η απόδειξή τους βασίζεται σε αλλαγή μεταβλητών ενός απλού ή πολλαπλού ολοκληρώματος, που είναι ένα πρόβλημα λογισμού. Οι τρεις τελευταίες ενότητες του κεφαλαίου αφιερώνονται σε τρεις ομάδες ειδικών, αλλά σημαντικών μετασχηματισμών.

Το βιβλίο ολοκληρώνεται ουσιαστικά με το Κεφάλαιο 12, όπου παρατίθενται δύο από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα της θεωρίας των πιθανοτήτων, πιο συγκεκριμένα, ο ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών και το κεντρικό οριακό θεώρημα. Επίσης, παρουσιάζονται μερικές εφαρμογές των θεωρημάτων αυτών και το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με επιπλέον αποτελέσματα, που είναι κατ΄ ουσίαν ένας συνδυασμός του ασθενούς νόμου των μεγάλων αριθμών και του κεντρικού οριακού θεωρήματος. Αυτά τα επιπλέον αποτελέσματα δεν είναι μόνο πιθανοθεωρητικού ενδιαφέροντος αλλά είναι σημαντικά και από πλευράς στατιστικής.

Όπως προαναφέρθηκε ήδη, το τελευταίο κεφάλαιο του βιβλίου, Κεφάλαιο 13, περιλαμβάνει μια σύντομη επισκόπηση της στατιστικής συμπερασματολογίας.

## Βασικά Χαρακτηριστικά

Τα βασικά χαρακτηριστικά του βιβλίου αυτού μπορούν να συνοψιστούν ως ακολούθως. Το βιβλίο αρχίζει με ένα σύντομο κεφάλαιο που αποτελείται αποκλειστικά από παραδείγματα, με σκοπό να δώσει ένα κίνητρο για τη μελέτη των πιθανοτήτων.

Περιλαμβάνει σημαντική, σε έκταση, ύλη —οργανωμένη σε δώδεκα κεφάλαια— με λογικό και συνεπή τρόπο.

Πριν αρχίσει η συζήτηση της έννοιας της πιθανότητας, συγκεντρώνει όλες τις απαραίτητες, θεμελιώδεις έννοιες και αποτελέσματα, συμπεριλαμβανομένων και βασικών αποτελεσμάτων απαρίθμησης.

Η έννοια της τυχαίας μεταβλητής και της κατανομής της, καθώς και τα συνήθη αριθμητικά χαρακτηριστικά που συνδέονται με αυτή, εισάγονται ομαδικά και σε αρχικό στάδιο, έτσι ώστε να αποφευχθεί κατακερματισμός των ορισμών. Συνεπώς, κατά τη συζήτηση συγκεκριμένων διακριτών και συνεχών τυχαίων μεταβλητών στο Κεφάλαιο 6, είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε τα συνήθη αριθμητικά χαρακτηριστικά τους, όπως τη μαθηματική ελπίδα, τη διασπορά, τη ροπογεννήτρια συνάρτηση, κ.λπ.

Γενικεύσεις συγκεκριμένων εννοιών, από μια τυχαία μεταβλητή σε περισσότερες τυχαίες μεταβλητές χωρίζονται σε δύο μέρη με στόχο να αποφευχθεί σύγχυση και να βελτιωθεί η κατανόηση. Έτσι, κατ' αρχάς παρουσιάζεται γενίκευση για δύο τυχαίες μεταβλητές και εν συνεχεία για περισότερες. Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών μελετάται συστηματικά αλλά πάντοτε εντός του πλαισίου που υπαγορεύεται από το επίπεδο του βιβλίου. Ιδιαίτερα, η αναπαραγωγική ιδιότητα συγκεκριμένων κατανομών χρησιμοποιείται ευρέως.

Όλα τα απαραίτητα αποτελέσματα για το μετασχηματισμό τυχαίων μεταβλητών συγκεντρώνονται σε ένα κεφάλαιο, Κεφάλαιο 11, αντί να παρουσιάζοντα διάσπαρτα σε διαφορετικά κεφάλαια. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει επίσης την απόδειξη της κατανομής διατεταγμένων στατιστικών συναρτήσεων, σαν εφαρμογή ενός θεωρήματος που παρατίθεται προηγουμένως. Η μελέτη γραμμικών μετασχηματισμών μας παρέχει το μέσο για να θεμελιώσουμε το Θεώρημα 7 της Ενότητας 11.3, ένα αποτέλεσμα μεγάλης σημασίας για τη στατιστική συμπερασματολογία.

Στο Κεφάλαιο 12 συζητούνται μερικά σημαντικά οριακά θεωρήματα, προεξαρχόντων του ασθενούς νόμου των μεγάλων αριθμών και του κεντρικού οριακού θεωρήματος. Ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών δεν μας απασχολεί εδώ γιατί ακόμα και μια συνοπτική περιγραφή της απόδειξής του ξεφεύγει από το επίπεδο ενός εισαγωγικού διδακτικού βιβλίου για τη θεωρία πιθανοτήτων.

Το βιβλίο ολοκληρώνεται με μια συνοπτική περιγραφή των βασικών εννοιών της στατιστικής συμπερασματολογίας. Αυτή η συγκεκριμένη επιλογή θεμάτων, αντί, π.χ., μερικών βασικών στοιχείων για Μαρκοβιανές αλυσίδες ή διαδικασίες Poisson, έγινε με στόχο να “ανοίξει ένα παράθυρο” για τον αναγνώστη, στο δημοφιλές αντικείμενο της στατιστικής. Ούτως ή άλλως θέματα όπως Μαρκοβιανές αλυσίδες, διαδικασίες Poisson κ.λπ. είναι δύσκολο να καλυφθούν σε ικανοποιητικό βαθμό σε ένα εισαγωγικό διδακτικό βιβλίο αφιερωμένο σε γενική πιθανοθεωρία.

Το βιβλίο περιλαμβάνει περισσότερα από 150 παραδείγματα τα οποία συζητούνται με μεγάλη λεπτομέρεια και περισσότερες από 450 ασκήσεις, συνολικά, οι οποίες βρίσκονται στο τέλος κάθε ενότητας. Επίσης, περιέχει τουλάχιστον 60 σχήματα και διαγράμματα με σκοπό να διευκολύνει τη συζήτηση και την κατανόηση. Στο παράρτημα υπάρχουν πίνακες για επιλεγμένες διακριτές και συνεχείς κατανομές, καθώς και μερικά από τα αριθμητικά χαρακτηριστικά τους. Επίσης, ένας πίνακας με μαθηματικούς τύπους που χρησιμοποιούνται συχνά στο βιβλίο και μια σύντομη κατάσταση με τους βασικούς συμβολισμούς και τις συντομογραφίες. Τέλος, παρατίθενται εκτεταμένες απαντήσεις στις ασκήσεις με άρτιο αύξοντα αριθμό.

# Μερικά Τελικά Σχόλια

Ένα *Βιβλίο Λύσεων*, όπου γίνεται αναλυτική συζήτηση για το σύνολο των α-σκήσεων του βιβλίου είναι διαθέσιμο για τους διδάσκοντες.

Πίνακες επιλεγμένων διακριτών και συνεχών κατανομών, μαζί με μερικά από τα αριθμητικά χαρακτηριστικά τους, βρίσκονται στα δύο πρώτα και στο τελευταίο εσώφυλλο του βιβλίου. Τέλος, στο παράρτημα παρατίθενται πίνακες για τη διωνυμική κατανομή, την κατανομή Poisson, και την $\chi^2$ κατανομή.

Η έκφραση $\log x$ (λογάριθμος του $x$), αναφέρεται πάντα στο φυσικό λογάριθμο του $x$ (το λογάριθμο του $x$ με βάση e).

Στους δεκαδικούς αριθμούς χρησιμοποιούμε τα τρία πρώτα δεκαδικά ψηφία, όπου το ψηφίο των χιλιοστών είναι στρογγυλοποιημένο στον επόμενο μεγαλύτερο αριθμό (αν το τέταρτο δεκαδικό ψηφίο είναι μεγαλύτερο ή ίσο με 5). Μια εξαίρεση στον κανόνα αυτό γίνεται στις περιπτώσεις που η διαίρεση είναι ακριβής καθώς και όταν χρησιμοποιούμε αριθμούς από πίνακες.

Σε μερικές περιπτώσεις, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο βιβλίο G.G. Roussas, A Course in Mathematical Statistics, 2nd Edition (1997), Academic Press, όπου γίνεται εκτενέστερη συζήτηση συγκεκριμένων θέματων και αποδείξεων.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την Carol Ramirez, βοηθό μου στο συγκεκριμένο έργο, για τη μετατροπή των χειρογράφων μου σε ένα όμορφο συνόλο τυπωμένων κεφάλαιων.

# Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

# Μερικά Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Το συγκεκριμένο κεφάλαιο αποτελείται από μια μόνο ενότητα, η οποία αφιερώνεται στην παρουσίαση ενός αριθμού παραδειγμάτων (16 για την ακρίβεια), τα οποία αναφέρονται σε ένα ευρύ φάσμα των ανθρώπινων δραστηριοτήτων. Σε κάθε παράδειγμα παρουσιάζεται μια σειρά από σχετικές ερωτήσεις, οι οποίες όμως δεν πρόκειται να απαντηθούν εδώ. Πολλές από αυτές θα τις ξανασυναντήσουμε και θα τις διαπραγματευτούμε σε κεφάλαια που ακολουθούν. Στη διατύπωση των παραδειγμάτων αυτών χρησιμοποιείται μια σειρά από όρους όπως, τυχαία, μέσος όρος, γεγονός, πιθανότητα, εκτιμηθείσα πιθανότητα, πρότυπο πιθανοτήτων, ποσοστό επιτυχίας, δείγμα, δειγματοληψία και μέγεθος δείγματος ή δειγματικό μέγεθος. Επί του παρόντος, οι όροι αυτοί παρουσιάζονται στα πλαίσια της καθημερινής τους χρήσης, ενώ θα οριστούν με ακρίβεια στη συνέχεια.

**Παράδειγμα 1**

Σε μια συγκεκριμένη πολιτεία, $n$ χώροι υγειονομικής ταφής απορριμμάτων κατατάσσονται σύμφωνα με τη συγκέντρωση τριών επικίνδυνων χημικών στοιχείων: αρσενικού, βαρίου και υδραργύρου. Υποθέτουμε ότι η συγκέντρωση του καθενός από τα τρία αυτά χημικά στοιχεία χαρακτηρίζεται σαν υψηλή ή χαμηλή. Κάποιες από τις ερωτήσεις που μπορούν να τεθούν είναι οι ακόλουθες:

(i) Αν επιλέξουμε τυχαία ένα χώρο από τους $n$, ποια είναι η πιθανότητα ο χώρος αυτός να έχει μια συγκεκριμένη διαμόρφωση (σε σχέση με τα επίπεδα συγκέντρωσης των τριών επικίνδυνων χημικών στοιχείων); Πιο συγκεκριμένα, ποια είναι η πιθανότητα να έχει:

(α) Υψηλή συγκέντρωση σε βάριο;

(β) Υψηλή συγκέντρωση σε υδράργυρο και χαμηλή συγκέντρωση σε αρσενικό και βάριο, ταυτόχρονα;

(γ) Υψηλή συγκέντρωση σε δύο, οποιαδήποτε, από τα χημικά στοιχεία και χαμηλή συγκέντρωση στο τρίτο;

(δ) Υψηλή συγκέντρωση σε ένα, οποιοδήποτε, από τα χημικά στοιχεία και χαμηλή συγκέντρωση στα άλλα δύο;

(ii) Με ποιον τρόπο θα μπορούσε να ελέγξει κανείς αν η αναλογία με την οποία κατατάσσονται οι χώροι υγειονομικής ταφής απορριμμάτων σε καθεμιά από τις οκτώ δυνατές διαμορφώσεις συμφωνεί με τις προκαθορισμένες προβλέψεις;

(Δείτε τη σύντομη συζήτηση στο Κεφάλαιο 2 και το Παράδειγμα 1 στο Κεφάλαιο 3.)

**Παράδειγμα 2**

Υποθέτουμε ότι ένα ποσοστό $100\,p_1\%$ $(0< p_1 <1)$ ενός πληθυσμού παρουσιάζει μια ασθένεια. Υπάρχει διαθέσιμη μια διαγνωστική εξέταση, η οποία όμως δεν είναι απόλυτα ακριβής. Πιο συγκεκριμένα, το $100\,p_2\%$ των θετικών αποτελεσμάτων είναι λανθασμένα $(0 < p_2 < 1)$ και το ίδιο ισχύει και για το $100\,p_3\%$ των αρνητικών αποτελεσμάτων $(0 < p_3 < 1)$. Κατά συνέπεια, για έναν ασθενή που δεν έχει την ασθένεια αυτή, η εξέταση δείχνει θετικό $(+)$ αποτέλεσμα με πιθανότητα $p_2$ και αρνητικό $(-)$ αποτέλεσμα με πιθανότητα $1 - p_2$. Για έναν ασθενή που έχει την ασθένεια αυτή, η εξέταση δείχνει $(-)$ αποτέλεσμα με πιθανότητα $p_3$ και $(+)$ αποτέλεσμα με πιθανότητα $1 - p_3$.

Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο από έναν υπό εξέταση πληθυσμό, το οποίο (άτομο) και υποβάλουμε στη συγκεκριμένη διαγνωστική εξέταση. Έστω $N$ το γεγονός το άτομο αυτό να έχει την υπόψη ασθένεια, ενώ $O$ είναι το γεγονός το άτομο αυτό να μην έχει την ασθένεια. Σε αυτό το πλαίσιο, κάποιες σημαντικές ερωτήσεις που θα μπορούσαν να τεθούν (και να εκφραστούν με βάση τα $p_1, p_2$ και $p_3$) είναι:

(i) Υπολογισμός των πιθανοτήτων των ακόλουθων περιπτώσεων: $N$ και $+$, $N$ και $-$, $O$ και $+$, $O$ και $-$.

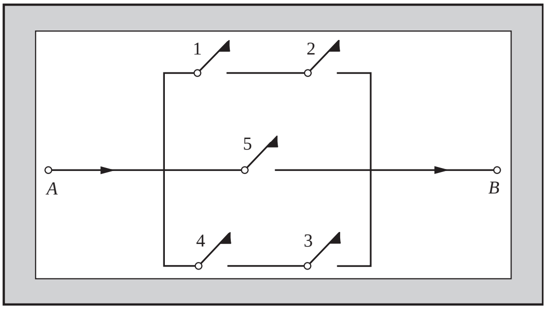
(ii) Επίσης, υπολογισμός της πιθανότητας ένα άτομο που θα εξεταστεί να δώσει σαν αποτέλεσμα $+$, ή $-$.

(iii) Αν το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι $+$, ποια είναι η πιθανότητα το άτομο αυτό όντως να πάσχει από την ασθένεια; Ποια είναι η πιθανότητα το υπόψη άτομο να πάσχει από την ασθένεια όταν το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι $-$;

(Δείτε τη σύντομη συζήτηση στο Κεφάλαιο 2 και το Παράδειγμα 10 στο Κεφάλαιο 4.)

**Παράδειγμα 3**

Στο ηλεκτρικό κύκλωμα του παρακάτω σχήματος (Σχήμα 1.1) υποθέτουμε ότι ο κάθε διακόπτης $i = 1, \ldots, 5$ είναι ανοιχτός με πιθανότητα $p_i$ και ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους διακόπτες. Ποια είναι η πιθανότητα να κυκλοφορεί ηλεκτρικό ρεύμα ανάμεσα στα σημεία $A$ και $B$;
(Το παράδειγμα αυτό συζητείται στα πλαίσια της Πρότασης 2(ii) του Κεφαλαίου 3.)




**Σχήμα 1.1**

**Παράδειγμα 4**

Μια συγκεκριμένη ταξιδιωτική ασφάλεια πληρώνει \$1.000 σε ένα πελάτη στην περίπτωση απωλειών —λόγω κλοπής ή ζημίας— για ένα 5ήμερο ταξίδι. Αν ο κίνδυνος μιας τέτοιας απώλειας υπολογίζεται να είναι 1 στα 200, ποιο θα ήταν ένα λογικό ασφάλιστρο στην προκειμένη περίπτωση;
(Το παράδειγμα αυτό συζητείται στο Παράδειγμα 1 του Κεφαλαίου 5.)

**Παράδειγμα 5**

Ο κύριος Jones ισχυρίζεται ότι έχει υπεραισθητική αντίληψη. Με στόχο να ελέγξει τον ισχυρισμό του, ένας ψυχολόγος του δείχνει πέντε κάρτες, στις οποίες καταγράφονται πέντε διαφορετικές φωτογραφίες, αντίστοιχα. Στη συνέχεια, ο ψυχολόγος καλύπτει τα μάτια του κυρίου Jones εμποδίζοντάς του την όραση, επιλέγει μια κάρτα και ζητάει από τον κύριο Jones να την αναγνωρίσει. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται $n$ φορές. Ας υποθέσουμε ότι ο κύριος Jones δεν έχει υπεραισθητική αντίληψη αλλά απαντάει βασιζόμενος απολύτως στην τύχη.

(i) Προσδιορίστε ένα κατάλληλο πρότυπο πιθανοτήτων, που να περιγράφει τον αριθμό των σωστών απαντήσεων.

(ii) Ποια είναι η πιθανότητα να είναι σωστές, το πολύ το $n/5$ των απαντήσεων;

(iii) Ποια είναι η πιθανότητα να είναι σωστές, τουλάχιστον το $n/2$ των απαντήσεων;

(Δείτε τη σύντομη συζήτηση στο Κεφάλαιο 2, καθώς και το Θεώρημα 1 στο Κεφάλαιο 6.)

**Παράδειγμα 6**

Μια κυβερνητική υπηρεσία έχει σαν στόχο να υπολογίσει το ποσοστό ανεργίας σε μια συγκεκριμένη περιοχή. Πιστεύεται, ότι ο υπολογισμός αυτός μπορεί να γίνει εύκολα και αποτελεσματικά επιλέγοντας ως δείγμα ένα μικρό κλάσμα, έστω $n$, του εργατικού δυναμικού της περιοχής. Προφανείς ερωτήσεις οι οποίες θα μπορούσαν να θεωρηθούν σε αυτό το παράδειγμα είναι:

(i) Ποιο θα μπορούσε να είναι ένα κατάλληλο πρότυπο πιθανοτήτων που θα περιγράφει τον αριθμό των ανέργων;

(ii) Ποιο είναι (προσεγγιστικά) το ποσοστό της ανεργίας στη συγκεκριμένη περιοχή;

(Περαιτέρω συζήτηση γίνεται στο ίδιο πλαίσιο με εκείνο του Παραδείγματος 5.)

**Παράδειγμα 7**

Υποθέτουμε ότι για ένα συγκεκριμένο είδους καρκίνου, η χημειοθεραπεία παρέχει παράταση ζωής 5 ετών με ποσοστό 75%, σε περίπτωση που η ασθένεια θα ανιχνευτεί σε κάποιο πρώιμο στάδιό της. Υποθέτουμε επιπλέον, ότι σε $n$ ασθενείς διαγιγνώσκεται η ασθένεια σε ένα πρώιμο στάδιο και ότι οι ασθενείς αυτοί μόλις ξεκίνησαν τη χημειοθεραπεία. Τέλος, έστω $X$ ο αριθμός των ασθενών ανάμεσα στους $n$, οι οποίοι θα επιβιώσουν 5 χρόνια.

Κάποιες από τις σχετικές ερωτήσεις που θα μπορούσαν να τεθούν είναι:

(i) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του $X$ και ποιες είναι οι πιθανότητες να εμφανιστεί η κάθε μια από αυτές;

(ii) Ποια είναι η πιθανότητα το $X$ να παίρνει τιμές ανάμεσα σε δύο καθορισμένους αριθμούς, έστω $a$ και $b$;

(iii) Ποιος είναι ο μέσος όρος των ασθενών οι οποίοι επιβιώνουν 5 χρόνια και ποια είναι η διακύμανση γύρω από τη μέση τιμή;

(Όπως στο Παράδειγμα 6.)

**Παράδειγμα 8**

Ο διευθυντής του διαφημιστικού τμήματος ενός ραδιοφωνικού σταθμού ισχυρίζεται ότι περισσότεροι από $100\,p\%, (0 < p < 1)$, των νέων ενηλίκων της πόλης ακούν ένα σαββατοκυριακάτικο μουσικό πρόγραμμα. Για να στοιχειοθετήσει τον ισχυρισμό αυτό, λαμβάνεται ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους $n$ από τον υπό εξέταση πληθυσμό και γίνεται καταμέτρηση αυτών που ακούν το συγκεκριμένο μουσικό πρόγραμμα.

(i) Επιλέξτε ένα κατάλληλο πρότυπο πιθανοτήτων, που να περιγράφει τον αριθμό των νέων που ακούν το συγκεκριμένο μουσικό πρόγραμμα κάθε σαββατοκύριακο.

(ii) Χρησιμοποιώντας σαν βάση τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί, ελέγξτε αν ο ισχυρισμός ισχύει ή όχι.

(iii) Πόσο μεγάλο θα πρέπει να είναι το δειγματικό μέγεθος $n$, έτσι ώστε να είμαστε σίγουροι (με μια ορισμένη –μεγάλη– πιθανότητα) ότι, ο μέσος όρος που θα υπολογιστεί και το πραγματικό μερίδιο της εκπομπής στον συγκεκριμένο πληθυσμό, δεν διαφέρουν σε απόλυτη τιμή, περισσότερο από έναν καθορισμένο αριθμό;

(Όπως στο Παράδειγμα 6.)

