Π.-Χ. Γ. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ
Καθηγητής Α.Π.Θ.

Γ. ΤΣΑΚΛΙΔΗΣ
Επικ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

Ν. ΤΣΑΝΤΑΣ
Επικ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

ασκήσεις στην επιχειρησιακή έρευνα

ΤΟΜΟΣ 1 ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

θεσσαλονίκη

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο υπογράφεται από τους συγγραφείς ή τον εκδότη

ISBN 960-431-679-6

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 171 • Νέοι Επιβάτες Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 0392-72.222 (3 γραμ.) - Fax: 0392-72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ **ΖΗΤΗ**
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. (031) 203.720, Fax 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

www.ziti.gr

Το βιβλίο αφιερώνεται στη μνήμη αυτών που έφυγαν τόσο σύντομα από κοντά μας

Στον πατέρα μου Μιχάλη Τσακλίδη
Στο φίλο μου Ρίζο Κ. Μάνικα
Στο φίλο μου Κώστα Μέγα

«Τα πνεύματά μας, δέκτες και πομποί
παιρνούν και στέλνουν των καιρών το πνεύμα
σε μιαν αρχαία και νέα ζωής πομπή
που ακολουθεί της ιστορίας το νεύμα»

Γιάννης Ρίτσος

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στους δύο τόμους αυτού του βιβλίου δίνεται μια συλλογή ασκήσεων (+450 ασκήσεις) για όλα σχεδόν τα θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας.

Στον πρώτο τόμο οι ασκήσεις αφορούν το Γραμμικό Προγραμματισμό. Για τις περισσότερες από αυτές δίνεται και ο τρόπος λύσης του από κάποιο λογισμικό (LINDO, WinQSB+ ή EXCEL) οι οδηγίες λειτουργίας των οποίων υπάρχουν σε ειδικό παράρτημα του βιβλίου.

Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να αποκτήσει τα αρχεία δεδομένων τους από την ιστοσελίδα

(http://users.auth.gr/~tsantas)

Στο δεύτερο τόμο έχουν συγκεντρωθεί ασκήσεις Δυναμικού Προγραμματισμού κι Ακέραιου Προγραμματισμού, καθώς επίσης και ασκήσεις από τη θεωρία των μη Γραμμικών Μεθόδων Βελτιστοποίησης, των Μαρκοβιανών Αλυσίδων, τη θεωρία Ουρών, τις ΗμιΜαρκοβιανές Αλυσίδες, τη θεωρία Ανανέωσης και τη θεωρία των Μαρκοβιανών Διαδικασιών.

Ο συμβολισμός και η ορολογία που χρησιμοποιείται είναι από τα βιβλία των Τσάντα και Βασιλείου (1996), Βασιλείου (1990, 1991, 1996).

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2000

Π. - Χ. Βασιλείου
Γ. Τσακλίδης
Ν. Τσάντας

1

Μια βιοτεχνία παιγνιδιών διαθέτει σε πανελλήνια βάση δύο διαφορετικά είδη νεροπίστολων, το Space Ray και το Super X-Ray. Τα δύο παιγνίδια, αποδείχτηκαν ιδιαίτερα δημοφιλή μεταξύ των παιδιών, κυρίως για παιγνίδια στη θάλασσα, ώστε να μην παρατηρείται κανένα απολύτως πρόβλημα στην απορροφητικότητά τους από την αγορά: όσα παιγνίδια κατασκευάζονται διατίθενται αμέσως. Και τα δύο παιγνίδια γίνονται αποκλειστικά από κάποιο ειδικό μείγμα πλαστικού και πωλούνται σε συσκευασίες των 12. Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι κατασκευαστικές απαιτήσεις των δύο προϊόντων σε πρώτες ύλες:

	Πρώτες Ύλες	
Προϊόν	*Μείγμα Πλαστικού (Kr ανά 12-άδα)*	*Χρόνος Παραγωγής (min ανά 12-άδα)*
Space Ray	*2*	*3*
Super X-Ray	*1*	*4*

