Αθανάσιος Χαλάτσης

# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

- Σύνολα - Συναρτήσεις
- Θεωρία Αριθμών

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η αριθμητική είναι το βασικό αντικείμενο της διδασκαλίας των μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο. Κι αυτό είναι αυτονόητο, γιατί η αρχή των μαθηματικών είναι η αριθμητική. Έτσι, η φοιτήτρια ή ο φοιτητής του Παιδαγωγικού Τμήματος, η αυριανή δασκάλα ή ο δάσκαλος, θα διδάξουν και αριθμητική.

Είναι γνωστό ότι στην πλειονότητά τους οι φοιτητές και οι φοιτήτριες των Παιδαγωγικών Τμημάτων ως μαθητές είχαν περιορισμένη επαφή με τα μαθηματικά. Κι ακόμα, η εκτίμηση που τρέφουν για τα μαθηματικά ή η γνώμη που έχουν για τον εαυτό τους ως προς τη δυνατότητά τους να ασχοληθούν μ’ αυτά πολύ απέχει από το χαρακτηριστεί θετική. Όλη αυτή η κατάσταση ίσως είναι πιο πολύ μια προκατάληψη παρά κάτι το εντελώς αντικειμενικό. Ωστόσο, δεν παύει να είναι κάτι το αρνητικό.

Από τα παραπάνω δεδομένα καταλήγω στην άποψη πως οι φοιτήτριες και οι φοιτητές των Παιδαγωγικών Τμημάτων πρέπει να διδαχθούν ένα μάθημα αριθμητικής. Και μέσα απ' αυτή τη διδασκαλία να μυηθούν κατά το δυνατό σε πρότυπα μαθηματικής σκέψης.

Φιλοδοξώ το παρόν βιβλίο να παίξει σωστά το ρόλο ενός βοηθήματος για τον παραπάνω σκοπό.

Είναι γενικά αποδεκτό ότι αυτός που θα διδάξει μαθηματικά, τα οποιαδήποτε μαθηματικά, πρέπει πρωτύτερα να έχει εμπλακεί ο ίδιος σ’ ένα είδος *μαθηματικής περιπέτειας*. Ο αυριανός δάσκαλος πρέπει κατά κάποιο τρόπο να έχει *παίξει* με τα μαθηματικά, κι όχι απλώς να έχει μάθει κάποια μαθηματικά.

Αυτό, όμως, είναι κυρίως ένα καθήκον της διδασκαλίας των μαθηματικών. Ένα βιβλίο, δηλαδή, ένα βοήθημα αυτής της διδασκαλίας, είναι απλά και μόνο ένα βοήθημα για να επιτευχθεί ένας τέτοιος φιλόδοξος στόχος. Έτσι, δεν πιστεύω πως αυτό το μικρό βιβλίο από μόνο του μπορεί να κάνει κάποιο θαύμα.

Το κύριο μέρος του περιεχομένου του βιβλίου είναι το δεύτερο κεφάλαιο, το οποίο θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως μια εισαγωγή στη Στοιχειώδη Θεωρία Αριθμών. Μελετάται η πολλαπλασιαστική δομή των φυσικών αριθμών, τονίζεται η σημασία και η ιδιαιτερότητα των πρώτων αριθμών και αποδεικνύεται το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην περιγραφή του συστήματος αρίθμησης που χρησιμοποιούμε σήμερα. Ακολουθεί μελέτη απλών διοφαντικών εξισώσεων, κι επίσης μία αναφορά στους δεκαδικούς αριθμούς.

Το πρώτο κεφάλαιο περιλαμβάνει λίγα στοιχεία από τη θεωρία συνόλων. Μετά την αποτυχία της μεταρρύθμισης των μοντέρνων μαθηματικών, στη διάρκεια της οποίας (δεκαετία του 60 και αργότερα) έγιναν υπερβολές στη διδασκαλία των συνόλων στα σχολεία, φτάσαμε σήμερα στο σημείο να μην αναφέρεται στα σχολικά εγχειρίδια ούτε μία φορά η λέξη *σύνολο*. Θεωρώντας πως αυτό είναι μία υπερβολή από την άλλη πλευρά, περιέλαβα στο βιβλίο κάποια στοιχεία σχετικά με τα σύνολα, τονίζοντας ιδιαίτερα την έννοια της "1-1" συνάρτησης.

Οι αποδείξεις των προτάσεων έχουν κατά το δυνατό περισσότερο διαισθητική παρά φορμαλιστική μορφή. Την κάθε παράγραφο ακολουθούν ασκήσεις και προβλήματα. Η άσκηση και το πρόβλημα διαφέρουν κατά το ότι η πρώτη είναι σχεδόν φανερό από τη προηγηθείσα θεωρία πώς θα λυθεί, ενώ για το πρόβλημα δε φαίνεται εξ αρχής μία πορεία λύσης· κάποια επινόηση είναι πάντοτε απαραίτητη.

Τέλος, θέτω ως προϋπόθεση ότι ο αναγνώστης έχει μια στοιχειώδη εξοικείωση με τα μαθηματικά που διδάσκονται ως και την πρώτη τάξη του Λυκείου.

# Περιεχόμενα

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ I

## ΣΥΝΟΛΑ–ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

### *Εισαγωγή*

Η θεωρία συνόλων είναι απλά ένα κομμάτι των μαθηματικών, αλλά η χρήση της ορολογίας της είναι γενική σ' όλη την έκτασή τους. Όμως, το να εκφράζεσαι στα μαθηματικά με τη γλώσσα των συνόλων είναι ένας τρόπος του λέγειν· είναι βολικό και χρήσιμο, αλλά όχι και απόλυτα απαραίτητο.

Μπορούμε να πούμε ότι

*"το σύνολο των κύκνων είναι υποσύνολο του συνόλου των πουλιών",*

αλλά κάλλιστα μπορούμε επίσης να πούμε ότι

*"οι κύκνοι είναι πουλιά".*

Και μάλιστα, στο παράδειγμα αυτό φαίνεται λίγο αστεία η χρήση της ορολογίας των συνόλων.

Θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς αν στα σχολικά μαθηματικά θα ήταν χρήσιμο να κάνουμε χρήση της ορολογίας των συνόλων. Η απάντηση είναι "και γιατί όχι;". Ίσως ορθότερο θα ήταν να πούμε "ναι στη χρήση" αλλά "όχι στην κατάχρηση".

Ομιλώ για "χρήση" και "κατάχρηση" της ορολογίας των συνόλων, γιατί υπάρχει ιστορία στο θέμα, στην οποία θα αναφερθώ αμέσως με λίγα λόγια.

Στις αρχές της δεκαετίας του 60, έλαβε χώρα μια παγκόσμιας έκτασης μεταρρύθμιση στα σχολικά μαθηματικά, η αναφερόμενη ως μεταρρύθμιση των "μοντέρνων μαθηματικών". Ένα από τα κυρίαρχα στοιχεία σ' αυτή τη μεταρρύθμιση ήταν και η εισαγωγή της γλώσσας των συνόλων στα σχολικά εγχειρίδια.

Κατά γενική ομολογία, η μεταρρύθμιση εκείνη ήταν μια μεγάλη αποτυχία. Μια από τις αιτίες της αποτυχίας της ήταν και το γεγονός ότι η ορολογία της θεωρίας συνόλων από εργαλείο για τη διδασκαλία των μαθηματικών μετατράπηκε σε αντικείμενο διδασκαλίας, πολλές φορές μάλιστα με παραμορφωτικές συνέπειες.