**Παράδειγμα 9**

Μια συγκεκριμένη διαδικασία παραγωγής χαρακτηρίζεται ως ευρισκόμενη "υπό έλεγχο" όταν το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων βρίσκεται εντός αποδεκτών ορίων. Υποθέτουμε ότι η διαδικασία παραγωγής είναι υπό έλεγχο για κάποιο χρονικό διάστημα και η αναλογία των ελαττωματικών αντικειμένων είναι $p$. Στην προσπάθεια ελέγχου της διαδικασίας, το προσωπικό που εργάζεται στην παραγωγή επιλέγει δειγματοληπτικά $n$ αντικείμενα. Η ύπαρξη $k$ ή περισσότερων ελαττωματικών θα είναι μια ισχυρή ένδειξη ότι η διαδικασία παραγωγής είναι "εκτός ελέγχου".

(i) Επιλέξτε ένα κατάλληλο πρότυπο πιθανοτήτων που θα περιγράφει τον αριθμό $X$ των ελαττωματικών προϊόντων· ποιες είναι οι δυνατές τιμές του $X$ και ποια είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί κάθε μια από αυτές τις τιμές;

(ii) Χρησιμοποιώντας σαν βάση τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί, ελέγξτε αν η διαδικασία είναι υπό ή εκτός ελέγχου.

(iii) Πόσο μεγάλο θα πρέπει να είναι το δειγματικό μέγεθος $n$ έτσι ώστε να είμαστε σίγουροι (με μια ορισμένη –μεγάλη– πιθανότητα) ότι, το εκτιμούμενο ποσοστό των ελαττωματικών αντικειμένων δεν θα διαφέρει σε απόλυτη τιμή από την πραγματική αναλογία ελαττωματικών αντικειμένων, περισσότερο από έναν καθορισμένο αριθμό;

(Όπως στο Παράδειγμα 6.)

**Παράδειγμα 10**

Σε ένα συγκεκριμένο σταυροδρόμι, υποθέτουμε ότι $X$ είναι ο αριθμός των αυτοκινήτων τα οποία περνούν από αυτό το σημείο μέχρις ότου ο παρατηρητής να εντοπίσει ένα συγκεκριμένο τύπο αυτοκινήτου (π.χ. μια Mercedes).

Κάποιες από τις ερωτήσεις που θα μπορούσαν να τεθούν στην περίπτωση αυτή είναι:

(i) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του $X$;

(ii) Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανιστούν κάθε μια από αυτές τις τιμές;

(iii) Πόσα αυτοκίνητα θα πρέπει να περιμένει ο παρατηρητής να παρατηρήσει, μέχρι να εμφανιστεί η πρώτη Mercedes;

(Δείτε τη σύντομη συζήτηση στο Κεφάλαιο 2, όπως και την Ενότητα 6.2.1 στο Κεφάλαιο 6.)

**Παράδειγμα 11**

Η υγειονομική διεύθυνση μιας πόλης σκοπεύει να υπολογίσει αν ο μέσος αριθμός βακτηρίων ανά μονάδα όγκου του νερού σε κάποια θαλάσσια παραλία, βρίσκεται εντός του ορίου ασφαλείας που είναι 200. Ένας ερευνητής συλλέγει $n$ δείγματα νερού μοναδιαίου όγκου και καταγράφει τον αριθμό των βακτηρίων τα οποία μετράει στα δείγματα.

Σχετικές ερωτήσεις εδώ είναι:

(i) Ποιο είναι το κατάλληλο πρότυπο πιθανοτήτων που περιγράφει τον αριθμό $X$, από βακτήρια στη μονάδα όγκου του νερού; Ποιες είναι δυνατές τιμές της $X$ και ποια είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί η κάθε μια από αυτές;

(ii) Τα δεδομένα τα οποία έχουν συλλεχθεί αποτελούν ένδειξη ότι δεν υπάρχει λόγος ανησυχίας;

(Δείτε τη σύντομη συζήτηση στο Κεφάλαιο 2, καθώς και την Ενότητα 6.1.3 στο Κεφάλαιο 6.)

**Παράδειγμα 12**

Σε μια βιομηχανική περιοχή συλλέγονται δείγματα βροχής και γίνονται μετρήσεις της οξύτητας (pH) των δειγμάτων.

(i) Επιλέξτε ένα κατάλληλο πρότυπο πιθανοτήτων που περιγράφει την ποσότητα $X$, της οξύτητας του νερού της βροχής.

(ii) Με βάση τις μετρήσεις που γίνονται, υπολογίστε τη μέση οξύτητα της βροχής σ' αυτή την περιοχή.

(Δείτε τη σύντομη συζήτηση στο Κεφάλαιο 2, καθώς και την Ενότητα 6.2.4 στο Κεφάλαιο 6.)

**Παράδειγμα 13**

Ένας εργαζόμενος σε ένα φυτώριο καταγράφει το ύψος $n$ δενδρυλλίων κόκκινου πεύκου, ηλικίας ενός έτους.

(i) Προσδιορίστε ένα κατάλληλο πρότυπο πιθανοτήτων που θα περιγράφει το ύψος $X$ των δενδρυλλίων.

(ii) Με βάση τις $n$ μετρήσεις που έχουν γίνει, υπολογίστε το μέσο όρο ύψους των δενδρυλλίων πεύκου.

(iii) Επίσης, ελέγξτε αν αυτές οι μετρήσεις δικαιολογούν την υπόθεση ότι ο μέσος όρος ύψους είναι ένας προκαθορισμένος αριθμός.

(Όπως στο Παράδειγμα 12.)

**Παράδειγμα 14**

Οι εφευρέτες μιας καινούργιας θεραπείας για την παράταση της ζωής ασθενών που βρίσκονται στο τελικό στάδιο καρκίνου, ισχυρίζονται ότι είναι πιο αποτελεσματική από την καθιερωμένη θεραπεία. Η καθιερωμένη θεραπεία χρησιμοποιήθηκε για μεγάλο χρονικό διάστημα και με βάση τα στοιχεία που έχουν δημοσιευτεί σε ιατρικά επιστημονικά περιοδικά, σ' αυτήν αντιστοιχεί ένας συγκεκριμένος μέσος όρος επιβίωσης (σε χρόνια). Η καινούρια θεραπεία εφαρμόζεται σε $n$ ασθενείς και καταγράφεται η χρονική διάρκεια της παράτασης της ζωής των ασθενών.

(i) Ποια θα μπορούσαν να είναι κατάλληλα πρότυπα πιθανοτήτων που θα περιγράφουν τους χρόνους επιβίωσης $X$ και $Y$ σύμφωνα με την παλιά και την καινούρια θεραπεία, αντίστοιχα;

(ii) Με βάση τα στοιχεία των επιστημονικών περιοδικών και τα δεδομένα τα οποία συλλέγονται, ελέγξτε αν ο ισχυρισμός δικαιολογείται ή όχι.

(Όπως στο Παράδειγμα 12.)

**Παράδειγμα 15**

Η διάρκεια ζωής ενός καινούργιου εξοπλισμού, ο οποίος μόλις τέθηκε σε λειτουργία, είναι μια άγνωστη ποσότητα $X$.

Κάποιες σημαντικές, σχετικές ερωτήσεις είναι οι ακόλουθες:

(i) Ποιο θα μπορούσε να είναι ένα κατάλληλο πιθανοθεωρητικό πρότυπο που θα περιγράφει τη διάρκεια ζωής του εξοπλισμού;

(ii) Ποια είναι η πιθανότητα η διάρκεια ζωής να είναι τουλάχιστον $t_0$, μια προκαθορισμένη χρονική διάρκεια;

(iii) Ποια είναι η αναμενόμενη διάρκεια ζωής του εξοπλισμού;

(iv) Ποιο είναι το αναμενόμενο λειτουργικό κόστος του συγκεκριμένου εξοπλισμού;

(Δείτε τη σύντομη συζήτηση στο Κεφάλαιο 2, καθώς και τις Ενότητες 6.2.1 και 6.2.2 στο Κεφάλαιο 6.)

**Παράδειγμα 16**

Ως γνωστόν, το ανθρώπινο αίμα κατατάσσεται σε τέσσερις τύπους, τις ομάδες αίματος, οι οποίες ορίζονται ως $A$, $B$, $AB$ και $O$. Υποθέτουμε ότι $n$ άτομα δίνουν εθελοντικά αίμα σε ένα κέντρο πλάσματος. Έστω ότι το αίμα των εθελοντών κατατάσσεται σε μια από τις παραπάνω τέσσερις ομάδες.

Κάποιες από τις ερωτήσεις που θα μπορούσαν να τεθούν είναι:

(i) Ποιο είναι το κατάλληλο πρότυπο πιθανοτήτων που περιγράφει την κατανομή των δειγμάτων αίματος των $n$ ατόμων στις τέσσερις ομάδες αίματος;

(ii) Ποια είναι η εκτιμηθείσα πιθανότητα ένα άτομο, το οποίο θα επιλεγεί στην τύχη από τους $n$, να έχει μια καθορισμένη ομάδα αίματος (π.χ., την O);

(iii) Ποια είναι η αναλογία των $n$ ατόμων στην κατάταξή τους σε μάθε μια από τις τέσσερις ομάδες αίματος;

(iv) Πως μπορεί να ελέγξει κανείς αν οι αναλογίες οι οποίες παρατηρούνται είναι σε συμφωνία με τους αντίστοιχους προκαθορισμένους αριθμούς;

Στο επόμενο κεφάλαιο, Κεφάλαιο 8, γίνονται περισσότερα σχόλια αναφορικά με τα Παραδείγματα 1-16 του παρόντος κεφαλαίου.
(Δείτε την Ενότητα 9.2.6 στο Κεφάλαιο 9.)

Όπως αναφέρθηκε ήδη, στο επόμενο κεφάλαιο, Κεφάλαιο 2, γίνονται περισσότερα σχόλια αναφορικά με τα Παραδείγματα 1-16 του παρόντος Κεφαλαίου.

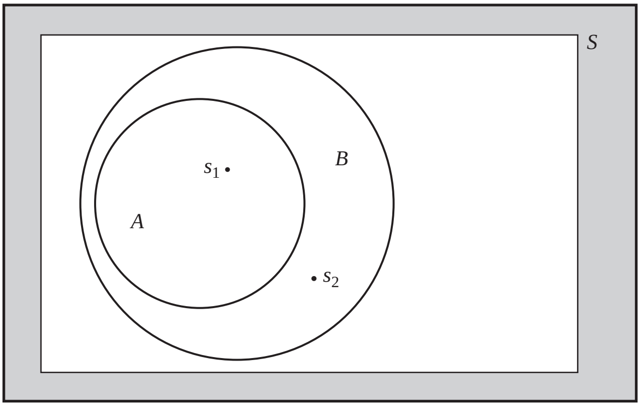
# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## Βασικές Έννοιες

Το κεφάλαιο αυτό αποτελείται από τέσσερις ενότητες. Στην πρώτη, εισάγονται κάποιες θεμελιώδεις έννοιες, όπως, το πείραμα τύχης, το απλό ενδεχόμενο και ο δειγματικός χώρος. Παράλληλα, παρουσιάζονται μια σειρά από επεξηγηματικά παραδείγματα. Στη δεύτερη ενότητα ορίζονται οι συνήθεις θεωρητικές πράξεις επί γεγονότων και καταγράφονται βασικές ιδιότητες και αποτελέσματα. Στην τρίτη ενότητα εισάγεται η πολύ σημαντική έννοια της τυχαίας μεταβλητής, η οποία και διασαφηνίζεται με τη βοήθεια παραδειγμάτων. Τέλος, η τελευταία ενότητα αφιερώνεται στη συζήτηση κάποιων βασικών εννοιών και αποτελεσμάτων απαρίθμησης, στα οποία περιλαμβάνονται οι μεταθέσεις και οι συνδυασμοί.

### 2.1 Μερικές Βασικές Έννοιες

Μία από τις πιο βασικές έννοιες στην θεωρία των πιθανοτήτων (και τη στατιστική) είναι αυτή του *πειράματος τύχης*. Παρά το γεγονός ότι ένας πιο αυστηρός ορισμός είναι δυνατός, θα περιοριστούμε εδώ στην παρουσίαση του πειράματος τύχης ως μιας διαδικασίας η οποία εκτελείται υπακούοντας σε ένα προκαθορισμένο σύνολο προϋποθέσεων, μπορεί να επαναληφθεί όσες φορές επιθυμούμε (πάντα κάτω από το ίδιο σύνολο προϋποθέσεων) και τέλος, με την ολοκλήρωση της διαδικασίας παρατηρούνται συγκεκριμένα αποτελέσματα. Τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης συμβολίζονται με $s$ και ονομάζονται *δειγματοσημεία*. Το σύνολο όλων των δυνατών δειγματοσημείων ενός πειράματος τύχης, ονομάζεται *δειγματικός χώρος*, $\mathcal{S}$. Υποσύνολα του $\mathcal{S}$, ονομάζονται *γεγονότα*, και συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα, $A$, $B$, $C$ κ.λπ. Ένα γεγονός το οποίο αποτελείται μόνο από ένα δειγματοσημείο, $\{s\}$, ονομάζεται *απλό* γεγονός. Στην αντίθετη περίπτωση ονομάζεται *σύνθετο*. Ένα γεγονός $A$ *πραγματοποιείται* (ή *συμβαίνει*) αν το αποτέλεσμα του πειράματος τύχης (δηλαδή, το $s$) ανήκει στο $A, s \in A$. Αντίστοιχα, το $A$ *δεν πραγματοποιείται* (ή *δεν συμβαίνει*) αν $s \notin A$. Το γεγονός $\mathcal{S}$ που συμβαίνει πάντα, ονομάζεται *βέβαιο* γεγονός. Από την άλλη μεριά, το γεγονός $\varnothing$ το οποίο δεν συμβαίνει ποτέ, ονομάζεται *αδύνατο* γεγονός. Η σχέση $A \subseteq B$ ανάμεσα σε δύο γεγονότα $A$ και $B$ σημαίνει ότι το γεγονός $B$ συμβαίνει όταν συμβαίνει και το $A$, αλλά όχι απαραίτητα το αντίθετο (βλέπε Σχήμα 2.1 για το σχετικό διάγραμμα Venn στο οποίο απεικονίζεται τη σχέση $A \subseteq B$). Τέλος, τα γεγονότα $A$ και $B$ είναι *ίσα*, αν ισχύουν ταυτόχρονα $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$. .




**Σχήμα 2.1** $A \subseteq B$. Στην πραγματικότητα είναι $A \subset B$, γιατί το $s_2 \in B$, αλλά το $s_2 \notin A$.

Στην συνέχεια, παραθέτουμε μια σειρά από πειράματα τύχης, μαζί με αντίστοιχους δειγματικούς χώρους και κάποια γεγονότα.

**Παράδειγμα 1**

Ρίψη τριών διαφορετικών κερμάτων, μια φορά το καθένα.

Ορίζουμε ως $K$ και $\Gamma$, τα δειγματοσημεία "Κορώνα" και "Γράμματα", αντίστοιχα. Ο δειγματικός χώρος είναι:

$$\mathcal{S} = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK, K\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}.$$

Το γεγονός $A =$ "δεν παίρνουμε $K$ περισσότερες από μία φορά", είναι το εξής:

$$A = \{\Gamma\Gamma\Gamma, K\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K\}.$$

**Παράδειγμα 2**

Ταυτόχρονη ρίψη δύο διαφορετικών ζαριών, μια φορά.

Ο δειγματικός χώρος είναι:

$$\mathcal{S} = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,6), \ldots, (6,1), (6,2), \ldots, (6,6)\},$$

και το γεγονός $B =$ "το άθροισμα των αποτελεσμάτων της ρίψης είναι $\leq 5$" είναι:

$$B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)\}.$$

**Παράδειγμα 3**

Τυχαία επιλογή ενός τραπουλόχαρτου από μια τράπουλα με 52 τραπουλόχαρτα (χωρίς Τζόκερ).

Τα σύμβολα $\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$ και $\spadesuit$ παριστάνουν "Σπαθί", "Καρό", "Κούπα" και "Μπαστούνι", αντίστοιχα. Επίσης συμβολίζουμε ως J, Q και K τα αποτελέσματα "Βαλές", "Ντάμα" και "Ρήγας", αντίστοιχα, και χρησιμοποιούμε το 1 για τον "Άσσο". Τότε ο δειγματικός χώρος θα είναι:

$$\mathcal{S} = \{1_{\clubsuit}, \ldots, 1_{\spadesuit}, \ldots, 10_{\clubsuit}, \ldots, 10_{\spadesuit}, \ldots, \mathrm{K}_{\clubsuit}, \ldots, \mathrm{K}_{\spadesuit}\}.$$

Παράδειγμα ενός γεγονότος, $A$, είναι το ακόλουθο: $A =$ "τραπουλόχαρτο κόκκινου χρώματος και φιγούρα", έτσι ώστε:

$$A = \{\mathrm{J}_{\diamondsuit}, \mathrm{J}_{\heartsuit}, \mathrm{Q}_{\diamondsuit}, \mathrm{Q}_{\heartsuit}, \mathrm{K}_{\diamondsuit}, \mathrm{K}_{\heartsuit}\}.$$

**Παράδειγμα 4**

Καταγραφή του φύλου των παιδιών για οικογένειες με δύο παιδιά.

Ορίζουμε με $A$ και $K$ τα δειγματοσημεία να είναι ένα παιδί, αγόρι ή κορίτσι, αντίστοιχα. Επίσης ορίζουμε ότι σε κάθε ζευγάρι, το πρώτο γράμμα θα αντιστοιχεί στο παιδί μεγαλύτερης ηλικίας. Τότε, ο δειγματικός χώρος είναι: $\mathcal{S} = \{AA,\ AK,\ KA,\ KK\}$. Ένα γεγονός θα μπορούσε να είναι: $B =$ " παιδιά και των δύο φύλων." Άρα, $B = \{AK, KA\}$.

**Παράδειγμα 5**

Κατάταξη πέντε αλόγων σε μια ιπποδρομία.

Ο κατάλληλος δειγματικός χώρος $\mathcal{S}$ αποτελείται από 120 δειγματοσημεία, τα οποία αντιστοιχούν στις 120 διαφορετικές μεταθέσεις των αριθμών 1, 2, 3, 4, 5 (δεν λαμβάνουμε υπόψη τις ισοπαλίες). Παράδειγμα ενός γεγονότος είναι το $A =$ "το άλογο υπ' αριθμόν 3 τερμάτισε δεύτερο", αποτελούμενο από 24 δειγματοσημεία, στα οποία το άλογο υπ' αριθμόν 3 τερματίζει πάντα στη δεύτερη θέση (δες επίσης και το Πόρισμα του Θεωρήματος 1, στην Ενότητα 2.4).

**Παράδειγμα 6**

Επαναλαμβανόμενη ρίψη ενός κέρματος μέχρι να εμφανιστεί $K$ για πρώτη φορά.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ο κατάλληλος δειγματικός χώρος είναι:

$$\mathcal{S} = \{K, \Gamma K, \Gamma\Gamma K, \ldots, \Gamma\Gamma \ldots \Gamma K, \ldots\}.$$

Το γεγονός $A =$ "η $K$ δεν εμφανίζεται για πρώτη φορά πριν τη δέκατη ρίψη" δίνεται ως ακολούθως:

$$A = \{\underbrace{\Gamma \ldots \Gamma}_{9} K,\ \underbrace{\Gamma \ldots \Gamma}_{10} K, \ldots\}.$$

**Παράδειγμα 7**

Καταγραφή των τροχαίων ατυχημάτων τα οποία συνέβησαν σε μια καθορισμένη τοποθεσία και για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο.

Ο κατάλληλος δειγματικός χώρος στο παράδειγμα αυτό είναι $\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots, M\}$ για έναν κατάλληλο αριθμό $M$. Αν ο $M$ είναι ικανοποιητικά μεγάλος, τότε ο $\mathcal{S}$ μπορεί να ληφθεί ως εξής (για μαθηματική ευκολία): $\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots\}$.

**Παράδειγμα 8**

Καταγραφή του αριθμού των σωματιδίων τα οποία εκπέμπονται από μια συγκεκριμένη ραδιενεργό πηγή.

Όπως και στο αμέσως προηγούμενο παράδειγμα, ο δειγματικός χώρος είναι: $\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots, M\}$. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα το $M$ είναι τις περισσότερες φορές ένας μεγάλος αριθμός, κατά συνέπεια (όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα) ο δειγματικός χώρος μπορεί να ληφθεί ως εξής: $\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots\}$.

**Παράδειγμα 9**

Καταγραφή της διάρκειας ζωής ενός ηλεκτρονικού εξαρτήματος ή μιας ηλεκτρονικής συσκευής.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ο δειγματικός χώρος $\mathcal{S}$ είναι το χρονικό διάστημα $(0, T]$, για μια λογική τιμή του $T$. Κατά συνέπεια $\mathcal{S} = (0, T]$. Μερικές φορές, για λόγους που δικαιολογούνται από τις χαρακτηριστικές συνθήκες του υπό εξέταση προβλήματος, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathcal{S} = (0, \infty)$.

**Παράδειγμα 10**

Καταγραφή της απόστασης ανάμεσα στο κέντρο ενός στόχου και του σημείου στο οποίο τελικά καταλήγει ένα βέλος, το οποίο στόχευε αρχικά στο κέντρο του στόχου.

Εδώ είναι προφανές ότι ο δειγματικός χώρος μπορεί να ληφθεί ως εξής: $\mathcal{S} = [0, M)$, ή $\mathcal{S} = [0, \infty)$ για αρκούντως μεγάλο $M$ και για μαθηματική ευκολία.

**Παράδειγμα 11**

Μέτρηση της δόσης ενός συγκεκριμένου φαρμάκου, το οποίο δίνεται σε έναν ασθενή, μέχρι να παρατηρηθεί θετική αντίδραση από τον οργανισμό του.

Ο δειγματικός χώρος του παραδείγματος είναι $\mathcal{S} = (0, D]$, για μια κατάλληλη τιμή $D$ (η οποία δεν καθιστά το μέγεθος της δόσης θανάσιμο για τον ασθενή).

