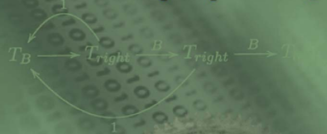
Χ. Χαρτώνας

Βασική Θεωρία Υπολογισιμότητας



Μηχανές Turing
Αναδρομικές συναρτήσεις
Αλγοριθμική ανεπιλυσιμότητα

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Με τον όρο *αλγόριθμος* εννοούμε μια πεπερασμένη ακολουθία βημάτων, καθένα από τα οποία εκτελείται σύμφωνα με σαφείς οδηγίες, εφαρμόζεται σε καθορισμένο είδος δεδομένων, και καταλήγει παράγοντας ένα καθορισμένο είδος αποτελέσματος. Ενα πρόβλημα είναι αλγοριθμικό στη φύση του ακριβώς όταν υπάρχει κάποιος αλγόριθμος για την επίλυσή του. Παραδείγματα αλγορίθμων που είναι σίγουρα γνωστά στον αναγνώστη είναι:

- Ο αλγόριθμος διαίρεσης ακεραίων, του Ευκλείδη
- Ο αλγόριθμος διαίρεσης πολυωνύμων
- Ο αλγόριθμος παραγώγισης πολυωνυμικών συναρτήσεων
- Ο αλγόριθμος εύρεσης του μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο ακεραίων
- Ο αλγόριθμος ανάλυσης ενός φυσικού αριθμού σε γινόμενο δυνάμεων πρώτων παραγόντων, κλπ.

Μια τέτοια ακολουθία βημάτων υπολογισμού είναι στην ουσία της *μηχανική*. Είναι δηλαδή δυνατό να φανταστούμε μια μηχανή, στην οποία τροφοδοτούμε με κάποιο τρόπο τα δεδομένα και η οποία εκτελεί τις οδηγίες του αλγορίθμου με την προδιαγραμμένη σειρά, καταλήγοντας έτσι στον υπολογισμό του επιθυμητού αποτελέσματος. Συνεπώς, ένα πρόβλημα είναι μηχανικά επιλύσιμο, ή υπολογίσιμο (computable), αν μπορεί να επιλυθεί από μια μηχανή, κατάλληλα διαμορφωμένη ώστε να μπορεί να δεχθεί ως είσοδο τα δεδομένα και να μπορεί να εκτελέσει απλές ενέργειες για την υλοποίηση κάποιου αλγόριθμου υπολογισμού.

Η έννοια αυτή του "υπολογίσιμου" παραμένει ωστόσο ασαφής και διαισθητική, τουλάχιστο μέχρι να μπορέσουμε να περιγράψουμε μια αφηρημένη μηχανή, η οποία να έχει την επιθυμητή συμπεριφορά, όπως αυτή σκιαγραφήθηκε παραπάνω. Η αυστηρή περιγραφή μιας κατάλληλης αφηρημένης μηχανής έχει σημαντική θεωρητική σημασία, εφόσον διαθέτοντας μια σαφή, μαθηματική έννοια αφηρημένης μηχανής, διαθέτουμε πλέον και ένα σαφές, μαθηματικό κριτήριο σχετικά με το τι είναι και τι δεν είναι (μηχανικά) υπολογίσιμο. Στην κατεύθυνση της αυστηρής περιγραφής μιας αφηρημένης μηχανής κινήθηκε πρώτος ο Βρετανός logician Alan Turing [15]. Οι αφηρημένες μηχανές που περιέγραψε είναι σήμερα πλέον γνωστές ως Μηχανές Turing (Turing Machines) και αποτελούν το αντικείμενο του πρώτου Κεφαλαίου.

Μπορούμε όμως να παρατηρήσουμε επίσης ότι, από μαθηματική άποψη, ένας αλγόριθμος μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο του είδους δεδομένων στα οποία εφαρμόζεται και πεδίο τιμών το σύνολο του είδους δεδομένων τα οποία παράγει. Οι αλγόριθμοι που μας ενδιαφέρουν είναι κατά κανόνα αλγόριθμοι από συμβολοσειρές σε συμβολοσειρές, ή από φυσικούς αριθμούς σε φυσικούς αριθμούς. Παίρνοντας υπόψη μας τη δυνατότητα αριθμητικοποίησης, καταλήγουμε ότι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε μόνον αλγόριθμους που υποδηλώνονται από συναρτήσεις στους φυσικούς αριθμούς.