Σε ημερήσια βάση, η βιοτεχνία μπορεί να έχει 1,200 Kr από το πλαστικό μείγμα και 40 ανθρωποώρες για την κατασκευαστική διαδικασία. Το τμήμα προώθησης πωλήσεων της βιοτεχνίας, στην προσπάθεια δημιουργίας συνεχούς ζήτησης των δύο προϊόντων που κάνει, έχει επιβάλλει δύο απλούς κανόνες: (i) η συνολική ημερήσια παραγωγή τους να μην ξεπερνά τις 800 12-άδες, (ii) η ημερήσια παραγωγή του πιο κερδοφόρου Space Ray να μην ξεπερνά τις 450 12-άδες εκείνης του Super X-Ray. Αν το κέρδος από την κάθε 12-άδα Space Ray και Super X-Ray ανέρχεται αντίστοιχα στις 8 και 5 χρηματικές μονάδες υποδείξτε ένα π.γ.π. για την εύρεση της γραμμής παραγωγής η οποία μεγιστοποιεί τα συνολικά ημερήσια κέρδη.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι x_1, x_2 είναι (αντίστοιχα) ο αριθμός των 12-άδων Space Ray και Super X-Ray που κατασκευάζονται σε μια ημέρα. Τότε, το συνολικό κέρδος της βιοτεχνίας που θα πρέπει να μεγιστοποιηθεί ανέρχεται σε

$$z = 8x_1+5x_2$$

(χρηματικές μονάδες). Οι περιορισμοί του προβλήματος προκύπτουν από τη διαθεσιμότητα των πρώτων υλών:

❶ $2x_1 + x_2 \leq 1200$ (διαθέσιμη ποσότητα πλαστικού, σε Kr)

❷ $3x_1 + 4x_2 \leq 2400$ (διαθέσιμος χρόνος για κατασκευή, σε min)

τη συνολική παραγωγή:

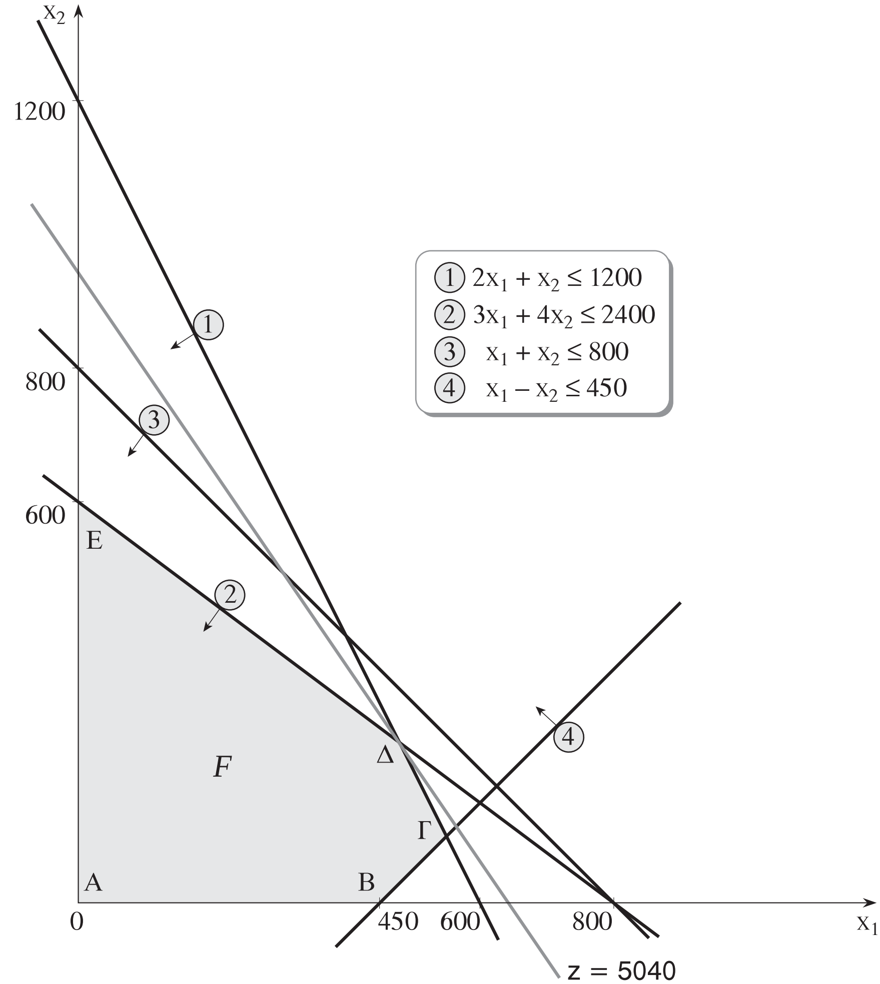
❸ $x_1 + x_2 \leq 800$

και την ισορροπία η οποία πρέπει να υπάρχει μεταξύ του αριθμού των παραγόμενων 12-άδων του κάθε παιγνιδιού:

❹ $x_1 \leq x_2 + 450 \Rightarrow x_1 - x_2 \leq 450$

Φυσικά είναι και $x_1, x_2 \geq 0$.

Η εφικτή περιοχή του ανωτέρω π.γ.π. ορίζεται από το πολύγωνο ΑΒΓΔΕ



(ο ❸ περιορισμός είναι πλεονάζων) του οποίου οι κορυφές έχουν συντεταγμένες Α(0, 0), Β(450, 0), Γ(550, 100), Δ(480, 240) και Ε(0, 600). Άριστη λύση είναι το σημείο Δ. Η κατασκευή 480 12-άδων Space Ray και 240 12-άδων Super X-Ray οδηγεί στο μέγιστο δυνατό ημερήσιο κέρδος ύψους 5,040 χρηματικών μονάδων.

2

Ο Γιώργος, ένας πρωτοετής φοιτητής του Α.Π.Θ., πιστεύει ότι διασκέδαση και διάβασμα πρέπει να πηγαίνουν μαζί. Για το λόγο αυτό προσπαθεί να κατανείμει ένα χρόνο 10 ωρών την ημέρα ανάμεσά τους. Αρχικά εκτίμησε ότι η διασκέδαση του προσφέρει δύο φορές περισσότερη χαρά από ότι το διάβασμα. Παρόλα αυτά επιθυμεί να διαβάζει τουλάχιστον όση ώρα διασκεδάζει. Στη συνέχεια βρήκε ότι για να κάνει όλη τη δουλειά που του αναθέτουν δεν μπορεί να διασκεδάζει περισσότερο από 4 ώρες την ημέρα. Πόσες ώρες την ημέρα πρέπει να διαβάζει και πόσες να διασκεδάζει ώστε να έχει τη μέγιστη δυνατή χαρά;

ΛΥΣΗ

Ας είναι

x_1 ο αριθμός των ωρών που θα διασκεδάζει ο Γιώργος,

x_2 ο αριθμός των ωρών που θα διαβάζει.

Έχουμε τότε

$$\textbf{χαρά} = 2x_1+x_2$$

ποσότητα που θέλουμε να **μεγιστοποιήσουμε**.

