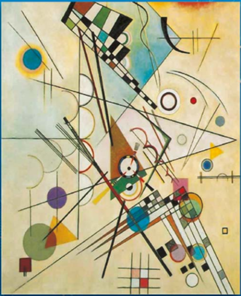
Αθανάσιος Χαλάτσης

γεωμετρία



2η ΕΚΔΟΣΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο υπογράφεται από το συγγραφέα

Εικόνα εξωφύλλου: Wassily Kandinsky, "Σύνθεση VIII", 1923, Μουσείο Guggenheim, Νέα Υόρκη

ISBN 960-431-993-0

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72.222 (10 γραμ.) - Fax: 23920 72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ **ΖΗΤΗ**
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203.720, Fax 2310 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

www.ziti.gr

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Εδώ και χιλιάδες χρόνια οι κάτοικοι της Αιγύπτου καλλιεργούν τη γη στο Δέλτα το Νείλου. Οι ετήσιες όμως πλημμύρες του ποταμού εξάλειφαν τα σύνορα ανάμεσα στα χωράφια. Ήταν πρόβλημα το να βρει κανείς το χωράφι του μετά την απόσυρση των υδάτων. Προκειμένου να λύσουν αυτό κι άλλα συναφή προβλήματα οι Αιγύπτιοι επινόησαν τη *Γεωμετρία*, την τέχνη του να μετράς τη Γη. Στον Ηρόδοτο αποδίδεται ο ισχυρισμός ότι η *Γεωμετρία είναι δώρο του Νείλου.*

Δεν ήταν, όμως, η μετά τις πλημμύρες αναδιανομή των χωραφιών το μόνο κίνητρο για την επινόηση και ανάπτυξη της Γεωμετρίας. Όταν ένα πρόβλημα αντιμετωπίζεται, η ανάπτυξη του πολιτισμού θέτει άλλα συνθετότερα. Επειδή, λ.χ., ήταν φρονιμότερο να προλαμβάνονται οι πλημμύρες, επινοήθηκαν τα φράγματα. Κι επειδή ήταν ωφέλιμο να ποτίζονται οι καλλιέργειες, επινοήθηκαν τα αρδευτικά έργα. Κι όχι μόνο στο Δέλτα του Νείλου αλλά και στην κοιλάδα ανάμεσα στον Τίγρη και τον Ευφράτη οι καλλιέργειες έθεταν τα ίδια ή και παρόμοια προβλήματα. Οι δύο αρχαιότεροι πολιτισμοί, των Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων, αναπτύσσονται στις κοιλάδες αυτών των ποταμών, και η ανάπτυξή αυτή προωθεί τα Μαθηματικά και προωθείται απ' αυτά.

Ο πολιτισμός, λοιπόν, θέτει πρακτικά προβλήματα, κι ο άνθρωπος επινοεί τα Μαθηματικά για να τα λύσει.

Ωστόσο, δεν είναι τα πρακτικά προβλήματα το μόνο κίνητρο για τη μαθηματική αναζήτηση, κι από ένα σημείο και πέρα δεν είναι ούτε το σπουδαιότερο. Ο ελληνικός πολιτισμός κάνει μια τομή σ' αυτή την εξέλιξη, εγκαινιάζει μια νέα εποχή στα Μαθηματικά. Τα Μαθηματικά όπως τα γνωρίζουμε σήμερα διαμορφώνονται στην αρχαία Ελλάδα στη διάρκεια της κλασικής περιόδου - από τον 6^{o} ως και τον 3^{o} αιώνα.

Τα Μαθηματικά των Αιγυπτίων και των λαών της Μεσοποταμίας ήταν απλά εμπειρικά συμπεράσματα. Σ' αντίθεση, οι Έλληνες δεν κάνουν δεκτή καμιά μαθηματική γνώση, αν αυτή δεν έχει αποδειχθεί.

Στην Ελλάδα γεννιέται η ιδέα της *μαθηματικής (ή λογικής) απόδειξης*. Η ιδέα πως για να δεχτούμε μια μαθηματική πρόταση ως αληθή, πρέπει αυτή να προκύπτει ως λογικό συμπέρασμα από άλλες προτάσεις που ήδη δεχτήκαμε ως αληθείς. Ισχυριζόμαστε, λ.χ., πως

“ οι γωνίες της βάσης κάθε ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες”,

αλλά για να δεχτούμε αυτή την πρόταση ως αληθή, δεν αρκεί να σχεδιάσουμε στο χαρτί μερικά ισοσκελή τρίγωνα, να μετρήσουμε στο καθένα τις γωνίες της βάσης του και να διαπιστώσουμε ότι αυτές είναι όντως ίσες. Πρέπει το συμπέρασμα αυτό να θεμελιωθεί ανεξάρτητα από την εμπειρία. Πρέπει να προκύψει με λογικούς συμπερασμούς από απλές παραδοχές, οι οποίες μας επιβάλλονται βέβαια από την εμπειρία, αλλά ως εξαιρετικά προφανείς και αναντίρρητες. Αυτό είναι σε γενικές γραμμές το *πνεύμα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*.

Ας προσπαθήσουμε να το περιγράψουμε κάπως αναλυτικότερα.

Ένα *φυσικό σημείο* είναι ένα αντικείμενο ή μια θέση με αμελητέες διατάσεις, κάτι που είναι εξαιρετικά μικρό. Η τελεία στο τέλος αυτής της πρότασης είναι ένα φυσικό σημείο. Βέβαια, χαρακτηρίζεται κάτι ως *μικρό* μόνο σε σχέση με κάτι άλλο. Κι εδώ το κάτι άλλο είναι ο ίδιος ο άνθρωπος, η ανθρώπινη κλίμακα. Η τελεία του κειμένου είναι μικρή ως προς την ανθρώπινη κλίμακα. Αλλά ως προς την κλίμακα των ατόμων αυτή η ίδια τελεία είναι ένας ολόκληρος κόσμος. Αντίθετα, σε κοσμολογική κλίμακα η Γη ολόκληρη λογίζεται ως ένα σημείο.

Μια *φυσική ευθεία γραμμή* είναι μια τεντωμένη κλωστή ή μια ακμή ενός κρυστάλλου. Δύο σημεία μπορούν να συνδεθούν με αναρίθμητους τρόπους. Όμως, μεταξύ αυτών υπάρχει ένας ιδιαίτερος, μοναδικός ως προς τη φύση του, κι αυτός είναι *η ευθεία γραμμή*.

Ένα *φυσικό επίπεδο* είναι η επιφάνεια ενός τραπεζιού ή μια μικρής ποσότητας ήρεμου νερού. Σ’ ένα επίπεδο μπορούμε να θεωρήσουμε αμέτρητες ευθείες. Αν μια τεντωμένη κλωστή έχει τα άκρα της σ’ επαφή μ’ ένα επίπεδο, τότε, χωρίς έλεγχο, έχουμε την πεποίθηση πως ολόκληρη η τεντωμένη κλωστή είναι σ’ επαφή με το επίπεδο.

Όλα αυτά τα αντιλαμβανόμαστε μέσα στο χώρο που ζούμε. Ο χώρος φαίνεται να είναι *συνεχής, ομογενής, ισότροπος* και *χωρίς πέρατα.* Δεν είναι έτσι εδώ κι αλλιώτικος εκεί. Κι επίσης, δεν είναι δυνατό να φανταστούμε πως κάπου τελειώνει και πως από κει και πέρα δεν υπάρχει τίποτε. Η ίδια η φράση "*από κει και πέρα δεν υπάρχει τίποτε*" είναι αντιφατική, γιατί *όταν υπάρχει πέρα, υπάρχει κάτι*. Βέβαια, η φύση δεν είναι κατ' ανάγκην έτσι όπως τη συλλαμβάνει ο νους μας. Ωστόσο, εδώ έχουμε να κάνουμε μ' αυτό που αντιλαμβανόμαστε.

Αν φανταστούμε ένα φυσικό σημείο να μικραίνει απεριόριστα, τότε εκείνο στο οποίο *τείνει* θα είναι ένα ιδανικό σημείο. Κι αυτό είναι που ονομάζουμε σημείο στη Γεωμετρία. Κάτι που είναι *απόλυτα μικρό* και φυσικά δεν υπάρχει παρά μόνο στη φαντασία μας.

Όμοια, αν φανταστούμε μια φυσική ευθεία να λεπταίνει απεριόριστα, τότε η *οριακή* της μορφή είναι η *ιδανική* ή η *γεωμετρική ευθεία.* Ανάλογα σχηματίζουμε και την έννοια του *γεωμετρικού επιπέδου.*

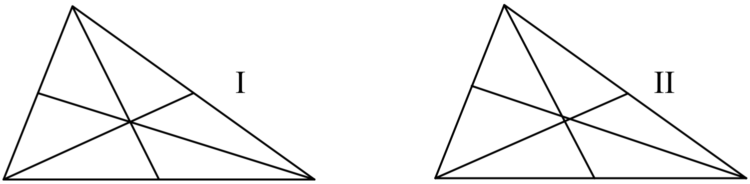
Συνεπώς, από το φυσικό σημείο, τη φυσική ευθεία και το φυσικό επίπεδο, εξιδανικεύοντάς τα, φτάνουμε στις έννοιες του γεωμετρικού σημείου, της γεωμετρικής ευθείας και του επιπέδου αντίστοιχα.