Ο Morris Kline, εξέχων μαθηματικός κι ένας από τους πολέμιους αυτής της μεταρρύθμισης, αρχίζει το περίφημο βιβλίο του *"Γιατί δεν μπορεί να κάνει πρόσθεση ο Γιάννης"* με την εξής περιγραφή:

Ας ρίξουμε μια ματιά σε μια τάξη, όπου διδάσκονται μοντέρνα μαθηματικά. Η δασκάλα ρωτάει:

*"Γιατί 2+3=3+2;"*

Χωρίς να διστάσουν, οι μαθητές απαντούν:

*"Διότι και τα δύο είναι ίσα με το 5".*

"Όχι", τους απαντά επιτιμητικά η δασκάλα, "η σωστή απάντηση είναι: διότι ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης". Η επόμενη ερώτηση είναι:

*"Γιατί 9+2=11;"*

Και πάλι οι μαθητές αποκρίνονται αμέσως:

*"9 και 1 κάνουν 10, και 1 ακόμη κάνουν 11".*

"Λάθος", αναφωνεί η δασκάλα, "η σωστή απάντηση είναι ότι, από τον ορισμό του 2, 9+2=9+(1+1). Αλλά επειδή ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης, 9+(1+1)=(9+1)+1. Έτσι, λοιπόν, 9+1=10 και 10+1=11, από τον ορισμό του 11."

Προφανώς η τάξη δεν τα πηγαίνει καλά, και γι αυτό η δασκάλα δοκιμάζει μια απλούστερη ερώτηση:

*"Είναι ο 7 αριθμός;"*

Οι μαθητές, σαστισμένοι από την απλότητα της ερώτησης, ούτε που κρίνουν σκόπιμο να δώσουν απάντηση. Μα η απλή συνήθεια της υπακοής τους σπρώχνει να δώσουν καταφατική απάντηση. Η δασκάλα τα χάνει, και αναφωνεί:

*"Αν σας ρωτούσα ποιοι είστε, τι θα μου λέγατε;"*

Οι μαθητές είναι τώρα επιφυλακτικοί και δεν απαντούν. Αλλά ένας, πιο θαρραλέος, δίνει την απάντηση:

*"Είμαι ο Σπύρος Παπαγιάννης".*

Η δασκάλα φαίνεται να μη πιστεύει στα' αυτιά της και λεει επιτιμητικά: "Θέλεις να πεις ότι είσαι το όνομα "Σπύρος Παπαγιάννης"; Και βέβαια όχι. Είσαι ένας άνθρωπος και το όνομά σου είναι Σπύρος Παπαγιάννης. Ας ξαναγυρίσουμε τώρα στην αρχική ερώτηση. Είναι το 7 αριθμός; Όχι, βέβαια. Είναι το όνομα ενός αριθμού. Τα 5+2, 6+1 ή και 8−1 είναι ονόματα του ίδιου αριθμού.

………………………………………………………………………
………………………………………………………………………

Έτσι διδάσκονται οι μαθητές τη χρήση των συνόλων και, υποτίθεται, την ακριβολογία.

Αυτό το σκηνικό, αν και ακραίο, αντιπροσωπεύει το πνεύμα εκείνης της μεταρρύθμισης, κι έτσι δείχνει ανάγλυφα γιατί δεν πήγαν καλά τα πράγματα.

Όταν, όμως, μετά από χρόνια έγινε καθολικά παραδεκτό ότι η μεταρρύθμιση των μοντέρνων μαθηματικών ήταν μια αποτυχία, τότε φτάσαμε στο άλλο άκρο. Στα σχολικά εγχειρίδια δεν αναφέρονταν ούτε μια φορά ο όρος σύνολο.

Η γλώσσα της θεωρίας συνόλων, όπως αναφέραμε, είναι βολική και χρήσιμη, χωρίς όμως να μπορεί να χαρακτηριστεί ως απαραίτητη για τα σχολικά μαθηματικά, και ιδίως για την αριθμητική και τη γεωμετρία του δημοτικού σχολείου. Έτσι, ίσως πάντα θα μπαίνει το ερώτημα αν θα ήταν σκόπιμο οι μαθητές να γνωρίζουν λίγα στοιχεία για τα σύνολα. Αυτό, όμως, είναι ένα ερώτημα που αφορά τους μαθητές. Για το δάσκαλο δεν υπάρχει αμφιβολία· επιλέγουμε τη γνώση.

Αρχίζω, λοιπόν, το βιβλίο αυτό, το οποίο τιτλοφορείται ως "Αριθμητική", με πολύ λίγα στοιχεία από τη θεωρία συνόλων, θέλοντας κυρίως να παρουσιάσω την έννοια της *"1-1" συνάρτησης*, μιαν έννοια άμεσα συνδεδεμένη με την έννοια του *αριθμού*.

Κατά τα άλλα, λίγα και απλά στοιχεία περί συνόλων είναι για όλους ένα διαισθητικά εύληπτο υλικό, και συνεπώς ένα ευχάριστο αντικείμενο πνευματικής απασχόλησης.

# § 1. Σύνολα

## *1α. Η έννοια του συνόλου.*

*i)* ***Σύνολο*** *είναι μια συλλογή από αντικείμενα, θεωρούμενη ως κάτι το ενιαίο· θεωρούμενη, δηλαδή, η ίδια ως ένα νέο αντικείμενο.*

Οι φυσικοί αριθμοί, τα φωνήεντα της αλφαβήτου, τα κράτη της Ευρώπης, τα χρώματα της ίριδας, τα βιβλία σε μια βιβλιοθήκη, κλπ, είναι παραδείγματα συνόλων. Αναφερόμαστε σ' αυτά με τις φράσεις:

"το σύνολο των φυσικών αριθμών",

"το σύνολο των φωνηέντων της αλφαβήτου"

"το σύνολο των κρατών της Ευρώπης", κλπ…

*ii)* *Τα αντικείμενα από τα οποία αποτελείται ένα σύνολο τα ονομάζουμε* ***στοιχεία*** *του συνόλου.*

Τα γράμματα α, ε, η, ι, ο, υ και ω είναι τα στοιχεία του συνόλου "των φωνηέντων της αλφαβήτου". Το κόκκινο, το πράσινο και το κίτρινο είναι μερικά από τα στοιχεία του συνόλου "των χρωμάτων της ίριδας".

Όταν το πλήθος των στοιχείων από τα οποία αποτελείται ένα σύνολο είναι μικρό, τότε συνηθίζουμε να το παριστάνουμε *αναγράφοντας* τα σύμβολα των στοιχείων του ανάμεσα σε άγκιστρα, και χωρίζοντάς τα με κόμματα. Για το συμβολισμό των συνόλων χρησιμοποιούμε συνήθως κεφαλαία γράμματα, ενώ για το συμβολισμό των στοιχείων μικρά. Αν συμβολίσουμε με Φ το σύνολο των φωνηέντων και με Μ το σύνολο των μονοψήφιων αριθμών, τότε αυτά παριστάνονται ως εξής:

$$\Phi = \{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\}$$

και

$$M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Φυσικά, η σειρά με την οποία αναγράφονται τα στοιχεία δεν έχει σημασία. Έτσι, θα μπορούσαμε να γράψουμε λ.χ.

$$Φ = \{α, ω, η, ο, υ, ε, ι\}$$

και

$$Μ = \{5, 0, 6, 2, 3, 4, 9, 7, 8, 1\}.$$

Η παράσταση των συνόλων με την αναγραφή των στοιχείων τους είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί και σε περιπτώσεις που το πλήθος των στοιχείων του συνόλου είναι μεγάλο ή ακόμα και άπειρο. Αν δε δημιουργείται ασάφεια, αναγράφουμε μερικά από τα στοιχεία του συνόλου και χρησιμοποιούμε τρεις τελείες, (. . .), για να υπονοήσουμε τα υπόλοιπα. Παραδείγματος χάριν, το σύνολο των γραμμάτων της αλφαβήτου μπορεί να παρασταθεί ως εξής:

$$Α = \{α, β, γ, \ldots, ω\}$$

Τα σύνολα των φυσικών και των ακέραιων αριθμών, τα οποία συμβολίζονται αντίστοιχα με τα γράμματα **N** και **Z**, παριστάνονται ως εξής:

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\} \quad \text{και} \quad \mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Κατά κανόνα, τα στοιχεία ενός συνόλου έχουν μια *διακριτή κοινή ιδιότητα.* Φυσικά, αυτό δεν είναι απαραίτητο. Όμως, σύνολα των οποίων τα στοιχεία δεν έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό, δεν παρουσιάζουν ενδιαφέρον. Τα σύνολα που ήδη αναφέραμε, αλλά και άλλα που θα φέρναμε εύκολα στο νου μας, διατυπώνονται με την κοινή ιδιότητα των στοιχείων τους.