Μια συνάρτηση είναι *αλγοριθμική*, ή *μηχανικά υπολογίσιμη* ακριβώς όταν υπάρχει μια αλγοριθμική διαδικασία για τον υπολογισμό της τιμής της σε μια παράμετρο. Συμπεραίνουμε ότι, η έννοια του (μηχανικά, αλγοριθμικά) υπολογίσιμου μπορεί επίσης να διευκρινιστεί, αν σταθεί δυνατό να περιγράψουμε με μαθηματική σαφήνεια την κλάση των συναρτήσεων τις οποίες θεωρούμε διαισθητικά ότι εκφράζουν αλγορίθμους. Στην κατεύθυνση αυτή του καθορισμού της έννοιας του υπολογίσιμου κινήθηκαν αρχικά οι Dedekind και Gödel [3], με αποτέλεσμα στη συνέχεια να καθορισθεί, χάρη στη σημαντική συνεισφορά του Kleene [4], η κλάση των συναρτήσεων που είναι σήμερα γνωστές ως *μερικές αναδρομικές συναρτήσεις*.

Καθεμία από τις δύο προσεγγίσεις που περιγράψαμε σχηματικά, καθόρισε μια ορισμένη κλάση αλγοριθμικών (υπολογίσιμων) συναρτήσεων: τις Turing Υπολογίσιμες συναρτήσεις αφ' ενός, και τις Μερικές Αναδρομικές Συναρτήσεις αφ' ετέρου. Επιπλέον, προτάθηκαν την ίδια περίοδο (δεκαετία του 1930) και διαφορετικά μοντέλα αλγοριθμικότητας, όπως ο Λογισμός λ του Church[2] και τέθηκε έτσι, αναπόφευκτα, το πρόβλημα της σχέσης ανάμεσα στα διαφορετικά μοντέλα. Εχει αποδειχθεί πράγματι ότι όλα τα μοντέλα αλγοριθμικότητας, ή υπολογισιμότητας, που αναφέραμε είναι ισοδύναμα (δες π.χ. Kleene [4] και Barendregt [1]).

Στο υπόλοιπο αυτής της μονογραφίας θα εξετάσουμε πιο αναλυτικά τις Μηχανές Turing και τις Αναδρομικές Συναρτήσεις και θα δώσουμε τη δική μας εκδοχή της κλασικής πλέον απόδειξης για την ισοδυναμία των δύο αυτών μοντέλων υπολογισιμότητας. Επιπλέον, έχοντας μια αυστηρή περιγραφή της έννοιας του υπολογίσιμου, θα διαπιστώσουμε ότι υπάρχουν συγκεκριμένα προβλήματα τα οποία είναι αλγοριθμικά ανεπίλύσιμα, τα οποία δηλαδή δεν είναι δυνατό να επιλυθούν από μια Μηχανή Turing. Με άλλα λόγια, υπάρχουν ερωτήματα τα οποία δεν είναι μηχανικά αποφασίσιμα (decidable). Θα διερευνήσουμε σχετικά θέματα στο τελευταίο Κεφάλαιο.

Η μονογραφία αυτή απευθύνεται σε προπτυχιακούς φοιτητές και για το λόγο αυτό έγινε κάθε προσπάθεια από το συγγραφέα να παρουσιαστεί το γενικά θεωρούμενο ως δύσκολο αντικείμενο της Υπολογισιμότητας με τον απλούστερο δυνατό τρόπο.

Συνοδευτικό Software: Στο συνοδευτικό λογισμικό θα βρει ο αναγνώστης υλοποιημένες όλες τις μηχανές Turing που κατασκευάζονται σ'αυτή τη μονογραφία, έτσι ώστε να μπορεί να τρέξει τις μηχανές αυτές για να διαπιστώσει στην πράξη πώς λειτουργούν. Υπάρχουν πλέον σήμερα περισσότερα από ένα πακέτα λογισμικού, τα οποία προσφέρουν μια επαρκή προσομοίωση των μηχανών Turing.