Ο καθένας μπορεί να χαράσσει τρίγωνα ή κύκλους στο χαρτί και να σκέφτεται πως αυτά *αντιπροσωπεύουν* αντίστοιχα *ιδανικά* τρίγωνα ή κύκλους, στα οποία οι πλευρές ή οι περιφέρειες δεν έχουν πλάτος. Τρίγωνα ή κύκλους που *δεν υπάρχουν πουθενά έξω από τη νόησή μας.* Και μας φαίνεται εύλογο να υποθέτουμε πως αυτά τα νοερά γεωμετρικά σχήματα έχουν τις ίδιες ιδιότητες που έχουν και τα πραγματικά.

Κατ' αρχήν, λοιπόν, υπάρχει ο φυσικός χώρος. Σ' αυτόν διακρίνουμε, κυρίως με την όραση αλλά και με την αφή, αντικείμενα, σχήματα, μορφές. Αντιλαμβανόμαστε δε πως αυτή η γύρω μας πραγματικότητα διέπεται από κάποιες κανονικότητες, δεν είναι αυθαίρετη. Η φύση είναι *αντικειμενική*, δεν είναι τη μια έτσι και την άλλη αλλιώς. Τα αντικείμενα, τα σχήματα, οι μορφές έχουν σταθερές ιδιότητες, βρίσκονται σε κάποιες αναλλοίωτες μεταξύ τους σχέσεις. Ωστόσο, μερικές ιδιότητες ή σχέσεις φαίνεται να είναι πιο θεμελιώδεις από άλλες.

Θα δούμε τι σημαίνει αυτό με δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα I. Μπορούμε να διαπιστώσουμε πως οι τρεις διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από ένα σημείο (Σχήμα I).



Αυτή η ιδιότητα των τριγώνων δεν είναι προφανής, δε γίνεται αντιληπτή με τη πρώτη ματιά. Και τίποτε δε μας εμποδίζει να σκεφτούμε πως μπορεί και να μην συμβαίνει έτσι σ' όλα τα τρίγωνα. Το ότι στο Σχήμα I *φαίνεται* να περνούν οι τρεις διάμεσοι από ένα σημείο δεν είναι πειστικό πως έτσι και *συμβαίνει*. Τίποτε δε βεβαιώνει ότι πρόκειται για σημείο κι όχι για ένα πολύ-πολύ μικρό τρίγωνο, όπως στο Σχήμα II ή και μικρότερο, καλυπτόμενο από το πάχος των ευθειών.

Παράδειγμα II. Ας θεωρήσουμε, τώρα, *ένα τρίγωνο και στο ίδιο επίπεδο μια ευθεία που να τέμνει τη μία από τις τρεις πλευρές του, χωρίς να διέρχεται από κάποια κορυφή του*. Είναι φανερό ότι αυτή θα τέμνει και τη μία από τις άλλες δύο πλευρές του τριγώνου και μόνο τη μία. Είναι αδύνατο να φανταστούμε πως αλλιώς θα μπορούσε να συμβεί. Πρόκειται για μια *προφανή* και συγχρόνως *αναγκαία αλήθεια* .

Είναι βέβαιο πως ο ουρανός είναι γαλάζιος, αλλά μπορούμε να τον φανταστούμε και πράσινο. Είναι βέβαιο πως δεν υπάρχει ένα άλογο μ' ένα κέρατο στη μέση του κεφαλιού του, αλλά μπορούσε να ζωγραφίσουμε κάτι τέτοιο. Όμως, στο επίπεδο *μια ευθεία που να τέμνει μία μόνο πλευρά ενός τριγώνου ή και τις τρεις σε εσωτερικά σημεία* δεν είναι δυνατό να τη φανταστούμε. Δεν μπορούμε να φανταστούμε πώς θα ήταν τα πράγματα, αν δεν ήταν έτσι όπως αντιλαμβανόμαστε ότι πρέπει να είναι. Αυτό θα πει *αναγκαία αλήθεια*.

Τις προτάσεις που εκφράζουν τέτοιες προφανείς κι αναγκαίες αλήθειες, όταν τις δεχόμαστε χωρίς καμιά άλλη αιτιολόγηση, τις ονομάζουμε ***αξιώματα***. Τις προτάσεις που αποδεικνύονται, αυτές δηλαδή που συνάγονται ως λογικά συμπεράσματα άλλων προτάσεων, τις ονομάζουμε ***θεωρήματα***. Ξεκινάμε, λοιπόν, με τα αξιώματα, συνάγουμε απ' αυτά τα πρώτα θεωρήματα και στη συνέχεια από τα αξιώματα κι απ' αυτά τα θεωρήματα συνάγουμε άλλα θεωρήματα, κ.ο.κ. Θεωρήματα που εκφράζουν σχέσεις μεταξύ γεωμετρικών σχημάτων. Γεωμετρικά σχήματα, όπως ευθύγραμμα τμήματα, γωνίες, πολύγωνα, κύκλους κλπ, που δεν τα επινοούμε εκ του μηδενός, αλλά από την εμπειρία μας με τα φυσικά αντικείμενα.

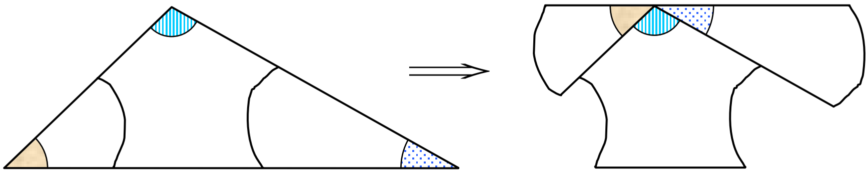
Ωστόσο, τα ορίζουμε το ένα μετά το άλλο, με βάση τις *αρχικές* έννοιες: *σημείο*, *ευθεία* και *επίπεδο*. Οι αρχικές έννοιες δεν ορίζονται, η σημασία τους δεν ανάγεται σ' άλλες απλούστερες. Φτάνουμε στο σχηματισμό αυτών των εννοιών *αφαιρετικά*, ξεκινώντας από την εμπειρία μας με τα φυσικά αντικείμενα: σημεία, ευθείες, επίπεδα.

Αρχίζουμε, λοιπόν, με αξιώματα που εκφράζουν σχέσεις μεταξύ των αρχικών εννοιών. Τα αξιώματα αυτά κωδικοποιούν - μετασχηματίζουν σε σαφείς προτάσεις - την αντίληψή μας για το τι είναι σημείο, ευθεία και επίπεδο. Ορίζοντας νέες έννοιες, νέα γεωμετρικά σχήματα, εικάζουμε νέες μεταξύ αυτών σχέσεις, που κατά κανόνα αποδεικνύονται ή και εξαιρετικά σπάνια γίνονται δεκτές ως νέα αξιώματα.

Σ' όλη αυτή την πορεία χαράσσουμε στο χαρτί φυσικά σχήματα, αλλά θεωρούμε πως αυτά αντιπροσωπεύουν τα αντίστοιχα ιδανικά, έχοντας ως δεδομένο ότι αυτές οι δύο κατηγορίες σχημάτων έχουν τις ίδιες ιδιότητες. Γιατί οι ιδιότητες των ιδανικών σχημάτων καθορίζονται μόνον από τα αξιώματα, αλλά η ισχύς των αξιωμάτων επιβάλλεται από την εμπειρία μας με τα φυσικά σχήματα.

Είναι εύλογο, όμως, το ερώτημα: γιατί μπλέκουμε με τα ιδανικά γεωμετρικά σχήματα, αφού τα φυσικά είναι που μας ενδιαφέρουν και μ' αυτά μπορούμε να πειραματιστούμε, κι έτσι να καταλήξουμε σε διαπιστώσεις σχετικά με τις ιδιότητές τους;

Μπορούμε, λ.χ., να λάβουμε ένα χάρτινο τρίγωνο, να το κόψουμε σε τρία μέρη, κι ύστερα να τα ενώσουμε έτσι, ώστε οι γωνίες του να τοποθετηθούν διαδοχικά, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Θα διαπιστώσουμε ότι το άθροισμα των τριών γωνιών είναι ίσο με μια ευθεία γωνία, δηλαδή με 180°. Μπορούμε να επαναλάβουμε το πείραμα πολλές φορές. Αλλά πάντα θα καταλήγουμε το ίδιο συμπέρασμα. Έτσι, είναι εύλογο να δεχτούμε πως σ' όλα τα τρίγωνα, και σ' αυτά που μετρήσαμε και σ' αυτά που δε μετρήσαμε ή που δεν έχουμε τη πρόσβαση να μετρήσουμε, το άθροισμα των τριών γωνιών τους είναι ίσο με 180°. Εξάλλου, όπως είπαμε, η φύση είναι αντικειμενική. Γιατί να συμβαίνει κάτι μόνο στα τρίγωνα που έτυχε να μετρήσουμε;

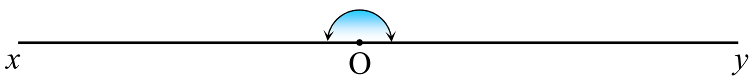
Ωστόσο, κάποιος σκεπτικιστής θα μπορούσε να ισχυριστεί πως ακόμα και σε χίλια τρίγωνα να διαπιστώσω ότι το άθροισμα των γωνιών τους είναι ίσο με 180°, δεν υπάρχει απόλυτη βεβαιότητα ότι το ίδιο θα συμβαίνει και στο χιλιοστό πρώτο. Κι επίσης, ποιος μας εγγυάται ότι κάθε φορά που μετράμε το άθροισμα των γωνιών αυτό είναι ακριβώς 180° κι όχι ελάχιστα μεγαλύτερο ή μικρότερο;

Θα απαντούσαμε πως και για πιο σημαντικά θέματα δεν ενεργούμε με τέτοιο σκεπτικισμό. Πίνουμε νερό από τη βρύση, επειδή έχουμε ξαναπιεί και δεν πάθαμε τίποτε. Τρώμε το ψωμί που αγοράζουμε, χωρίς καμιά υπόνοια ότι θα μας βλάψει. Καταναλώνουμε φάρμακα, με μόνη εγγύηση ότι δοκιμάστηκαν από άλλους. Χτίζουμε σπίτια και γέφυρες, και τις γωνίες τις μετράμε με προσέγγιση.