Η τυπική παράσταση ενός συνόλου Α με αναφορά στη χαρακτηριστική ιδιότητα των στοιχείων του είναι η εξής:

$$A = \{\, x : x \text{ έχει την ιδιότητα } P \,\}$$

Τα σύνολα Φ, Μ, **N** και **Z**, που αναφέραμε στα προηγούμενα, παριστάνονται:

Φ = { x: x είναι φωνήεν της αλφάβητου },

Μ = { x: x είναι μονοψήφιος φυσικός αριθμός },

**N** = { x: x είναι φυσικός αριθμός },

**Z** = { x: x είναι ακέραιος αριθμός }.

Το γράμμα x παριστάνει το τυχαίο στοιχείο του συνόλου. Διαβάζουμε: "Φ ίσον το σύνολο όλων των x, όπου x είναι φωνήεν της αλφάβητου".

Αν *A* είναι ένα σύνολο και *x* ένα στοιχείο του, τότε λέμε ότι

*"το x ανήκει στο A"*

ή ότι

*" το A περιέχει το x"*

και σημειώνουμε

$"x \in A"$.

Αν το *y* δεν είναι στοιχείο του *A*, τότε λέμε ότι

*"το y δεν ανήκει στο A"*

ή ότι

*"το A δεν περιέχει το y"*

και σημειώνουμε

$"y \notin A"$.

Αν θέλουμε να σημειώσουμε ότι τα δύο στοιχεία *x* και *y* ανήκουν στο σύνολο *A*, τότε γράφουμε

$"x, y \in A"$.

Είδαμε πως ένα σύνολο χαρακτηρίζεται από την κοινή ιδιότητα που έχουν τα στοιχεία του. Είναι, βέβαια, αυτονόητο ότι αυτή η ιδιότητα πρέπει να είναι τέτοια, ώστε αν δοθεί ένα αντικείμενο, τότε να είναι απόλυτα σαφές αν αυτό ανήκει ή όχι στο σύνολο. Ειδάλλως, το σύνολο δε μπορεί να θεωρηθεί σωστά ορισμένο.

Θα μπορούσαμε λ.χ. να θεωρήσουμε το σύνολο των βιβλίων μιας συγκεκριμένης βιβλιοθήκης σε μια ορισμένη στιγμή. Το σύνολο αυτό είναι σαφώς ορισμένο. Ένα βιβλίο, σε μια ορισμένη στιγμή, είτε βρίσκεται σ' αυτή τη βιβλιοθήκη είτε όχι.

Αν όμως αναφερθούμε στα βιβλία της ίδιας βιβλιοθήκης τα οποία θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως *ενδιαφέροντα*, τότε τα πράγματα διαφέρουν. Προφανώς θα υπάρξουν βιβλία για το οποία δεν θα ήταν δυνατό να αποφασίσουμε αναντίρρητα για το αν ανήκουν ή όχι στο θεωρούμενο σύνολο.

Τα ίδια θα λέγαμε, κι αν θεωρούσαμε το σύνολο όλων των *μικρών* φυσικών αριθμών. Ο αριθμός 12, π.χ., είναι μικρός ή όχι; Κι αν αυτός είναι, τότε τι θα λέγαμε για τον 93; Είναι φανερό πως δεν μπορεί να καθοριστεί *ο μεγαλύτερος από τους μικρούς αριθμούς*, δηλαδή, κάποιος αριθμός, λ.χ. ο α, που να είναι μικρός, ενώ ο επόμενός του, ο (α+1), να μην είναι μικρός. Φυσικά, μπορούμε να κάνουμε τη σύμβαση να ονομάσουμε μικρούς, λ.χ., μόνο τους μονοψήφιους αριθμούς. Τότε, όμως, η ιδιότητα *μικρός αριθμός* ταυτίζεται με τη σαφή ιδιότητα *μονοψήφιος αριθμός*, κι επομένως αίρεται η ασάφεια.

Κάθε σύνολο, λοιπόν, με τη μαθηματική έννοια του όρου πρέπει να έχει την ακόλουθη ιδιότητα:

*iii)* *"Αν Α είναι ένα σύνολο, τότε για κάθε ένα αντικείμενο α είναι δυνατό ν' αποφασίσουμε εάν* $\alpha \in A$ *ή* $\alpha \notin A$*".*

Ένα σύνολο, λοιπόν, στα μαθηματικά είναι, όπως συνήθως λέμε, "*καλά ορισμένο*", δεν είναι δυνατόν, δηλαδή, να υπάρχει ασάφεια για το αν κάποιο στοιχείο ανήκει ή όχι σ' αυτό. Ένα κλασσικό στη βιβλιογραφία παράδειγμα όχι καλά ορισμένου συνόλου είναι το εξής: "Ας υποθέσουμε ότι σ' ένα χωριό ο κουρέας ξυρίζει όλους τους κατοίκους που δεν ξυρίζονται μοναχοί τους. Έστω το σύνολο

*Α = {y: y είναι κάτοικος του χωριού που τον ξυρίζει ο κουρέας}*"

Ο ίδιος ο κουρέας ανήκει ή όχι στο σύνολο αυτό; Εξετάστε το.

Κάθε σύνολο προσδιορίζεται από τα στοιχεία του, κι επομένως δύο σύνολα με τα ίδια στοιχεία θεωρούνται *ίσα*. Τα σύνολα λ.χ.

$$X = \{0,1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{και} \quad Y = \{y: y\in\mathbf{N} \text{ και } y \leq 5\}$$

είναι ίσα, X=Y. Πρόκειται, δηλαδή, για δύο διαφορετικούς συμβολισμούς, και φυσικά για δύο διαφορετικές περιγραφές, ενός και του ίδιου συνόλου.

**1.1 Ορισμός:** *Δύο σύνολα A και B θα λέμε ότι είναι ίσα, A=B, αν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Αν δύο σύνολα A και B δεν είναι ίσα, σημειώνουμε A≠B.*

Αν και με τον όρο σύνολο στην καθημερινή γλώσσα εννοούμε μια συλλογή από δύο ή περισσότερα αντικείμενα, στα μαθηματικά είναι επιτρεπτό να θεωρούμε και σύνολα με ένα μόνο στοιχείο. Βεβαίως, δεν πρέπει να συγχέεται το σύνολο που περιέχει ένα μόνο στοιχείο, ένα *μονοσύνολο*, μ' αυτό το ίδιο το στοιχείο. Το σύνολο, λ.χ., {3} και ο αριθμός 3 είναι δύο διαφορετικά πράγματα.

Είναι χρήσιμο, και δε δημιουργεί αντιφάσεις, να θεωρήσουμε κι ένα σύνολο που δεν έχει στοιχεία. Το σύνολο αυτό θα το ονομάζουμε ***κενό*** και θα το σημειώνουμε με το σύμβολο ∅ ή με το σύμβολο { }. Κάθε αντιφατική ιδιότητα μπορεί να περιγράψει το κενό σύνολο. Π.χ.,

$$\varnothing = \{ x: x\neq x \}$$

ή

$$\varnothing = \{ x: x \text{ ακέραιος αριθμός και } x^2<0 \}.$$

## *1β. Υποσύνολα.*

Ας θεωρήσουμε τα δύο σύνολα

$$M = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$$

και

$$\Pi = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}.$$

Παρατηρούμε ότι όλα τα στοιχεία του συνόλου Π είναι και στοιχεία του συνόλου Μ. Κατά κάποιο τρόπο το σύνολο Π είναι ένα τμήμα του συνόλου Μ. Το γεγονός αυτό το εκφράζουμε, λέγοντας ότι το Π είναι *υποσύνολο* του Μ.