**Παράδειγμα 12**

Καταγραφή του ετήσιου εισοδήματος ενός συγκεκριμένου πληθυσμού.

Αν τα εισοδήματα καταγράφονται σε ευρώ και λεπτά, τα απλά ενδεχόμενα θα είναι δεκαδικοί αριθμοί στο διάστημα $[0, M]$, για μια λογική τιμή του $M$. Και πάλι, για λόγους ανάλογους με αυτούς που αναφέρθηκαν στα Παράδειγματα 7, 9 και 10 πολλές φορές θεωρούμε $\mathcal{S} = [0, \infty)$.

**Παράδειγμα 13**

Χρόνος αναμονής για να φτάσει ή να ξεπεράσει μια καθορισμένη τιμή, ο χρηματιστηριακός δείκτης Dow Jones Industrial Average.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, με συγκεκριμένες επιφυλάξεις, μπορούμε να επιλέξουμε ως δειγματικό χώρο, τον $\mathcal{S} = (0, \infty)$.

**Παράδειγμα 14**

Χρόνος αναμονής μέχρι να λήξει η διάρκεια ζωής ενός καινούριου ανταλλακτικού που μόλις τέθηκε σε χρήση.

Εδώ, ο δειγματικός χώρος είναι $\mathcal{S} = (0, T]$ για μια κατάλληλη τιμή του $T$ (εύλογα μεγάλη), η οποία για να είναι βολική από μαθηματικής πλευράς, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι $\infty$. Δηλαδή, $\mathcal{S} = (0, \infty)$.
(Δείτε επίσης το Παράδειγμα 1 στο Κεφάλαιο 3.)

Επίσης, τα Παραδείγματα 1–16 του Κεφαλαίου 1, υπό τις κατάλληλες προϋποθέσεις, μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν επιπλέον παραδείγματα πειραμάτων τύχης. Τα περισσότερα από αυτά, θα τα επισκεφθούμε πάλι στη συνέχεια, σε διάφορες περιπτώσεις.

Χαρακτηριστικά αναφέρουμε το Παράδειγμα 1 του Κεφαλαίου 1, για το οποίο με βάση τα δεδομένα και τις συνθήκες που παρατίθενται, ένας κατάλληλος δειγματικός χώρος είναι:

$$\begin{aligned}\mathcal{S} = \{&A_{\mathrm{h}}B_{\mathrm{h}}M_{\mathrm{h}},\ A_{\mathrm{h}}B_{\mathrm{h}}M_{\ell},\ A_{\mathrm{h}}B_{\ell}M_{\mathrm{h}},\ A_{\ell}B_{\mathrm{h}}M_{\mathrm{h}},\ A_{\mathrm{h}}B_{\ell}M_{\ell},\\ &A_{\ell}B_{\mathrm{h}}M_{\ell},\ A_{\ell}B_{\ell}M_{\mathrm{h}},\ A_{\ell}B_{\ell}M_{\ell}\}.\end{aligned}$$

Τα γεγονότα, $A$ = “κανένα χημικό στοιχείο δεν εμφανίζει υψηλή συγκέντρωση (δείκτης $\ell$)” και $B$ = “τουλάχιστον δύο χημικά στοιχεία εμφανίζουν υψηλή συγκέντρωση (δείκτης h)” δίνονται ως εξής:

$$A = \{A_{\ell}B_{\ell}M_{\ell}\}, \qquad B = \{A_{\mathrm{h}}B_{\mathrm{h}}M_{\ell},\ A_{\mathrm{h}}B_{\ell}M_{\mathrm{h}},\ A_{\ell}B_{\mathrm{h}}M_{\mathrm{h}},\ A_{\mathrm{h}}B_{\mathrm{h}}M_{\mathrm{h}}\}.$$

(Δείτε επίσης το Παράδειγμα 1 στο Κεφάλαιο 3.)

Στο Παράδειγμα 2 του Κεφαλαίου 1, ένας ασθενής αξιολογείται σύμφωνα με αποτελέσματα μιας συγκεκριμένης διαγνωστικής εξέτασης, και ο κατάλληλος δειγματικός χώρος που προκύπτει είναι ο ακόλουθος:

$$\mathcal{S} = \{N+, N-, O+, O-\},$$

όπου τα $N$ και $O$ συμβολίζουν τα γεγονότα "ο ασθενής έχει την ασθένεια" και "ο ασθενής δεν έχει την ασθένεια", αντίστοιχα. Οπότε, το γεγονός $A =$ "λανθασμένη διάγνωση της ασθένειας" δίνεται ως εξής: $A = \{N-, O+\}$. (Δείτε επίσης το Παράδειγμα 10 στο Κεφάλαιο 4.)

Το Παράδειγμα 3 του Κεφαλαίου 1 συζητείται στο πλαίσιο της Πρότασης 2 (ii) του Κεφαλαίου 3. Το Παράδειγμα 4 του Κεφαλαίου 1 συζητείται στο Παράδειγμα 1 του Κεφαλαίου 5.

Στο Παράδειγμα 5 του Κεφαλαίου 1, το κατάλληλο πιθανοθεωρητικό πρότυπο είναι το ούτως καλούμενο διωνυμικό πρότυπο. Ο δειγματικός χώρος $\mathcal{S}$ είναι ένα σύνολο $2^n$ δειγματοσημείων, όπου το κάθε δειγματοσημείο αντιστοιχεί σε μια ακολουθία από $E$ και $A$, $n$ σε πλήθος, όπου το $E$ συμβολίζει την επιτυχία (για λογαριασμό του Jones) και το $A$ συμβολίζει την αποτυχία. Με βάση τον παραπάνω ορισμό, οι ερωτήσεις που τέθηκαν μπορούν να απαντηθούν εύκολα (βλέπε επίσης το Θεώρημα 1 του Κεφαλαίου 6).

Τα Παραδείγματα 6–9 του Κεφαλαίου 1 μπορούν να μελετηθούν στο ίδιο πλαίσιο με αυτό του Παραδείγματος 5, με κατάλληλες τροποποιήσεις σε ό,τι αφορά τη χρήση των συμβόλων που χρησιμοποιούνται.

Στο Παράδειγμα 10 του Κεφαλαίου 1, ένας κατάλληλος δειγματικός χώρος είναι:

$$\mathcal{S} = \{M, M^cM,\ M^cM^cM, \ldots, M^c \cdots M^cM, \ldots\},$$

όπου το $M$ συμβολίζει τη διέλευση ενός αυτοκινήτου μάρκας Mercedes, ενώ το $M^c$ τη διέλευση ενός αυτοκινήτου διαφορετικής μάρκας. Τότε τα γεγονότα, $A =$ "το πέμπτο αυτοκίνητο που πέρασε ήταν Mercedes" και $B =$ "παρατηρούμε μια Mercedes μετά τη διέλευση των πρώτων τριών αυτοκινήτων", δίνονται ως εξής:

$$A = \{M^cM^cM^cM^cM\} \quad \text{και} \quad B = \{M^cM^cM^cM,\ M^cM^cM^cM^cM, \ldots\}.$$

(Δείτε επίσης την Ενότητα 6.1.2 στο Κεφάλαιο 6.)

Στο Παράδειγμα 11 του Κεφαλαίου 1, ο κατάλληλος δειγματικός χώρος είναι: $\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots, M\}$ για έναν ικανοποιητικά μεγάλο (ακέραιο) $M$. Επίσης, ο δειγματικός αυτός χώρος, πολλές φορές λαμβάνεται ως εξής: $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. (Δείτε επίσης την Ενότητα 6.1.2 στο Κεφάλαιο 6.)

Στα Παραδείγματα 12, 13 και 14 του Κεφαλαίου 1, ο κατάλληλος δειγματικός χώρος είναι $\mathcal{S} = (0, T]$, για κάποια κατάλληλη τιμή του $T$. (Δείτε επίσης την Ενότητα 6.2.4 του Κεφάλαιου 6.)

Στο Παράδειγμα 15 του Κεφαλαίου 1, ο κατάλληλος δειγματικός χώρος είναι ή $\mathcal{S} = (0, T]$ για κάποια κατάλληλη τιμή του $T$, ή και $\mathcal{S} = (0, \infty)$. (Δείτε επίσης τις Ενότητες 6.2.1 και 6.2.2 στο Κεφάλαιο 6.)

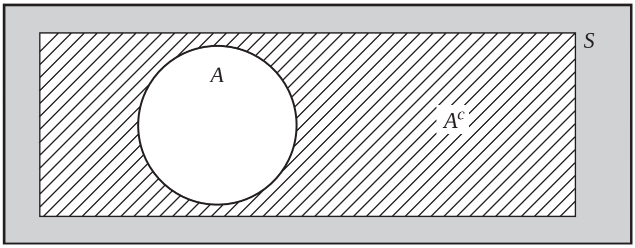
Στο Παράδειγμα 16 του Κεφαλαίου 1, ο κατάλληλος δειγματικός χώρος $\mathcal{S}$ είναι ένα σύνολο $4^n$ δειγματοσημείων, όπου κάθε δειγματοσημείο συμβολίζεται με μια ακολουθία από $n$ σύμβολα $A, B, AB$, και $O$. Το κατάλληλο πιθανοθεωρητικό πρότυπο είναι το ούτως καλούμενο πολυωνυμικό πρότυπο, και οι ερωτήσεις που τέθηκαν μπορεί να απαντηθούν με τη βοήθεια της υπάρχουσας μεθοδολογίας. Στην πραγματικότητα, δεν υπάρχει καν η ανάγκη αναφοράς στο δειγματικό χώρο $\mathcal{S}$. Το μόνο που έχει να κάνει κανείς είναι να θεωρήσει τα αποτελέσματα σε $n$ επαναλήψεις του πειράματος και στη συνέχεια να τα ταξινομήσει σε τέσσερις κατηγορίες $A, B, AB$, και $O$. (Δείτε την Ενότητα 9.2 στο Κεφάλαιο 9.)

Σε πολλές περιπτώσεις, οι ερωτήσεις που τίθενται μπορούν να μελετηθούν χωρίς απαραίτητα να γίνεται αναφορά σε ένα, αυστηρά ορισμένο, δειγματικό χώρο (π.χ., Παράδειγμα 14 του Κεφαλαίου 1).

Στα παραδείγματα που εξετάσαμε προηγουμένως, συναντήσαμε δειγματικούς χώρους οι οποίοι αποτελούνται από ενδεχομένως πολλά, πλην όμως πεπερασμένα το πλήθος δειγματοσημεία (Παραδείγματα 1–5 του Κεφαλαίου 2, και Παραδείγματα 6–9 του Κεφαλαίου 1), καθώς και δειγματικούς χώρους που αποτελούνται από άπειρα απαριθμήσιμα το πλήθος δειγματοσημεία (για παράδειγμα, ενδεχόμενα με πλήθος όσο και αυτό των θετικών ακέραιων αριθμών, στα οποία μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα-προς-ένα, έναν θετικό ακέραιο αριθμό) (Παραδείγματα 6–8 του Κεφαλαίου 2, και 10–11 του Κεφαλαίου 1, αν αντικαταστήσουμε το $M$ με $\infty$ για μαθηματικούς λόγους στα Παραδείγματα 7, 8 και 11). Επίσης δειγματικούς χώρους οι οποίοι αποτελούνται από τόσα δειγματοσημεία, όσα υπάρχουν και σε ένα πεπερασμένο μη εκφυλισμένο ή άπειρο διάστημα της ευθείας των πραγματικών αριθμών· το οποίο μπορεί να είναι και η ίδια η ευθεία των πραγματικών αριθμών στο σύνολό της (Παραδείγματα 9–14 του Κεφαλαίου 2, και 12, 13 και 15 του Κεφαλαίου 1). Οι δειγματικοί χώροι στους οποίους το πλήθος των δειγματοσημείων είναι απαριθμήσιμο (ανεξαρτήτως του πεπερασμένου ή άπειρου πλήθους τους) ονομάζονται *διακριτοί* δειγματικοί χώροι. Οι δειγματικοί χώροι στους οποίους το πλήθος των δειγματοσημείων είναι τόσο όσοι και οι αριθμοί σε ένα πεπερασμένο μη εκφυλισμένο ή άπειρο διάστημα της ευθείας των πραγματικών αριθμών $\Re = (-\infty, \infty)$ ονομάζονται *συνεχείς* δειγματικοί χώροι.

## 2.2 Μερικά Θεμελιώδη Αποτελέσματα

Η επεξεργασία των γεγονότων μπορεί να επιτευχθεί με την εφαρμογή μερικών βασικών πράξεων, ίδιων με αυτές που εφαρμόζονται σε σύνολα. Συνεπώς, το *συμπλήρωμα* ενός γεγονότος $A$, το οποίο συμβολίζεται ως $A^c$, είναι το γεγονός το οποίο ορίζεται ως εξής: $A^c = \{s \in \mathcal{S} : s \notin A\}$. Το γεγονός $A^c$ παρουσιάζεται στο διάγραμμα Venn του Σχήματος 2.2. Άρα, το $A^c$ συμβαίνει κάθε φορά που δεν συμβαίνει το $A$, και το αντίστροφο.




**Σχήμα 2.2** Συμπλήρωμα $A^c$, του γεγονότος $A$ (γραμμοσκιασμένη περιοχή).

Η *ένωση* των γεγονότων $A_1, \ldots, A_n$, συμβολίζεται με:

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n \quad \text{ή} \quad \bigcup_{j=1}^{n} A_j$$

και είναι το γεγονός το οποίο ορίζεται από τη σχέση:

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \{s \in \mathcal{S} :\ s \in A_j,\ \textit{τουλάχιστον για ένα}\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Άρα, το γεγονός $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$ συμβαίνει όταν συμβαίνει τουλάχιστον ένα από τα γεγονότα $A_j, j = 1, \ldots, n$. Για $n = 2$, $A_1 \cup A_2$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.3. Ο ορισμός επεκτείνεται και για ένα άπειρο αριθμό από γεγονότα. Κατά συνέπεια, για άπειρα απαριθμήσιμα γεγονότα $A_j$, $j = 1, 2, \ldots$, ισχύει:

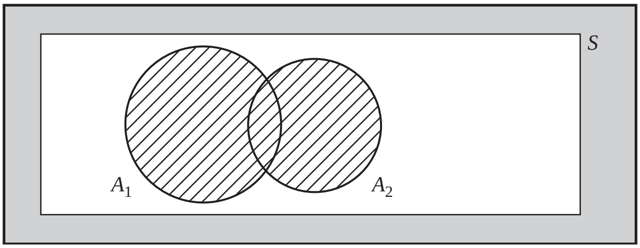
$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \{s \in \mathcal{S} :\ s \in A_j,\ \textit{τουλάχιστον για ένα}\ j = 1, 2, \ldots\}.$$

Η *τομή* των γεγονότων $A_j, j = 1, \ldots, n$ είναι ένα γεγονός που συμβολίζεται με:

$$A_1 \cap \cdots \cap A_n \quad \text{ή} \quad \bigcap_{j=1}^{n} A_j$$

και ορίζεται ως εξής:

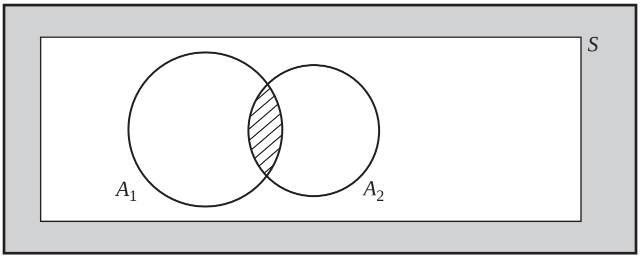
$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j = \{s \in \mathcal{S} :\ s \in A_j,\ \textit{για όλα τα}\ j = 1, \ldots, n\}.$$




**Σχήμα 2.3** Ένωση $A_1 \cup A_2$, των δύο γεγονότων $A_1$ και $A_2$ (γραμμοσκιασμένη περιοχή).

Κατά συνέπεια, η τομή $\bigcap_{j=1}^{n} A_j$ συμβαίνει όταν όλα τα γεγονότα $A_j$, $j = 1, \ldots, n$ πραγματοποιούνται ταυτόχρονα. Η περίπτωση για $n = 2$, $A_1 \cap A_2$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.4. Όπως και στην περίπτωση της ένωσης, ο ορισμός επεκτείνεται και για έναν άπειρο αριθμό γεγονότων. Για άπειρα απαριθμήσιμα γεγονότα $A_j$, $j = 1, 2, \ldots$, ισχύει:

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \{s \in \mathcal{S} : \; s \in A_j, \textit{ για όλα τα } j = 1, 2, \ldots\}.$$



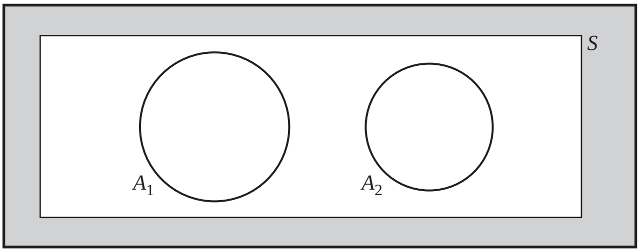

**Σχήμα 2.4** Τομή $A_1 \cap A_2$, των δύο γεγονότων $A_1$ και $A_2$ (γραμμοσκιασμένη περιοχή).

Αν ισχύει $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, τα γεγονότα $A_1$ και $A_2$ ονομάζονται *ξένα* (βλέπε Σχήμα 2.5). Τα γεγονότα $A_j$, $j = 1, 2, \ldots$, ονομάζονται *ασυμβίβαστα* (αποκλείονται αμοιβαία) ή *ξένα ανά δύο*, αν $A_i \cap A_j = \varnothing$ όταν $i \neq j$.

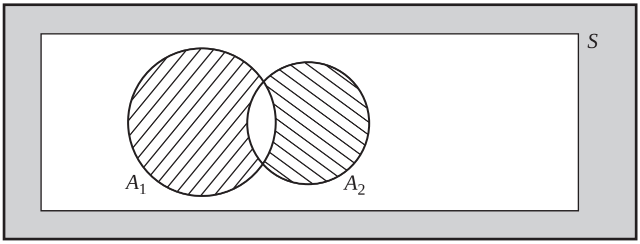
Οι *διαφορές* $A_1 - A_2$ και $A_2 - A_1$ είναι τα γεγονότα τα οποία ορίζονται ως εξής:

$$A_1 - A_2 = \{s \in \mathcal{S} : \; s \in A_1, s \notin A_2\},$$
$$A_2 - A_1 = \{s \in \mathcal{S} : \; s \in A_2, s \notin A_1\},$$

και είναι αντίστοιχα τα σύνολα που περιέχουν όλα τα στοιχεία του $A_1$ που δεν ανήκουν στο $A_2$ και το αντίστροφο (βλέπε Σχήμα 2.6).




**Σχήμα 2.5** Τα σύνολα $A_1$ και $A_2$ είναι ξένα, έτσι ώστε $A_i \cap A_j = \varnothing$.




**Σχήμα 2.6** $A_1 - A_2$ είναι η περιοχή $/\!/\!/$ και $A_2 - A_1$ η περιοχή $\backslash\backslash\backslash$.

Από τον ορισμό των προηγούμενων πράξεων προκύπτει μια σειρά από ιδιότητες, οι οποίες και παραθέτονται στη συνέχεια υπό μορφή προτάσεων.

**Πρόταση 1**

(i) $\mathcal{S}^c = \varnothing$, $\varnothing^c = \mathcal{S}$, $(A^c)^c = A$.

(ii) $\mathcal{S} \cup A = \mathcal{S}$, $\varnothing \cup A = A$, $A \cup A^c = \mathcal{S}$, $A \cup A = A$.

(iii) $\mathcal{S} \cap A = A$, $\varnothing \cap A = \varnothing$, $A \cap A^c = \varnothing$, $A \cap A = A$.

Οι προηγούμενες σχέσεις είναι όλες προφανείς, όπως είναι και η επόμενη: $\varnothing \subseteq A$ για κάθε γεγονός $A$ που ανήκει στο $\mathcal{S}$. Επίσης, για τις πράξεις της ένωσης και της τομής, ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες (δείτε επίσης την Άσκηση 2.13):

**Πρόταση 2**

(i) $\left.\begin{array}{l} A_1 \cup (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cup A_2) \cup A_3 \\ A_1 \cap (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cap A_2) \cap A_3 \end{array}\right\}$ (Προσεταιριστικές ιδιότητες)

(ii) $\left.\begin{array}{l} A_1 \cup A_2 = A_2 \cup A_1 \\ A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_1 \end{array}\right\}$ (Αντιμεταθετικές ιδιότητες)

(iii) $\left.\begin{array}{l} A \cap (\cup_j A_j) = \cup_j (A \cap A_j) \\ A \cup (\cap_j A_j) = \cap_j (A \cup A_j) \end{array}\right\}$ (Επιμεριστικές ιδιότητες)

**Παρατήρηση 1**

Στις σχέσεις των επιμεριστικών ιδιοτήτων, όπως και σε όλες τις ανάλογες περιπτώσεις, στις οποίες το εύρος του δείκτη $j$ δεν είναι αυστηρά καθορισμένο, υποθέτουμε ότι είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, όπως το $\{1, \ldots, n\}$, ή ένα άπειρο απαριθμήσιμο σύνολο $\{1, 2, \ldots\}$.

Στη συνέχεια παραθέτουμε μια σειρά από συγκεκριμένα παραδείγματα, με στόχο να διασαφηνίσουμε μερικές από τις πράξεις επί γεγονότων, που ορίσαμε στις παραπάνω προτάσεις.