Κι όμως τους ισχυρισμούς του υποτιθέμενου σκεπτικιστή τους ήγειραν πριν από 2500 χρόνια οι έλληνες φιλόσοφοι που κατοικούσαν στα παράλια της Ιωνίας. Αυτοί αναζήτησαν μια πιο στέρεα αιτιολόγηση για την ισχύ αυτών που γνώριζαν ή ήθελαν να γνωρίσουν. Κι εκείνο που επινόησαν και πρότειναν ήταν η *λογική απόδειξη*. Θα την ονομάζουμε απλά *απόδειξη*. Η πρώτες αποδείξεις αποδίδονται στο Θαλή.

Ας δούμε τώρα ένα μικρό *δείγμα* Γεωμετρίας που καταλήγει σε μια απόδειξη.

1. Ορισμός. *Αν οι πλευρές μιας γωνίας αποτελούν ευθεία, τότε την ονομάζουμε* ***ευθεία γωνία****.*

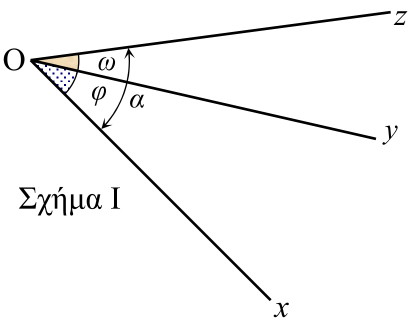


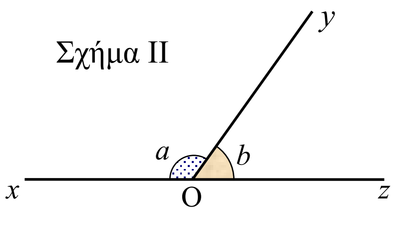
2. Ορισμός. *Δύο γεωμετρικά σχήματα είναι* ***ίσα****, αν και μόνον αν μπορούν να συμπέσουν (να ταυτιστούν).*

3. Αξίωμα. *Όλες οι ευθείες γωνίες είναι ίσες.*

4. Ορισμός. *Αν δύο γωνίες έχουν μια κοινή πλευρά και οι μη κοινές πλευρές τους κείνται εκατέρωθεν αυτής, τότε ονομάζονται* ***εφεξής****.*

Στο Σχήμα Ι οι γωνίες $\measuredangle x\mathrm{O}y$ και $\measuredangle y\mathrm{O}z$ είναι εφεξής. Είναι εύλογο να θεωρήσουμε τη γωνία $\measuredangle x\mathrm{O}z$ ως το *άθροισμά* τους.





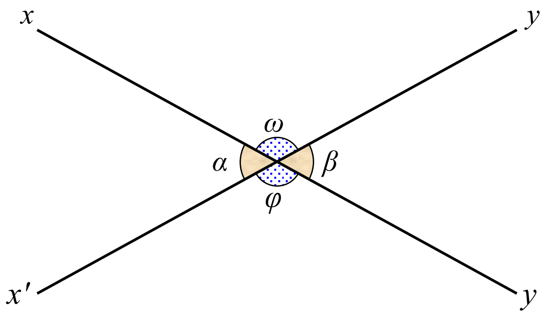
$\measuredangle\varphi + \measuredangle\omega = \measuredangle\alpha$

$\measuredangle a + \measuredangle b = 1$ ευθεία γωνία

5. Ορισμός. *Δύο γωνίες των οποίων το άθροισμα είναι ίσο με μια ευθεία γωνία ονομάζονται **παραπληρωματικές**.*

Στο Σχήμα ΙΙ οι γωνίες $\measuredangle a$ και $\measuredangle b$ είναι παραπληρωματικές.

6. Ας θεωρήσουμε δύο τεμνόμενες ευθείες xy και $x'y'$.



Σχήμα ΙΙΙ

Σχηματίζονται τέσσερις γωνίες με κοινή κορυφή. Στα ζεύγη γωνιών $(\measuredangle\alpha, \measuredangle\beta)$ και $(\measuredangle\varphi, \measuredangle\omega)$ οι πλευρές της μιας γωνίας είναι προεκτάσεις των πλευρών της άλλης. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι δύο γωνίες είναι ***κατακορυφήν***. Οι γωνίες $\measuredangle\alpha$ και $\measuredangle\beta$, καθώς και οι $\measuredangle\varphi$ και $\measuredangle\omega$ είναι κατακορυφήν. Προφανώς, οι γωνίες $\measuredangle\beta$ και $\measuredangle\omega$ είναι παραπληρωματικές, και το ίδιο οι $\measuredangle\alpha$ και $\measuredangle\omega$, $\measuredangle\alpha$ και $\measuredangle\varphi$, $\measuredangle\beta$ και $\measuredangle\varphi$.

7. Θεώρημα: *Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.*

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε τις κατακορυφήν γωνίες $\measuredangle\alpha$ και $\measuredangle\beta$ του Σχήματος ΙΙΙ. Θα είναι:

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle\alpha+\measuredangle\omega=1 \textit{ ευθεία γωνία}\\ \\ \measuredangle\beta+\measuredangle\omega=1 \textit{ ευθεία γωνία}\end{array}\right\}\overset{(*)}{\Longrightarrow}\measuredangle\alpha+\measuredangle\omega=\measuredangle\beta+\measuredangle\omega\overset{(**)}{\Longrightarrow}\measuredangle\alpha=\measuredangle\beta$$

(*) διότι, κατά το Αξίωμα 3, όλες οι ευθείες γωνίες είναι ίσες.

(**) διότι, αν από ίσα αφαιρέσουμε ίσα, θα μείνουν πάλι ίσα.♦

Παρατηρούμε πως η απόδειξη έγινε μόνο με συλλογισμούς κι όχι με μετρήσεις στο σχήμα. Μετά από την απόδειξη είμαστε βέβαιοι πως *οποιεσδήποτε κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες, απόλυτα ίσες*. Κανείς, και βέβαια ούτε και ο σκεπτικιστής, δεν μπορεί να προβάλει αντιρρήσεις. Το συμπέρασμα είναι *αναγκαστικό*.

Συνοψίζοντας, καταλήγουμε στις ακόλουθες διαπιστώσεις:

1. *Πρακτικά μας ενδιαφέρουν τα φυσικά αντικείμενα, και συνεπώς τα φυσικά γεωμετρικά σχήματα.*

2. *Δεχόμαστε, όμως, πως τα φυσικά σχήματα έχουν ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες που έχουν τα αντίστοιχα ιδανικά, διότι οι ιδιότητες των ιδανικών σχημάτων καθορίζονται μόνο από τα αξιώματα, αλλά η ισχύς των αξιωμάτων μας επιβάλλεται από την εμπειρία μας με τα φυσικά σχήματα. Τα αξιώματα κωδικοποιούν την εμπειρία.*

3. *Η επιβεβαίωση των ιδιοτήτων στα ιδανικά σχήματα γίνεται με τρόπο που δεν αφήνει αμφιβολίες. Τα συμπεράσματα των αποδείξεών μας είναι τόσο αξιόπιστα όσο και η λογική μας, κι είναι τόσο αναγκαία όσο τα αξιώματα που δεχόμαστε.*

4. *Έτσι, διασφαλίζεται η μέγιστη βεβαιότητα για την ισχύ των ιδιοτήτων που έχουν τα φυσικά σχήματα.*

5. *Παράλληλα, η διεξαγωγή των αποδείξεων όχι μόνο διευκολύνεται από την παρουσία σχημάτων στο χαρτί, αλλά είναι και πρακτικά αδύνατο να γίνει χωρίς αυτήν.*

§1. Σημεία - Ευθείες - Επίπεδα

Οι αρχικές έννοιες στις οποίες στήνεται το οικοδόμημα της Γεωμετρίας είναι το *σημείο*, η *ευθεία* και το *επίπεδο*. Αυτές δεν ορίζονται, δηλαδή, η σημασία τους δεν ανάγεται σ' άλλες απλούστερες. Φτάνουμε στο σχηματισμό αυτών των εννοιών *αφαιρετικά*, ξεκινώντας από την εμπειρία μας με τα φυσικά αντικείμενα: σημεία, ευθείες, επίπεδα. Όπως είδαμε στην εισαγωγή, κάποιες σχέσεις μεταξύ των γεωμετρικών σχημάτων είναι *προφανείς*, *αναγκαίες* αλλά ταυτόχρονα και *μη αποδείξιμες*. Τις σχέσεις αυτές τις ονομάσαμε *αξιώματα*.

1.1 Αξίωμα (A_1). *Από δύο σημεία διέρχεται μία και μόνο μία ευθεία.*

Σχήμα 1.1

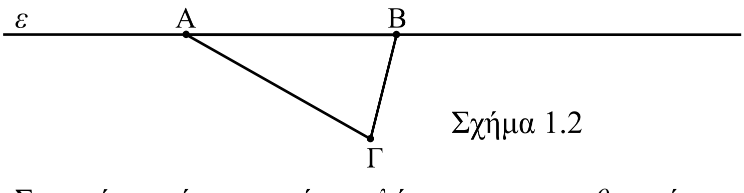
Άρα, αν δύο ευθείες έχουν τουλάχιστο δύο κοινά σημεία, τότε ταυτίζονται. Λέμε ότι "*δύο σημεία ορίζουν μία ευθεία*". Η ευθεία την οποία ορίζουν δύο σημεία A και B θα αναφέρεται και ως *η ευθεία AB*.