1. Το πακέτο **Turing's World**, των Jon Barwise (Indiana University, USA) και John Etchemendy (Stanford University, USA)

2. Το **JFLAP**, της Susan Roger και της JFLAP ομάδας του Duke University, USA

[2]για μια παρουσίαση των Λογισμών λ χωρίς και με τύπους ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευθεί το [17] του παρόντος συγγραφέα

3. Το **Java Computability Toolkit**, των J.E. Novillo, J.A. Hamshar και M.B. Robinson, του State University of New York - Institute of Technology, και

4. Το **Visual Turing**, του Cristian Cheran

Λεπτομέρειες μπορεί να βρει ο αναγνώστης στη σελίδα του μαθήματος της Υπολογισιμότητας, την οποία διατηρώ και ενημερώνω στη διεύθυνση

http://www.cs.teilar.gr/computability.html.

Σύνδεσμοι για downloads των προσομοιώσεων δίνονται στο συνοδευτικό λογισμικό (αλλά και στη σελίδα μου του μαθήματος της Υπολογισιμότητας). Από τα παραπάνω, η Visual Turing του C. Cheran, γραμμένη σε Visual C++, προσφέρει ένα ιδιαίτερα φιλικό για το χρήστη περιβάλλον στο οποίο μπορεί κανείς να προγραμματίσει μηχανές Turing σε μια high-level διαγραμματική γλώσσα, την οποία επεξηγούμε αναλυτικά στην παρούσα μονογραφία. Μετά από ευγενή παραχώρηση του σχετικού διακιώματος από τον κ. C. Cheran, το συνοδευτικό λογισμικό περιλαμβάνει το installation kit της Visual Turing, vturing.exe. Στο αρχείο Rec.tur έχω συμπεριλάβει όλες τις Μηχανές Turing που αναπτύσσονται στα επόμενα Κεφάλαια. Αν και το vturing.exe περιλαμβάνει ένα help αρχείο, συμπεριέλαβα επίσης ένα αρχείο βοήθειας στα ελληνικά, για τη χρήση της Visual Turing, το vthelp-gr.html. Ελπίζω ότι το υλικό αυτό θα δώσει τη δυνατότητα στον αναγνώστη να αποκτήσει, με πρακτικό τρόπο, μια στέρεη κατανόηση των Μηχανών Turing και των σχετικών θεμάτων υπολογισιμότητας. Στο Rec.tur περιλαμβάνονται και τα γενικά σχήματα μηχανών Turing, παρόμοια των οποίων χρειάζεται να κατασκευάσει κανείς στην πορεία της απόδειξης ότι κάθε μερική αναδρομική συνάρτηση είναι Turing υπολογίσιμη.

Στο συνοδευτικό λογισμικό υπάρχει επίσης αντίγραφο του πακέτου Jct1.2, το οποίο συμπεριέλαβα μετά από την ευγενή παραχώρηση του σχετικού δικαιώματος από τους συγγραφείς του, J.E. Novillo, J.A. Hamshar και M.B. Robinson.

Τόσο το Jct όσο και το JFLAP είναι εφαρμογές Java και για το λόγο αυτό ο αναγνώστης θα χρειαστεί το Java Development Kit της Sun, το οποίο είναι ελεύθερα διαθέσιμο στο site της Sun, http://www.javasoft.com.

Χ. Χαρτώνας Δεκέμβριος 2000
hartonas@cs.teilar.gr http://www.cs.teilar.gr/~hartonas

Κεφάλαιο 1

Μηχανές Turing

Ισως ο πιο φυσικός τρόπος για την ακριβή κατανόηση του περιεχομένου και για την αυστηρή οριοθέτηση των ορίων του μηχανικά υπολογίσιμου είναι να προσπαθήσει κανείς να περιγράψει με αυστηρό τρόπο μια **αφηρημένη υπολογιστική μηχανή**. Η φανταστική αυτή μηχανή είναι *αφηρημένη* με την έννοια ότι η συγκρότησή της δεν εξαρτάται από συγκεκριμένες επιλογές φυσικής υλοποίησης και, κατά συνέπεια, είναι ανεξάρτητη από το διαρκώς ανανεούμενο επίπεδο τεχνολογικής ανάπτυξης. Στην ουσία της, επομένως, μια τέτοια μηχανή είναι μια καθαρά αφηρημένη, μαθηματική περιγραφή της *λειτουργίας* μιας τυχαίας υπολογιστικής μηχανής.