**Παράδειγμα 15**

Θεωρούμε το δειγματικό χώρο $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8\}$ και ορίζουμε τα γεγονότα $A_1$, $A_2$ και $A_3$ ως εξής: $A_1 = \{s_1, s_2, s_3\}$, $A_2 = \{s_2, s_3, s_4, s_5\}$, $A_3 = \{s_3, s_4, s_5, s_8\}$. Παρατηρούμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

$$A_1^c = \{s_4, s_5, s_6, s_7, s_8\}, \quad A_2^c = \{s_1, s_6, s_7, s_8\}, \quad A_3^c = \{s_1, s_2, s_6, s_7\},$$

$$A_1 \cup A_2 = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}, \quad A_1 \cup A_3 = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_8\},$$

$$A_2 \cup A_3 = \{s_2, s_3, s_4, s_5, s_8\}, \quad A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_8\},$$

$$A_1 \cap A_2 = \{s_2, s_3\}, \quad A_1 \cap A_3 = \{s_3\}, \qquad A_2 \cap A_3 = \{s_3, s_4, s_5\},$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{s_3\},$$

$$A_1 - A_2 = \{s_1\}, \quad A_2 - A_1 = \{s_4, s_5\}, \quad A_1 - A_3 = \{s_1, s_2\},$$

$$A_3 - A_1 = \{s_4, s_5, s_8\}, \quad A_2 - A_3 = \{s_2\}, \quad A_3 - A_2 = \{s_8\},$$

$$(A_1^c)^c = \{s_1, s_2, s_3\} (= A_1), \quad \left(A_2^c\right)^c = \{s_2, s_3, s_4, s_5\} (= A_2),$$

$$\left(A_3^c\right)^c = \{s_3, s_4, s_5, s_8\} (= A_3).$$

Μια ταυτότητα και οι κανόνες του DeMorgan χρησιμοποιούνται συχνά και είναι ιδιαίτερα σημαντικοί. Οι αποδείξεις τους αφήνονται ως ασκήσεις (Ασκήσεις 2.14 και 2.15).

**Πρόταση 3** ***(Μια Ταυτότητα)***

$$\cup_j A_j = A_1 \cup \left(A_1^c \cap A_2\right) \cup \left(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3\right) \cup \ldots \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{n-1}^c \cap A_n) \cup \ldots$$

Η σημασία της ταυτότητας συνίσταται στο γεγονός ότι τα γεγονότα στο δεξί μέλος της είναι ξένα ανά δύο, ενώ τα αρχικά γεγονότα $A_j$, $j \geq 1$, δεν χρειάζεται να έχουν αυτή την ιδιότητα.

**Απόδειξη (μερική)**

Με στόχο να δείξουμε το σκεπτικό που χρησιμοποιεί κανείς για την απόδειξη μιας τέτοιας ταυτότητας, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να δείξουμε την $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2)$. Έστω ότι το $s$ ανήκει στο αριστερό μέλος της ταυτότητας. Τότε, αν $s \in A_1$, είναι προφανές ότι ανήκει στο δεξί μέλος της, ενώ αν $s \notin A_1$, τότε $s \in A_2$ και κατά συνέπεια $s \in (A_1^c \cap A_2)$, οπότε το $s$ ανήκει και πάλι στο δεξί μέλος της ταυτότητας. Τώρα, έστω ότι το $s$ ανήκει στο δεξί μέλος και έστω $s \in A_1$. Τότε είναι προφανές ότι το $s$ ανήκει στο αριστερό μέλος. Αν $s \notin A_1$, τότε $s \in (A_1^c \cap A_2)$ και κατά συνέπεια $s \in A_2$, οπότε ανήκει και πάλι στο αριστερό μέλος της ταυτότητας (βλέπε επίσης Άσκηση 2.14). ▲

**Παράδειγμα 16**

Από το Παράδειγμα 15, έχουμε:

$$A_1 = \{s_1, s_2, s_3\}, \qquad A_1^c \cap A_2 = \{s_4, s_5\}, \qquad A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 = \{s_8\}.$$

Σημειώνουμε, ότι τα γεγονότα $A_1$, $A_1^c \cap A_2$, $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3$ αποκλείονται αμοιβαία, είναι ξένα ανά δύο. Ισχύει $A_1 \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_8\}$, το οποίο είναι ίσο με $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, οπότε,

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 \cup \big(A_1^c \cap A_2\big) \cup \big(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3\big),$$

όπως και στις προηγούμενες ταυτότητες.

**Πρόταση 4 *(Κανόνες του DeMorgan)***

$$(\cup_j A_j)^c = \cap_j A_j^c \quad \text{και} \quad (\cap_j A_j)^c = \cup_j A_j^c.$$

**Απόδειξη (μερική)**

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση για την οποία $(A_1 \cap A_2)^c = A_1^c \cup A_2^c$. Έστω $s \in (A_1 \cap A_2)^c$. Τότε $s \notin (A_1 \cap A_2)$ οπότε είτε $s \notin A_1$ είτε $s \notin A_2$ είτε και τα δύο. Αν $s \notin A_1$, τότε $s \in A_1^c$ και κατά συνέπεια το $s$ ανήκει στο δεξί μέλος της σχέσης. Ανάλογη είναι η περίπτωση για το $s \notin A_2$. Στη συνέχεια, έστω ότι το $s$ ανήκει στο δεξί μέλος, οπότε είτε $s \in A_1^c$ είτε $s \in A_2^c$ είτε και τα δύο. Αν $s \in A_1^c$, τότε $s \notin A_1$, οπότε $s \notin (A_1 \cap A_2)$ και κατά συνέπεια $s \in (A_1 \cap A_2)^c$. Άρα, το $s$ ανήκει στο αριστερό μέλος της σχέσης, και ανάλογη είναι η περίπτωση για το $s \in A_2^c$ (βλέπε Άσκηση 2.15). ▲

**Παράδειγμα 17**

Και πάλι με βάση το Παράδειγμα 15, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&(A_1 \cup A_2)^c = \{s_6, s_7, s_8\}, \quad A_1^c \cap A_2^c = \{s_6, s_7, s_8\},\\
&(A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c = \{s_6, s_7\}, \quad A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c = \{s_6, s_7\},\\
&(A_1 \cap A_2)^c = \{s_1, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8\}, \quad A_1^c \cup A_2^c = \{s_1, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8\},\\
&(A_1 \cap A_2 \cap A_3)^c = \{s_1, s_2, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8\},\\
&A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c = \{s_1, s_2, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8\},
\end{aligned}$$

οπότε ισχύουν

$$\begin{aligned}
(A_1 \cup A_2)^c = A_1^c \cap A_2^c, \quad (A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c,\\
(A_1 \cap A_2)^c = A_1^c \cup A_2^c, \quad (A_1 \cap A_2 \cap A_3)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c,
\end{aligned}$$

σε πλήρη συμφωνία με τους κανόνες του DeMorgan.

Στη συνέχεια ακολουθεί άλλο ένα παράδειγμα της χρησιμοποίησης συμπληρωμάτων, ενώσεων και τομών γεγονότων, για να εκφράσουμε καινούργια γεγονότα.

**Παράδειγμα 18**

Με τη χρησιμοποίηση των γεγονότων $A_1, A_2$, και $A_3$ (για κάποιο δειγματικό χώρο $\mathcal{S}$) και, ίσως, των συμπληρωμάτων, των ενώσεων και των τομών τους, να εκφραστούν τα παρακάτω γεγονότα:

$D_i =$ "το γεγονός$A_i$ δεν πραγματοποιείται", όπου $i = 1, 2, 3$, οπότε

$$D_1 = A_1^c, D_2 = A_2^c, D_3 = A_3^c.$$

$E =$ "όλα τα γεγονότα $A_1, A_2, A_3$ πραγματοποιούνται", οπότε

$$E = A_1 \cap A_2 \cap A_3.$$

$F =$ "δεν πραγματοποιείται κανένα από τα γεγονότα $A_1, A_2, A_3$", οπότε

$$F = A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c.$$

$G =$ "τουλάχιστον ένα από τα γεγονότα $A_1, A_2, A_3$ πραγματοποιείται", οπότε

$$G = A_1 \cup A_2 \cup A_3.$$

$H =$ "ακριβώς δύο από τα γεγονότα $A_1, A_2, A_3$ πραγματοποιούνται", οπότε

$$H = \big(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c\big) \cup \big(A_1 \cap A_2^c \cap A_3\big) \cup \big(A_1^c \cap A_2 \cap A_3\big).$$

$I =$ "ακριβώς ένα από τα γεγονότα $A_1, A_2, A_3$ πραγματοποιείται", οπότε

$$I = \big(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c\big) \cup \big(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c\big) \cup \big(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3\big).$$

Από τα παραπάνω επίσης προκύπτει ότι:

$G =$ "ακριβώς ένα από τα γεγονότα $A_1, A_2, A_3$ πραγματοποιείται"$\cup$
$\cup$ "ακριβώς δύο από τα γεγονότα $A_1, A_2, A_3$ πραγματοποιούνται"$\cup$
$\cup$ "όλα τα γεγονότα $A_1, A_2, A_3$ πραγματοποιούνται"
$= I \cup H \cup E.$

Η ενότητα αυτή ολοκληρώνεται με τον ορισμό της μονοτονίας για μια ακολουθία γεγονότων. Πιο συγκεκριμένα, η ακολουθία γεγονότων $\{A_n\}$, $n \geq 1$, ονομάζεται *μονότονη* αν ισχύει $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ (*αύξουσα*) ή $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ (*φθίνουσα*). Ως *όριο* μιας μονότονης ακολουθίας ορίζεται η ένωση $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ στην περίπτωση μιας αύξουσας ακολουθίας και η τομή $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ στην περίπτωση μιας φθίνουσας ακολουθίας.

Η έννοια του ορίου ορίζεται, κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις, και για μη-μονότονες ακολουθίες γεγονότων, αλλά αυτό το θέμα δεν πρόκειται να μας απασχολήσει εδώ. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης που θα ήθελε να μάθει περισσότερα για το θέμα αυτό, μπορεί να αναφερθεί στον Ορισμό 1 του Κεφαλαίου 1, του βιβλίου: G.G. Roussas, A Course in Mathematical Statistics, 2nd Edition (1997), Academic Press.

### 2.2.1 Ασκήσεις

**Άσκηση 2.1**

Ένα μικρό όχημα αναχωρεί από ένα συγκεκριμένο αεροδρόμιο με τρεις επιβάτες οι οποίοι πρόκειται να μεταφερθούν σε ένα οποιοδήποτε από τρία ξενοδοχεία που παρίστανται σαν $H_1$, $H_2$, $H_3$. Έστω ότι τα $(x_1, x_2, x_3)$ ορίζουν τον αριθμό των επιβατών (όχι όμως ποιων επιβατών!) που μεταφέρθηκαν στα ξενοδοχεία $H_1$, $H_2$ και $H_3$, αντίστοιχα.

(i) Γράψτε το δειγματικό χώρο $\mathcal{S}$ όλων των δυνατών αποτελεσμάτων.

(ii) Θεωρήστε τα γεγονότα $A$, $B$, $C$, $D$ και $E$, τα οποία ορίζονται στη συνέχεια, και εκφράστε τα με τη βοήθεια δειγματοσημείων.

$A$ = "ένας επιβάτης σε κάθε ξενοδοχείο"

$B$ = "όλοι οι επιβάτες στο ξενοδοχείο $H_1$"

$C$ = "όλοι οι επιβάτες σε ένα ξενοδοχείο"

$D$ = "τουλάχιστον δύο επιβάτες στο $H_1$"

$E$ = "λιγότεροι επιβάτες στο $H_1$ σε σχέση με το καθένα από τα $H_2$ και $H_3$".

**Άσκηση 2.2**

Κάθε φορά που τίθεται σε λειτουργία ένας αυτόματος πωλητής δίνει στην έξοδο μια μπάλα η οποία μπορεί να είναι κόκκινη, μαύρη ή πράσινη. Έστω ότι θέτουμε σε λειτουργία τον αυτόματο πωλητή τρεις φορές και κάθε φορά καταγράφουμε το χρώμα της μπάλας στην έξοδο. Έστω ότι ορίζουμε ως $\kappa$, $\mu$, και $\pi$ τα αντίστοιχα χρώματα.

(i) Γράψτε τον κατάλληλο δειγματικό χώρο $\mathcal{S}$ για το συγκεκριμένο πείραμα.

(ii) Θεωρήστε τα γεγονότα $A$, $B$ και $C$, τα οποία ορίζονται στη συνέχεια, και εκφράστε τα με τη βοήθεια δειγματοσημείων.

$A$ = "εμφανίζονται και τα τρία χρώματα"
$B$ = "εμφανίζονται μόνο δύο χρώματα"
$C$ = "εμφανίζονται τουλάχιστον δύο χρώματα".

**Άσκηση 2.3**

Μια πανεπιστημιακή βιβλιοθήκη έχει πέντε αντίτυπα ενός συγκεκριμένου διδακτικού βιβλίου, το οποίο πρόκειται να χρησιμοποιηθεί από μια συγκεκριμένη τάξη. Από αυτά τα αντίτυπα, οι αριθμοί 1 εως 3 είναι της πρώτης έκδοσης, ενώ οι αριθμοί 4 και 5 είναι της δεύτερης έκδοσης. Δύο από αυτά τα αντίτυπα πρόκειται να επιλεγούν τυχαία και να διατεθούν για δίωρο δανεισμό.

(i) Γράψτε τον κατάλληλο δειγματικό χώρο $\mathcal{S}$.

(ii) Θεωρήστε τα γεγονότα $A$, $B$, $C$ και $D$, τα οποία ορίζονται στη συνέχεια, και εκφράστε τα με τη βοήθεια δειγματοσημείων.

$A$ = "και τα δύο βιβλία είναι της πρώτης έκδοσης"
$B$ = "και τα δύο βιβλία είναι της δεύτερης έκδοσης"
$C$ = "ένα βιβλίο από κάθε έκδοση"
$D$ = "κανένα βιβλίο της δεύτερης έκδοσης".

**Άσκηση 2.4**

Μια μεγάλη αντιπροσωπεία αυτοκινήτων πουλάει τρεις αμερικανικές μάρκες αυτοκινήτων, οι οποίες ορίζονται ως $a_1$, $a_2$, $a_3$, δυο ασιατικές μάρκες αυτοκινήτων, οι οποίες ορίζονται ως $b_1$, $b_2$ και μια ευρωπαϊκή μάρκα αυτοκινήτου που ορίζεται ως $c$. Καταγράφουμε τα αυτοκίνητα που πουλήθηκαν σε δύο διαδοχικές πωλήσεις.

(i) Γράψτε τον κατάλληλο δειγματικό χώρο του συγκεκριμένου πειράματος.

(ii) Εκφράστε τα ακόλουθα γεγονότα με τη βοήθεια δειγματοσημείων:

$A$ = "και οι δύο πωλήσεις ήταν αμερικανικές μάρκες"
$B$ = "αμερικανική μάρκα στην πρώτη πώληση και ασιατική μάρκα στη δεύτερη πώληση"
$C$ = "αμερικανική μάρκα στη μια πώληση και ασιατική μάρκα στην άλλη"

$D$ = "ευρωπαϊκή μάρκα στη μια πώληση και ασιατική μάρκα στην άλλη".

*Υπόδειξη*: Σε ό,τι αφορά το υποερώτημα (i) να ορίστε ως $(x_1, x_2)$ ένα τυπικό δειγματοσημείο, όπου το καθένα από τα $x_1$ και $x_2$ παίρνει μια από τις τιμές $a_1$, $a_2$, $a_3$, $b_1$, $b_2$, $c$.

### Άσκηση 2.5

Έστω I και II, δύο σταθμοί πώλησης καυσίμων σε μια συγκεκριμένη τοποθεσία -διασταύρωση. Το I έχει 5 αντλίες καυσίμων και το II έχει 6 αντλίες καυσίμων. Για μια δεδομένη χρονική στιγμή μιας συγκεκριμένης ημέρας, καταγράφουμε τους αριθμούς $x$ και $y$ των αντλιών που λειτουργούν στους σταθμούς I και II, αντίστοιχα (όχι ποιες συγκεκριμένες αντλίες).

(i) Γράψτε το δειγματικό χώρο $\mathcal{S}$ του συγκεκριμένου πειράματος.

(ii) Θεωρείστε τα γεγονότα $A$, $B$, $C$ και $D$, τα οποία ορίζονται στη συνέχεια, και εκφράστε τα με τη βοήθεια δειγματοσημείων.

$A$ = "Μόνο τρεις αντλίες του σταθμού I είναι σε λειτουργία"

$B$ = "Ο αριθμός των αντλιών που είναι σε λειτουργία και στους δύο σταθμούς είναι ο ίδιος"

$C$ = "Ο αριθμός των αντλιών που είναι σε λειτουργία στο σταθμό II είναι μεγαλύτερος σε σχέση με αυτές που είναι σε λειτουργία στο σταθμό I"

$D$ = "Ο συνολικός αριθμός των αντλιών που είναι σε λειτουργία στους δύο σταθμούς δεν είναι μεγαλύτερος από 4".

### Άσκηση 2.6

Σε ένα συγκεκριμένο πολυσύχναστο αεροδρόμιο, συμβολίζουμε ως $A$, $B$, $C$ και $D$ τα ακόλουθα γεγονότα:

$A$ = "τουλάχιστον 5 αεροπλάνα περιμένουν να προσγειωθούν"

$B$ = "το πολύ 3 αεροπλάνα περιμένουν να προσγειωθούν"

$C$ = "το πολύ 2 αεροπλάνα περιμένουν να προσγειωθούν"

$D$ = "ακριβώς 2 αεροπλάνα περιμένουν να προσγειωθούν".

Με τη βοήθεια των γεγονότων $A$, $B$, $C$ και $D$ και πιθανόν των συμπληρωμάτων τους, να εκφράσετε τα ακόλουθα γεγονότα:

$E$ = "το πολύ 4 αεροπλάνα περιμένουν να προσγειωθούν"

$F$ = "το πολύ 1 αεροπλάνο περιμένει να προσγειωθεί"

$G$ = "ακριβώς 3 αεροπλάνα περιμένουν να προσγειωθούν"

$H$ = "ακριβώς 4 αεροπλάνα περιμένουν να προσγειωθούν"

$I$ = "τουλάχιστον 4 αεροπλάνα περιμένουν να προσγειωθούν".

**Άσκηση 2.7**

Έστω $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \Re^2 = \Re \times \Re\colon\ -3 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 4,\ x$ και $y$ *ακέραιοι*$\}$ και ορίζουμε τα γεγονότα $A$, $B$, $C$ και $D$ ως ακολούθως:

$$A = \{(x, y) \in \mathcal{S}\colon\ x = y\}, \qquad B = \{(x, y) \in \mathcal{S}\colon\ x = -y\},$$
$$C = \{(x, y) \in \mathcal{S}\colon\ x^2 = y^2\}, \qquad D = \{(x, y) \in \mathcal{S}\colon\ x^2 + y^2 \leq 5\}.$$

(i) Καταγράψτε αναλυτικά τα στοιχεία του $\mathcal{S}$.

(ii) Καταγράψτε τα στοιχεία των γεγονότων που ορίζονται παραπάνω.

**Άσκηση 2.8**

Με τη χρησιμοποίηση των γεγονότων $A_1, A_2, A_3$ ενός δειγματικού χώρου $\mathcal{S}$ και πιθανόν των συμπληρωμάτων τους, εκφράστε τα παρακάτω γεγονότα:

(i) $B_0 = \{s \in \mathcal{S}\colon\ s$ δεν ανήκει σε κανένα από τα $A_1$, $A_2$, $A_3\}$.

(ii) $B_1 = \{s \in \mathcal{S}\colon\ s$ ανήκει ακριβώς σε ένα από τα $A_1$, $A_2$, $A_3\}$.

(iii) $B_2 = \{s \in \mathcal{S}\colon\ s$ ανήκει ακριβώς σε δύο από τα $A_1$, $A_2$, $A_3\}$.

(iv) $B_3 = \{s \in \mathcal{S}\colon\ s$ ανήκει σε όλα τα $A_1$, $A_2$, $A_3\}$.

(v) $C = \{s \in \mathcal{S}\colon\ s$ ανήκει το πολύ σε δύο από τα $A_1$, $A_2$, $A_3\}$.

(vi) $D = \{s \in \mathcal{S}\colon\ s$ ανήκει τουλάχιστον σε ένα από τα $A_1$, $A_2$, $A_3\}$.

**Άσκηση 2.9**

Αν για τρία γεγονότα $A$, $B$ και $C$ συμβαίνει $A \cup B \cup C = A$ ή $A \cap B \cap C = A$, ποια συμπεράσματα μπορούμε να εξάγουμε; Δηλαδή, με ποιο τρόπο συνδέονται τα γεγονότα $A$, $B$ και $C$;
Να εξεταστεί ιδιαίτερα η περίπτωση όπου $A \cup B \cup C = A$ και $A \cap B \cap C = A$ ταυτόχρονα.

**Άσκηση 2.10**

Δείξτε ότι το $A$ είναι το αδύνατο γεγονός (δηλαδή, $A = \varnothing$), αν και μόνο αν $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = B$ για κάθε γεγονός $B$.

**Άσκηση 2.11**

Έστω $A$, $B$ και $C$ αυθαίρετα γεγονότα του δειγματικού χώρου $\mathcal{S}$. Αποφασίστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λάθος.

(i) $(A-B)\cup B=(A\cap B^c)\cup B=B$.

(ii) $(A\cup B)-A=(A\cup B)\cap A^c=B$.

(iii) $(A\cap B)\cap(A-B)=(A\cap B)\cap(A\cap B^c)=\varnothing$.

(iv) $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)=(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$.

*Υπόδειξη*: Για την περίπτωση (iv), μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την Πρόταση 2.

**Άσκηση 2.12**

Για τρία οποιαδήποτε γεγονότα $A$, $B$ και $C$ ενός δειγματικού χώρου $\mathcal{S}$, δείξτε ότι ισχύει η μεταβατική ιδιότητα αναφορικά με το $\subseteq$ (δηλαδή, $A\subseteq B$ και $B\subseteq C$ συνεπάγεται ότι ισχύει η σχέση $A\subseteq C$).