**1.2 Ορισμός:** *Ένα σύνολο A θα λέμε ότι είναι* ***υποσύνολο*** *ενός συνόλου B, και θα σημειώνουμε $A\subseteq B$, αν κάθε στοιχείο του A είναι επίσης στοιχείο και του B.*

$$A\subseteq B \;\Leftrightarrow^{1}\; (\ \forall x:\ \text{αν } x\in A,\ \text{τότε } x\in B\ )^{2}.$$

Είναι φανερό πως ένα σύνολο Α δεν θα είναι υποσύνολο ενός συνόλου Β, όταν υπάρχει τουλάχιστο ένα στοιχείο του συνόλου Α το οποίο δεν είναι στοιχείο του συνόλου Β. Στην περίπτωση αυτή σημειώνουμε $A\not\subset B$. Θα έχουμε, λοιπόν,

$$A\not\subset B \;\Leftrightarrow\; (\ \exists x:\ x\in A \ \text{ και } \ x\notin B\ )^{3}$$

Παραδείγματα:

$$M = \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \subseteq \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbf{N}$$

$$\{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\} \subseteq \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \psi, \omega\}$$

$$\{0, 1, 3, 5\} \not\subset \{1, 3, 5, 7, 9\},$$

$$\{1\} \not\subset \{2, 3, 4, 5\},$$

$$\{1\} \not\subset \varnothing$$

---

1 Το σύμβολο $\Leftrightarrow$ αντικαθιστά τη φράση "τότε και μόνον τότε"

2 Το σύμβολο $\forall$ αντικαθιστά τη φράση "για κάθε" ή "για όλα".

3 Το σύμβολο $\exists$ αντικαθιστά τη φράση "υπάρχει τουλάχιστο ένα"

Από τους ορισμούς 1.1 και 1.2 γίνεται αμέσως φανερό ότι

α. *Δύο σύνολα είναι ίσα, αν και μόνον αν το καθένα τους είναι υποσύνολο του άλλου.*

$$A=B \iff (A \subseteq B \ \text{ και } \ B \subseteq A)$$

Ακόμη, από τον ορισμό 1.2 προκύπτουν και τα ακόλουθα:

β. *Κάθε σύνολο είναι υποσύνολο του εαυτού του. Κι επίσης, το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε (άλλου) συνόλου.*

$$\forall A: \ A \subseteq A \quad \text{και} \quad \varnothing \subseteq A$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, πως

*"Κάθε σύνολο διάφορο του κενού έχει τουλάχιστο δύο υποσύνολα, το κενό και τον εαυτό του. Το κενό σύνολο έχει μόνον ένα υποσύνολο, τον εαυτό του".*

γ. *Αν Α, Β και Γ είναι σύνολα, ώστε $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε θα είναι και $A \subseteq \Gamma$:*

$$A \subseteq B \ \text{ και } \ B \subseteq \Gamma \Rightarrow A \subseteq \Gamma$$

Αν το σύνολο Α είναι υποσύνολο του συνόλου Β και $A \neq B$, τότε λέμε ότι το Α είναι ένα *γνήσιο υποσύνολο* του Β. Αυτό συμβαίνει, όταν όλα τα στοιχεία του Α είναι επίσης και στοιχεία του Β αλλά υπάρχει τουλάχιστο ένα στοιχείο του Β που δεν είναι στοιχείο του Α. Στην περίπτωση αυτή σημειώνουμε $A \subset B$. Θα έχουμε, δηλαδή,

$$A \subset B \iff (A \subseteq B \ \text{ και } \ A \neq B)$$

ή αναλυτικότερα,

$$A \subset B \iff (\ \forall x: \text{αν } x \in A, \text{ τότε } x \in B\ ) \text{ και } (\ \exists y \in B, \text{ αλλά } y \notin A\ )$$

Με άλλα λόγια, ισχύει

$$A \subseteq B \iff (A \subset B \ \text{ ή } \ A=B).$$

Παραδείγματα:

$\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ και $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$.

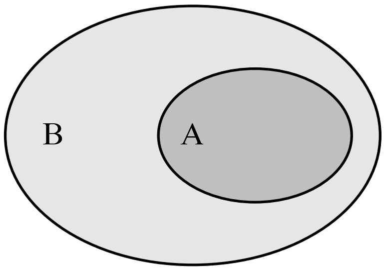
$\{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\} \subset \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \psi, \omega\}$.

Είναι, ακόμα, φανερό πως

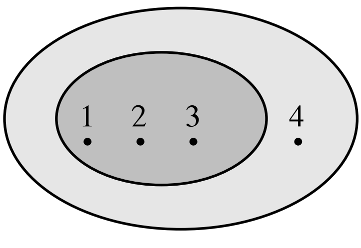
δ. *"Το κενό σύνολο είναι γνήσιο υποσύνολο κάθε άλλου συνόλου"*

$$\forall A \neq \varnothing, \quad \varnothing \subset A.$$

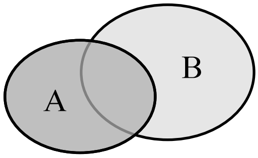
Μια αρκετά έξυπνη ιδέα είναι να παριστάνουμε τα σύνολα ως κλειστές περιοχές σ' ένα επίπεδο. Στην περίπτωση που είναι γνωστά τα στοιχεία ενός συνόλου και, επιπλέον, είναι σχετικώς λίγα, τότε τα σημειώνουμε με τελείες μέσα στην περιοχή που παριστάνει το σύνολο. Δύο σύνολα Α και Β, για τα οποία το μόνο που γνωρίζουμε είναι ότι $A \subset B$, είναι πολύ βολικό να τα σημειώσουμε ως εξής:



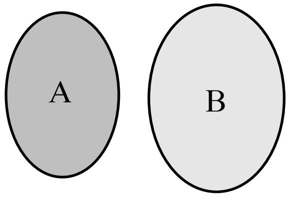

Η σχέση $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ θα μπορούσε να παρασταθεί ως εξής:



Σε κάθε μια από τις ακόλουθες παραστάσεις μπορούμε αμέσως να συμπεράνουμε ότι $A \not\subset B$:




$A \not\subset B$




$A \not\subset B$

Οι παραστάσεις συνόλων με την παραπάνω μορφή ονομάζονται *διαγράμματα του Venn.*

Το κενό σύνολο, όπως είπαμε, έχει ως μόνο υποσύνολό του τον εαυτό του. Ένα σύνολο με ένα μόνο στοιχείο, λ.χ. το $\{\alpha\}$, έχει δύο υποσύνολα: το $\varnothing$ και τον εαυτό του. Το σύνολο $\{\alpha,\beta\}$ έχει τέσσερα υποσύνολα: το $\varnothing$, το $\{\alpha\}$, το $\{\beta\}$ και φυσικά το ίδιο το $\{\alpha,\beta\}$.

Τα στοιχεία ενός συνόλου μπορεί να είναι οποιαδήποτε αντικείμενα, κι επομένως να είναι και σύνολα. Έτσι, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το σύνολο

$$\{ \varnothing, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\alpha,\beta\} \},$$

δηλαδή, το σύνολο όλων των υποσυνόλων του συνόλου $\{\alpha,\beta\}$. Αυτή η σκέψη μπορεί φυσικά να γίνει για κάθε σύνολο, δηλαδή, για κάθε σύνολο μπορούμε να θεωρούμε το σύνολο των υποσυνόλων του.