Οι διατυπώσεις *"μία ευθεία διέρχεται από ένα σημείο"*, *"μία ευθεία έχει (ή περιέχει) ένα σημείο"* και *"ένα σημείο ανήκει σε μία ευθεία"* είναι ισοδύναμες. Σημειώνουμε τις ευθείες με μικρά γράμματα και τα σημεία με κεφαλαία.

1.2 Αξίωμα (A_2). *Κάθε ευθεία περιέχει τουλάχιστο δύο σημεία.*

Δύο ή περισσότερα σημεία ονομάζονται ***συνευθειακά***, αν *ανήκουν* στην ίδια ευθεία. Προφανώς, δύο σημεία είναι πάντοτε συνευθειακά.

1.3 Αξίωμα (A_3). *Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστο ένα σημείο που δεν ανήκει σ' αυτήν.*

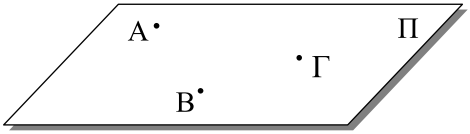


Σχήμα 1.2

Συνεπώς, *υπάρχουν τρία τουλάχιστο μη συνευθειακά σημεία.*

1.4 Αξίωμα (A_4). *Από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένα και μόνον ένα επίπεδο.*

Άρα, αν δύο επίπεδα έχουν κοινά τουλάχιστο τρία μη συνευθειακά σημεία, τότε ταυτίζονται. Λέμε ότι "*τρία μη συνευθειακά σημεία ορίζουν ένα επίπεδο*".

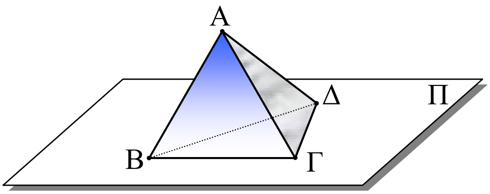


Σχήμα 1.3

1.5 Αξίωμα (A_5). *Κάθε επίπεδο περιέχει τουλάχιστο τρία μη συνευθειακά σημεία.*

Δύο ή περισσότερα σημεία ονομάζονται ***συνεπίπεδα***, αν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο. Τρία (κι άρα δύο) σημεία είναι πάντοτε συνεπίπεδα.

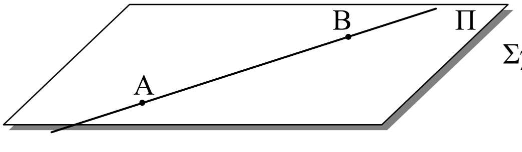
1.6 Αξίωμα (A_6). *Για κάθε επίπεδο υπάρχει τουλάχιστο ένα σημείο που δεν ανήκει σ' αυτό.*



Σχήμα 1.4

Συνεπώς, *υπάρχουν τέσσερα τουλάχιστο μη συνεπίπεδα σημεία.*

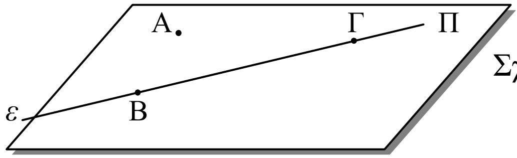
1.7 Αξίωμα (A_7). *Αν δύο σημεία μιας ευθείας ανήκουν σ' ένα επίπεδο, τότε ολόκληρη η ευθεία ανήκει (περιέχεται) στο επίπεδο.*



Σχήμα 1.5

1.8 Θεώρημα. *Αν ε είναι μια ευθεία και Α ένα σημείο που δεν ανήκει σ' αυτήν, τότε υπάρχει ένα και μοναδικό επίπεδο Π που περιέχει και την ευθεία ε και το σημείο Α. Με άλλα λόγια, μία ευθεία κι ένα σημείο εκτός αυτής ορίζουν ένα επίπεδο.*

Απόδειξη: Αν Β, Γ είναι δύο σημεία της ευθείας ε, τότε τα τρία σημεία Α, Β και Γ είναι μη συνευθειακά, κι άρα ορίζουν ένα επίπεδο Π (Αξίωμα 1.4). Επειδή τα σημεία Β και Γ της ευθείας ε ανήκουν στο επίπεδο Π, η ευθεία ε ανήκει στο επίπεδο Π (Αξίωμα 1.7). Υπάρχει, λοιπόν, ένα επίπεδο που περιέχει και την ευθεία ε και το σημείο Α.



Σχήμα 1.6

Αυτό είναι και το μοναδικό. Διότι, αν κάποιο επίπεδο Π′ περιέχει την ευθεία ε και το σημείο Α, θα περιέχει τα τρία μη συνευθειακά σημεία Α, Β και Γ, κι έτσι θα ταυτίζεται με το Π (Αξίωμα 1.4).♦

Από το Αξίωμα 1.1 προκύπτει ότι δύο ευθείες είτε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο είτε έχουν ακριβώς ένα. Διότι, αν είχαν δύο ή περισσότερα κοινά σημεία, θα ταυτίζονταν.

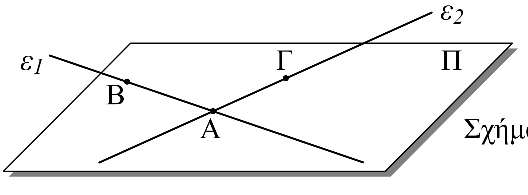
1.9 Ορισμός. *Όταν δύο ευθείες έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, τότε λέμε ότι **τέμνονται** ή ότι είναι **τεμνόμενες**.*

1.10 Ορισμός. *Δύο ευθείες που ανήκουν σ' ένα επίπεδο (ομοεπίπεδες) και δεν έχουν κοινό σημείο ονομάζονται **παράλληλες**.*

Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες, τότε σημειώνουμε $\boldsymbol{\varepsilon_1 // \varepsilon_2}$.

1.11 Θεώρημα. *Αν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, τότε υπάρχει ένα και μοναδικό επίπεδο Π που τις περιέχει. Με άλλα λόγια, δύο τεμνόμενες ευθείες ορίζουν ένα επίπεδο.*

Απόδειξη: Έστω δύο ευθείες ε_1 και ε_2 τεμνόμενες στο σημείο Α. Αν Β είναι ένα σημείο της ε_1 διάφορο του Α ($Β \not\equiv Α$) και Γ ένα σημείο της ε_2 διάφορο του Α ($Γ \not\equiv Α$), τότε τα τρία σημεία Α, Β και Γ είναι μη συνευθειακά, οπότε ορίζουν ένα επίπεδο Π (Αξίωμα 1.4).

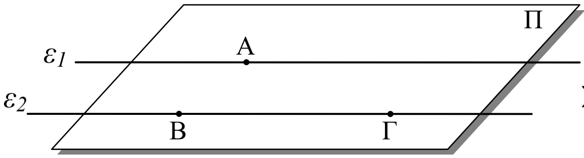


Σχήμα 1.7

Τα σημεία Α και Β της ευθείας ε_1 ανήκουν στο επίπεδο Π, συνεπώς η ε_1 περιέχεται στο Π (Αξίωμα 1.7). Το ίδιο ισχύει και για την ε_2. Άρα, υπάρχει ένα επίπεδο Π που περιέχει τις τεμνόμενες ευθείες ε_1 και ε_2. Αντίστροφα, αν κάποιο επίπεδο περιέχει τις δύο ευθείες ε_1 και ε_2, τότε θα περιέχει τα τρία μη συνευθειακά σημεία Α, Β και Γ, οπότε θα συμπίπτει με το επίπεδο Π (Αξίωμα 1.4). Άρα, το Π είναι μοναδικό.♦

1.12 Θεώρημα. *Αν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες ($\varepsilon_1 /\!/ \varepsilon_2$), τότε υπάρχει μοναδικό επίπεδο που τις περιέχει.*

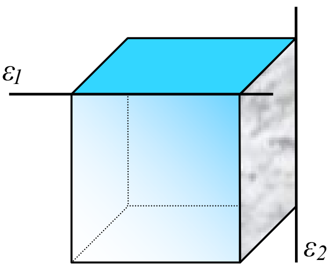
Απόδειξη: Αν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες, τότε εξ ορισμού περιέχονται σ' ένα επίπεδο Π.



Σχήμα 1.8

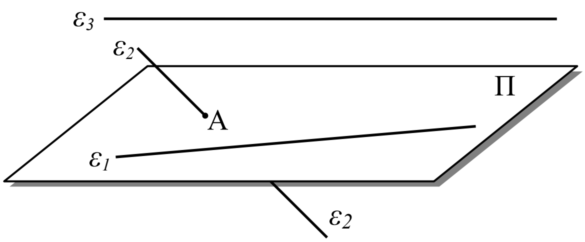
Μένει να δείξουμε ότι αυτό είναι και το μοναδικό. Έστω Α ένα σημείο της ε_1 και Β, Γ δύο σημεία της ε_2. Προφανώς, τα τρία σημεία Α, Β και Γ είναι μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου Π. Αν, λοιπόν, ένα επίπεδο Π′ περιέχει τις ευθείες ε_1 και ε_2, τότε θα περιέχει τα σημεία Α, Β και Γ, κι άρα θα συμπίπτει με το επίπεδο Π (Αξίωμα 1.4).♦

Είδαμε πως αν δύο ευθείες είναι παράλληλες ή τεμνόμενες, τότε είναι ομοεπίπεδες. Κι αντίστροφα, αν είναι ομοεπίπεδες, τότε είτε είναι παράλληλες είτε είναι τεμνόμενες. Είναι δυνατόν όμως δύο ευθείες να μην είναι ομοεπίπεδες. Τότε ονομάζονται ***ασύμβατες***. Οι ευθείες ε_1 και ε_2 στο επόμενο σχήμα είναι ασύμβατες.