Οπως ήδη αναφέραμε, η περιγραφή τέτοιων αφηρημένων υπολογιστικών μηχανών δόθηκε για πρώτη φορά από το Βρετανό μελετητή της Λογικής Alan Turing [15], στη δεκαετία του 1930. Οι μηχανές αυτές, οι οποίες παρουσιάζονται στη διεθνή βιλιογραφία σε μια ποικιλία παραλλαγών, είναι γνωστές ως Μηχανές Turing (Turing Machines, TM). Εκτός από τις TM, έχουν δοθεί περιγραφές και άλλων αφηρημένων υπολογιστικών μηχανών (π.χ. από τον Post [8], και από τους Shepherdson και Surgis [10]), οι οποίες όμως έχουν όλες αποδειχθεί ισοδύναμες με τις Μηχανές Turing. Στη συνέχεια, θα συγκεντρωθούμε στην περιγραφή μιας συγκεκριμένης παραλλαγής των Μηχανών Turing.

1.1 Γενική Περιγραφή

Σε γενικές γραμμές, μια υπολογιστική μηχανή απαρτίζεται τουλάχιστον από μια μονάδα ελέγχου (την κεντρική μονάδα επεξεργασίας), ένα χώρο μνήμης και ένα μηχανισμό εισόδου-εξόδου. Στις Μηχανές Turing, φανταζόμαστε το μηχανισμό εισόδου-εξόδου ως μια *ταινία* που είναι άπειρη σε μήκος (και προς τις δύο κατευθύνσεις), χωρισμένη σε κυψελίδες εγγραφής. Η ταινία αποτελεί επίσης το χώρο μνήμης της μηχανής. Η είσοδος δίνεται με τη μορφή συμβόλων από ένα καθορισμένο αλφάβητο $\Sigma = \{s_0, s_1, \ldots, s_k\}$, γραμμένων σε ένα πεπερασμένο αριθμό κυψελίδων της ταινίας. Μπορούμε επίσης να φανταστούμε ότι η μονάδα ελέγχου απαρτίζεται από μια *κεφαλή ανάγνωσης/εγγραφής* συμβόλων από, ή στην, εξεταζόμενη κυψελίδα και ότι έχει τη δυνατότητα μετακίνησης σε κάθε βήμα υπολογισμού κατά μία κυψελίδα αριστερά ή δεξιά. Σε κάθε στάδιο (state) υπολογισμού η μηχανή βρίσκεται σε μια *κατάσταση* (configuration), ξεκινώντας από την *αρχική κατάσταση* (initial configuration), και η κεφαλή ελέγχει το περιεχόμενο της τρέχουσας κυψελίδας (το οποίο είναι ένα σύμβολο από το καθορισμένο αλφάβητο, αν η κυψελίδα δεν είναι κενή).

Υποθέτουμε ότι ο υπολογισμός αρχίζει στο στάδιο q_1, και ότι στην αρχή του υπολογισμού η κεφαλή επιθεωρεί το περιεχόμενο της πρώτης μη κενής κυψελίδας στα αριστερά, στο μπλοκ της επιθυμητής εισόδου. Ανάλογα με το τρέχον στάδιο και με το περιεχόμενο της τρέχουσας κυψελίδας, η μονάδα ελέγχου καθορίζει το επόμενο στάδιο της μηχανής και τις ενέργειες που πρέπει να εκτελεστούν για μετάπτωση στη νέα κατάσταση. Οι ενέργειες αυτές είναι (1α) σβήσιμο του συμβόλου στην τρέχουσα κυψελίδα, ή (1β) εγγραφή ενός συμβόλου στην τρέχουσα κυψελίδα, και (2α) μετακίνηση της κεφαλής αριστερά, ή (2β) μετακίνηση της κεφαλής δεξιά κατά μία θέση.

Κατά τη λειτουργία της η TM διατρέχει ένα πεπερασμένο πλήθος δυνατών σταδίων υπολογισμού, $q_1, \ldots, q_n, q_0$, από τα οποία το q_1 είναι το *αρχικό* και το q_0 το *τελικό* στάδιο. Καμία αλλαγή κατάστασης δεν είναι δυνατή, εάν η μηχανή βρεθεί στο τελικό στάδιο q_0. Οι εγγραφές της ταινίας στην αρχή της λειτουργίας αποτελούν την είσοδο του υπολογισμού (τα δεδομένα), ενώ η εγγραφή στο τέλος του υπολογισμού αποτελεί την έξοδο (το αποτέλεσμα του υπολογισμού).