Αν Α είναι ένα σύνολο, τότε το σύνολο των υποσυνόλων του το παριστάνουμε με P(A) και το ονομάζουμε *δυναμοσύνολο* του Α. Έτσι,

$$P(\varnothing) = \left\{ \varnothing \right\}$$

$$P(\{\alpha\}) = \left\{\varnothing, \{\alpha\}\right\}$$

$$P(\{\alpha,\beta\}) = \left\{ \varnothing, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\alpha,\beta\} \right\}$$

$$P(\{\alpha,\beta,\gamma\}) = \left\{ \varnothing, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha,\beta\}, \{\alpha,\gamma\}, \{\beta,\gamma\}, \{\alpha,\beta,\gamma\} \right\}.$$

Στα παραδείγματα αυτά παρατηρούμε την εξής αντιστοιχία ανάμεσα στο πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου και στο πλήθος των υποσυνόλων του:

| πλήθος στοιχείων | πλήθος υποσυνόλων |
|---|---|
| 0 | $1 = 2^0$ |
| 1 | $2 = 2^1$ |
| 2 | $4 = 2^2$ |
| 3 | $8 = 2^3$ |

Η παρατήρηση αυτή εισηγείται την εικασία πως ένα σύνολο με ν στοιχεία θα έχει $2^\nu$ υποσύνολα. Κι αυτό θα είναι όντως αληθινό, αν κάθε φορά που αυξάνουμε κατά ένα το πλήθος των στοιχείων, διπλασιάζεται το πλήθος των υποσυνόλων. Έτσι, ένα σύνολο με τέσσερα στοιχεία θα πρέπει να έχει $2\cdot 2^3 = 2^4$ υποσύνολα, ένα με 5 στοιχεία θα πρέπει να έχει $2\cdot 2^4 = 2^5$ στοιχεία κ.ο.κ.

Πράγματι έτσι συμβαίνει, και για να το δούμε ας θεωρήσουμε τα σύνολα

$$A_\kappa = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa\}$$

και

$$B = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa, x\}.$$

Κατ' αρχήν τα υποσύνολα του Β μπορούν να χωριστούν σε δύο ανεξάρτητες ομάδες: σ' εκείνα που περιέχουν το στοιχείο $x$, και σ' εκείνα που δεν το περιέχουν. Είναι φανερό πως εκείνα τα υποσύνολα του Β που δεν περιέχουν το $x$ είναι ακριβώς τα υποσύνολα του Α. Επιπλέον, αν σ' όλα αυτά τα υποσύνολα προσθέσω και το στοιχείο $x$, τότε θα πάρω *άλλα τόσα* υποσύνολα του Β, που είναι ακριβώς τα υποσύνολα της δεύτερης ομάδας. Έτσι, τα υποσύνολα του Β είναι ακριβώς διπλάσια των υποσυνόλων του Α.

## *1γ. Τομή συνόλων.*

Έστω

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$$

και

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 \}.$$

Παρατηρούμε ότι τα δύο σύνολα Α και Β έχουν κάποια κοινά στοιχεία, τα 1, 3, 5, 7 και 9. Το σύνολο όλων αυτών των στοιχείων αποτελεί ένα νέο σύνολο, το οποίο καθορίζεται από τα σύνολα Α και Β. Το σύνολο αυτό ονομάζεται *τομή* των Α και Β και σημειώνεται με το σύμβολο $A \cap B$.

**1.3 Ορισμός:** *Η **τομή** δύο συνόλων Α και Β σημειώνεται με το σύμβολο $A \cap B$, και είναι το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν και στο Α και στο Β.*

$$A \cap B = \{ x \colon x \in A \ \text{ και } \ x \in B \}$$

*ή αλλιώς*

$$x \in A \cap B \ \Leftrightarrow \ x \in A \ \text{ και } \ x \in B.$$

Η λέξη κλειδί στον ορισμό της τομής δύο συνόλων είναι ο σύνδεσμος "*και*". Η τομή τριών ή περισσοτέρων συνόλων ορίζεται ανάλογα. Π.χ.

$$A \cap B \cap \Gamma = \{ x \colon x \in A \ \text{ και } \ x \in B \ \text{ και } \ x \in \Gamma \}$$

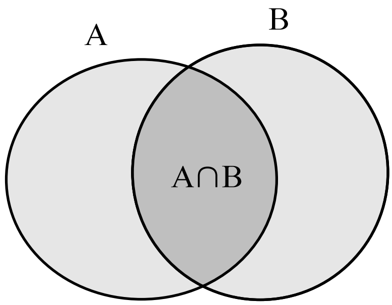
Ενδέχεται δύο σύνολα να μην έχουν κανένα κοινό στοιχείο, όπως λ.χ. τα

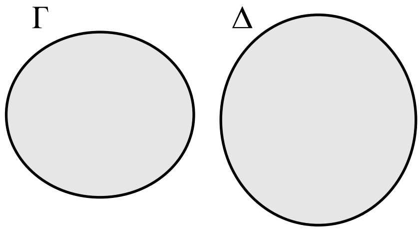
$$X = \{1, 2, 3, 4, 5 \} \quad \text{και} \quad Y = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta\}.$$

Τότε, φυσικά, η τομή τους δεν θα έχει στοιχεία, κι επομένως θα είναι το κενό σύνολο. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι τα σύνολα είναι ***ξένα μεταξύ τους***.

$$A \text{ και } B \text{ ξένα μεταξύ τους} \ \Leftrightarrow \ A \cap B = \varnothing$$

Παρακάτω δίνεται η τομή δύο συνόλων Α∩Β με διαγράμματα του Venn.




$\Gamma \cap \Delta = \varnothing$

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι για δύο δοθέντα σύνολα Α και Β ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

i. $A \cap B = B \cap A$

*ii.* $A \cap \varnothing = \varnothing$

*iii.* $A \cap B \subseteq A$ *και* $A \cap B \subseteq B$

*iv.* $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

Οι τρεις πρώτες σχέσεις προκύπτουν αμέσως από τον ορισμό της τομής δύο συνόλων και τον ορισμό του υποσυνόλου. Ας αποδείξουμε την τέταρτη σχέση. Πρέπει, όμως, πρώτα να κάνουμε μια εισαγωγή στον τρόπο με τον οποίο αποδεικνύουμε την ισχύ κάποιων σχέσεων μεταξύ συνόλων.

Κάθε τέτοια σχέση ανάγεται είτε σε ισότητα δύο συνόλων, $A=B$, είτε σε σχέση υποσυνόλου, $A\subseteq B$. Αλλά και η σχέση της ισότητας ανάγεται σε δύο σχέσεις υποσυνόλου

$$A = B \Leftrightarrow A\subseteq B \quad \textit{και} \quad B\subseteq A.$$

Έτσι, η όλη αποδεικτική διαδικασία θα είναι να βεβαιώνουμε σχέσεις υποσυνόλου, ν' αποδεικνύουμε, δηλαδή, ότι κάποιο σύνολο είναι υποσύνολο ενός άλλου συνόλου. Εξ ορισμού, όμως,

$$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x\text{: } \textit{αν } x\in A, \textit{ τότε } x\in B.$$

Έτσι, για ν' αποδείξουμε ότι $A\subseteq B$, αρκεί να υποθέσουμε ότι κάποιο στοιχείο x ανήκει στο A, και στη συνέχεια ν' αποδείξουμε ότι αυτό ανήκει και στο B.

Ας αποδείξουμε τώρα τη σχέση

$$iv\text{:} \quad A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap B = A.$$

Κατ' αρχήν αυτή αποτελείται από δύο σκέλη:

$$iv_\alpha\text{:} \quad A\subseteq B \Rightarrow^4 A\cap B = A$$

και

$$iv_\beta\text{:} \quad A\cap B = A \Rightarrow A\subseteq B.$$

*Απόδειξη της* $iv_\alpha$*:* Υποθέτουμε ότι $A\subseteq B$. Προκειμένου να δείξουμε ότι $A\cap B=A$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$A\cap B\subseteq A \quad \text{και} \quad A\subseteq A\cap B.$$

Η πρώτη σχέση είναι προφανής, αφού εξ ορισμού κάθε στοιχείο της τομής $A\cap B$ είναι και στοιχείο του A (και συγχρόνως του B).

Για να δείξουμε τη δεύτερη σχέση, ας υποθέσουμε ότι το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο A. Από την υπόθεση ότι $A\subseteq B$ συμπεραίνουμε ότι το x ανήκει και στο B, κι επομένως ανήκει στην τομή τους $A\cap B$.