**Άσκηση 2.13**

Αποδείξτε τις επιμεριστικές ιδιότητες:

$$A\cap(\cup_j A_j)=\cup_j(A\cap A_j)\quad\text{και}\quad A\cup(\cap_j A_j)=\cap_j(A\cup A_j).$$

*Υπόδειξη*: Δείξτε ότι το γεγονός, τόσο του ενός όσο και τους άλλου μέλους στις παραπάνω σχέσεις περιέχεται στο γεγονός του άλλου μέλους.

**Άσκηση 2.14**

Αποδείξτε την ταυτότητα:

$$\cup_j A_j=A_1\cup\big(A_1^c\cap A_2\big)\cup\big(A_1^c\cap A_2^c\cap A_3\big)\cup\cdots$$

*Υπόδειξη*: Δείτε την Άσκηση 2.13.

**Άσκηση 2.15**

Αποδείξτε τους νόμους του DeMorgan:

$$(\cup_j A_j)^c=\cap_j A_j^c\quad\text{και}\quad(\cap_j A_j)^c=\cup_j A_j^c.$$

*Υπόδειξη*: Δείτε την Άσκηση 2.13.

**Άσκηση 2.16**

Έστω $\mathcal{S}=\Re$ και για $n=1,2,\ldots$, ορίστε τα γεγονότα $A_n$ και $B_n$ ως εξής:

$$A_n=\left\{x\in\Re\colon\ -5+\frac{1}{n}<x<20-\frac{1}{n}\right\},\quad B_n=\left\{x\in\Re\colon\ 0<x<7+\frac{3}{n}\right\}.$$

(i) Δείξτε ότι η ακολουθία $\{A_n\}$ είναι αύξουσα και η $\{B_n\}$ είναι φθίνουσα.

(ii) Προσδιορίστε τα όρια, $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και $\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

*Παρατήρηση*: Δείτε τη συζήτηση που ακολουθεί το Παράδειγμα 18.

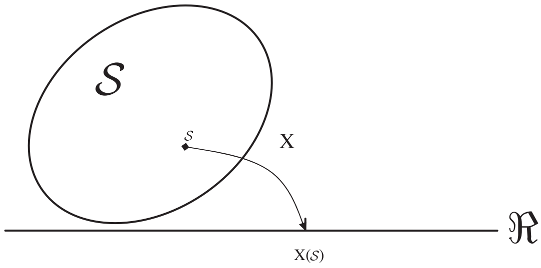
## 2.3 Τυχαίες Μεταβλητές

Για κάθε πείραμα τύχης υπάρχει τουλάχιστον ένας δειγματικός χώρος κατάλληλος για το υπό εξέταση πείραμα τύχης. Παρόλα αυτά, σε πολλές περιπτώσεις μεγάλο μέρος των υπολογισμών μπορεί να γίνει χωρίς να αναφερόμαστε σε ένα συγκεκριμένο δειγματικό χώρο. Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση των τυχαίων μεταβλητών και των κατανομών τους. Οι ποσότητες αυτές θα μελετηθούν εκτεταμένα σε επόμενα κεφάλαια. Στην ενότητα αυτή περιοριζόμαστε στην εισαγωγή της έννοιας μιας τυχαίας μεταβλητής.

Τυπικά, μια *τυχαία μεταβλητή* (τ.μ.) είναι απλά μια συνάρτηση η οποία ορίζεται σε ένα δειγματικό χώρο $\mathcal{S}$ και η οποία παίρνει τιμές στην ευθεία των πραγματικών αριθμών $\Re = (-\infty, \infty)$ (δες Σχήμα 2.7). Οι τυχαίες μεταβλητές συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα $X$, $Y$, $Z$, με ή χωρίς υποδείκτες (κάτω δείκτες). Έτσι, η τιμή της τυχαίας μεταβλητής $X$ σε ένα δειγματοσημείο $s$ είναι $X(s)$, και το σύνολο όλων των τιμών της $X$, το *εύρος* της $X$, συνήθως συμβολίζεται ως $X(\mathcal{S})$. Η μόνη διαφορά ανάμεσα σε μια τ.μ. και μια συνήθη συνάρτηση, όπως τη γνωρίζουμε από την ανάλυση, είναι ότι το πεδίο ορισμού μιας τ.μ. είναι ένας δειγματικός χώρος $\mathcal{S}$, ο οποίος μπορεί να είναι ένα αφηρημένο σύνολο, σε αντίθεση με τη συνήθη έννοια της συνάρτησης, της οποίας το πεδίο ορισμού είναι ένα υποσύνολο του $\Re$ ή ενός Ευκλείδιου χώρου μεγαλυτέρων διαστάσεων. Η χρήση του όρου "τυχαία μεταβλητή" αντί αυτού της συνάρτησης, μπορεί να ερμηνευθεί από το γεγονός ότι οι τιμές μιας τ.μ. εξαρτώνται από τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης. Κατά συνέπεια, μπορεί να ισχυριστεί κανείς ότι η $X(s)$ δεν είναι γνωστή παρά μόνο μέχρι τη στιγμή που πραγματοποιείται ένα πείραμα τύχης και το $s$ γίνεται γνωστό. Είναι προφανές ότι στον ίδιο δειγματικό χώρο μπορεί να ορίσει κανείς πολλές και διάφορες τ.μ.

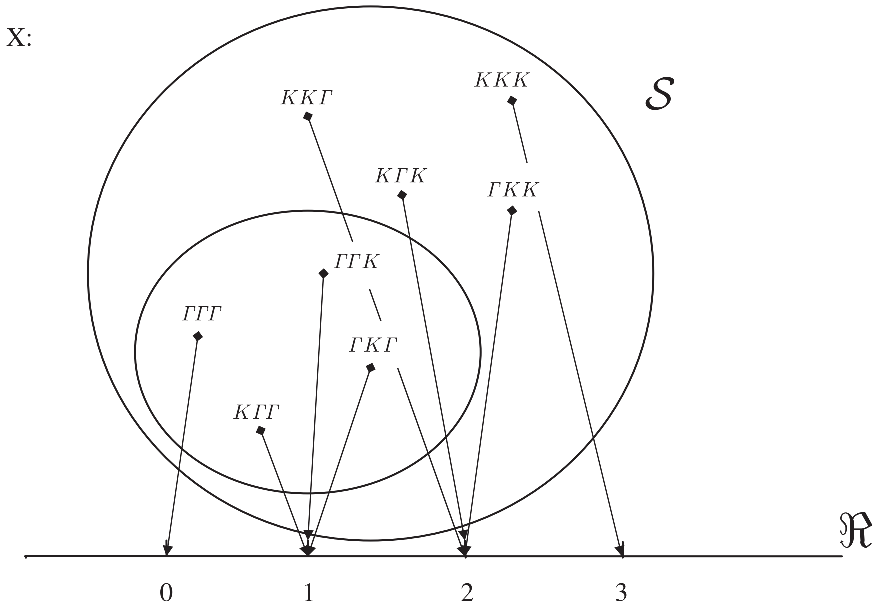
Στο Παράδειγμα 1, αντί του δειγματικού χώρου $\mathcal{S}$ που αναφέρθηκε εκεί, μπορεί να ενδιαφέρεται κανείς για το πλήθος των κορώνων που εμφανίζονται στη ρίψη τριών νομισμάτων. Η επιλογή αυτή οδηγεί στον ορισμό της τ.μ. $X$: $X(s) = \#$ των $K$ στο $s$ (όπου το $\#$ σημαίνει "αριθμός"). Συνεπώς

$$
\begin{aligned}
&X(KKK) = 3 \\
&X(KK\Gamma) = X(K\Gamma K) = X(\Gamma KK) = 2 \\
&X(K\Gamma\Gamma) = X(\Gamma K\Gamma) = X(\Gamma\Gamma K) = 1 \\
&X(\Gamma\Gamma\Gamma) = 0,
\end{aligned}
$$




**Σχήμα 2.7** Η τ.μ. $X$ απεικονίζει (μεταφέρει) το δειγματικό χώρο $\mathcal{S}$ στην πραγματική ευθεία $\Re$.

οπότε $X(\mathcal{S}) = \{0, 1, 2, 3\}$. Ο συμβολισμός $(X \leq 1)$ παριστάνει το γεγονός $\{s \in \mathcal{S}\colon X(s) \leq 1\} = \{\Gamma\Gamma\Gamma, K\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K\}$. Στη γενική περίπτωση και για $B \subseteq \Re$, ο συμβολισμός $(X \in B)$ παριστάνει το γεγονός $A$ του δειγματικού χώρου $\mathcal{S}$ το οποίο ορίζεται ως εξής: $A = \{s \in \mathcal{S}\colon X(s) \in B\}$. Επίσης, το γεγονός $A$ ορίζεται και από τη σχέση $X^{-1}(B)$ (δες Σχήμα 2.8).




**Σχήμα 2.8** Για $B = \{0, 1\}$, έχουμε: $(X \in B) = (X \leq 1) = X^{-1}(B) = \{\Gamma\Gamma\Gamma, K\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K\}$.

Στο Παράδειγμα 2, μια τ.μ. $X$ μπορεί να οριστεί ως εξής:

$X(s) =$"άθροισμα των αριθμών του ζευγαριού $s$". Συνεπώς

$$\begin{aligned} &X((1,1)) = 2 \\ &X((1,2)) = X((2,1)) = 3 \\ &\dots \\ &X((6,6)) = 12, \end{aligned}$$

και $X(\mathcal{S}) = \{2,3,\dots,12\}$. Επίσης, $X^{-1}(\{7\}) = \{s \in \mathcal{S}\colon X(s) = 7\} = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$. Ανάλογα πράγματα ισχύουν και στα Παραδείγματα 3–5.

Στο Παράδειγμα 6, η τ.μ. προκύπτει φυσιολογικά και ορίζεται ως ο αριθμός των ρίψεων που απαιτούνται μέχρι την πρώτη εμφάνιση μιας κορώνας. Τότε

$$\begin{aligned} &X(K) = 1 \\ &X(\mathit{\Gamma} K) = 2 \\ &\dots \\ &X(\underbrace{\mathit{\Gamma}\dots\mathit{\Gamma}}_{n-1}K) = n \\ &\dots, \end{aligned}$$

άρα $X(\mathcal{S}) = \{1,2,\dots\}$. Επίσης,
$(X > 4) = (X \geq 5) = \{\mathit{\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma} K, \mathit{\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma} K, \dots\}$ (δες Σχήμα 2.9).

Στα Παραδείγματα 7 και 8, μια προφανής τ.μ. $X$ είναι: $X(s) = s$, $s = 0,1,\dots$

Στο Παράδειγμα 9, μια χρήσιμη τ.μ. $X$, είναι η $X(s) = s$, $s \in \mathcal{S}$, και ανάλογα για τα Παραδείγματα 10, 12 και 13. Στο Παράδειγμα 11, $X(s) = s$, $s \in (0, D]$.

Στο Παράδειγμα 14 (όπου ο δειγματικός χώρος είναι $\mathcal{S} = (0,\infty)$), έστω $X$ η τ.μ. η οποία ορίζεται ως το κόστος λειτουργίας του σχετικού ανταλλακτικού μέχρι τη χρονική στιγμή $s$ και πιο συγκεκριμένα, έστω ότι

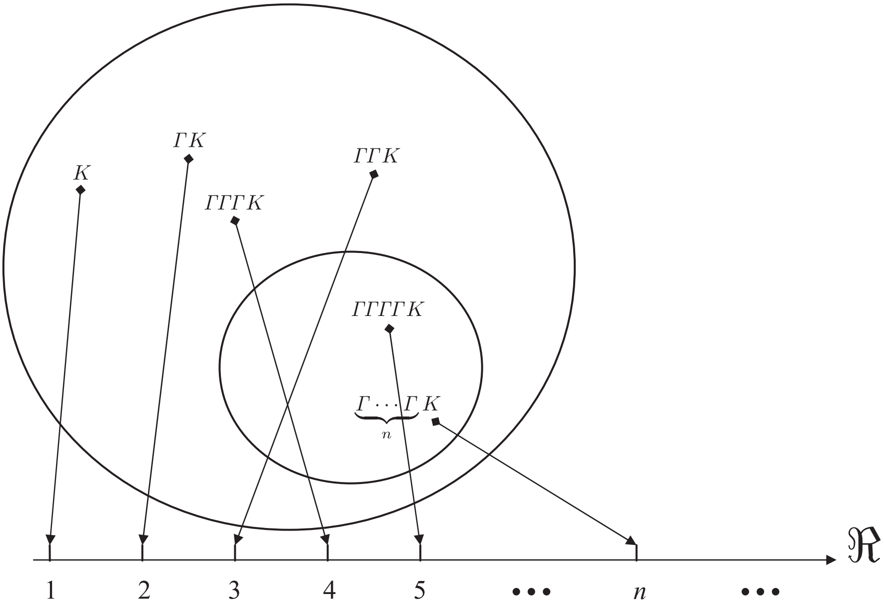
$$X(s) = 2\left(1 - 0{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}2s}\right),\ s > 0.$$

Τότε το εύρος της $X$ είναι (1,2) και για $B = [1{,}25, 1{,}75]$, έχουμε:

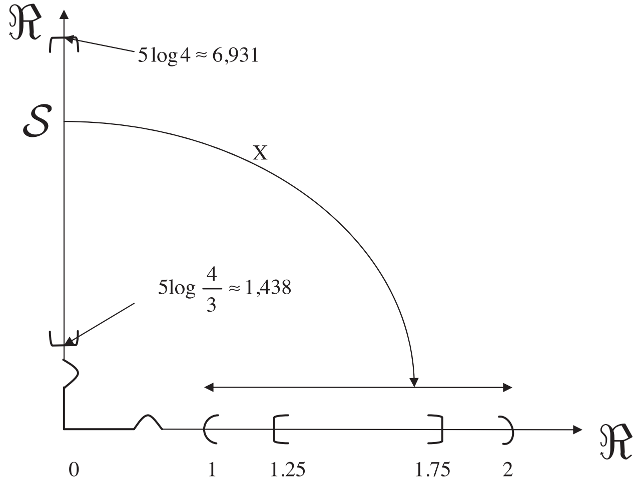
$$(X \in B) = (1{,}25 \leq X \leq 1{,}75) = X^{-1}([1{,}25{,}1{,}75]) = [5\log(4/3){,}5\log 4].$$

Αυτό ισχύει γιατί μπορεί εύκολα να δείξει κανείς ότι η σχέση $1{,}25 \leq 2(1 - 0{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}2s}) \leq 1{,}75$ είναι ισοδύναμη με την $5\log(4/3) \leq s \leq 5\log 4$, όπου με $\log$ συμβολίζουμε το φυσικό λογάριθμο (δες Σχήμα 2.10).

Στο Παράδειγμα 10 του Κεφαλαίου 1, μια τ.μ. $X$ μπορεί να οριστεί ως εξής: $X(s) =$ "η θέση του $M$ στο $s$". Τότε, είναι προφανές ότι, $X(\mathcal{S}) = \{1,2,\dots\}$ (δες επίσης τη συζήτηση που ακολουθεί το Παράδειγμα 14).




**Σχήμα 2.9** Για $B = \{5, 6, \ldots\}$, έχουμε: $(X \in B) = (X \geq 5) = X^{-1}(B) = \{\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\Gamma\Gamma K, \ldots, \underbrace{\Gamma \ldots \Gamma}_{n-1} K, \ldots\}$.




**Σχήμα 2.10** Το διάστημα $[5\log(4/3), 5\log 4] \simeq [1{,}438, 6{,}931]$ είναι το σύνολο όλων των δειγματικών σημείων $s$ τα οποία απεικονίζονται στο $[1{,}25, 1{,}75]$ μέσω της τ.μ. $X$· ισχύει $X^{-1}([1{,}25, 1{,}75])$.

Στο Παράδειγμα 16 του Κεφαλαίου 1, τυχαίες μεταβλητές με άμεσο ενδιαφέρον είναι: $X_A = \#$ των ατόμων, μεταξύ $n$ ατόμων, που έχουν ομάδα αίματος τύπου $A$, και ανάλογα για τις τ.μ. $X_B$, $X_{AB}$, $X_O$ (δες επίσης τη συζήτηση που ακολουθεί το Παράδειγμα 14).

Από τα προηγούμενα παραδείγματα, προκύπτουν δύο είδη τ.μ.: τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες παίρνουν αριθμήσιμες τιμές, όπως αυτές που ορίζονται στα Παραδείγματα 1-5, 6-8 και 16 του Κεφαλαίου 1, και τυχαίες μεταβλητές οι οποίες παίρνουν όλες τις τιμές σε ένα πεπερασμένο ή μη διάστημα του $\Re$ (μη εκφυλισμένο). Τέτοιες είναι η μεταβλητές που ορίζονται στα Παραδείγματα 9–14. Τυχαίες μεταβλητές του πρώτου είδους ονομάζονται διακριτές τ.μ. (ή τ.μ. διακριτού τύπου), ενώ αυτές του δεύτερου είδους ονομάζονται συνεχείς τ.μ. (ή τ.μ. συνεχούς τύπου).

Πιο γενικά, μια τ.μ. $X$ ονομάζεται *διακριτή* (ή *διακριτού τύπου*), αν η $X$ παίρνει, είτε πεπερασμένες σε πλήθος $x_1, \dots, x_n$ ή άπειρες αριθμήσιμες τιμές όπως $x_0, x_1, \dots$, ή $x_1, x_2, \dots$. Εξάλλου, η $X$ ονομάζεται *συνεχής* (ή *συνεχούς τύπου*) αν αυτή παίρνει όλες τις τιμές ενός κατάλληλου (μη εκφυλισμένου) διαστήματος $I \subseteq \Re$. Παρά το γεγονός ότι υπάρχουν και άλλα είδη τ.μ., σε αυτό το βιβλίο θα περιοριστούμε στις διακριτές και τις συνεχείς τ.μ. που ορίσαμε πιο πάνω.

Η μελέτη των τ.μ. είναι ένας από τους βασικούς στόχους αυτού του βιβλίου.

### 2.3.1 Ασκήσεις

**Άσκηση 3.1**

Αναφερόμενοι στην Άσκηση 2.1, ορίζουμε τις τ.μ. $X_i$, $i = 1, 2, 3$ ως εξής: $X_i = \#$ επιβατών που μεταφέρθηκαν στα ξενοδοχεία $H_i$.
Καθορίστε τις τιμές της κάθε μιας $X_i$, $i = 1, 2, 3$, και προσδιορίστε τις τιμές του αθροίσματος $X_1 + X_2 + X_3$.

**Άσκηση 3.2**

Αναφερόμενοι στην Άσκηση 2.2, ορίζουμε τις τ.μ. $X$ και $Y$ ως εξής: $X = \#$ κόκκινες μπάλες που δίνει στην έξοδο ο αυτόματος πωλητής, $Y = \#$ μπάλες άλλου χρώματος εκτός από κόκκινου, που δίνει στην έξοδο ο αυτόματος πωλητής.
Καθορίστε τις τιμές των $X$ και $Y$ και προσδιορίστε τις τιμές του αθροίσματος $X + Y$.

**Άσκηση 3.3**

Αναφερόμενοι στην Άσκηση 2.5, ορίζουμε τις τ.μ. $X$ και $Y$ ως εξής: $X = \#$ αντλιών καυσίμων που είναι σε χρήση στο σταθμό καυσίμων I, $Y = \#$ αντλιών καυσίμων που είναι σε χρήση στο σταθμό καυσίμων II.
Καθορίστε τις τιμές των $X$ και $Y$ και προσδιορίστε τις τιμές του αθροίσματος $X + Y$.

**Άσκηση 3.4**

Αναφερόμενοι στην Άσκηση 2.7, ορίζουμε την τ.μ. $X$ ως εξής: $X((x,y)) = x + y$.
Καθορίστε τις τιμές της $X$, όπως επίσης και τα ακόλουθα γεγονότα: $(X \leq 2)$, $(3 < X \leq 5)$, $(X > 6)$.

**Άσκηση 3.5**

Θεωρούμε ένα χρόνο με 365 μέρες, τις οποίες και απαριθμούμε κατά σειρά από το 1 ως 365. Δέκα από αυτούς τους αριθμούς επιλέγονται στην τύχη και χωρίς επανάληψη. Έστω $X$ η τ.μ. που ορίζει τον μεγαλύτερο από τους αριθμούς που επιλέξαμε,
Καθορίστε τις τιμές του $X$.

**Άσκηση 3.6**

Ένα ζάρι με $4$ πλευρές έχει στις πλευρές του σημειωμένους τους αριθμούς από το $1$ ως το $4$, έναν σε κάθε πλευρά. Ρίχνουμε το ζάρι δύο φορές:

(i) Γράψτε τον κατάλληλο δειγματικό χώρο $\mathcal{S}$.

(ii) Αν $X$ είναι μια τυχαία μεταβλητή που δηλώνει το άθροισμα των αριθμών που εμφανίζονται, καθορίστε τις τιμές της $X$.

(iii) Καθορίστε τα γεγονότα: $(X \leq 3)$, $(2 \leq X < 5)$, $(X > 8)$.

*Υπόδειξη*: Για το (i), το τυπικό δειγματοσημείο είναι ένα ζευγάρι $(x, y)$, όπου τα $x$ και $y$ παίρνουν τις τιμές 1, 2, 3, 4.

**Άσκηση 3.7**

Επιλέγονται τυχαία $n$ άτομα από ένα συγκεκριμένο πληθυσμό και καταγράφεται η ομάδα του αίματός τους. Έστω $X_1$, $X_2$, $X_3$ και $X_4$ οι τ.μ. οι οποίες δηλώνουν τον αριθμό των ατόμων τα οποία έχουν τις ομάδες αίματος $A$, $B$, $AB$ και $O$, αντίστοιχα.
Καθορίστε τις τιμές κάθε μιας από αυτές τις τ.μ., όπως επίσης και του αθροίσματος $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

**Άσκηση 3.8**

Ένα λεωφορείο αναμένεται να φτάσει σε μια συγκεκριμένη στάση μια οποιαδήποτε στιγμή μεταξύ 8:00 και 8:15 π.μ., και έστω $X$ η τ.μ. η οποία δηλώνει την ακριβή ώρα άφιξης του λεωφορείου.