Αν Q είναι το (πεπερασμένο) σύνολο των σταδίων μιας TM και Σ το (πεπερασμένο) αλφάβητο των συμβόλων που μπορούν να αναγνωστούν ή να εγγραφούν, τότε η μονάδα ελέγχου της TM μπορεί να θεωρηθεί ως μια μερική συνάρτηση

$$\delta : (Q \setminus \{q_0\}) \times (\Sigma \cup \{B\}) \longrightarrow Q \times (\Sigma \cup \{B\}) \times \{L, R\}$$

όπου L, R συμβολίζουν κίνηση προς τα αριστερά (Left) ή δεξιά (Right), αντίστοιχα, και B συμβολίζει την κενή κυψελίδα (Blank). Το νόημα της συνάρτησης αυτής είναι ότι, αν το ζευγάρι (q, s) είναι στο πεδίο ορισμού της δ και $\delta(q, s) = (q', s', X)$, τότε, όταν η TM βρίσκεται στο στάδιο q και το περιεχόμενο της τρέχουσας κυψελίδας είναι s, η μονάδα ελέγχου καθορίζει ως επόμενο στάδιο το q' και προκαλεί τις ενέργειες (α) αντικατάσταση του περιεχομένου $s \in \Sigma \cup \{B\}$ της τρέχουσας κυψελίδας με $s' \in \Sigma \cup \{B\}$ και (β) μετακίνηση της κεφαλής κατά μια κυψελίδα προς τα αριστερά, αν $X = L$, ή προς τα δεξιά, αν $X = R$.

Συνοψίζουμε με έναν ορισμό.

Ορισμός 1.1.1 *Μια TM είναι πλήρως καθορισμένη, εάν δοθούν*

(1) *Ενα πεπερασμένο σύνολο (σταδίων υπολογισμού) $Q = \{q_1, \ldots, q_n, q_0\}$, για κάποιο φυσικό αριθμό $n \geq 1$ (όπου q_1 είναι το αρχικό και q_0 το τελικό στάδιο)*

(2) *Ενα πεπερασμένο σύνολο συμβόλων $\Sigma = \{s_0, s_1, \ldots, s_k\}$ (το αλφάβητο), για κάποιο φυσικό αριθμό k*

(3) *Μια συνάρτηση*

$$\delta : (Q \setminus \{q_0\}) \times (\Sigma \cup \{B\}) \longrightarrow Q \times (\Sigma \cup \{B\}) \times \{L, R\}$$

Για απλούστευση του συμβολισμού, γράφουμε συνήθως $qsq's'L$ αντί για $(q, s, q', s', L) \in \delta$, δηλαδή για $\delta(q, s) = (q', s', L)$, και αντίστοιχα $qsq's'R$ αντί για $(q, s, q', s', R) \in \delta$, δηλαδή για $\delta(q, s) = (q', s', R)$. Επειδή τόσο το σύνολο Q των δυνατών σταδίων, όσο και το σύνολο Σ είναι πεπερασμένα, η συνάρτηση δ μπορεί να περιγραφεί πλήρως με ένα πεπερασμένο σύνολο πεντάδων της μορφής $qsq's'X$ (όπου $X \in \{L, R\}$). Συνεπώς, μια Μηχανή Turing μπορεί να θεωρηθεί ως μια ακολουθία πεντάδων της μορφής $qsq's'X$.

Ενας εναλλακτικός και διαγραμματικός τρόπος περιγραφής μιας Μηχανής Turing είναι με τη μορφή προσανατολισμένων γραφημάτων με επώνυμες ακμές. Κάθε πεντάδα της μορφής $q_isq_js'X$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως μια *μετάβαση*

$$q_i \xrightarrow{s:s',X} q_j$$

από ένα στάδιο q_i σε ένα νέο στάδιο q_j, με αντικατάσταση του περιεχομένου s της τρέχουσας κυψελίδας από το s' και μετακίνηση της κεφαλής μια θέση προς την κατεύθυνση $X \in \{L, R\}$.