Σχήμα 1.9

Κατά το Αξίωμα 1.7, αν δύο σημεία μίας ευθείας ανήκουν σ' ένα επίπεδο, τότε ολόκληρη ανήκει στο επίπεδο. Έτσι, μία ευθεία που δεν ανήκει σ' ένα επίπεδο είτε δεν έχει κανένα κοινό σημείο με το επίπεδο είτε έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο. Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι "***η ευθεία είναι παράλληλη προς το επίπεδο***", ενώ στη δεύτερη ότι "***η ευθεία τέμνει το επίπεδο***".



ε_1 ανήκει στο Π
ε_2 τέμνει το Π *στο* Α
ε_3 παρ/λη προς το Π

Σχήμα 1.10

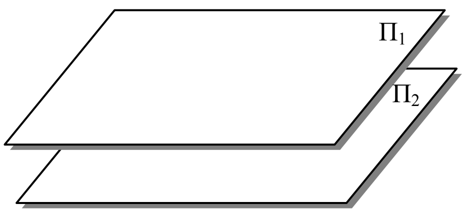
Αν δύο επίπεδα δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, τότε λέμε ότι είναι ***παράλληλα*** (Σχήμα 1.11). Αντίθετα, αν έχουν ένα τουλάχιστο κοινό σημείο, λέμε ότι ***τέμνονται*** ή ότι είναι ***τεμνόμενα*** (Σχήμα 1.12).

1.13 Αξίωμα (A_8). *Αν δύο επίπεδα τέμνονται, τότε έχουν δύο τουλάχιστο κοινά σημεία.*

1.14 Θεώρημα. *Η τομή δύο τεμνομένων επιπέδων είναι μία ευθεία.*

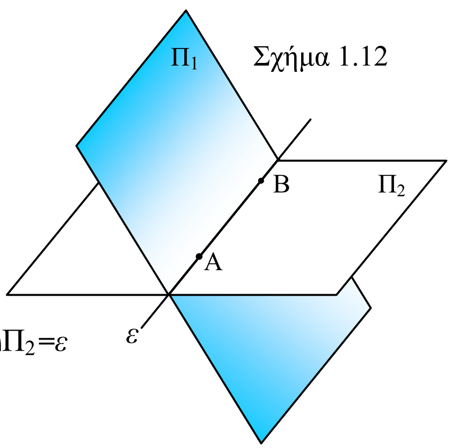
Απόδειξη. Έστω δυο τεμνόμενα επίπεδα Π_1 και Π_2. Σύμφωνα με το Αξίωμα 1.13, θα έχουν δύο κοινά σημεία Α και Β. (βλ. Σχήμα 1.12). Οπότε, κατά το Αξίωμα 1.7, θα έχουν κοινή την ευθεία *ε* που ορίζουν αυτά τα σημεία. Αν είχαν κοινό κι ένα επιπλέον σημείο, δηλαδή, ένα σημείο που δεν ανήκει στην ευθεία *ε*, τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.8, θα ταυτίζονταν. Άρα, η τομή τους είναι η ευθεία *ε*.♦

Σχήμα 1.11



$\Pi_1 // \Pi_2$

Σχήμα 1.12



$\Pi_1 \cap \Pi_2 = \varepsilon$

Προβλήματα-Ασκήσεις

1.1 Ένα τραπέζι με τρία πόδια δεν ταλαντεύεται, ενώ ένα με τέσσερα μπορεί και να ταλαντεύεται. Γιατί συμβαίνει αυτό;

1.2 Μια ευθεία ε_1 ανήκει σ' ένα επίπεδο Π και μια δεύτερη ε_2 τέμνει το επίπεδο Π σ' ένα σημείο Α που δεν ανήκει στην ευθεία ε_1. Ποια είναι η σχετική θέση των ευθειών ε_1 και ε_2;

1.3 Σε πόσα το πολύ σημεία τέμνονται 3 ευθείες ενός επιπέδου; Σε πόσα το πολύ σημεία τέμνονται 10 ευθείες, σε πόσα ν ευθείες;

1.4 Πόσες το πολύ ευθείες ορίζουν τρία σημεία ενός επιπέδου; Πόσες το πολύ ευθείες ορίζουν 10 σημεία, και πόσες ν σημεία;

1.5 Έστω τέσσερα μη συνεπίπεδα σημεία. Πόσα επίπεδα ορίζονται, ώστε το καθένα να περιέχει ακριβώς τρία από τα τέσσερα σημεία;

1.6 Έστω ότι δύο παράλληλα επίπεδα Π_1 και Π_2 τέμνονται από ένα τρίτο κατά τις ευθείες αντίστοιχα ε_1 και ε_2. Αποδείξτε ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

1.7 Έστω ότι μία ευθεία ε τέμνει δύο άλλες ε_1 και ε_2. Είναι κατ' ανάγκην οι τρεις ευθείες ομοεπίπεδες;

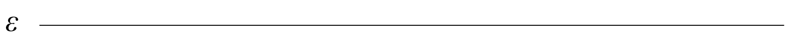
1.8 Μία ευθεία ε είναι παράλληλη προς ένα επίπεδο Π. Ένα δεύτερο επίπεδο Π′ περιέχει την ε και τέμνει το Π κατά την ευθεία ε'. Αποδείξτε ότι $\varepsilon' // \varepsilon$.

1.9 Έστω τρία επίπεδα τεμνόμενα ανά δύο. Αποδείξτε ότι οι τρεις ευθείες τομής είτε είναι παράλληλες ανά δύο είτε και οι τρεις διέρχονται από ένα σημείο.

§2. Ευθύγραμμα Τμήματα

Από την παράγραφο αυτή και στο εξής τα γεωμετρικά σχήματα θα ανήκουν σ’ ένα επίπεδο. Η Γεωμετρία μας θα είναι ***Επιπεδομετρία***. Θ’ ασχοληθούμε πρώτα με τις ευθείες.

Ένας *ευθύς* δρόμος δεν είναι μια φυσική ευθεία, αλλά ένα μακρόστενο παραλληλόγραμμο. Ως προς τις ανθρώπινες διαστάσεις, και ιδίως ως προς τη διακριτική ικανότητα της όρασής μας, το επόμενο σχήμα είναι μια φυσική ευθεία. Το πλάτος της είναι περίπου 0,1mm.



Αν το μέσο μέγεθος του ανθρώπου ήταν χίλιες φορές μικρότερο και η διακριτική ικανότητα της όρασής του ανάλογα λεπτότερη, τότε το παραπάνω σχήμα δε θα θεωρούνταν ως μια φυσική ευθεία, αλλά και πάλι ως ένα μακρύ παραλληλόγραμμο. Σ’ αυτή τη φανταστική περίπτωση, το πλάτος μιας φυσικής ευθείας θα ήταν περίπου το ένα χιλιοστό του πλάτους της ευθείας *ε*, δηλαδή 0,1 μm.

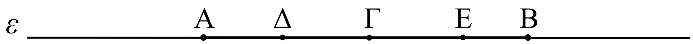
Σ’ ένα νοερό ταξίδι συνεχούς λέπτυνσης μιας φυσικής ευθείας το *όριο* είναι η *γεωμετρική* (η *ιδανική*) ευθεία. Αυτή δεν έχει πλάτος. Τα ιδανικά σημεία δεν καταλαμβάνουν χώρο και δε διακρίνονται το ένα μετά το άλλο. Το ακόλουθο σχήμα δεν αντιπροσωπεύει μια ευθεία:

Έτσι, αν *ε* είναι μια ιδανική[1] ευθεία και Α, Β δύο σημεία της, τότε δεν μπορούμε να τη φανταστούμε αλλιώς παρά μόνο να υπάρχουν ανάμεσα στα Α και Β κι άλλα σημεία της. Αυτή την αίσθηση την έχουμε, όσο κοντινά κι αν θεωρήσουμε πως είναι τα σημεία Α και Β.

Ας δεχτούμε, λοιπόν, πως ανάμεσα σε δύο τυχαία σημεία Α και Β μιας ευθείας *ε* υπάρχει τουλάχιστο ένα ακόμα σημείο της, έστω το Γ.

[1] Ενώ αναφερόμαστε σε ιδανικές ευθείες, στο χαρτί σημειώνουμε (κατ’ ανάγκην) φυσικές ευθείες. Αυτό είναι το *παιχνίδι* της Γεωμετρίας.

Όμως τότε πρέπει να δεχτούμε πως ανάμεσα στα σημεία Α και Γ υπάρχει τουλάχιστο ένα σημείο Δ της ευθείας ε. Και όμοια ανάμεσα στα σημεία Γ και Β υπάρχει τουλάχιστο ένα σημείο Ε.