(i) Ορίστε τον κατάλληλο δειγματικό χώρο $\mathcal{S}$ για το πείραμα παρατήρησης του χρόνου άφιξης του λεωφορείου.

(ii) Ποιες είναι οι τιμές της τ.μ. $X$;

(iii) Καθορίστε το γεγονός: “Το λεωφορείο φτάνει μέσα σε 5 λεπτά πριν τη λήξη της ώρας άφιξης”.

## 2.4 Βασικές Έννοιες και Αποτελέσματα Απαρίθμησης

Σε αυτή τη σύντομη ενότητα συζητούμε κάποιες βασικές έννοιες και αποτελέσματα, τα οποία αφορούν τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να απαριθμήσουμε το πλήθος των συνολικών αποτελεσμάτων ενός πειράματος ή το συνολικό αριθμό των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούμε να φέρουμε σε πέρας μια εργασία. Παρά το γεγονός ότι πολλοί αναγνώστες είναι εξοικειωμένοι με μέρος ή και με ολόκληρο το υλικό αυτής της ενότητας, θα τους συμβουλεύαμε να επενδύσουν λίγο από το χρόνο τους μελετώντας τη συγκεκριμένη ενότητα, για να εξοικειωθούν με το συμβολισμό που χρησιμοποιούμε εδώ, καθώς και με μερικά βασικά αποτελέσματα. Στη συνέχεια τα αποτελέσματα αυτά χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό πιθανοτήτων στο πλαίσιο των κλασικών πιθανοτήτων του Κεφαλαίου 3.

Προβλήματα απαρίθμησης εμφανίζονται σε πολλές και ποικίλες καταστάσεις. Εδώ παραθέτουμε μερικά σχετικά παραδείγματα. Στο καθένα από αυτά καλούμαστε να υπολογίσουμε τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων, που μπορεί να συμβούν ορισμένα αποτελέσματα.

**Παράδειγμα 19**

(i) Ντύσου επιλέγοντας ένα πουκάμισο, ένα παντελόνι, ένα ζευγάρι παπούτσια και ένα καπέλο, από $n_1$ πουκάμισα, $n_2$ παντελόνια, $n_3$ ζευγάρια παπούτσια και $n_4$ καπέλα (π.χ., $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = n_4 = 2$).

(ii) Σχημάτισε όλους τους αριθμούς με $k$ ψηφία, επιλέγοντας τα $k$ ψηφία από $n$ διαφορετικούς αριθμούς (π.χ., $k = 2$, $n = 4$ όπως $\{1, 3, 5, 7\}$).

(iii) Σχημάτισε όλες τις πινακίδες αυτοκινήτων χρησιμοποιώντας έναν αριθμό, τρία γράμματα και στη συνέχεια τρεις αριθμούς, με τη σειρά αυτή.

(iv) Σχημάτισε όλες τους δυνατούς κώδικες χρησιμοποιώντας ένα καθορισμένο σύνολο συμβόλων (π.χ., σχημάτισε όλες τις “λέξεις” μήκους 10, χρησιμοποιώντας τα ψηφία 0 και 1).

(v) Τοποθέτησε με όλους τους δυνατούς τρόπους $k$ βιβλία σε ένα ράφι μιας βιβλιοθήκης.

(vi) Τοποθέτησε με όλους τους δυνατούς τρόπους τα γενέθλια $k$ ατόμων στις 365 μέρες ενός χρόνου.

(vii) Τοποθέτησε $k$ γράμματα σε $k$ φακέλους (ένα γράμμα σε κάθε φάκελο).

(viii) Απαρίθμησε όλα τα διαφορετικά αποτελέσματα όταν ρίξεις μια φορά $k$ διαφορετικά ζάρια.

(ix) Επίλεξε $k$ τραπουλόχαρτα από μια τράπουλα (π.χ., για $k = 5$, είναι μια περίπτωση ισοδύναμη ενός χεριού πόκερ).

(x) Σχημάτισε όλες τις δυνατές επιτροπές $k$ μελών από $n$ υποψήφια μέλη.

Ο υπολογισμός των αριθμητικών αποτελεσμάτων, στις περιπτώσεις (i) εως (x) πιο πάνω, προκύπτει σαν μια απλή εφαρμογή της ούτω καλούμενης *θεμελιώδους αρχής απαρίθμησης*, η οποία παρατίθεται στη συνέχεια υπό μορφή θεωρήματος.

**Θεώρημα 1** ***(Θεμελιώδης Αρχή Απαρίθμησης)***
Υποθέτουμε ότι ένα έργο ολοκληρώνεται σε $k$ στάδια και το κάθε ένα από τα στάδια αυτά, ολοκληρώνεται με την εκτέλεση ενός συγκεκριμένου αριθμού από υποέργων. Αν ο αριθμός των υποέργων αυτών είναι $n_1, \ldots, n_k$ για τα $k$ στάδια, αντίστοιχα, τότε ο συνολικός αριθμός διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να ολοκληρωθεί το συνολικό έργο είναι:

$$n_1 \times \cdots \times n_k.$$

Κατά συνέπεια στο παραπάνω παράδειγμα (i), ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων ένδυσης είναι:

$$4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48.$$

Στο (ii), το πλήθος όλων των διψήφιων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας τα ψηφία 1, 3, 5, 7 είναι:

$$4 \times 4 = 16,$$

συγκεκριμένα $\{11, 13, 15, 17, 31, 33, 35, 37, 51, 53, 55, 57, 71, 73, 75, 77\}$.

Στο (iii), το πλήθος όλων των δυνατών πινακίδων αυτοκινήτων (χρησιμοποιώντας χωρίς κανένα περιορισμό και τα 10 ψηφία από το 0 ως το 9 και όλα τα 26 γράμματα του Αγγλικού αλφαβήτου), είναι:

$$10 \times (26 \times 26 \times 26) \times (10 \times 10 \times 10) = 175.760.000.$$

Στο (iv), το πλήθος όλων των δυνατών “λέξεων” βρίσκεται θεωρώντας $k = 10$ και $n_1 = \cdots = n_{10} = 2$, οπότε:

$$2^{10} = 1.024.$$

Στο (v), όλες οι δυνατές διατάξεις επιτυγχάνονται αν θεωρήσουμε $n_1 = k$, $n_2 = k-1, \ldots, n_k = k-(k-1) = 1$, οπότε:

$$k(k-1)\ldots 1 = 1\ldots(k-1)k.$$

Για παράδειγμα, για $k = 10$, ο αριθμός των διατάξεων είναι: 3.628.800.

Στο (vi), ο ζητούμενος αριθμός επιτυγχάνεται αν θεωρήσουμε $n_1 = \cdots = n_k = 365$, οπότε το τελικό αποτέλεσμα θα είναι:

$$365^k.$$

Για παράδειγμα, για $k = 3$, έχουμε: $365^3 = 48.627.125$.

Στο (vii), ο ζητούμενος αριθμός είναι

$$k(k-1)\ldots 1 = 1\ldots(k-1)k,$$

ο οποίος επιτυγχάνεται αν θεωρήσουμε $n_1 = k$, $n_2 = k-1, \ldots,$ $n_k = k-(k-1) = 1$.

Στο (viii), ο ζητούμενος αριθμός είναι

$$6^k,$$

ο οποίος επιτυγχάνεται αν θεωρήσουμε $n_1 = \cdots = n_k = 6$. Για παράδειγμα, για $k = 3$, έχουμε $6^3 = 216$ και για $k = 10$, έχουμε $6^{10} = 60.466.176$.

Στο (ix), ο αριθμός των δυνατών χεριών πόκερ είναι:

$$\frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{120} = 2.598.960.$$

Ο αριθμητής επιτυγχάνεται παίρνοντας $n_1 = 52$, $n_2 = 51$, $n_3 = 50$, $n_4 = 49$, $n_5 = 48$. Η διαίρεση με 120 $(= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5)$ χρησιμοποιείται για να εξαλείψει τα χέρια που αποτελούνται από τα ίδια τραπουλόχαρτα αλλά επιλέγονται με διαφορετική σειρά.

Τέλος, στο (x), ο ζητούμενος αριθμός είναι:

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times k},$$

ο οποίος επιτυγχάνεται με μια διαδικασία ανάλογη εκείνη της περίπτωσης (ix). Για παράδειγμα, για $n = 10$ και $k = 3$, έχουμε $\dfrac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120$.

Σε όλες τις περιπτώσεις (i) έως (x), οι ζητούμενοι αριθμοί υπολογίστηκαν με κατάλληλη εφαρμογή του Θεωρήματος 1. Επιπλέον σε πολλές περιπτώσεις, με χαρακτηριστικά παραδείγματα τις περιπτώσεις (ii), (iii), (v), (vii), (ix) και (x), το έργο το οποίο πραγματοποιείται, επιτυγχάνεται, επιλέγοντας και διατάσσοντας ένα αριθμό αντικειμένων από ένα μεγαλύτερο αριθμό διαθέσιμων αντικειμένων.

Κατά τη διαδικασία αυτή, η σειρά με την οποία επιλέγονται τα αντικείμενα της διάταξης, μπορεί να έχει σημασία, όπως συμβαίνει στις περιπτώσεις (ii), (iii), (iv), (v), (vi) και (vii), αλλά μπορεί και να μην έχει σημασία, όπως στις περιπτώσεις (ix) και (x). Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στις έννοιες των μεταθέσεων και των συνδυασμών. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε:

**Ορισμός 1**

Μια διάταξη $k$ αντικειμένων από ένα σύνολο $n$ αντικειμένων, στην οποία η σειρά της διάταξης έχει σημασία (διατεταγμένη διάταξη) ονομάζεται *μετάθεση* των $n$ αντικειμένων ανά $k$ κάθε φορά.
Μια διάταξη $k$ αντικειμένων από ένα σύνολο $n$ αντικειμένων, στην οποία η σειρά της διάταξης δεν έχει σημασία (μη-διατεταγμένη διάταξη) ονομάζεται *συνδυασμός* των $n$ αντικειμένων ανά $k$ κάθε φορά.

Το ερώτημα το οποίο φυσιολογικά προκύπτει είναι πόσες μεταθέσεις και πόσοι συνδυασμοί υπάρχουν. Η απάντηση δίνεται στη συνέχεια.

**Πόρισμα *(του Θεωρήματος 1)***

(i) Ο αριθμός των διατάξεων $k$ αντικειμένων από ένα σύνολο $n$ διακεκριμένων αντικειμένων $(1 \leq k \leq n)$ είναι $n^k$, όταν επιτρέπονται *επαναλήψεις*. Όταν δεν επιτρέπονται επαναλήψεις, ο αριθμός αυτός είναι ίσος με τον αριθμό των μεταθέσεων $n$ αντικειμένων ανά $k$ κάθε φορά, συμβολίζεται ως $P_{n,k}$ και δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$P_{n,k} = n(n-1)\dots(n-k+1). \tag{2.1}$$

Για $k = n$,

$$P_{n,n} = n(n-1)\dots 1 = 1\dots(n-1)n = n!$$

όπου ο συμβολισμός $n!$ διαβάζεται ως "$n$ παραγοντικό".

(ii) Ο αριθμός των *συνδυασμών* (δηλαδή, του αριθμού των διατάξεων στις οποίες η σειρά δεν έχει σημασία και στις οποίες δεν έχουμε επαναλήψεις) $n$ διακεκριμένων αντικειμένων ανά $k$ κάθε φορά $(1 \leq k \leq n)$, συμβολίζεται με $\binom{n}{k}$ και δίνεται ως εξής:

$$\binom{n}{k} = \frac{P_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{2.2}$$

**Παρατήρηση 2**

Το αν θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μεταθέσεις ή συνδυασμούς για να επιλύσουμε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα συνδυαστικής προκύπτει από τη φύση και τα δεδομένα του προβλήματος κάθε φορά. Για παράδειγμα, στην περίπτωση (ii) κατάλληλες είναι οι μεταθέσεις και όχι οι συνδυασμοί, εφόσον, για παράδειγμα, το 13 και το 31 είναι διαφορετικές ποσότητες. Το ίδιο ισχύει και στις περιπτώσεις (iii)–(viii), ενώ οι συνδυασμοί είναι κατάλληλοι για τις περιπτώσεις (ix) και (x).

Σαν παράδειγμα, στο (ii), $P_{4,2} = 4 \times 3 = 12$ (δεν λαμβάνουμε υπόψη τους αριθμούς με ίδια ψηφία 11, 22, 33 και 44), ενώ στο (ix), $\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} =$ 2.598.960.

**Παρατήρηση 3**

Στη Σχέση (2.2), θέτουμε $k = n$. Τότε το αριστερό μέλος της σχέσης είναι προφανώς 1, ενώ το δεξί μέλος της είναι $\frac{n!}{n!0!} = \frac{1}{0!}$. Για να είναι αυτό 1, θα πρέπει να ορίσουμε $0! = 1$. Από τη Σχέση (2.2), προκύπτει επίσης ότι $\binom{n}{0} = 1$.

Υπολογίζοντας τις μεταθέσεις (παραγοντικό) $P_{n,n} = n!$, η υπόθεση η οποία γίνεται είναι ότι τα $n$ αντικείμενα είναι διακεκριμένα. Αν αυτό δεν ισχύει, ο αριθμός $n!$ θα πρέπει να τροποποιηθεί κατάλληλα. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Πρόταση 5**

Θεωρούμε $n$ αντικείμενα τα οποία χωρίζονται σε $k$ ομάδες ($1 \le k \le n$) με την ιδιότητα τα $m_i$ μέλη της $i$-ομάδας να είναι πανομοιότυπα και διαφορετικά από τα μέλη των υπολοίπων ομάδων, $m_1 + \ldots + m_k = n$. Τότε ο αριθμός των *διαφορετικών* διατάξεων των $n$ αντικειμένων είναι $n!/(m_1! \times \ldots \times m_k!)$.

**Απόδειξη**

Ένας τρόπος για να υπολογίσουμε όλες τις διαφορετικές διατάξεις των $n$ αντικειμένων είναι να επιλέξουμε $m_i$ θέσεις από τις $n$ διαθέσιμες με $\binom{n}{m_i}$ δυνατούς τρόπους και να τοποθετήσουμε εκεί τα $m_i$ πανομοιότυπα αντικείμενα, $i = 1, \ldots, k$. Τότε, από το Θεώρημα 1, ο συνολικός αριθμός διαφορετικών διατάξεων είναι:

$$\binom{n}{m_1} \times \binom{n-m_1}{m_2} \times \ldots \times \binom{n-m_1-\ldots-m_{k-1}}{m_k} = \frac{n!}{m_1!(n-m_1)!} \times \frac{(n-m_1)!}{m_2!(n-m_1-m_2)!} \times \ldots$$

$$\ldots \times \frac{(n-m_1-\ldots-m_{k-1})!}{m_k!(n-m_1-\ldots-m_{k-1}-m_k)!} =$$

$$= \frac{n!}{m_1! \times m_2! \times \ldots \times m_k!}$$

αφού $(n-m_1-\ldots-m_{k-1}-m_k)! = 0! = 1$.
Ένας εναλλακτικός τρόπος για να διαπραγματευτούμε το συγκεκριμένο πρόβλημα θα ήταν να θεωρήσουμε τις $n!$ μεταθέσεις των $n$ αντικειμένων υποθέτοντας ότι είναι διακεκριμένα και στη συνέχεια να κάνουμε τις $m_i!$ μεταθέσεις εντός της $i$-ομάδας $i = 1, \ldots, k$, οι οποίες αφήνουν τη συνολική διάταξη αμετάβλητη. Κατά συνέπεια, ο αριθμός των διαφορετικών διατάξεων των $n$ αντικειμένων είναι $n!/(m_1! \times m_2! \times \ldots \times m_k!)$. ▲

Η ενότητα ολοκληρώνεται με την απόδειξη του Θεωρήματος 1, του πορίσματός του, και μερικές εφαρμογές των αποτελεσμάτων του.

**Απόδειξη του Θεωρήματος 1**

Η απόδειξη του θεωρήματος θα γίνει με την επαγωγική μέθοδο. Για $k = 2$ αυτό που έχει να κάνει κανείς είναι να συνδυάσει τον καθένα από τους $n_1$ τρόπους με τους οποίους μπορεί επιτευχθεί το υποέργο του σταδίου 1 με κάθε έναν από τους $n_2$ τρόπους με τους οποίους μπορεί να επιτευχθεί το υποέργο του σταδίου 2, οπότε και καταλήγει στο $n_1 \times n_2$ για τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να ολοκληρωθεί το έργο. Στη συνέχεια, κάνουμε την επαγωγική υπόθεση ότι η πρόταση ισχύει για $k = m$ και την αποδεικνύουμε για $k = m + 1$. Έτσι, για τα πρώτα $m$ στάδια, ο συνολικός αριθμός των τρόπων με τις οποίες γίνεται το έργο είναι: $n_1 \times \cdots \times n_m$, ενώ απομένει το τελικό $(m + 1)$ στάδιο για την ολοκλήρωση του έργου. Είναι προφανές ότι αυτό που έχουμε να κάνουμε είναι να συνδυάσουμε κάθε έναν από τους $n_1 \times \cdots \times n_m$ τρόπους με τους οποίους επιτυγχάνεται το έργο στο πρώτα του $m$ στάδια, με τον καθέναν από τους $n_{m+1}$ τρόπους με τους οποίους επιτυγχάνεται το υποέργο στο $(m+1)$ στάδιο, οπότε και καταλήγουμε στον αριθμό $n_1 \times \cdots \times n_m \times n_{m+1}$ διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να ολοκληρωθεί το έργο. ▲

**Απόδειξη του Πορίσματος**

(i) Εδώ, σχηματίζουμε μια διατεταγμένη διάταξη αντικειμένων σε $k$ στάδια, επιλέγοντας ένα αντικείμενο, από τα $n$ διαθέσιμα, σε κάθε στάδιο (θεωρούμε ότι επιτρέπονται οι επαναλήψεις). Κατά συνέπεια, το θεώρημα εφαρμόζεται με $n_1 = \cdots = n_k = n$ και δίνει το αποτέλεσμα $n^k$. Όταν οι επαναλήψεις δεν επιτρέπονται, το μόνο που αλλάζει από την περίπτωση που μελετήσαμε πιο πάνω είναι: $n_1 = n$, $n_2 = n - 1$, …, $n_k = n - (k-1) = n - k + 1$, και τότε το θεώρημα δίνει τη σχέση (2.1).

(ii) Έστω $\binom{n}{k}$ ο αριθμός των συνδυασμών (διατάξεις στις οποίες η σειρά δεν έχει σημασία και χωρίς επαναλήψεις) των $n$ (διακεκριμένων) αντικειμένων λαμβανομένων ανά $k$ κάθε φορά. Για κάθε μια από αυτές τις μη διατεταγμένες διατάξεις, επιτυγχάνουμε $k!$ διατεταγμένες διατάξεις με μεταθέσεις των $k$ αντικειμένων. Τότε $k! \times \binom{n}{k}$ είναι ο συνολικός αριθμός των διατεταγμένων διατάξεων των $n$ αντικειμένων ανά $k$ κάθε φορά, που δίνεται από τη $P_{n,k}$, όπως στο μέρος (i). Λύνοντας ως προς $\binom{n}{k}$, επιτυγχάνουμε την πρώτη έκφραση της (2.2). Η δεύτερη έκφραση ακολουθεί αμέσως αν πολλαπλασιάσουμε με $(n-k)\dots 1$ και διαιρέσουμε με $1\dots(n-k) = (n-k)!$ ▲

Υπάρχουν πολλές ενδιαφέρουσες παραλλαγές και βαθύτερα αποτελέσματα τα οποία βασίζονται στο Θεώρημα 1 και το πόρισμά του. Μερικές από αυτές μπορούν να βρεθούν στις Ενότητες 2.4 και 2.6 του Κεφαλαίου 2 του βιβλίου: G.G. Roussas, A Course in Mathematical Statistics, 2nd Edition (1997), Academic Press.

**Παράδειγμα 20**

Το διδακτικό προσωπικό ενός ακαδημαϊκού τμήματος του Πανεπιστημίου της Καλιφόρνιας στο Davis αποτελείται από 4 βοηθούς καθηγητές, 6 αναπληρωτές καθηγητές και 5 καθηγητές. Επίσης, έχει 30 μεταπτυχιακούς φοιτητές. Πρόκειται να συσταθεί μια πενταμελής επιτροπή με σκοπό να εξετάσει ένα θέμα του προγράμματος σπουδών.

(i) Ποιος είναι ο αριθμός όλων των δυνατών επιτροπών οι οποίες θα αποτελούνται μόνο από διδακτικό προσωπικό;

(ii) Πόσες επιτροπές μπορούν να σχηματιστούν αν πρέπει να συμμετέχουν σε αυτές 2 μεταπτυχιακοί φοιτητές και να αντιπροσωπεύονται όλες οι ακαδημαϊκές βαθμίδες;

**Συζήτηση**

Είναι προφανές ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση το κατάλληλο μέσο είναι οι συνδυασμοί. Έχουμε τότε:

(i) Ο αριθμός είναι:

$$\binom{15}{5} = \frac{15!}{5!10!} = \frac{11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 3.003.$$

(ii) Εδώ ο αριθμός είναι:

$$\binom{30}{2}\binom{4}{1}\binom{6}{1}\binom{5}{1} = \frac{30!}{2!28!} \times 4 \times 6 \times 5 = \frac{29 \times 30}{2} \times 120 = 52.200.$$

**Παράδειγμα 21**

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να μοιράσει κανείς 5 δώρα σε 15 άτομα, αν κανένα άτομο δεν μπορεί να πάρει περισσότερα από ένα δώρο;

**Συζήτηση**

Η απάντηση είναι $\binom{15}{5} = \frac{15!}{5!10!} = 3.003.$

**Παράδειγμα 22**

Πόσες λέξεις με 5 γράμματα μπορούν να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας τα 26 γράμματα του Αγγλικού αλφαβήτου, αν:

(i) Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός;

(ii) Και τα 5 γράμματα πρέπει να είναι διαφορετικά.