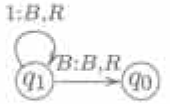
Παραδείγματα

Παράδειγμα 1.1.1 Περιγράφουμε μια απλή TM, η οποία υπολογίζει τη σταθερή συνάρτηση $\lambda x.0$. Ως αλφάβητο θεωρούμε το σύνολο $\Sigma = \{1\}$. Η είσοδος x απαρτίζεται από μια ακολουθία $x + 1$ κυψελίδων οι οποίες περιέχουν το σύμβολο 1 (προσθέτουμε το επιπλέον 1 για να διαχωρίσουμε την περίπτωση της κενής ταινίας από την περίπτωση εισόδου $x = 0$). Στην αρχική κατάσταση η κεφαλή επιθεωρεί την πρώτη από τα αριστερά κυψελίδα που περιέχει ένα σύμβολο 1. Οι καταστάσεις της μηχανής είναι οι q_1 και q_0. Η επιθυμητή συμπεριφορά της TM είναι να διατρέξει μία προς μία όλες τις εγγεγραμμένες κυψελίδες, σβήνοντας το εγγεγραμμένο σύμβολο, ώστε στο τέλος του υπολογισμού η ταινία να αποτελείται μόνον από κενές κυψελίδες. Η μηχανή αυτή περιγράφεται πλήρως από τις παρακάτω δύο πεντάδες:

$$q_1 1 q_1 B R$$
$$q_1 B q_0 B R$$

Στην αρχική της κατάσταση η μηχανή βρίσκεται στο στάδιο υπολογισμού q_1 και η κεφαλή διαβάζει την πρώτη κυψελίδα από τα αριστερά η οποία έχει εγγεγραμμένο το στοιχείο 1. Από την πρώτη πεντάδα προκύπτει ότι η μηχανή μεταπίπτει σε μιά νέα κατάσταση, όπου η κεφαλή σβήνει το εγγεγραμμένο σύμβολο, μετακινείται μία θέση προς τα δεξιά και εισέρχεται πάλι στο στάδιο q_1. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρις ότου η κεφαλή, μετακινούμενη διαρκώς προς τα δεξιά και σβήνοντας όλες τις υπάρχουσες εγγραφές, φτάσει στην πρώτη κενή κυψελίδα. Οταν βρεθεί στην κατάσταση αυτή, η μηχανή αλλάζει κατάσταση αφήνοντας την κυψελίδα κενή, μετακινούμενη μία θέση προς τα δεξιά και καταλήγοντας στο στάδιο τερματισμού q_0.

Δίνουμε και τη διαγραμματική παράσταση της TM παρακάτω.



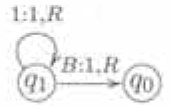
Παράδειγμα 1.1.2 Περιγράφουμε μια TM η οποία υπολογίζει μια απλή αριθμητική συνάρτηση, τη συνάρτηση $\lambda x.x{+}2$. Και πάλι η είσοδος x αναπαρίσταται στην ταινία ως μια ακολουθία $x+1$ κυψελίδων με εγγεγραμένο το σύμβολο 1, το οποίο είναι και το μοναδικό του αλφαβήτου της μηχανής. Η συμπεριφορά της μηχανής καθορίζεται από τις πεντάδες

$$q_1 1 q_1 1 R$$

$$q_1 B q_0 1 R$$

Η μηχανή αυτή διατρέχει όλες τις κυψελίδες των οποίων το περιεχόμενο είναι το σύμβολο 1, προσθέτει μια νέα εγγραφή στην πρώτη κενή κυψελίδα που συναντά καθώς κινείται διαρκώς προς τα δεξιά και σταματά. Επομένως, στην τελική της κατάσταση η ταινία περιέχει ακριβώς $x+2$ διαδοχικές και μη κενές κυψελίδες, οι οποίες φέρουν όλες εγγεγραμμένο το σύμβολο 1. Ωστε η μηχανή αυτή υπολογίζει πράγματι τη συνάρτηση $\lambda x.x+2$.

Η διαγραμματική παράσταση της μηχανής είναι η εξής:



Παράδειγμα 1.1.3 Εξετάζουμε μια TM η οποία υπολογίζει τη σταθερή συνάρτηση $\lambda x.k$, όπου k είναι κάποιος φυσικός αριθμός. Η αναπαράσταση της εισόδου x στην ταινία, καθώς και το αλφάβητο της μηχανής, είναι όπως στα προηγούμενα παραδείγματα. Η TM περιγράφεται από τις παρακάτω πεντάδες:

$$q_1 1 q_1 B R$$

$$q_1 B q_2 1 R$$

$q_m B q_{m+1} 1 R$ (για $2 \leq m \leq k-1$)

$q_k B q_0 1 R$

Η TM προχωρά σβήνοντας πρώτα εξ' ολοκλήρου την υπάρχουσα εγγραφή και συνεχίζει κατόπιν με k διαδοχικές εγγραφές, οπότε και τερματίζει στο στάδιο q_0. Για παράδειγμα, η σταθερή συνάρτηση $\lambda x.4$ υπολογίζεται από την παρακάτω TM. [1]