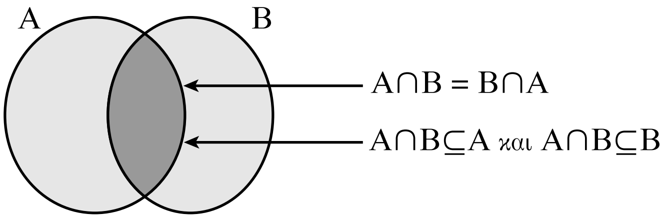
---

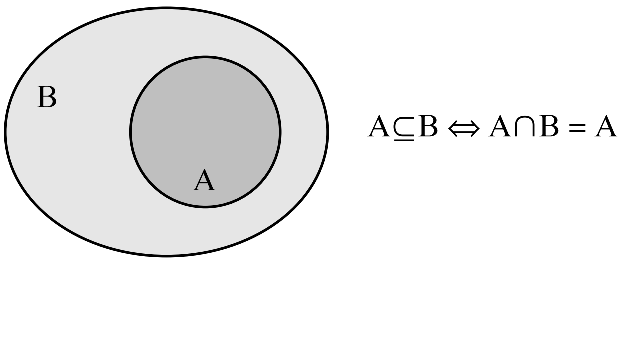
4 Το σύμβολο $\Rightarrow$ αντικαθιστά τη φράση "συνεπάγεται".

Κάθε στοιχείο, λοιπόν, του Α ανήκει και στη τομή Α∩Β, συνεπώς Α⊆Α∩Β. Κι επειδή ισχύει και Α∩Β⊆Α, θα είναι Α∩Β=Α. ♦

*Απόδειξη της ιν$_β$:* Υποθέτουμε ότι Α∩Β=Α. Θα δείξουμε ότι Α⊆Β. Πράγματι, αν x είναι ένα στοιχείο του Α, τότε από την ισότητα Α∩Β=Α συμπεραίνουμε ότι το x ανήκει στην τομή Α∩Β, συνεπώς ανήκει και στο Β. Άρα, κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β, δηλαδή, Α⊆Β. ♦

Η ισχύς των προτάσεων i., iii. και iv. γίνεται αμέσως φανερή από τα αντίστοιχα διαγράμματα του Venn, ενώ η ii είναι άμεσα φανερή:



## *1δ. Ένωση συνόλων.*

Είδαμε ότι αν δοθούν δύο σύνολα Α και Β, τότε σχηματίζουμε ένα τρίτο, την τομή τους $A \cap B$. Όπως ακριβώς αν δοθούν δύο αριθμοί α και β, τότε σχηματίζουμε έναν τρίτο, λ.χ., το γινόμενό τους αβ. Η τομή συνόλων είναι μια πράξη μεταξύ συνόλων, όπως ο πολλαπλασιασμός ή η πρόσθεση είναι πράξεις μεταξύ αριθμών. Μια άλλη πράξη μεταξύ συνόλων είναι η *ένωση συνόλων*.

Ας θεωρήσουμε τα σύνολα

$A = \{ 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12 \}$ και $B = \{ 1, 3, 6, 9, 12, 15, 18 \}$.

Το σύνολο

$$A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18 \},$$

το οποίο περιέχει όλα τα στοιχεία που ανήκουν στο Α και όλα τα στοιχεία που ανήκουν στο Β και κανένα παραπάνω, ονομάζεται *ένωση των συνόλων Α και Β.*

Τα κοινά στοιχεία των δύο συνόλων Α και Β μέσα στην ένωση $A \cup B$ σημειώθηκαν μία φορά και όχι δύο, διότι δεν έχει νόημα να γράφουμε δύο φορές το ίδιο στοιχείο. Κι αν ακόμα γραφεί ένα στοιχείο δύο φορές, δεν αλλάζει τίποτε, π.χ., $\{1, 2, 2\} = \{1, 2\}$.

**1.4 Ορισμός:** *Η* ***ένωση*** *δύο συνόλων Α και Β σημειώνεται με το σύμβολο $A \cup B$, και περιέχει ακριβώς όλα τα στοιχεία που ανήκουν είτε στο Α είτε στο Β, χωρίς να αποκλείεται να ανήκουν και στο Α και στο Β.*

$$A \cup B = \{ x : x \in A \ \text{ή} \ x \in B \}$$

*ή αλλιώς*

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \ \text{ή} \ x \in B.$$

Η λέξη κλειδί στον ορισμό της ένωσης δύο συνόλων είναι το διαζευκτικό *"ή"*. Η ένωση τριών ή και περισσότερων συνόλων ορίζεται ανάλογα. Η ένωση, λ.χ.,

$$A \cup B \cup \Gamma = \{ x: \ x \in A \ \text{ή} \ x \in B \ \text{ή} \ x \in \Gamma \}$$

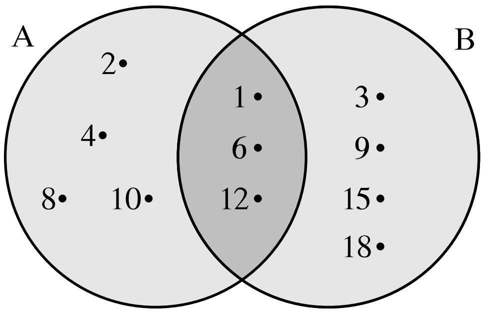
Το διάγραμμα Venn για την ένωση των δύο συνόλων

$$A = \{1, 2, 4, ,6, 8, 10, 12 \}$$

και

$$B = \{1, 3, 6, 12, 15, 18 \}$$

είναι το εξής




$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 15, 18 \}$$

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι για δύο δοθέντα σύνολα A και B ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

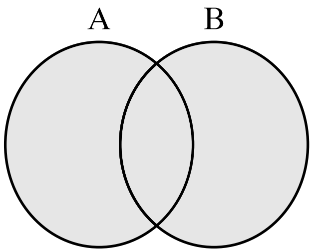
i. $A \cup B = B \cup A$

ii. $A \cup \varnothing = A$

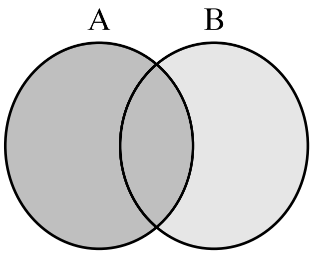
iii. $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$

iv. $A \subseteq B \ \Leftrightarrow \ A \cup B = B$

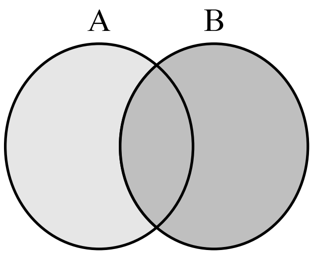
Η ισχύς των σχέσεων i. iii. και iv. γίνεται φανερή από τα αντίστοιχα διαγράμματα του Venn, ενώ η ii. είναι άμεσα φανερή.