**Συζήτηση**

(i) Η απάντηση είναι: $26^5 = 11.881.376$.

(ii) Στην περίπτωση αυτή, η απάντηση είναι: $P_{26,5} = 26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 7.893.600$.

**Παράδειγμα 23**

Σε κάθε έναν από 10 εργαζόμενους πρόκειται να ανατεθεί μία από 10 διαφορετικές εργασίες. Πόσες διαφορετικές αναθέσεις είναι δυνατές;

**Συζήτηση**

Η προφανής απάντηση είναι $10! = 1 \times 2 \times \ldots \times 10 = 3.628.800$.

**Παράδειγμα 24**

Χρησιμοποιώντας 3 A, 2 E, 1 H, 2 L, 2 S και 1 T, μπορούμε να σχηματίσουμε τη λέξη TALLAHASSEE, το όνομα της πρωτεύουσας της πολιτείας της Florida. Πόσες επιπλέον διαφορετικές λέξεις μπορούν να σχηματιστούν με τα ίδια γράμματα (ασχέτως του αν οι λέξεις αυτές έχουν σημασία);

**Συζήτηση**

Έχουμε συνολικά 11 γράμματα. Με βάση την Πρόταση 5, ο συνολικός αριθμός των λέξεων είναι:

$$\frac{11!}{3! \times 2! \times 1! \times 2! \times 2! \times 1!} = 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 9 \times 10 \times 11 = 831.600.$$

Κατά συνέπεια υπάρχουν άλλες 831.599 λέξεις, επιπλέον της TALLAHASSEE.

**Παράδειγμα 25**

Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 5 με σκοπό να δείξετε ότι το πολυωνυμικό ανάπτυγμα της $(x_1 + \ldots + x_k)^n$ δίνεται από την έκφραση:

$$\sum \frac{n!}{m_1! \times \ldots \times m_k!} x_1^{m_1} \times \ldots \times x_k^{m_k},$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλους τους μη αρνητικούς ακέραιους $m_1, \ldots, m_k$ με $m_1 + \ldots + m_k = n$.

**Συζήτηση**

Το πολυωνυμικό ανάπτυγμα της $(x_1 + \ldots + x_k)^n$ είναι το άθροισμα όλων των δυνατών όρων της μορφής $x_1^{m_1} \times \ldots \times x_k^{m_k}$, όπου τα $m_i$ είναι όπως καθορίστηκαν πιο πάνω. Ο υπολογισμός των όρων της μορφής αυτής ανάγεται στον υπολογισμό του αριθμού των διαφορετικών διατάξεων $n$ αντικειμένων χωρισμένα σε $k$ ομάδες με $m_i$ πανομοιότυπα αντικείμενα ($x_i$) στην $i$ ομάδα, $i = 1, \ldots, k$. Αυτός ο αριθμός όπως έχουμε δει είναι $n!/(m_1! \times \ldots \times m_k!)$.

### 2.4.1 Ασκήσεις

**Άσκηση 4.1**

Οι τηλεφωνικοί αριθμοί του Πανεπιστημίου της Καλιφόρνιας στο Davis είναι 7-ψήφιοι, όπου τα 3 πρώτα ψηφία είναι πάντα 752. Υπολογίζεται ότι για να καλυφθούν οι ανάγκες του Πανεπιστημίου απαιτούνται περίπου 15.000 διαφορετικοί τηλεφωνικοί αριθμοί.
Υπάρχουν αρκετοί τηλεφωνικοί αριθμοί για να καλύψουν τις απαιτήσεις του Πανεπιστημίου; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

**Άσκηση 4.2**

Ένας πειραματικός επιστήμονας μελετά τις επιπτώσεις της θερμοκρασίας, της πίεσης και ενός καταλύτη στο αποτέλεσμα μιας συγκεκριμένης χημικής αντίδρασης. Έστω ότι είναι διαθέσιμες τρεις διαφορετικές πιέσεις, τέσσερις διαφορετικές θερμοκρασίες και πέντε διαφορετικοί καταλύτες.

(i) Αν σε κάθε πείραμα χρησιμοποιεί μια τιμή θερμοκρασίας, μια τιμή πίεσης, και ένα καταλύτη, πόσα διαφορετικά πειράματα είναι δυνατά;

(ii) Πόσα διαφορετικά πειράματα μπορεί να πραγματοποιήσει στα οποία θα χρησιμοποιήσει τη χαμηλότερη θερμοκρασία και τις δύο χαμηλότερες πιέσεις;

(iii) Πόσα διαφορετικά πειράματα μπορεί να πραγματοποιήσει αν πρέπει να χρησιμοποιήσει ένα συγκεκριμένο καταλύτη;

**Άσκηση 4.3**

Έστω ότι ένας ταχυδρομικός κώδικας αποτελείται από ένα 5-ψήφιο αριθμό, τα ψηφία του οποίου επιλέγονται από τους αριθμούς $0, 1, \ldots, 9$.

(i) Υπολογίστε τον αριθμό των διαφορετικών ταχυδρομικών κωδίκων.

(ii) Αν $X$ είναι μια τ.μ. η οποία ορίζεται ως εξής: $X$(ταχυδρομικός κώδικας)$=$ $\#$ των μη μηδενικών ψηφίων στον ταχυδρομικό κώδικα, ποιες είναι δυνατές τιμές της $X$;

(iii) Δώστε 3 ταχυδρομικούς κώδικες και τις αντίστοιχες τιμές του $X$.

**Άσκηση 4.4**

Υπολογίστε πόσοι 5-ψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας τα ψηφία 1, 2, 3, 4 και 5, έτσι ώστε οι περιττές θέσεις να καταλαμβάνονται από περιττά ψηφία και οι άρτιες θέσεις από άρτια ψηφία, αν:

(i) Επιτρέπονται επαναλήψεις.

(ii) Δεν επιτρέπονται επαναλήψεις.

**Άσκηση 4.5**

Πόσους 3-ψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα ψηφία: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9, οι οποίοι θα ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

(i) Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.

(ii) Και τα 3 ψηφία θα πρέπει να είναι διαφορετικά.

(iii) Όλοι οι 3-ψήφιοι αριθμοί θα πρέπει να αρχίζουν με το ψηφίο 1 και να τελειώνουν με το ψηφίο 0.

**Άσκηση 4.6**

Σε μια ευθεία γραμμή υπάρχουν $n$ σημεία στα οποία μπορεί να τοποθετηθεί είτε μια τελεία είτε μια παύλα. Ποιος είναι ο αριθμός των διαφορετικών ομάδων συμβόλων που μπορούμε να σχηματίσουμε; Ποιος είναι αυτός ο αριθμός αν $n = 5,\ 10,\ 15,\ 20$ και $25$;

**Άσκηση 4.7**

Για οποιουσδήποτε ακέραιους αριθμούς $m$ και $n$ με $0 \leq m \leq n$, να δείξετε ότι $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$, είτε κάνοντας τις πράξεις (χρησιμοποιώντας παραγοντικά) σε κάθε μέλος της εξίσωσης, είτε χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλο επιχείρημα χωρίς καθόλου πράξεις.

**Άσκηση 4.8**

Δείξτε ότι $\binom{n+1}{m+1} / \binom{n}{m} = \dfrac{n+1}{m+1}$.
*Υπόδειξη*: Αναπτύξτε τις εκφράσεις χρησιμοποιώντας παραγοντικά.

**Άσκηση 4.9**

Αν $M, N$ και $m$ είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί με $m \leq M$, να δείξετε ότι:

$$\binom{M}{m} = \binom{M-1}{m} + \binom{M-1}{m-1},$$

χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\binom{k}{x} = 0$ για $x > k$.

*Υπόδειξη*: Όπως στην Άσκηση 4.8, ξεκινώντας όμως εδώ, από το δεξί μέλος της εξίσωσης.

**Άσκηση 4.10**

Χωρίς πράξεις και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\binom{k}{x} = 0$ για $x > k$, να δείξετε ότι:

$$\sum_{x=0}^{r} \binom{m}{x}\binom{n}{r-x} = \binom{m+n}{r}.$$

**Άσκηση 4.11**

Σύμφωνα με το δυωνυμικό ανάπτυγμα, για κάθε $x$ και $y$ πραγματικούς αριθμούς και $n$, θετικό ακέραιο, έχουμε:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^k.$$

(i) Αποδείξτε την παραπάνω σχέση χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.2).

(ii) Χρησιμοποιήστε την παραπάνω σχέση για να δείξετε ότι:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{και} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

*Υπόδειξη*: Για το ερώτημα (i), δείτε επίσης και το Παράδειγμα 25.

**Άσκηση 4.12**

Σε ένα επίπεδο υπάρχουν $n$ σημεία, διατεταγμένα με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε καμία τριάδα από αυτά τα σημεία να μην βρίσκεται πάνω στην ίδια ευθεία. Πόσα διαφορετικά τρίγωνα μπορούν να σχηματιστούν; Ποιος είναι ο αριθμός τους για $n = 10$;

**Άσκηση 4.13**

Ο Beethoven έγραψε 9 συμφωνίες, ο Mozart 27 κονσέρτα για πιάνο και ο Schubert 15 κουαρτέτα εγχόρδων.

(i) Ένας πανεπιστημιακός ραδιοφωνικός σταθμός ανακοινώνει ότι θα αναμεταδώσει πρώτα μια συμφωνία του Beethoven, στη συνέχεια ένα κονσέρτο του Mozart και τέλος ένα κουαρτέτο του Schubert. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η συγκεκριμένη αναμετάδοση;

(ii) Ποιο είναι το αποτέλεσμα του ερωτήματος (i) αν τα τρία μουσικά κομμάτια αναμεταδοθούν χωρίς συγκεκριμένη σειρά;

**Άσκηση 4.14**

Αν $n$ χώρες ανταλλάσσουν μεταξύ τους πρεσβευτές, πόσοι πρεσβευτές συμμετέχουν συνολικά; Ποιο είναι το αποτέλεσμα για $n = 10$, $50$, $100$;

**Άσκηση 4.15**

Ας υποθέσουμε ότι οι πινακίδες αυτοκινήτων σχηματίζονται επιλέγοντας πρώτα 3 γράμματα από τα 26 γράμματα του Αγγλικού αλφαβήτου και εν συνεχεία 5 ψηφία από τους αριθμούς $0, 1, \ldots, 9$. Πόσες πινακίδες μπορούν να σχηματιστούν υπό τις κάτωθι συνθήκες:

(i) Χωρίς κανένα περιορισμό.

(ii) Τα 3 γράμματα είναι διαφορετικά.

(iii) Τα 5 ψηφία είναι διαφορετικά.

(iv) Και τα 3 γράμματα και τα 5 ψηφία είναι διαφορετικά.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

# Επισκόπιση της Στατιστικής Συμπερασματολογίας

Μια αναδρομή στα προηγούμενα κεφάλαια καθιστά προφανές ότι βασικοί στόχοι υπήρξαν ο υπολογισμός πιθανοτήτων καθώς και ο υπολογισμός ορισμένων χαρακτηριστικών ποσοτήτων μιας κατανομής όπως ο μέσος, η διασπορά, η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή. Βασική προϋπόθεση για να καταλήξουμε σε αριθμητικές απαντήσεις για τους υπολογισμούς αυτούς είναι η επακριβής γνώση των υπόψη κατανομών, πράγμα το οποίο συμβαίνει πολύ σπάνια. Ο λόγος για τούτο είναι ότι οι παράμετροι που εμφανίζονται, για παράδειγμα, στη συναρτησιακή μορφή της σ.π.π. μιας κατανομής, απλώς, μας είναι άγνωστοι. Το μόνο γνωστό για τις παραμέτρους αυτές είναι ότι ανήκουν σε συγκεκριμένο σύνολο τιμών, τον *παραμετρικό χώρο*.

Είναι ακριβώς αυτό το σημείο στο οποίο εμφανίζεται η στατιστική συμπερασματολογία. Σε γενικές γραμμές, ο στόχος της στατιστικής συμπερασματολογίας είναι η απόπειρα καθορισμού αγνώστων σταθερών (*παραμέτρων*) που ενυπάρχουν στην υπό μελέτη κατανομή. Αυτό επιτυγχάνεται επί τη βάση δεδομένων, τα οποία αντιπροσωπεύουν τις παρατηρηθείσες τιμές ενός τυχαίου δείγματος το οποίο λαμβάνεται από την υπόψη κατανομή. Η μέθοδος αυτή καλείται *παραμετρική στατιστική συμπερασματολογία*, σε αντίθεση με τη *μη παραμετρική στατιστική συμπερασματολογία*. Η πρώτη εφαρμόζεται σε κατανομές οι οποίες καθορίζονται πλήρως από τη γνώση ενός πεπερασμένου αριθμού παραμέτρων. Η δεύτερη εφαρμόζεται σε περιπτώσεις κατανομών οι οποίες δεν καθορίζονται από πεπερασμένο αριθμό παραμέτρων.

Στο υπολειπόμενο μέρος του κεφαλαίου αυτού παρουσιάζεται συνοπτικά η στατιστική συμπερασματολογία και κυρίως η παραμετρική στατιστική συμπερασματολογία. Στο πλαίσιο αυτής, υπάρχουν τρεις βασικοί στόχοι, οι οποίοι χαρακτηρίζονται από το είδος των καθορισμών που θέλουμε να κάνουμε σχετικά με τις παραμέτρους. Αν ο στόχος είναι να καταλήξουμε σε ένα αριθμό ως τιμή μιας άγνωστης παραμέτρου, χρησιμοποιώντας τα διαθέσιμα δεδομένα, τότε αναφερόμαστε σε *σημειακή εκτίμηση*. Εξάλλου, αν μας αρκεί να καθορίσουμε ότι η άγνωστη παράμετρος βρίσκεται με μεγάλη πιθανότητα εντός γνωστού τυχαίου διαστήματος (δηλαδή, ενός διαστήματος με τ.μ. ως άκρα του διαστήματος), τότε αναφερόμαστε σε *εκτίμηση με διάστημα εμπιστοσύνης* (*διαστημο-εκτίμηση*) ή σε κατασκευή *διαστημάτων εμπιστοσύνης*. Τέλος, αν ο στόχος είναι να αποφασίσουμε αν μια παράμετρος βρίσκεται εντός ενός καθορισμένου υποσυνόλου του παραμετρικού χώρου, τότε αναφερόμαστε σε *έλεγχο υποθέσεων*.

Αυτά τα τρία θέματα—σημειακή εκτίμηση, διαστημο-εκτίμηση ή κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης, και έλεγχος υποθέσεων—παρουσιάζονται συνοπτικά στις τρεις ενότητες που ακολουθούν. Αμέσως μετά, σε άλλες τρεις ενότητες μελετάμε τη στατιστική συμπερασματολογία σε συγκεκριμένα πρότυπα—ένα *πρότυπο παλινδρόμισης* και δύο *πρότυπα ανάλυσης της διασποράς*. Στη τελευταία ενότητα παρουσιάζονται συνοπτικά μερικά θέματα *μη παραμετρικής στατιστικής συμπερασματολογίας*.

## 13.1 Βασικές Αρχές Σημειακής Εκτίμησης

Το πρόβλημα εδώ, ορίζεται σύντομα ως ακολούθως. Έστω $X$ μια τ.μ. με σ.π.π. $f$ με γνωστή συναρτησιακή μορφή, η οποία, όμως, περιλαμβάνει μια παράμετρο. Τέτοια είναι η περίπτωση, για παράδειγμα, της διωνυμικής κατανομής $B(1,p)$, της κατανομής Poisson $P(\lambda)$, της αρνητικής εκθετικής κατανομής $f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$, $x > 0$, της ομοιόμορφης κατανομής $U(0,\alpha)$, και της κανονικής κατανομής $N(\mu,\sigma^2)$ με μια από τις ποσότητες $\mu$ και $\sigma^2$ να είναι γνωστή. Η *παράμετρος* συνήθως συμβολίζεται με $\theta$ και το σύνολο των δυνατών τιμών της συμβολίζεται με $\Omega$ και ονομάζεται *παραμετρικός χώρος*. Για να δώσουμε έμφαση στο γεγονός ότι η σ.π.π. εξαρτάται από τη $\theta$, γράφουμε $f(\cdot\,;\theta)$. Συνεπώς, για τις κατανομές που αναφέρονται πιο πάνω, έχουμε για τις αντίστοιχες σ.π.π. και τους παραμετρικούς χώρους:

$$f(x;\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}, \quad x = 0,1, \quad \theta \in \Omega = (0,1).$$

Τα προβλήματα που περιγράφονται στα Παραδείγματα 5, 6, 8 και 9 του Κεφαλαίου 1 μπορούν να περιγραφούν από μια διωνυμική κατανομή.

$$f(x;\theta) = \frac{\mathrm{e}^{-\theta}\theta^x}{x!}, \quad x = 0,1,\ldots, \quad \theta \in \Omega = (0,\infty).$$

Η κατανομή Poisson μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατάλληλα στην περίπτωση που περιγράφεται στο Παράδειγμα 11 του Κεφαλαίου 1.

$$f(x;\theta) = \theta\mathrm{e}^{-\theta x}, \quad x > 0, \quad \theta \in \Omega = (0,\infty).$$

Για μια εφαρμογή της αρνητικής εκθετικής κατανομής, δείτε το Παράδειγμα 15 του Κεφαλαίου 1.

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, & 0 \le x \le \theta \\ 0, & \text{αλλιώς}, \end{cases} \qquad \theta \in \Omega = (0, \infty).$$

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \Re, \quad \theta \in \Omega = \Re, \quad \sigma^2 \text{ γνωστή},$$

και

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\theta}}, \quad x \in \Re, \quad \theta \in \Omega = (0, \infty), \quad \mu \text{ γνωστός}.$$

Κανονικές κατανομές είναι κατάλληλες για να περιγράψουν προβλήματα ανάλογα με αυτά που αναφέρονται στο Παράδειγμα 14 του Κεφαλαίου 1. Στόχος μας εδώ είναι να πάρουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους $n$, $X_1, \ldots, X_n$, από την υπόψη κατανομή και επί τη βάση αυτού να κατασκευάσουμε ένα *σημειακό εκτιμητή* (ή απλώς *εκτιμητή*) της παραμέτρου $\theta$, δηλαδή, μια δειγματοσυνάρτηση $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$, η οποία χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της $\theta$, όπου μια *δειγματοσυνάρτηση* είναι μια γνωστή συνάρτηση του τυχαίου δείγματος $X_1, \ldots, X_n$. Αν $x_1, \ldots, x_n$ είναι οι παρατηρηθείσες τιμές των τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$, αντίστοιχα, τότε η παρατηρηθείσα τιμή έχει την αριθμητική τιμή $\hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$. Οι παρατηρηθείσες τιμές $x_1, \ldots, x_n$ αναφέρονται συχνά ως *δεδομένα*. Τότε, επί τη βάση των διαθέσιμων δεδομένων, αποφαινόμαστε ότι η τιμή της $\theta$ είναι $\hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ μεταξύ όλων των σημείων που ανήκουν στο $\Omega$. Ένας σημειακός εκτιμητής αναφέρεται συχνά, απλώς ως εκτιμητής και ο συμβολισμός $\hat{\theta}$ χρησιμοποιείται χωρίς διάκριση, τόσο για τον εκτιμητή $\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ (ο οποίος είναι μια τ.μ.) όσο και για την παρατηρηθείσα τιμή $\hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ (η οποία είναι ένας αριθμός).