$q_1 1 q_1 B R$

$q_1 B q_2 1 R$

$q_2 B q_3 1 R$

$q_3 B q_4 1 R$

$q_4 B q_0 1 R$

Στην κατάσταση τερματισμού υπάρχουν ακριβώς τέσσερις διαδοχικές κυψελίδες με εγγεγραμμένο το σύμβολο 1, ώστε πράγματι η συγκεκριμένη TM υπολογίζει τη σταθερή συνάρτηση $\lambda x.4$. Διαγραμματικά, η μηχανή $\lambda x.k$ δίνεται παρακάτω, όπου $m \in [2, k-1]$.

Παράδειγμα 1.1.4 Για ένα διαφορετικό παράδειγμα, θα εξετάσουμε μια TM με αλφάβητο το σύνολο $\{a, b\}$. Η είσοδος της μηχανής είναι μια τυχαία, πεπερασμένη αλυσίδα των συμβόλων a, b, λόγου χάριν η αλυσίδα $aababbbbab$.

$q_1 B q_0 B R$

[1]Όπως θα παρατήρησε ο αναγνώστης, λείπουν από την περιγραφή της μηχανής πεντάδες της μορφής $q_j 1 \ldots$, για $j = 2, 3, 4$. Επειδή η συνάρτηση δ είναι ολική, πρέπει κανονικά να ορίζεται και στα ζεύγη $(q_2, 1), (q_3, 1)$ και $(q_4, 1)$. Ο κώδικας όμως που καθοδηγεί τη συγκεκριμένη μηχανή τι να κάνει, όταν λόγου χάριν ευρισκόμενη στο στάδιο q_2 επιθεωρεί κυψελίδα με περιεχόμενο 1, είναι περιττός, αφού αυτό δεν πρόκειται να συμβεί ποτέ, τουλάχιστο στην επιθυμητή λειτουργία της μηχανής. Θα παραλείπουμε στο μέλλον τέτοιες περιττές πεντάδες, εννοώντας ότι ο κώδικας της μηχανής μπορεί πάντοτε να συμπληρωθεί με πεντάδες της μορφής, για παράδειγμα, $q_2 1 q_0 1 R$.

$q_1 a q_1 b R$
$q_1 b q_1 a R$

Η λειτουργία της μηχανής είναι απλά να αντικαταστήσει τα a με b και αντίστροφα. ∎

Στα προηγούμενα, αναφερθήκαμε τόσο στην έννοια του *σταδίου* μιας TM, όσο και στην έννοια της *τρέχουσας κατάστασης* της TM, την οποία και ορίζουμε τώρα με ακρίβεια.

Η τρέχουσα κατάσταση (current configuration) μιας TM καθορίζεται πλήρως (1) από το τρέχον στάδιο υπολογισμού q_i, (2) από την τρέχουσα θέση της κεφαλής, καθώς και (3) από τα περιεχόμενα των κυψελίδων της ταινίας. Λίγο πιο τεχνικά, η ταινία μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνάρτηση $F : Z \longrightarrow \Sigma \cup \{B\}$, όπου $F(k)$ είναι το περιεχόμενο της k-οστής κυψελίδας. Μια *κατάσταση* της μηχανής είναι τότε μια τριάδα $\langle F, i, k\rangle$, όπου F είναι η ταινία, q_i είναι το τρέχον στάδιο υπολογισμού, και k είναι ένας ακέραιος που υποδηλώνει την τρέχουσα θέση της κεφαλής.

Αν η πρώτη από τα αριστερά μη κενή κυψελίδα απέχει m θέσεις από την τρέχουσα θέση της κεφαλής, και αν η τελευταία προς τα δεξιά μη κενή κυψελίδα απέχει k θέσεις από την τρέχουσα θέση της κεφαλής, τότε η τρέχουσα κατάσταση C_i της TM μπορεί επίσης να περιγραφεί, πιο παραστατικά, ως $C_i = s_{-m} \cdots s_{-1} q_i s_0 s_1 \cdots s_k$, όπου για κάθε $-m \leq j \leq k$ είναι $s_j \in \Sigma \cup \{B\}$, ενώ $s_{-m} \neq B \neq s_k$. Για λόγους ευκρίνειας θα σημειώνουμε ορισμένες φορές και τις εκατέρωθεν κενές κυψελίδες. Σημειώνουμε ότι η αρχική κατάσταση (initial configuration) C_1 είναι πάντοτε της μορφής $Bq_1 s_0 s_1 \cdots s_n B$, για κάποιο φυσικό n, αφού θεωρούμε ότι ο υπολογισμός αρχίζει με την κεφαλή στην πρώτη από τα αριστερά μη κενή κυψελίδα του επιθυμητού input.