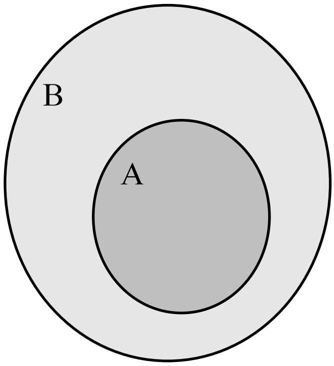

$A \cup B = B \cup A$




$A \subseteq A \cup B$




$B \subseteq A \cup B$




$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

## *1ε. Διαφορά συνόλων.*

Μια τρίτη πράξη μεταξύ συνόλων είναι η *διαφορά συνόλων,* η οποία ορίζεται ως εξής:

**1.5 Ορισμός:** *Η* ***διαφορά*** *δύο συνόλων A και B σημειώνεται με το σύμβολο A–B και είναι το σύνολο των στοιχείων του A που δεν ανήκουν στο B.*

$$A - B = \{\, x : x \in A \ \text{ και } x \notin B \,\}$$

Αν

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \} \quad \text{και} \quad B = \{0, 4, 8, 12, 16 \},$$

τότε

$$A - B = \{ 1, 2, 3, 5, 6, 7 \} \quad \text{και} \quad B - A = \{ 0, 12, 16 \}$$

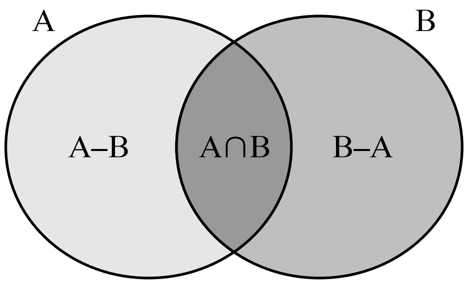
Αν, ακόμα,

$$\Gamma = \{ 10, 20, 30 , 40 \},$$

τότε

$$A - \Gamma = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \} = A.$$

Στο ακόλουθο διάγραμμα του Venn σημειώνονται οι διαφορές συνόλων A−B και B−A, καθώς και η τομή $A \cap B$.



Παρατηρούμε πως η ένωση $A \cup B$ χωρίζεται σε τρία σύνολα, τα οποία ανά δύο είναι ξένα μεταξύ τους. Ισχύουν, δηλαδή, οι ακόλουθες σχέσεις:

$1_{\alpha.}$ $(A-B)\cap(B-A) = \varnothing$

$1_{\beta.}$ $(A-B)\cap(A\cap B) = \varnothing$

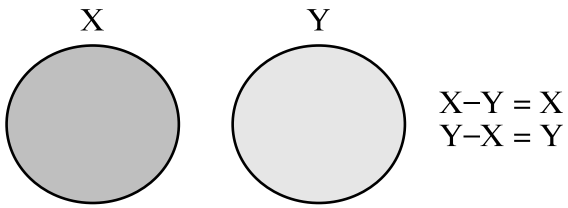
$1_{\gamma.}$ $(B-A)\cap(A\cap B) = \varnothing$

2. $(A-B) \cup (A\cap B) \cup (B-A) = A\cup B$

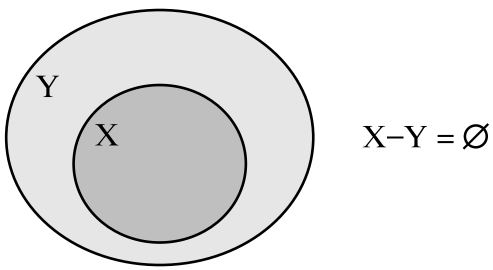
Από τα αντίστοιχα διαγράμματα του Venn, που ακολουθούν, γίνεται φανερό ότι ισχύουν οι σχέσεις:

α. $X\cap Y = \varnothing \;\Rightarrow\; (X-Y = X \quad \textit{και} \quad Y-X = Y)$

β. $X\subseteq Y \;\Rightarrow\; X-Y = \varnothing$

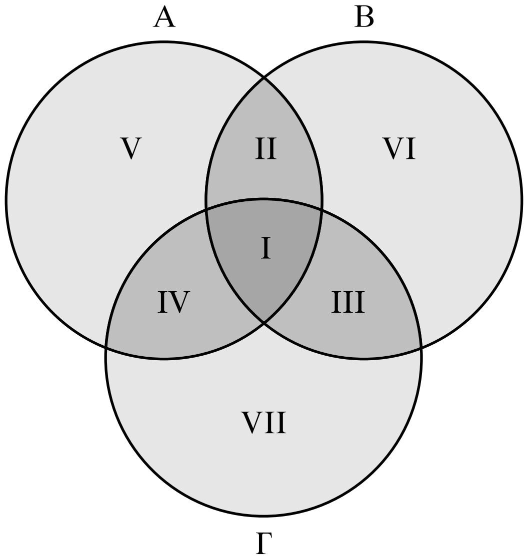



$X\cap Y = \varnothing$




$X\subseteq Y$

Ας θεωρήσουμε τώρα τρία σύνολα Α, Β και Γ τα οποία ανά δύο δεν είναι ξένα μεταξύ τους. Τότε το διάγραμμα του Venn γι αυτά θα έχει τη μορφή




Βλέπουμε ότι σχηματίζονται επτά διαφορετικές περιοχές, οι οποίες περιγράφονται ως εξής:

I ° $Α\capΒ\capΓ$

II ° $Α\capΒ-Γ$

III ° $Β\capΓ-Α$

IV ° $Α\capΓ-Β$

V ° $Α-(Β\cupΓ)$

VI ° $Β-(Α\cupΓ)$

VII ° $Γ-(Α\cupΒ)$

## *1ς. Καρτεσιανό γινόμενο.*

Ένα ζευγάρι παπούτσια αποτελείται από δύο χωριστά μεταξύ τους αντικείμενα. Θεωρούνται όμως και τα δύο μαζί ως κάτι το ενιαίο. Ακόμη, καθένα από τα δύο αυτά αντικείμενα έχει το δικό του ρόλο, αριστερό και δεξί· δεν είναι άνευ σημασίας αυτή η διάκριση.

Ένα ζευγάρι παπούτσια στη γλώσσα της θεωρίας συνόλων είναι ένα *διατεταγμένο ζεύγος*. Αν συμβολίζαμε με $\alpha$ το αριστερό και με $\delta$ το δεξί, τότε το ζευγάρι θα το συμβολίζαμε με $(\alpha,\delta)$.

**1.6 Ορισμός:** *Έστω x και y δύο οποιαδήποτε αντικείμενα, όχι κατ' ανάγκη διάφορα μεταξύ τους. Το νέο αντικείμενο που προκύπτει, όταν θεωρούμε τα x και y ως κάτι το ενιαίο, και με τη συνθήκη το x να είναι πρώτο και το y δεύτερο, το ονομάζουμε* ***διατεταγμένο ζεύγος*** *και το συμβολίζουμε με (x,y). Τα x και y ονομάζονται στοιχεία του ζεύγους (x,y).*

Το διατεταγμένο ζεύγος (α,β) είναι κάτι διαφορετικό από το σύνολο {α,β}, διότι

$$\{\alpha,\beta\} = \{\beta,\alpha\}, \quad \forall\ \alpha,\beta$$

ενώ

$$(\alpha,\beta) \neq (\beta,\alpha), \quad \text{όταν } \alpha\neq\beta.$$

Η ισότητα για τα διατεταγμένα ζεύγη δίνεται από τη σχέση

$$(x,y) = (\alpha,\beta) \quad \Leftrightarrow \quad x=\alpha \text{ και } y=\beta.$$

Έτσι,

$$(x,y) = (y,x) \quad \Leftrightarrow \quad x=y.$$

Στην έννοια του διατεταγμένου ζεύγους το ουσιαστικό είναι το ότι αποτελείται από δύο στοιχεία, και το ότι είναι καθορισμένο ποιο απ' αυτά είναι πρώτο και ποιο είναι δεύτερο.

Ο τρόπος με τον οποίο συμβολίζουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος είναι άνευ σημασίας. Έτσι, αντί να το σημειώνουμε με (α,β) θα μπορούσαμε να το γράφουμε με α<β ή με αβ, ή όπως αλλιώς η εικόνα θα αντανακλούσε τη σημασία του. Οι ακέραιοι αριθμοί, λ.χ., μπορούν να θεωρηθούν ως διατεταγμένα ζεύγη με πρώτο στοιχείο το πρόσημο και δεύτερο την απόλυτη τιμή: +5, –3, +11 κλπ.. Στο συνήθη συμβολισμό των διατεταγμένων ζευγών θα γράφαμε (+,5), (–,3) κλπ.