Ο μοναδικός προφανής περιορισμός είναι ότι η $\hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ ανήκει στο $\Omega$ για όλες τις δυνατές τιμές των $X_1, \ldots, X_n$. Εκτός από τον περιορισμό αυτό, μπορεί να κατασκευάσει κανείς ένα οποιοδήποτε πλήθος εκτιμητών—άρα, υπάρχει η ανάγκη να θέσουμε συγκεκριμένες αρχές και/ή να εφεύρουμε μεθόδους κατασκευής της $\hat{\theta}$. Η πιο διαδεδομένη, ίσως, αρχή είναι αυτή της *μέγιστης πιθανοφάνειας* (ΜΠ). Σύμφωνα με αυτή την αρχή σχηματίζουμε την από κοινού σ.π.π. των $X_1, \ldots, X_n$, για τις παρατηρηθείσες τιμές τους, την οποία θεωρούμε σαν συνάρτηση της $\theta$ (*συνάρτηση πιθανοφάνειας*), και μεγιστοποιούμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας ως προς $\theta$. Το σημείο μεγιστοποίησης (αν υποθέσουμε ότι υπάρχει και είναι μοναδικό) είναι μια συνάρτηση των $x_1, \ldots, x_n$, η οποία και καλείται *Εκτιμητής Μέγιστης Πιθανοφάνειας* (ΕΜΠ) της $\theta$. Ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται για τη συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι $L(\theta \,|\, x_1, \ldots, x_n)$. Τότε, ισχύει:

$$L(\theta \,|\, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1;\theta) \cdots f(x_n;\theta), \quad \theta \in \Omega.$$

Μια άλλη αρχή που χρησιμοποιείται συχνά για την κατασκευή ενός εκτιμητή της παραμέτρου $\theta$ είναι η αρχή της της *αμεροληψίας*. Σε αυτή την περίπτωση, ένας εκτιμητής συμβολίζεται συνήθως ως $U = U(X_1, \ldots, X_n)$. Τότε, σύμφωνα με την αρχή της αμεροληψίας, ο $U$ κατασκευάζεται έτσι ώστε να είναι *αμερόληπτος*· δηλαδή, η μαθηματική ελπίδα (μέση τιμή) θα πρέπει να είναι πάντα $\theta$, ανεξάρτητα από την τιμή της $\theta$ στο $\Omega$. Πιο συγκεκριμένα,

$$E_\theta U = \theta \quad \text{για όλα τα } \theta \in \Omega.$$

(Στο σύμβολο της μαθηματικής ελπίδας $E$, η παρουσία της παραμέτρου $\theta$ ως κάτω δείκτη γίνεται για να δείξει ότι η μαθηματική ελπίδα εξαρτάται από τη $\theta$, εφόσον υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την σ.π.π. $f(\cdot\,;\theta)$.) Τώρα, είναι προφανές ότι, συγκρίνοντας δύο αμερόληπτους εκτιμητές, επιλέγει κανείς αυτόν με τη μικρότερη διασπορά, εφόσον ο εκτιμητής αυτός είναι περισσότερο συγκεντρωμένος γύρω στον μέσο $\theta$. Φανταστείτε την περίπτωση όπου στην κλάση όλων των αμερόληπτων εκτιμητών, υπάρχει ένας εκτιμητής με τη μικρότερη διασπορά (και ότι αυτό ισχύει για όλα τα $\theta \in \Omega$). Ο εκτιμητής αυτός ονομάζεται *Ομοιόμορφα Ελάχιστης Διασποράς Αμερόληπτος* (ΟΕΔΑ) εκτιμητής και είναι προφανώς, ο επιθυμητός εκτιμητής (μέσα στην κλάση των αμερόληπτων εκτιμητών). Ένας άλλος τρόπος για να κατασκευάσουμε εκτιμητές είναι η αρχή (ή καλύτερα η μέθοδος) που βασίζεται στις δειγματικές ροπές. Σύμφωνα με τη *μέθοδο των ροπών*, στην απλούστερη περίπτωση, σχηματίζουμε το δειγματικό μέσο $\bar{X}$ και τον εξισώνουμε με το (θεωρητικό) μέσο $E_\theta X$. Λύνουμε ως προς $\theta$ (υποθέτωντας ότι αυτό μπορεί να γίνει και μάλιστα να έχουμε μοναδική λύση) για να καταλήξουμε στον *εκτιμητή ροπής* (ή *ροπο-εκτιμητή*) της $\theta$.

Εδώ και σε ό,τι ακολουθεί θα παραθέσουμε και μερικά συγκεκριμένα παραδείγματα για διασαφηνιστικούς σκοπούς. Όλες οι σχετικές παραπομπές είναι στο βιβλίο G.G. Roussas, An Introduction to Probability Theory and Statistical Inference, Reprint (2003), Academic Press.

**Παράδειγμα 1**

Υποθέτουμε ότι η κατανομή με την οποία εργαζόμαστε είναι η $B(1, \theta)$, $\theta \in \Omega = (0, 1)$. Τότε ο ΕΜΠ του $\theta$, επί τη βάση του τυχαίου δείγματος $X_1, \ldots, X_n$, είναι $\bar{X}$ (βλέπε Παράδειγμα 2 του Κεφαλαίου 9). Ο ίδιος εκτιμητής είναι ΟΕΔΑ (βλέπε Παράδειγμα 15 του Κεφαλαίου 9), όπως επίσης και ο ροπο-εκτιμητής του $\theta$.

Αν η υπόψη κατανομή είναι $N(\mu, \sigma^2)$, τότε ο ΕΜΠ του $\mu$, όταν η διασπορά $\sigma^2$ είναι γνωστή, είναι $\bar{X}$, ενώ ο ΕΜΠ του $\sigma^2$, όταν ο μέσος $\mu$ είναι γνωστός, είναι $S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2/n$ (βλέπε Παράδειγμα 5 του Κεφαλαίου 9). Οι ίδιοι εκτιμητές είναι ΟΕΔΑ (βλέπε Παράδειγμα 18 στο Κεφάλαιο 9, για εν μέρει συζήτηση του ισχυρισμού αυτού), όπως επίσης και ροπο-εκτιμητές.

Αν η υπόψη κατανομή είναι $U(0, \theta)$, $\theta \in \Omega = (0, \infty)$, τότε $X_{(n)}$ είναι ο ΕΜΠ του $\theta$ (βλέπε Παράδειγμα 6(ii) του Κεφαλαίου 9), ενώ $(n+1)X_{(n)}/n$ είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής του $\theta$ (βλέπε Παράδειγμα 14 του Κεφαλαίου 9), ενώ $2\bar{X}$ είναι προφανώς ο ροπο-εκτιμητής του $\theta$.

Μια σαφώς πιο επιτηδευμένη μέθοδος για την κατασκευή εκτιμητών της $\theta$ είναι η μέθοδος, που βασίζεται στη *θεωρία αποφάσεων*. Η μέθοδος αυτή απαιτεί την εισαγωγή μιας συγκεκριμένης σειράς εννοιών, ορολογίας και συμβολισμών, πράγμα το οποίο όμως δεν γίνεται εδώ.

Τέλος, άλλη μια σχετικά δημοφιλής μέθοδος (για συγκεκριμένα πρότυπα) είναι η μέθοδος των *Ελαχίστων Τετραγώνων* (ΕΤ), η οποία βασίζεται στην *Αρχή των Ελαχίστων Τετραγώνων*. Η μέθοδος ΕΤ οδηγεί στην κατασκευή ενός εκτιμητή για τη $\theta$, του *Εκτιμητή Ελαχίστων Τετραγώνων* (ΕΕΤ) της $\theta$, μέσω της ελαχιστοποίησης (ως προς $\theta$) του αθροίσματος συγκεκριμένων τετραγώνων. Το άθροισμα αυτό των τετραγώνων αντιπροσωπεύει τα τετράγωνα των αποκλίσεων μεταξύ των τιμών που πράγματι παρατηρούμε μετά την ολοκλήρωση των (στατιστικών) πειραμάτων (ή παρατηρήσεων) και των τιμών που θα αναμέναμε να έχουμε επί τη βάση του υιοθετηθέντος προτύπου.

Σε όλη την προηγούμενη συζήτηση, υποθέτουμε ότι η υπόψη σ.π.π. εξαρτάται από μια μεμονωμένη παράμετρο, την οποία και παριστάνουμε με $\theta$. Στη γενική περίπτωση οι παράμετροι μπορεί να είναι δύο ή και περισσότερες. Αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, στην περίπτωση της ομοιόμορφης κατανομής $U(\alpha, \beta)$, $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, όπου τα $\alpha$ και $\beta$ είναι άγνωστα· στην περίπτωση της κανονικής κατανομής, $N(\mu, \sigma^2)$, όπου τα $\mu$ και $\sigma^2$ είναι άγνωστα· επίσης ισχύει και στην περίπτωση της πολυωνυμικής κατανομής, όπου ο αριθμός των παραμέτρων είναι $k$, $p_1, \ldots, p_k$ (ή πιο συγκεκριμένα, $k-1$, εφόσον για την $k$, π.χ., παράμετρο ισχύει, $p_k = 1 - p_1 - \cdots - p_{k-1}$). Λόγου χάριν, στο Παράδειγμα 16 του Κεφαλαίου 1 και στα Παραδείγματα 1 και 3 του Κεφαλαίου 9 αναφερόμαστε σε περιπτώσεις για τις οποίες είναι κατάλληλη η πολυωνυμική κατανομή. Σε τέτοιες πολυπαραμετρικές περιπτώσεις, εφαρμόζουμε σε κάθε παράμετρο χωριστά ό,τι έχουμε πει στα προηγούμενα για μια μεμονωμένη παράμετρο. Η εναλλακτική επιλογή, να χρησιμοποιήσουμε τη διανυσματική γραφή για τις παραμέτρους που εμφανίζονται, απλοποιεί βέβαια τα πράγματα σε κάποιο βαθμό, αλλά εισάγει άλλου είδους περιπλοκές.

**Παράδειγμα 2**

Υπό μορφή παραδείγματος, υποθέτουμε ότι το τυχαίο δείγμα $X_1, \ldots, X_n$ προέρχεται από την κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, όπου $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2) \in \Omega = \Re \times (0, \infty)$. Τότε $\bar{X}$ και $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/n$ είναι οι ΕΜΠ των $\mu$ και $\sigma^2$, αντίστοιχα (βλέπε Παράδειγμα 7 του Κεφαλαίου 9), ενώ $\bar{X}$ και $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/(n-1)$ είναι οι ΟΕΔΑ εκτιμητές των ίδιων παραμέτρων (βλέπε Παράδειγμα 18 στο Κεφάλαιο 9). Όπως είδαμε ήδη, $\bar{X}$ είναι επίσης ο ροπο-εκτιμητής του $\mu$, ενώ $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/n$ είναι ο ροπο-εκτιμητής του $\sigma^2$, αφού $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - X^2 = \frac{1}{n}(X_i - \bar{X})^2$. Αν τώρα $X_i$ είναι ο αριθμός των εμφανίσεων του $i$ αποτελέσματος σε μια πολυωνυμική κατανομή με αντίστοιχες πιθανότητες $p_i$, $i = 1, \ldots, r$ μεταξύ $n$ ανεξάρτητων επαναλήψεων του σχετικού πολυωνυμικού πειράματος, τότε $\boldsymbol{\theta} = (p_1, \ldots, p_r)$ και $p_i = X_i/n$ είναι οι ΕΜΠ των $p_i$, $i = 1, \ldots, r$ (βλέπε Παράδειγμα 8 του Κεφαλαίου 9). Το ότι είναι επίσης αμερόληπτοι εκτιμητές είναι άμεσο.

## 13.2 Βασικές Αρχές Εκτίμησης δια Διαστημάτων Εμπιστοσύνης

Ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε να κατασκευάσουμε έναν σημειακό εκτιμητή του μέσου $\mu$ της κανονικής κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με γνωστή διασπορά. Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση ενός τυχαίου δείγματος μεγέθους $n$, $X_1, \ldots, X_n$, το οποίο επιλέγεται από την υπόψη κατανομή. Αυτό ισοδυναμεί με την κατασκευή μιας κατάλληλης δειγματοσυνάρτησης των τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$, έστω $V = V(X_1, \ldots, X_n)$, η οποία για τις παρατηρηθείσες τιμές $x_i$ των $X_i$, $i = 1, \ldots, n$ είναι μια αριθμητική ποσότητα, την οποία και καθορίζουμε ως τιμή του (αγνώστου) $\mu$. Η επιλογή αυτή φαίνεται μάλλον αλαζονική, καθώς από το σύνολο των δυνατών τιμών του $\mu$, $-\infty < \mu < \infty$, επιλέγουμε μόνο μια ως την κατάλληλη τιμή του. Με βάση το συλλογισμό αυτό ίσως είναι πιο λογικό να στοχεύσουμε στην επιλογή ενός τυχαίου διαστήματος το οποίο θα περιλαμβάνει με μεγάλη (προκαθορισμένη) πιθανότητα την (άγνωστη) τιμή του $\mu$. Ο ορισμός του διαστήματος εμπιστοσύνης ανταποκρίνεται σε αυτή την απαίτηση.

Πιο συγκεκριμένα, το γενικό πλαίσιο του συγκεκριμένου ορισμού έχει ως εξής: Έστω $X_1, \ldots, X_n$ ένα τυχαίο δείγμα από τη σ.π.π. $f(\cdot\,; \theta)$, $\theta \in \Omega \subseteq \Re$, και έστω $L = L(X_1, \ldots, X_n)$ και $U = U(X_1, \ldots, X_n)$ δύο δειγματοσυναρτήσεις των $X_1, \ldots, X_n$, τέτοιες ώστε $L < U$. Τότε το διάστημα με άκρα τα $L$ και $U, [L, U]$, ονομάζεται *τυχαίο διάστημα.* Έστω $\alpha$ ένας μικρός αριθμός στο διάστημα $(0, 1)$, π.χ., 0,005, 0,01, 0,05, και υποθέτουμε ότι το τυχαίο διάστημα $[L, U]$ περιλαμβάνει την τιμή $\theta$ με πιθανότητα ίση με $1 - \alpha$ (δηλαδή, 0,995, 0,99, 0,95, αντίστοιχα) ασχέτως του ποια είναι η πραγματική τιμή της $\theta$ στο $\Omega$. Με άλλα λόγια, υποθέτουμε ότι:

$$P_\theta(L \leq \theta \leq U) = 1 - \alpha \quad \text{για όλα τα } \theta \in \Omega. \tag{13.1}$$

Αν η σχέση (13.1) ισχύει, τότε λέμε ότι το τυχαίο διάστημα $[L, U]$ είναι ένα *διάστημα εμπιστοσύνης* για τη $\theta$ με *συντελεστή εμπιστοσύνης* $1 - \alpha$.

Η σημασία του διαστήματος εμπιστοσύνης βασίζεται στην ερμηνεία της έννοιας της πιθανότητας ως σχετικής συχνότητας και έχει ως εξής: Θεωρούμε $n$ ανεξάρτητες τ.μ. από την σ.π.π. $f(\cdot\,; \theta)$, και έστω $x_1, \ldots, x_n$ οι παρατηρηθείσες τιμές τους. Επίσης, έστω $[L_1, U_1]$ το διάστημα που προκύπτει από τις παρατηρηθείσες τιμές των $L = L(X_1, \ldots, X_n)$ και $U = U(X_1, \ldots, X_n)$· δηλαδή, $L_1 = L(x_1, \ldots, x_n)$ και $U_1 = U(x_1, \ldots, x_n)$. Εν συνεχεία επιλέγουμε ανεξάρτητα ένα δεύτερο σύνολο από $n$ τ.μ. όπως και πιο πάνω, και έστω $[L_2, U_2]$

# Απαντήσεις στις Ασκήσεις με Άρτιο Αύξοντα Αριθμό

## ❖ 2.2 Μερικά Θεμελιώδη Αποτελέσματα

**2.2** (i) $\mathcal{S} = \{(\kappa,\kappa,\kappa), (\kappa,\kappa,\mu), (\kappa,\kappa,\pi), (\kappa,\mu,\kappa), (\kappa,\mu,\mu), (\kappa,\mu,\pi),$
$(\kappa,\pi,\kappa), (\kappa,\pi,\mu), (\kappa,\pi,\pi), (\mu,\kappa,\kappa), (\mu,\kappa,\mu), (\mu,\kappa,\pi),$
$(\mu,\mu,\kappa), (\mu,\mu,\mu), (\mu,\mu,\pi), (\mu,\pi,\kappa), (\mu,\pi,\mu), (\mu,\pi,\pi),$
$(\pi,\kappa,\kappa), (\pi,\kappa,\mu), (\pi,\kappa,\pi), (\pi,\mu,\kappa), (\pi,\mu,\mu), (\pi,\mu,\pi),$
$(\pi,\pi,\kappa), (\pi,\pi,\mu), (\pi,\pi,\pi)\}$.

(ii) $A = \{(\kappa,\mu,\pi), (\kappa,\pi,\mu), (\mu,\kappa,\pi), (\mu,\pi,\kappa), (\pi,\kappa,\mu), (\pi,\mu,\kappa)\}$,
$B = \{(\kappa,\kappa,\mu), (\kappa,\kappa,\pi), (\kappa,\mu,\kappa), (\kappa,\mu,\mu), (\kappa,\pi,\kappa), (\kappa,\pi,\pi),$
$(\mu,\kappa,\kappa), (\mu,\kappa,\mu), (\mu,\mu,\kappa), (\mu,\mu,\pi), (\mu,\pi,\mu), (\mu,\pi,\pi),$
$(\pi,\kappa,\kappa), (\pi,\kappa,\pi), (\pi,\mu,\mu), (\pi,\mu,\pi), (\pi,\pi,\kappa), (\pi,\pi,\mu)\}$,
$C = A \cup B = \mathcal{S} - \{(\kappa,\kappa,\kappa), (\mu,\mu,\mu), (\pi,\pi,\pi)\}$.

**2.4** (i) Συμβολίζουμε με $(x_1, x_2)$ τον αριθμό των αυτοκινήτων που πουλήθηκαν στην πρώτη και τη δεύτερη αγοραπωλησία, οπότε έχουμε:
$\mathcal{S} = \{(a_1,a_1), (a_1,a_2), (a_1,a_3), (a_2,a_1), (a_2,a_2), (a_2,a_3), (a_3,a_1),$
$(a_3,a_2), (a_3,a_3), (a_1,b_1), (a_1,b_2), (a_2,b_1), (a_2,b_2), (a_3,b_1),$
$(a_3,b_2), (a_1,c), (a_2,c), (a_3,c), (b_1,a_1), (b_1,a_2), (b_1,a_3),$
$(b_2,a_1), (b_2,a_2), (b_2,a_3), (b_1,b_1), (b_1,b_2), (b_2,b_1), (b_2,b_2),$
$(b_1,c), (b_2,c), (c,a_1), (c,a_2), (c,a_3), (c,b_1), (c,b_2), (c,c)\}$.

(ii) $A = \{(a_1,a_1), (a_1,a_2), (a_1,a_3), (a_2,a_1), (a_2,a_2), (a_2,a_3), (a_3,a_1),$
$(a_3,a_2), (a_3,a_3)\}$,
$B = \{(a_1,b_1), (a_1,b_2), (a_2,b_1), (a_2,b_2), (a_3,b_1), (a_3,b_2)\}$,
$C = B \cup \{(b_1,a_1), (b_1,a_2), (b_1,a_3), (b_2,a_1), (b_2,a_2), (b_2,a_3)\}$,
$D = \{(c,b_1), (c,b_2), (b_1,c), (b_2,c)\}$.

**2.6** $E = A^c$, $F = C - D = C \cap D^c$, $G = B - C = B \cap C^c$,
$H = A^c - B = A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$, $I = B^c$.

**2.8** (i) $B_0 = A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$.

(ii) $B_1 = (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3)$.

(iii) $B_2 = (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3)$.

(iv) $B_3 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

(v) $C = B_0 \cup B_1 \cup B_2 = (A_1 \cap A_2 \cap A_3)^c$.

(vi) $D = B_1 \cup B_2 \cup B_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

**2.10** Αν $A = \varnothing$, τότε $A \cap B^c = \varnothing$, $A^c \cap B = \mathcal{S} \cap B = B$, έτσι ώστε $(A \cap B^c) \cup A^c \cap B) = B$ για κάθε $B$. Στη συνέχεια, έστω $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = B$ και παίρνουμε $B = \varnothing$ για να επιτύχουμε $A \cap B^c = A$, $A^c \cap B = \varnothing$, έτσι ώστε $A = \varnothing$.

**2.12** Η $A \subseteq B$ συνεπάγεται ότι, για κάθε $s \in A$, έχουμε $s \in B$, ενώ η $B \subseteq \mathit{\Gamma}$ συνεπάγεται ότι, για κάθε $s \in B$, έχουμε $s \in C$. Συνεπώς, για κάθε $s \in A$, έχουμε $s \in C$, οπότε $A \subseteq C$.

**2.14** Για $s \in \cup_j A_j$, έστω ότι $j_0 \geq 1$ είναι το πρώτο $j$ για το οποίο $s \in A_{j_0}$. Τότε, αν $j_0 = 1$, έπεται ότι $s \in A_1$ και συνεπώς το $s$ ανήκει στο δεξί μέλος της εξίσωσης. Αν $j_0 > 1$, τότε $s \notin A_j$, $j = 1, \ldots, j_0 - 1$, αλλά $s \in A_{j_0}$, έτσι ώστε $s \in A_1^c \cap \cdots \cap A_{j_0-1}^c \cap A_{j_0}$ και συνεπώς το $s$ ανήκει στο δεξί μέλος της εξίσωσης. Στη συνέχεια, έστω ότι το $s$ ανήκει στο δεξί μέλος της εξίσωσης. Τότε, αν $s \in A_1$, έπεται ότι $s \in \cup_j A_j$. Αν $s \notin A_j$ για $j = 1, \ldots, j_0 - 1$ αλλά $s \in A_{j_0}$, έπεται ότι $s \in \cup_j A_j$. Η απόδειξη της ταυτότητας ολοκληρώθηκε.

**2.16** (i) Είναι $-5 + \frac{1}{n+1} < -5 + \frac{1}{n}$ και $20 - \frac{1}{n} < 20 - \frac{1}{n+1}$, οπότε θα ισχύει επίσης $\left(-5 + \frac{1}{n}, 20 - \frac{1}{n}\right) \subset \left(-5 + \frac{1}{n+1}, 20 - \frac{1}{n+1}\right)$, ή $A_n \subset A_{n+1}$, άρα η $\{A_n\}$ είναι αύξουσα. Ανάλογα έχουμε, $7 + \frac{3}{n+1} < 7 + \frac{3}{n}$, οπότε $(0, 7 + \frac{3}{n+1}) \subset (0, 7 + \frac{3}{n})$, ή $B_{n+1} \subset B_n$, άρα η $\{B_n\}$ είναι φθίνουσα.

(ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-5 + \frac{1}{n}, 20 - \frac{1}{n}\right) = (-5, 20)$, και

$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, 7 + \frac{3}{n}\right) = (0, 7]$.

## ❖ 2.3 Τυχαίες Μεταβλητές

**3.2** Η κάθε μια από τις τ.μ. $X$ και $Y$ παίρνει τις τιμές: $0, 1, 2, 3$ και $X + Y = 3$.

**3.4** Η $X$ παίρνει τις τιμές: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$,

$$\begin{aligned}(X \leq 2) = \{&(-3,0), (-3,1), (-3,2), (-3,3), (-3,4), (-2,0), (-2,1),\\ &(-2,2), (-2,3), (-2,4), (-1,0), (-1,1), (-1,2), (-1,3),\\ &(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (2,0)\},\end{aligned}$$