Οι περιορισμοί του προβλήματος αφορούν

❶ το διαθέσιμο ημερήσιο χρόνο

$$x_1+x_2 \leq 10$$

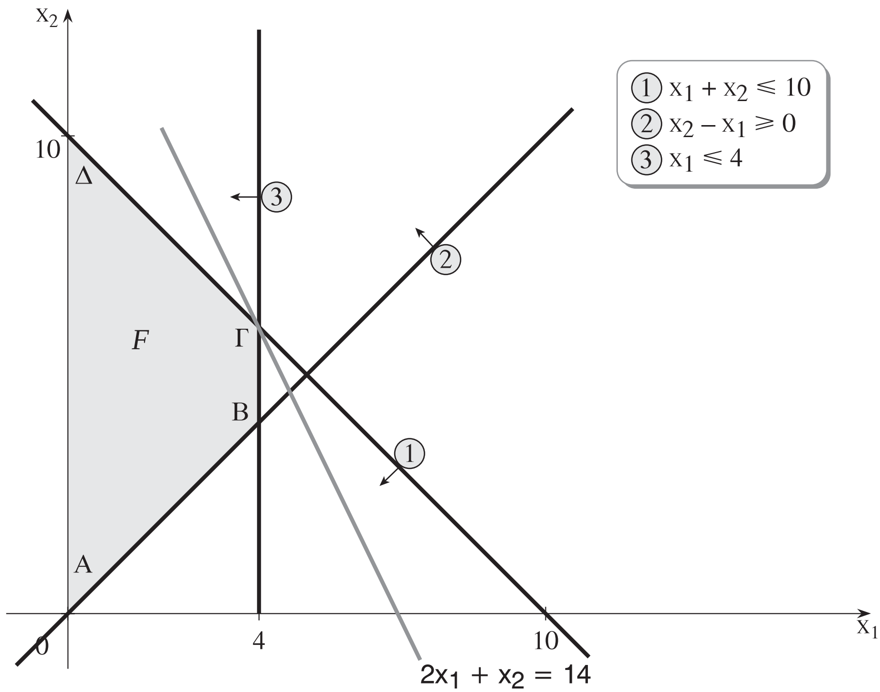
❷ την επιθυμία του Γιώργου να διαβάζει τουλάχιστον όση ώρα διασκεδάζει

$$x_2-x_1 \geq 0$$

❸ το μέγιστο χρόνο για διασκέδαση

$$x_1 \leq 4 \ .$$

Επειδή το πρόβλημα έχει μόνο δύο αγνώστους θα το λύσουμε γραφικά:



Η εφικτή περιοχή ορίζεται από το πολύγωνο Α(0, 0), Β(4, 4), Γ(4, 6) και Δ(0, 10). Άριστη λύση είναι το σημείο Γ. Ο Γιώργος θα πρέπει δηλαδή να διασκεδάζει 4 ώρες και να διαβάζει 6 ώστε να έχει τη μέγιστη δυνατή ευχαρίστηση 14 μονάδων.

3

Η WavesHellas είναι μια εταιρεία συναρμολόγησης δύο διαφορετικών τύπων φούρνων μικροκυμάτων. Εξ αυτών, ο πρώτος τύπος αφήνει ένα καθαρό κέρδος 20 χ.μ. ενώ ο δεύτερος 30 χ.μ. Η όλη κατασκευαστική διαδικασία μπορεί χοντρικά να θεωρηθεί ότι αποτελείται από δύο στάδια, της συναρμολόγησης και του ελέγχου:

	Συναρμολόγηση	*Έλεγχος*
Τύπος Α	*4*	*1*
Τύπος Β	*3*	*2*

Η WavesHellas είναι μια μικρού μεγέθους εταιρεία: το προσωπικό της εταιρείας επαρκεί για την εβδομαδιαία ύπαρξη 240 ωρών συναρμολόγησης και 140 ωρών ελέγχου. Αν τα συμβόλαια που έχει υπογράψει η εταιρεία την αναγκάζουν να παραδίδει εβδομαδιαία τουλάχι-

στον 15 φούρνους τύπου A υποδείξτε ένα π.γ.π. για την εύρεση της γραμμής παραγωγής η οποία θα μεγιστοποιήσει το κέρδος.