Θα μπορούσαμε να σχηματίζουμε διατεταγμένα ζεύγη, παίρνοντας το πρώτο στοιχείο από ένα σύνολο Α και το δεύτερο από ένα σύνολο Β. Π.χ. Αν

$$A = \{ \alpha, \beta \} \quad \text{και} \quad B = \{ 1, 2, 3 \},$$

τότε μπορούμε να σχηματίσουμε τα ζεύγη

$$(\alpha,1),\ (\alpha,2),\ (\alpha,3),\ (\beta,1),\ (\beta,2)\ \text{και}\ (\beta,3),$$

κι αυτά είναι όλα τα δυνατά διατεταγμένα ζεύγη που μπορούμε να σχηματίσουμε μ' αυτή τη μέθοδο. Δηλαδή, πρόκειται για όλα τα διατεταγμένα ζεύγη με πρώτο στοιχείο παρμένο από το σύνολο Α και δεύτερο από το σύνολο Β. Το σύνολο όλων αυτών των ζευγών ονομάζεται *καρτεσιανό*[5] *γινόμενο* των συνόλων Α και Β, και σημειώνεται με το σύμβολο ΑxΒ.

**1.7 Ορισμός:** *Δοθέντων δύο συνόλων Α και Β, το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (α,β), με* $\alpha \in A$ *και* $\beta \in B$*, ονομάζεται* ***καρτεσιανό γινόμενο*** *του Α επί το Β, και σημειώνεται με το σύμβολο ΑxΒ.*

$$AxB = \{ (\alpha,\beta):\ \alpha \in A\ \text{και}\ \beta \in B \}.$$

5 Από το όνομα του μεγάλου Γάλλου μαθηματικού και φιλόσοφου Καρτέσιου (Descartes, 1596-1650), στον οποίο οφείλεται η αντίστοιχη ιδέα.

Ας θεωρήσουμε τους ακέραιους αριθμούς ως διατεταγμένα ζεύγη, κατά τον τρόπο που περιγράψαμε προηγουμένως. Κι ας συμβολίσουμε με Ε το σύνολο {+,–}. Τότε είναι προφανές ότι το σύνολο **Z** των ακέραιων αριθμών είναι το καρτεσιανό γινόμενο του Ε επί το σύνολο **N** των φυσικών αριθμών: **Z** = Ex**N**.

Είναι φανερό ότι

$$A \, x \, \varnothing = \varnothing \, x \, A = \varnothing.$$

Επειδή δε

$$(\alpha,\beta) \neq (\beta,\alpha), \quad \text{εκτός εάν } \alpha=\beta,$$

θα είναι και

$$AxB \neq BxA, \quad \text{όταν } A\neq B \text{ και } A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing.$$

Ανάλογα προς το διατεταγμένο ζεύγος μπορούμε να θεωρήσουμε και διατεταγμένες τριάδες, τετράδες κ.ο.κ. Αν α, β και γ είναι τρία αντικείμενα (όχι κατ' ανάγκη διάφορα μεταξύ τους), τότε με (α,β,γ) συμβολίζουμε τη διατεταγμένη τριάδα, η οποία αποτελείται από τα στοιχεία α, β και γ με τη σειρά που αναφέρονται. Αν τώρα Α , Β και Γ είναι τρία σύνολα, τότε το σύνολο των διατεταγμένων τριάδων (α,β,γ) με α∈Α, β∈Β και γ∈Γ είναι το καρτεσιανό γινόμενο των Α, Β και Γ με τη σειρά που αναφέρονται, και συμβολίζεται με ΑxΒxΓ. Με ανάλογο τρόπο ορίζονται διατεταγμένες τετράδες, πεντάδες κλπ.

Αν Α = {1,2} και Β = {α,β}

$$AxA = \{(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2)\},$$

$$AxAxA = \{(1,1,1),\ (1,1,2),\ (1,2,1),\ (1,2,2),\ (2,1,1),\ (2,1,2),\ (2,2,1),\ (2,2,2)\},$$

$$AxB = \{(1,\alpha), (1,\beta), (2,\alpha), (2,\beta)\},$$

AxBxB = $\{(1,\alpha,\alpha),\ (1,\alpha,\beta),\ (1,\beta,\alpha),\ (1,\beta,\beta),\ (2,\alpha,\alpha),\ (2,\alpha,\beta),\ (2,\beta,\alpha),\ (2,\beta,\beta)\}$.

Συνήθως γράφουμε $A^2$ αντί για AxA, $A^3$ αντί για AxAxA, κλπ.

## Ασκήσεις και Προβλήματα

I.1.1 Ποιες από τις ακόλουθες σχέσεις είναι αληθείς και ποιες όχι;

α) $\varnothing \in \varnothing$ β) $\varnothing \subseteq \varnothing$

γ) $\varnothing = \{\varnothing\}$ δ) $\varnothing = \{0\}$

ε) $\varnothing = 0$ ζ) $\varnothing \in \{0\}$

η) $\varnothing \in \{\varnothing\}$ θ) $\varnothing \subseteq \{0\}$

I.1.2 Αν $A = \{\ 2,\ 7,\ 8,\ \{2,3\},\ \{5,7,8\}\ \}$ ποιες από τις ακόλουθες σχέσεις είναι αληθείς και ποιες όχι;

α) $\{5,7,8\} \in A$ β) $5 \in A$

γ) $\{5,7\} \in A$ δ) $\{5,7\} \subseteq A$

ε) $\{2,8\} \subset A$ ζ) $\{2,3\} \subset A$

η) $\{8,\ \{2,3\}\} \in A$ θ) $\{2,3\} \in A$

I.1.3 Αντικαταστήστε τα κενά μ' ένα από τα σύμβολα $\in$, $\notin$, $\subseteq$ ή $\not\subset$, έτσι ώστε οι σχέσεις που θα προκύψουν να είναι αληθείς:

α) $3\ \_\_\ \{1, 2, 3\}$ β) $0\ \_\_\ \{2\}$

γ) $\varnothing\ \_\_\ \{2\}$ δ) $\{1\}\ \_\_\ \{0, \{1\}\}$

I.1.4 Ποια σχέση συνδέει τα σύνολα Α και Γ σε κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις;

α) $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$ β) $A \subseteq B$ και $B \subset \Gamma$

γ) $A \subset B$ και $B \subseteq \Gamma$ δ) $A \subset B$ και $B \subset \Gamma$

Ι.1.5 Σις ακόλουθες περιπτώσεις, ποια σχέση πρέπει να συνδέει τα σύνολα Α και Β, ώστε να ισχύει η αντίστοιχη ισότητα;

i. $A \cup B = A \cap B$ ii. $A \cap (A \cup B) = B$

iii. $A - B = A$ iv. $A \cap (A - B) = A$

Ι.1.6 Αποδείξτε με τη βοήθεια διαγραμμάτων του Venn ότι

$$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$$

$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$$

$$A \subseteq B \text{ και } B \subseteq \Gamma \Rightarrow A \subseteq \Gamma$$

$$A - (B \cap \Gamma) = (A - B) \cup (A - \Gamma)$$

$$A - (B \cup \Gamma) = (A - B) \cap (A - \Gamma)$$

Ι.1.7 Παραστήστε με σκιασμένες περιοχές σε διαγράμματα του Venn τα ακόλουθα σύνολα:

$A - (B \cup \Gamma)$, $B \cap \Gamma - A$, $A \cap (B - \Gamma)$ και $A - (B \cap \Gamma)$.

Ι.1.8 Από τους 70 φοιτητές ενός τμήματος 29 επέλεξαν να παρακολουθήσουν Μαθηματικά, 30 Βιολογία και 25 Ψυχολογία. Απ' αυτούς οι 9 επέλεξαν και Μαθηματικά και Βιολογία, 7 και Μαθηματικά και Ψυχολογία, 11 και Βιολογία και Ψυχολογία, ενώ 4 επέλεξαν και τα τρία μαθήματα. Πόσοι φοιτητές δεν επέλεξαν κανένα μάθημα; Πόσοι επέλεξαν μόνο μαθηματικά; Και πόσοι Βιολογία και Ψυχολογία αλλά όχι Μαθηματικά;