Η διαδοχική πιστοποίηση της ύπαρξης όλο και περισσότερων σημείων ανάμεσα στα Α και Β δεν περατώνεται. Κι έτσι, αν δεχτούμε ότι

2.1 Αξίωμα ($\mathbf{A_9}$). *Ανάμεσα σε δύο σημεία μιας ευθείας υπάρχει τουλάχιστο ένα άλλο σημείο της,*

τότε προκύπτει ως συμπέρασμα ότι

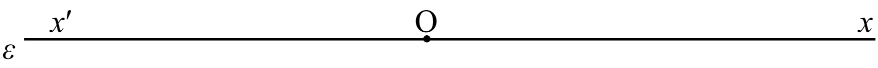
2.2 Πρόταση. *Ανάμεσα σε δύο σημεία μιας ευθείας υπάρχουν άπειρα σημεία της.*

Αν Α και Β είναι δύο σημεία και ε η ευθεία που διέρχεται απ' αυτά, τότε τα δύο αυτά σημεία μαζί με όλα τα άπειρα σημεία της ευθείας ε που βρίσκονται *ανάμεσά* τους συνιστούν το ***ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ***.

Τα σημεία Α και Β ονομάζονται ***άκρα*** του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, ενώ όλα τα άλλα σημεία του ονομάζονται ***εσωτερικά***. Το τμήμα[2] ΑΒ αναφέρεται και ως το τμήμα ΒΑ, δεν τίθεται θέμα προσανατολισμού. Αν Α και Β είναι δύο σημεία μιας ευθείας, τότε αυτή θα αναφέρεται και ως *η ευθεία ΑΒ*.

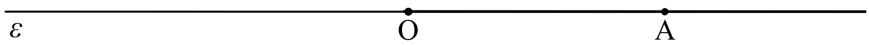
Κάθε σημείο μιας ευθείας την χωρίζει σε δύο μέρη. Αυτά αναφέρονται ως ***ημιευθείες*** με κοινή ***αρχή*** αυτό το σημείο.

Στο επόμενο σχήμα το σημείο Ο της ευθείας ε την χωρίζει στις ημιευθείες Οx και Οx'. Το Ο είναι το μόνο κοινό σημείο τους. Κάθε άλλο ανήκει είτε στην ημιευθεία Οx είτε στην ημιευθεία Οx'.

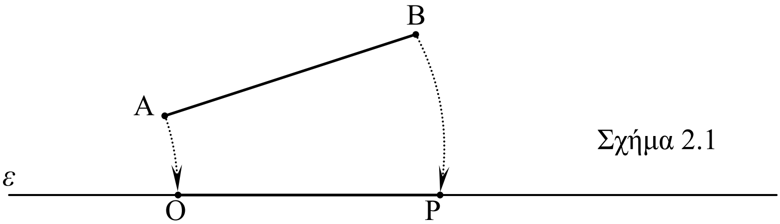


[2] Συχνά αντί να λέμε "το ευθύγραμμο τμήμα" θα λέμε απλά "το τμήμα".

Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα OA και ε η ευθεία που το περιέχει. Το σημείο A ανήκει σε μία από τις δύο ημιευθείες στις οποίες χωρίζεται η ε από το σημείο O. Συνεπώς, το ευθύγραμμο τμήμα OA ορίζει μία ημιευθεία με αρχή το σημείο O. Την ημιευθεία αυτή τη σημειώνουμε με OA ή με (O, A).



Είναι εύλογο να δεχτούμε ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα AB μπορεί να μετακινηθεί έτσι, ώστε να *εφαρμόσει* σε δοθείσα ευθεία ε και, επιπλέον, το ένα του άκρο να συμπέσει με προκαθορισμένο σημείο O αυτής της ευθείας. Τότε βέβαια το άλλο του άκρο θα συμπέσει μ' ένα δεύτερο σημείο της ευθείας ε, έστω το P.



Σχήμα 2.1

Τα τμήματα AB και OP τα θεωρούμε ίσα, γιατί το OP δεν είναι άλλο τμήμα παρά το ίδιο το AB σε άλλη θέση. Αυτή βέβαια η αιτιολόγηση προϋποθέτει ότι κατά τη μετακίνηση ενός ευθυγράμμου τμήματος από μια θέση σε άλλη αυτό δεν υφίσταται καμιά αλλοίωση. Ο φυσικός χώρος είναι *ομοιόμορφος* (ίδιος παντού), κι έτσι τίποτε δεν αλλάζει με την αλλαγή θέσης. Κατά την μετακίνηση των σωμάτων όλα τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά τους μένουν αναλλοίωτα.

Ωστόσο, δε συμβαίνει έτσι στην πραγματικότητα. Η βαρύτητα καμπυλώνει το χώρο, κι έτσι οι μετακινήσεις των σωμάτων επιφέρουν αλλοιώσεις στα γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά. Όμως, αυτές οι αλλοιώσεις για τα γήινα μεγέθη είναι τόσο μικρές που είναι μη ανιχνεύσιμες. Σε κάθε περίπτωση, όμως, για τα ιδανικά γεωμετρικά σχήματα θεωρούμε δεδομένη αυτή την ιδιότητα του ***αναλλοίωτου***.

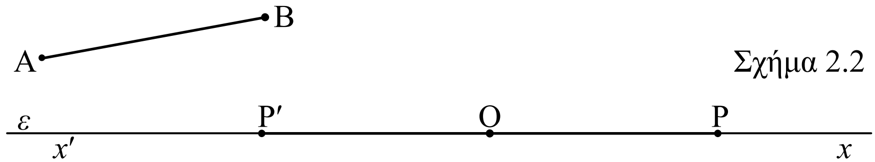
Θεωρούμε, λοιπόν, ότι

2.3 Ορισμός. *Δύο* ***ευθύγραμμα τμήματα*** *είναι* ***ίσα****, αν είναι δυνατόν μετακινούμενο το ένα να συμπέσει με το άλλο.*

Είναι φανερό πως, για να συμπέσουν δύο ευθύγραμμα τμήματα, πρέπει και αρκεί να συμπέσουν τα άκρα τους.

Την παραδοχή σχετικά με τη μετακίνηση και την ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων μπορούμε να τη διατυπώσουμε και με το εξής:

2.4 Αξίωμα (A_{10}). *Έστω Ox και Ox′ οι ημιευθείες στις οποίες χωρίζεται τυχούσα ευθεία ε από ένα σημείο της O. Για κάθε ευθύγραμμο τμήμα AB υπάρχει μοναδικό σημείο P της Ox και P′ της Ox′ έτσι, ώστε τα τμήματα OP και OP′ να είναι ίσα με το τμήμα AB.*



Σχήμα 2.2

$$OP' = AB = OP$$

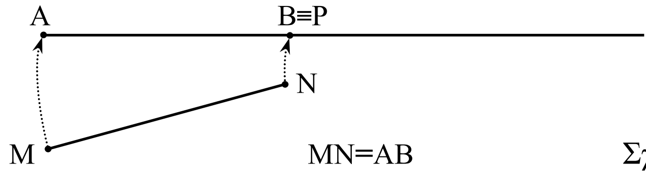
Έστω *ε* μια ευθεία και Α, Β, Γ τρία σημεία της με τη διάταξη που αναφέρονται (το Β μεταξύ των Α και Γ). Είναι εύλογο να θεωρήσουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι μικρότερο από το τμήμα ΑΓ ή αλλιώς ότι το ΑΓ είναι μεγαλύτερο του ΑΒ. Κι επίσης, έχει νόημα να ορίσουμε το τμήμα ΑΓ ως το ***άθροισμα*** των διαδοχικών τμημάτων ΑΒ και ΒΓ ή το τμήμα ΑΒ ως τη ***διαφορά*** του ΒΓ από το ΑΓ[3].

$$AB < A\Gamma \quad \text{ή} \quad A\Gamma > AB$$
$$AB + B\Gamma = A\Gamma \quad \text{ή} \quad A\Gamma - B\Gamma = AB$$

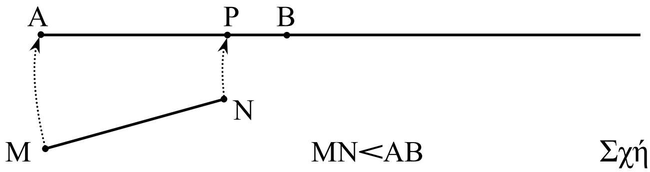
Έστω δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΜΝ. Στην ημιευθεία ΑΒ υπάρχει μοναδικό σημείο Ρ έτσι, ώστε ΜΝ=ΑΡ (Αξίωμα 2.4). Αν το Ρ συμπίπτει με το Β, τότε θα είναι ΜΝ=ΑΒ (Σχήμα 2.3α).

[3] Ανάλογα θα είναι ΒΓ<ΑΓ ή ΑΓ>ΒΓ και ΑΓ-ΑΒ=ΒΓ.

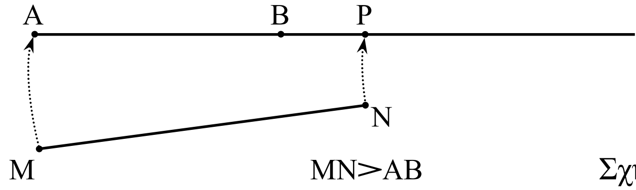
Αν το Ρ βρίσκεται μεταξύ των Α και Β, τότε θα είναι ΜΝ<ΑΒ (Σχήμα 2.3β). Κι αν, τέλος, το Β βρίσκεται μεταξύ των Α και Ρ, τότε θα είναι ΜΝ >ΑΒ (Σχήμα 2.3γ).