Ενας *υπολογισμός μιας TM* είναι μια ακολουθία $C_1 \cdots C_i \cdots$ καταστάσεων, έτσι ώστε η κατάσταση C_{i+1} να καθορίζεται από τη C_i και τη συνάρτηση δ (τη μονάδα ελέγχου) της μηχανής. Πιο συγκεκριμένα, αν $C_i = \langle F, i, k\rangle$ και $\delta(q_i, F(k)) = (s, q_j, L)$, τότε η επόμενη κατάσταση είναι η $C_{i+1} = \langle F^s_k, j, k-1\rangle$, όπου $F^s_k(k) = s$ και για $\ell \neq k$, $F^s_k(\ell) = F(\ell)$. Αντίστοιχα, αν η μετακίνηση που καθορίζει η δ είναι προς τα δεξιά. Από την παρατήρηση αυτή προκύπτει χωρίς δυσκολία το ακόλουθο συμπέρασμα.

Πρόταση 1.1.2 (Αρχή Καθορισμού) *Εστω $M = \langle \delta, \Sigma, Q \rangle$ μια TM και $C_i = \langle F, i, k \rangle$ μια κατάσταση υπολογισμού. Τότε, αν η C_i δεν είναι κατάσταση τερματισμού, η κατάσταση C_{i+1} καθορίζεται με μοναδικό τρόπο από την κατάσταση C_i και τη συνάρτηση δ.* ∎

Ο υπολογισμός είναι *συγκλίνων υπολογισμός* ακριβώς όταν υπάρχει κατάσταση C_r, για κάποιο φυσικό αριθμό r, ώστε η ακολουθία καταστάσεων της TM να είναι $C_1 C_2 \cdots C_r$ και το στάδιο της μηχανής στην κατάσταση C_r να είναι το στάδιο τερματισμού q_0. Στη συνέχεια, με τον όρο *υπολογισμός* θα εννοούμε πάντοτε ένα συγκλίνοντα υπολογισμό (εκτός αν λέγεται ρητά το αντίθετο).

Παράδειγμα 1.1.5 Ας εξετάσουμε την TM η οποία υπολογίζει τη συνάρτηση $\lambda x.4$, με είσοδο τον αριθμό 2. Τότε ο υπολογισμός έχει την παρακάτω μορφή (υποδηλώνουμε τη θέση της κεφαλής με υπογράμμιση).

$$
\begin{array}{ccccccccc}
B & \underline{1} & 1 & 1 & B & B & B & B & B \\
B & B & \underline{1} & 1 & B & B & B & B & B \\
B & B & B & \underline{1} & B & B & B & B & B \\
B & B & B & B & \underline{B} & B & B & B & B \\
B & B & B & B & 1 & \underline{B} & B & B & B \\
B & B & B & B & 1 & 1 & \underline{B} & B & B \\
B & B & B & B & 1 & 1 & 1 & \underline{B} & B \\
B & B & B & B & 1 & 1 & 1 & 1 & \underline{B}
\end{array}
$$

1.2 Υπολογισμοί Αριθμητικών Συναρτήσεων

Αν Σ είναι ένα (πεπερασμένο) αλφάβητο, θα συμβολίζουμε με Σ^* το σύνολο των πεπερασμένων αλυσίδων με χαρακτήρες από το αλφάβητο Σ. Σε γενικές γραμμές λέμε ότι μια μερικά ορισμένη συνάρτηση

$$f : \underbrace{\Sigma^* \times \cdots \times \Sigma^*}_{n \text{ στο πλήθος}} \longrightarrow \Sigma^*$$

είναι *Turing υπολογίσιμη* (Turing computable) ακριβώς όταν υπάρχει μια μηχανή Turing $T = \langle Q, \Sigma, \delta \rangle$ έτσι ώστε, για κάθε $\sigma_1, \cdots, \sigma_n, \tau \in \Sigma^*$,