ΛΥΣΗ

Ορίζουμε να είναι x_1, x_2 ο αριθμός των φούρνων τύπου A και B που θα συναρμολογηθούν σε μία εβδομάδα. Τότε το συνολικό (εβδομαδιαίο) κέρδος της WavesHellas το οποίο επιθυμούμε να μεγιστοποιήσουμε ανέρχεται σε:

$$z = 20x_1+30x_2$$

Εξ αιτίας των περιορισμένων διαθέσιμων ωρών για τη συναρμολόγηση και τον έλεγχο των δύο τύπων φούρνων θα έχουμε (αντίστοιχα):

$$4x_1 + 3x_2 \leq 240$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 140$$

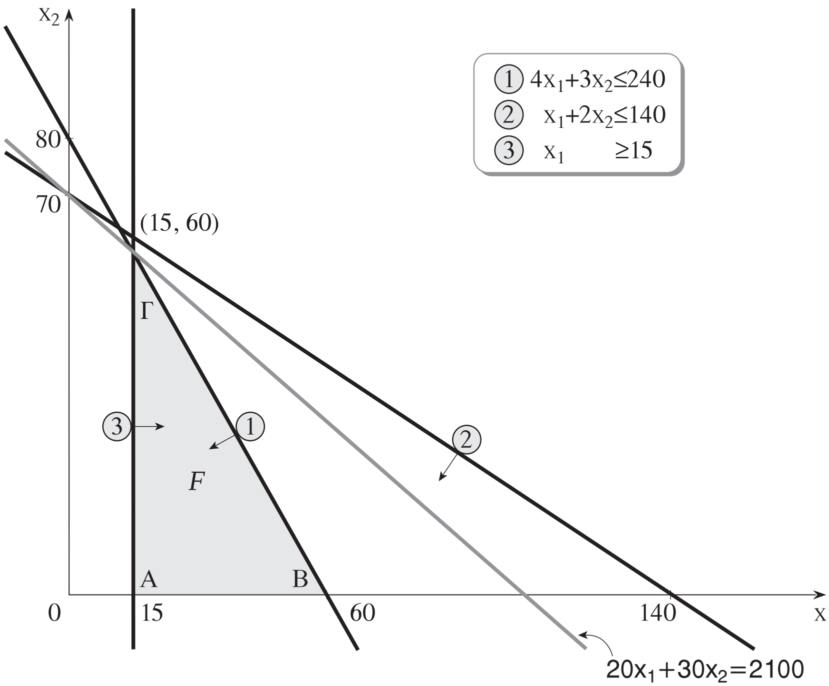
Η απαίτηση για την παράδοση τουλάχιστον 15 φούρνων μικροκυμάτων τύπου A την εβδομάδα εκφράζεται από την ανισότητα:

$$x_1 \geq 15$$

Τέλος, έχουμε και τους περιορισμούς της μη-αρνητικότητας των μεταβλητών x_1, x_2 που ορίσαμε:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Το σχήμα που ακολουθεί δίνει γραφικά την επίλυση του προβλήματος:



Η εφικτή περιοχή ορίζεται από το τρίγωνο ΑΒΓ και άριστη λύση είναι το σημείο Γ(15, 60). Η συναρμολόγηση 15 φούρνων τύπου Α και 60 τύπου Β θα δώσει (το μέγιστο δυνατόν) εβδομαδιαίο κέρδος ίσο με 2100 χ.μ. Παρατηρήστε ότι ο περιορισμός που αφορά τις διαθέσιμες ώρες για έλεγχο είναι πλεονάζων.

Η εικόνα που ακολουθεί δείχνει το μοντέλο γ.π. για το πρόβλημα αυτό στο παράθυρο εργασίας του LINDO. Ταυτόχρονα φαίνεται και η λύση του όπως αυτή προκύπτει από το συγκεκριμένο λογισμικό.