Σχήμα 2.3α



Σχήμα 2.3β



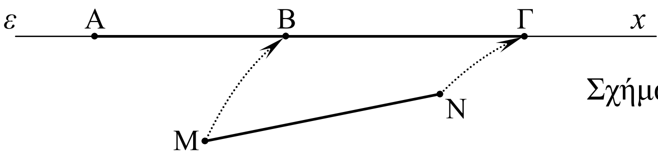
Σχήμα 2.3γ

Άρα*, πάντοτε δύο δοθέντα τμήματα ΑΒ και ΜΝ είναι συγκρίσιμα και το αποτέλεσμα της σύγκρισης οδηγεί σε μία από τις σχέσεις:*

i) ΑΒ=ΜΝ *ii)* ΑΒ < ΜΝ *iii)* ΑΒ > ΜΝ

Στις περιπτώσεις των Σχημάτων 2.3β και 2.3γ είναι φανερό αντίστοιχα ότι ΑΒ-ΜΝ=ΡΒ και ΜΝ-ΑΒ=ΒΡ. Άρα*, για κάθε ζεύγος άνισων ευθυγράμμων τμημάτων ορίζεται η διαφορά τους.*

Έστω πάλι δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΜΝ. Το τμήμα ΑΒ ορίζει μια ευθεία *ε* και το σημείο Β την χωρίζει σε δύο ημιευθείες. Ας ονομάσουμε Β*x* εκείνη που δεν περιέχει το σημείο Α. Στην ημιευθεία Β*x* υπάρχει μοναδικό σημείο Γ έτσι, ώστε ΜΝ=ΒΓ (Αξίωμα 2.4).



Σχήμα 2.4

Είναι φανερό ότι: ΑΒ+ΜΝ=ΑΓ. Συνεπώς*, για κάθε ζεύγος ευθυγράμμων τμημάτων ορίζεται το άθροισμα τους.*

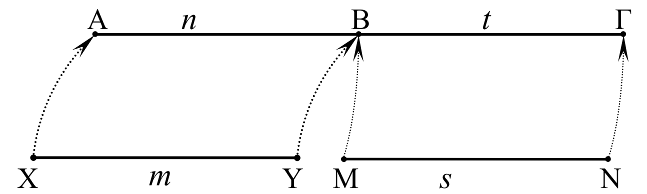
Οι σχέσεις ισότητας και ανισότητας και οι πράξεις πρόσθεσης και αφαίρεσης δύο ευθυγράμμων τμημάτων έχουν τις ιδιότητες που έχουν οι αντίστοιχες σχέσεις και πράξεις μεταξύ αριθμών. Οι περισσότερες απ’ αυτές τις ιδιότητες διατυπώνονται στην επόμενη πρόταση.

2.5 Πρόταση. *Αν m, n, s και t παριστάνουν ευθύγραμμα τμήματα, τότε ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:*

1. $m=n$ *και* $s=t \Rightarrow m+s=n+t$
2. $m=n$ *και* $s=t \Rightarrow m-s=n-t$
3. $m+n=n+m$
4. $(m+n)+s=m+(n+s)$
5. $m<n$ *και* $n<s \Rightarrow m<s$
6. $m<n$ *και* $s=t \Rightarrow m+s<n+t$
7. $m<n$ *και* $s<t \Rightarrow m+s<n+t$

Απόδειξη.

1. Γίνεται φανερή από το επόμενο σχήμα:

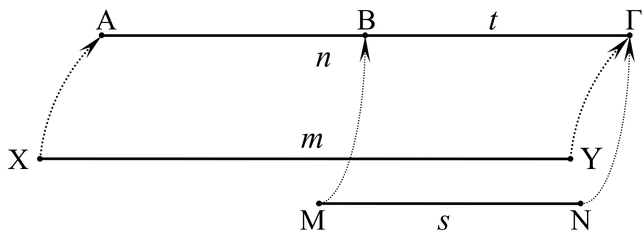


Σχήμα 2.5α

XY=AB και MN=BΓ $\Longrightarrow$ XY+MN=AB+BΓ

$(m=n$ *και* $s=t \Rightarrow m+s=n+t)$

2. Γίνεται φανερή από το επόμενο σχήμα:

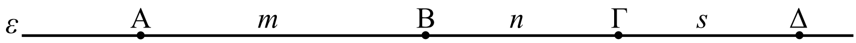


Σχήμα 2.5β

XY=AΓ και MN=BΓ $\Longrightarrow$ XY−MN=AΓ−BΓ

$(m=n$ *και* $s=t \Rightarrow m-s=n-t)$

3. Έστω ε μια ευθεία και A, B, Γ και Δ τέσσερα σημεία της τοποθετημένα με τη σειρά που αναφέρονται.



Επειδή κάθε τμήμα ΧΥ είναι το ίδιο (άρα ίσο) με το ΥΧ, θα είναι:

$$\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{\Gamma A}=\mathrm{\Gamma B}+\mathrm{BA}=\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{AB}.$$

$$(\ m+n=n+m\ )$$

4. Στο προηγούμενο σχήμα θα είναι:

$$(\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma})+\mathrm{\Gamma\Delta}=\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{\Gamma\Delta}=\mathrm{A\Delta}=\mathrm{AB}+\mathrm{B\Delta}=\mathrm{AB}+(\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{\Gamma\Delta})$$

$$\big((m+n)+s=m+(n+s)\big)$$

5. Επίσης, από το ίδιο σχήμα είναι φανερό ότι:

$$\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma} \text{ και } \mathrm{A\Gamma}<\mathrm{A\Delta} \;\Longrightarrow\; \mathrm{AB}<\mathrm{A\Delta}$$

$$(\ m<n \quad \textit{και} \ \ n<s \Rightarrow m<s)$$

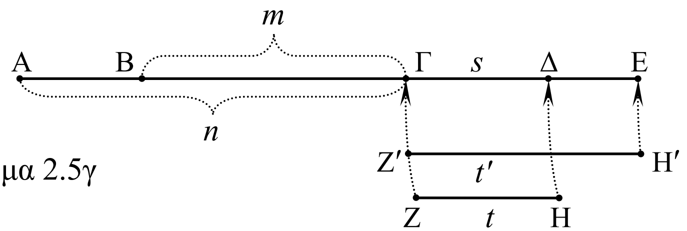
6. Στο σχήμα που ακολουθεί θα έχουμε

$$\mathrm{B\Gamma}<\mathrm{A\Gamma} \text{ και } \mathrm{\Gamma\Delta}=\mathrm{ZH} \;\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathrm{B\Gamma}+\mathrm{\Gamma\Delta}=\mathrm{B\Delta}<\mathrm{A\Delta}=\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{\Gamma\Delta}=\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{ZH}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{B\Gamma}+\mathrm{\Gamma\Delta}<\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{ZH}$$

$$(m<n \quad \textit{και} \ \ s=t \Rightarrow m+s<n+t)$$



Σχήμα 2.5γ

7. Τέλος, στο παραπάνω σχήμα θα είναι

$$\mathrm{B\Gamma}<\mathrm{A\Gamma} \text{ και } \mathrm{\Gamma\Delta}<\mathrm{Z'H'} \;\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathrm{B\Gamma}+\mathrm{\Gamma\Delta}<\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{\Gamma\Delta}=\mathrm{A\Delta}<\mathrm{AE}=\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{\Gamma E}=\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{Z'H'}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{B\Gamma}+\mathrm{\Gamma\Delta}<\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{Z'H'}$$

$$(m<n \quad \textit{και} \ \ s<t' \Rightarrow m+s<n+t')$$

Δύο σημεία Α και Β ορίζουν ένα τμήμα ΑΒ. Δύο τμήματα μπορεί είτε να είναι ίσα είτε το ένα να είναι μικρότερο του άλλου. Σε κάθε ζεύγος, λοιπόν, σημείων Α και Β *προσαρτάται* ένα μέγεθος, που αναφέρεται ως η ***απόσταση*** αυτών των σημείων ή ως το ***μήκος*** του τμήματος ΑΒ. *Δύο ευθύγραμμα τμήματα δεν διαφέρουν παρά μόνο ως προς το μήκος τους.* Είναι εύλογο να δεχτούμε ότι

2.6 Αξίωμα (A_{11}). *Δύο ευθύγραμμα τμήματα έχουν το ίδιο μήκος, αν και μόνον αν είναι ίσα. Άνισα ευθύγραμμα τμήματα έχουν ομοίως άνισα μήκη. Το μήκος του αθροίσματος (ή της διαφοράς) δύο τμημάτων είναι ίσο με το άθροισμα (ή τη διαφορά) των μηκών τους.*

Αν, λοιπόν, το μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ το συμβολίσουμε με (ΑΒ), τότε ισχύουν οι σχέσεις.

i) $(\mathrm{AB})=(\Gamma\Delta) \Leftrightarrow \mathrm{AB}=\Gamma\Delta$,

ii) $(\mathrm{AB})<(\Gamma\Delta) \Leftrightarrow \mathrm{AB}<\Gamma\Delta$,

iii) $(\mathrm{AB}\pm\Gamma\Delta)=(\mathrm{AB})\pm(\Gamma\Delta)$

Όπως είδαμε, δύο τμήματα είναι πάντοτε συγκρίσιμα. Ωστόσο, το να διακρίνουμε ανάμεσα σε δύο άνισα τμήματα απλά και μόνο ποιο είναι το μικρό και ποιο το μεγάλο δεν είναι ικανοποιητικό. Θα θέλαμε να γνωρίζουμε και πόσο πιο μεγάλο.

Ας δούμε αυτό το *πόσο* στην πιο απλή του μορφή.

Αν ΑΒ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, τότε επί της ημιευθείας (Α,Β) υπάρχει σημείο Γ έτσι, ώστε ΒΓ=ΑΒ (Αξίωμα 2.4).

Σύμφωνα μ’ όσα αναφέραμε, θα είναι

$$\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{AB}+\mathrm{AB},$$

οπότε,

$$(\mathrm{A\Gamma})=(\mathrm{AB}+\mathrm{AB})=(\mathrm{AB})+(\mathrm{AB})=2(\mathrm{AB}),$$

δηλαδή, το μήκος του τμήματος ΑΓ είναι διπλάσιο του μήκους του τμήματος ΑΒ.

Λέμε, λοιπόν, πως αν λάβουμε ως ***μονάδα μέτρησης*** το τμήμα ΑΒ, τότε το ***μήκος*** του τμήματος ΑΓ είναι 2. Σημειώνουμε

$$\text{ΑΓ}=2\cdot\text{ΑΒ} \quad \text{και} \quad (\text{ΑΓ})=2\,(\text{ΑΒ})$$

ή ισοδύναμα

$$\text{ΑΒ}=\frac{1}{2}\cdot\text{ΑΓ} \quad \text{και} \quad (\text{ΑΒ})=\frac{1}{2}(\text{ΑΓ}).$$

Ανάλογα, αν το τμήμα ΜΝ είναι το άθροισμα ν προσθετέων ίσων με το τμήμα ΑΒ,

$$\text{ΜΝ}=\underbrace{\text{ΑΒ}+\text{ΑΒ}+\ldots+\text{ΑΒ}}_{\nu\text{-φορές}},$$

τότε λέμε πως με ***μονάδα μέτρησης*** το τμήμα ΑΒ το ***μήκος*** του τμήματος ΜΝ είναι ν. Σημειώνουμε:

$$\text{ΜΝ}=\nu\cdot\text{ΑΒ} \quad \text{και} \quad (\text{ΜΝ})=\nu(\text{ΑΒ})$$

ή ισοδύναμα

$$\text{ΑΒ}=\frac{1}{\nu}\cdot\text{ΜΝ} \quad \text{και} \quad (\text{ΑΒ})=\frac{1}{\nu}(\text{ΜΝ})$$

2.7 Ορισμός. *Το **γινόμενο** $\nu\cdot$ΑΒ ενός φυσικού αριθμού ν επί ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι το τμήμα που προκύπτει ως άθροισμα ν προσθετέων ίσων με το τμήμα ΑΒ:*

$$\nu\cdot\text{ΑΒ}=\underbrace{\text{ΑΒ}+\text{ΑΒ}+\ldots+\text{ΑΒ}}_{\nu\text{-φορές}}$$

2.8 Πρόταση. Για κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών μ και ν και για τυχόντα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ ισχύουν οι σχέσεις:

i. $1\cdot\text{ΑΒ}=\text{ΑΒ}$

ii. $(\mu+\nu)\cdot\text{ΑΒ}=\mu\cdot\text{ΑΒ}+\nu\cdot\text{ΑΒ}$

iii. $\nu\cdot(\text{ΑΒ}+\text{ΓΔ})=\nu\cdot\text{ΑΒ}+\nu\cdot\text{ΓΔ}$

iv. $\mu\cdot(\nu\cdot\text{ΑΒ})=(\mu\nu)\cdot\text{ΑΒ}$

Απόδειξη. Απλή.♦

Εκτενέστερη μελέτη της έννοιας του μήκους ευθυγράμμων τμημάτων θα γίνει στην §11.

Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και Μ ένα εσωτερικό του σημείο. Αν τα δύο τμήματα ΑΜ και ΜΒ είναι ίσα, ΑΜ=ΜΒ, τότε το σημείο Μ πρέπει να ονομαστεί ***μέσο*** του τμήματος ΑΒ.

Θα δούμε αργότερα ότι

"*Κάθε ευθύγραμμο τμήμα έχει μέσο*"[4]

Ωστόσο, μπορούμε από τώρα ν' αποδείξουμε ότι

2.9 Πρόταση. *Ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει το πολύ ένα μέσο.*

Απόδειξη. Ας δεχτούμε, αντίθετα, ότι υπάρχει κάποιο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που έχει δύο μέσα, έστω τα Μ και Ν. Αν το Μ κείται μεταξύ των Α και Ν[5], θα είναι ΑΜ$<$ΑΝ.

Οπότε,

$$AB=AM+MB=AM+AM\overset{6}{<}AN+AN=AN+NB=AB,$$

δηλαδή ΑΒ$<$ΑΒ, κι αυτό είναι άτοπο.♦

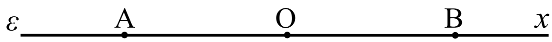
---

[4] Στη συνέχεια - και κυρίως στις ασκήσεις - θα αναφερόμαστε στο μέσο ενός ευθυγράμμου τμήματος, πριν αποδείξουμε ότι πράγματι κάθε τμήμα έχει μέσο. Αυτή η ασυνέπεια μπορεί να εξουδετερωθεί, αν σιωπηρά εννοούμε: "*…το μέσο του τμήματος…, με την προϋπόθεση ότι αυτό υπάρχει, ...*".

[5] Αφού τα Μ και Ν βρίσκονται μεταξύ των Α και Β, τότε υποχρεωτικά είτε το Μ είναι μεταξύ των Α και Ν είτε το Ν είναι μεταξύ των Α και Μ. Αυτός ο ισχυρισμός θα έπρεπε να προστεθεί στα αξιώματα. Όμως, κάποια αξιώματα θα τα δεχτούμε σιωπηρά, θα μας επιβάλλονται απλά από το σχήμα. Το αξίωμα αυτό, το οποίο αφορά τη σχετική θέση σημείων πάνω σε μια ευθεία γραμμή, είναι ένα από τα ονομαζόμενα ***αξιώματα διάταξης***. Ο Ευκλείδης δεν απαίτησε τέτοια αξιώματα, αλλά η απουσία τους έγινε αισθητή μόλις τον 19^{ο} αιώνα. Γι αυτό και σ' ένα βιβλίο Γεωμετρίας που στοχεύει κυρίως στη διαισθητική-κι όχι στην απόλυτα αυστηρήπαρουσίαση των εννοιών είναι θεμιτό κάποια αξιώματα να γίνονται δεκτά με σιωπηρό τρόπο (=*να επιβάλλονται από το σχήμα*), όπως σιωπηρά επίσης έγιναν δεκτά από τον Ευκλείδη και στη συνέχεια επί αιώνες.

[6] Γίνεται χρήση της ιδιότητας 7 της Πρότασης 2.5.

Έστω Α και Ο δύο σημεία, ε η ευθεία την οποία ορίζουν και Οx η ημιευθεία που δεν περιέχει το Α. Σύμφωνα με το Αξίωμα 2.4, επί της ημιευθείας Οx υπάρχει σημείο Β έτσι, ώστε ΑΟ=ΟΒ. Το σημείο Β ονομάζεται ***συμμετρικό*** του Α ως προς το Ο και, αντίστροφα, το Α συμμετρικό του Β.



2.10 Πρόταση. *Ως προς δοθέν σημείο Ο, για κάθε σημείο Α≠Ο υπάρχει μοναδικό συμμετρικό του σημείο Β.*

Απόδειξη. Η ύπαρξη ενός συμμετρικού του σημείου Α τεκμηριώθηκε παραπάνω ως συνέπεια του Αξιώματος 2.4. Έστω Β, λοιπόν, ένα συμμετρικό σημείο του Α ως προς το Ο. Θα δείξουμε ότι αυτό είναι και το μοναδικό.

Πράγματι, για κάθε σημείο Γ≠Β της ημιευθείας (Ο,Β) θα είναι είτε ΟΓ<ΟΒ=ΟΑ (όταν το Γ είναι μεταξύ των Ο και Β) είτε ΟΓ>ΟΒ=ΟΑ (όταν το Β είναι μεταξύ των Ο και Γ). Συνεπώς, δεν υπάρχει άλλο συμμετρικό του Α ως προς το Ο.♦

Προβλήματα - Ασκήσεις

2.1 Έστω Α, Β, Γ και Δ τέσσερα σημεία μιας ευθείας τοποθετημένα στη σειρά που αναφέρονται και Μ το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΔ. Αποδείξτε ότι "το Μ είναι μέσο και του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ, αν και μόνον αν ΑΒ=ΓΔ".

2.2 Έστω Α, Β, Γ και Δ τέσσερα σημεία μιας ευθείας τοποθετημένα στη σειρά που αναφέρονται. Αποδείξτε ότι ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

i) $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow A\Gamma = B\Delta$

ii) $AB < \Gamma\Delta \Leftrightarrow A\Gamma < B\Delta$

iii) $A\Gamma + B\Delta = A\Delta + B\Gamma$

2.3 Έστω Α, Β, Γ και Δ τέσσερα σημεία μιας ευθείας τοποθετημένα έτσι, ώστε το Β να κείται μεταξύ των Α και Γ και το Γ μεταξύ των Α και Δ. Αποδείξτε ότι το Γ κείται μεταξύ των Β και Δ.

2.4 Έστω Α και Β δύο σημεία μιας ευθείας ε, Μ το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και Ρ ένα σημείο της ε εξωτερικό του ΑΒ. Αποδείξτε ότι

$$2 \cdot PM = PA + PB$$

2.5 Έστω Α και Β δύο σημεία μιας ευθείας ε, Μ το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και Q ένα σημείο του τμήματος ΜΒ. Αποδείξτε ότι

$$2 \cdot QM = QA - QB$$

2.6 Έστω ΑΒ ένα ευθύγραμμο τμήμα και Ρ ένα εσωτερικό του σημείο έτσι, ώστε $AP < PB$. Αποδείξτε ότι $2 \cdot AP < AB$.