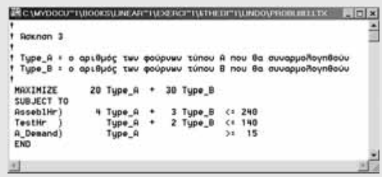
```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP  2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE
    1)       2100.000

 VARIABLE       VALUE       REDUCED COST
  TYPE_A     15.000000        0.000000
  TYPE_B     60.000000        0.000000


    ROW   SLACK OR SURPLUS  DUAL PRICES
ASSEBLHR)      0.000000      10.000000
  TESTHR)      5.000000       0.000000
A_DEMAND)      0.000000     -20.000000

NO. ITERATIONS = 2
```



4

Ο διευθυντής πωλήσεων μιας βιομηχανίας γάλακτος προσπαθεί να προσδιορίσει τον αριθμό των τηλεοπτικών σποτ και ολοσέλιδων καταχωρήσεων σε περιοδικά που μπορεί να "αγοράσει" με τον προϋπολογισμό των 100,000 χ.μ. που διαθέτει. Κάθε τηλεοπτικό σποτ κοστίζει 2,000 χ.μ. κι αναμένεται να αυξήσει τις πωλήσεις στα καινούργια τύπου γιαούρτια της εταιρείας κατά 30,000 κεσεδάκια. Από την άλλη μεριά, μια ολοσέλιδη διαφημιστική καταχώρηση σ' ένα περιοδικό κοστίζει 5,000 χ.μ. ενώ αναμένεται να αυξήσει τις πωλήσεις κατά 100,000 κεσεδάκια. Η επικρατούσα άποψη στο τμήμα του (την οποία σκέφτεται και να υιοθετήσει) είναι, ότι για λόγους ισορροπίας στην αγορά, δεν πρέπει να δαπανήσει περισσότερο από 70,000 χ.μ. στις διαφημίσεις που θα δώσει στα περιοδικά, αλλά ούτε περισσότερο από 50,000 χ.μ. στα τηλεοπτικά σποτ. Αν τα αναμενόμενα ακαθάριστα κέρδη από το κάθε κεσεδάκι γιαουρτιού που θα πωληθεί λόγω της διαφημιστικής καμπάνιας υπολογίζονται σε 0.10 χ.μ., υποδείξτε ένα π.γ.π. για την εύρεση της κατανομής των διαφημίσεων στην τηλεόραση και τα περιοδικά η οποία θα μεγιστοποιήσει τη συνολική καθαρή αύξηση των κερδών της βιομηχανίας.

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης, τα καθαρά αναμενόμενα κέρδη ανά τύπο διαφήμισης που θα επιλεγεί τελικά ανέρχονται σε:

$0.10*(30{,}000) - 2{,}000 = 1{,}000$ χ.μ. από το κάθε τηλεοπτικό σποτ

$0.10*(100{,}000) - 5{,}000 = 5{,}000$ χ.μ. από την κάθε διαφήμιση σε περιοδικό

Ορίζουμε να είναι x_1 ο αριθμός των τηλεοπτικών σποτ και x_2 ο αριθμός των διαφημιστικών καταχωρήσεων σε περιοδικά. Τότε, η συνολική καθαρή αύξηση των κερδών της βιομηχανίας γάλακτος την οποία και επιθυμούμε να μεγιστοποιήσουμε είναι ίση με

$$z = 1{,}000x_1+5{,}000x_2$$

Σαν συνέπεια του περιορισμένου προϋπολογισμού θα πρέπει

$$2{,}000x_1+5{,}000x_2 \leq 100{,}000$$

ενώ, η επιδιωκόμενη κατανομή στα δύο διαφημιστικά μέσα μας δίνει

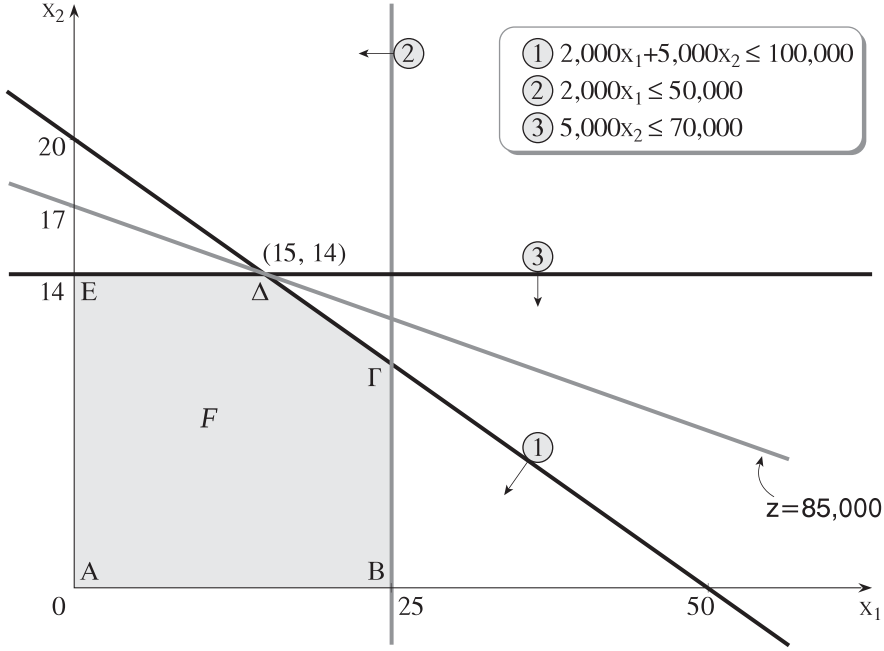
$$2{,}000x_1 \leq 50{,}000$$

$$5{,}000x_2 \leq 70{,}000$$

Τέλος, έχουμε και τους περιορισμούς της μη-αρνητικότητας των μεταβλητών x_1, x_2 που ορίσαμε:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Το σχήμα που ακολουθεί δίνει γραφικά την επίλυση του προβλήματος:



Η εφικτή περιοχή ορίζεται από το πολύγωνο Α(0, 0), Β(25, 0), Γ(25, 10), Δ(15, 14) και Ε(0, 14). Άριστη λύση είναι το σημείο Δ. 15 τηλεοπτικά σποτ και 14 καταχωρήσεις σε περιοδικά θα δώσουν (τη μέγιστη δυνατή) καθαρή αύξηση των κερδών ύψους 85,000 χ.μ.

5

Η εταιρεία υπολογιστών MICRO προσπαθεί να προγραμματίσει τη γραμμή παραγωγής για τους επιτραπέζιους και φορητούς προσωπικούς υπολογιστές που θα διαθέσει στην αγορά τη χρονιά που έρχεται. Ο επεξεργαστής και των δύο μοντέλων είναι ο PII-500 και ο χρόνος κατασκευής για το επιτραπέζιο μοντέλο ανέρχεται στην 1.5 ώρα ενώ για το φορητό στις 3 ώρες. Για τη συνολική παραγωγή η εταιρεία είναι έτοιμη να διαθέσει 3400 επεξεργαστές και 6000 ώρες εργασίας, ενώ οι πωλητές της απαιτούν τουλάχιστον το 25% της συνολικής παραγωγής να είναι φορητοί υπολογιστές. Αν το κέρδος από κάθε επιτραπέζιου υπολογιστή ανέρχεται στις 50,000 χρηματικές μονάδες και από κάθε φορητό στις 75,000 υποδείξτε ένα π.γ.π. για την εύρεση της γραμμής παραγωγής η οποία θα μεγιστοποιήσει το συνολικό κέρδος της MICRO.

ΛΥΣΗ

Ας είναι x_1 ο αριθμός των επιτραπέζιων υπολογιστών που θα κατασκευαστούν και x_2 ο αριθμός των φορητών.

Αφού οι x_2 υπολογιστές πρέπει να είναι τουλάχιστον το 25% της συνολικής παραγωγής θα ισχύει:

$$x_2 \geq 0.25 \ (\text{συνολική παραγωγή}) \ \Rightarrow \ x_2 \geq 0.25(x_1+x_2)$$
$$\Rightarrow \ -0.25x_1+0.75x_2 \geq 0$$

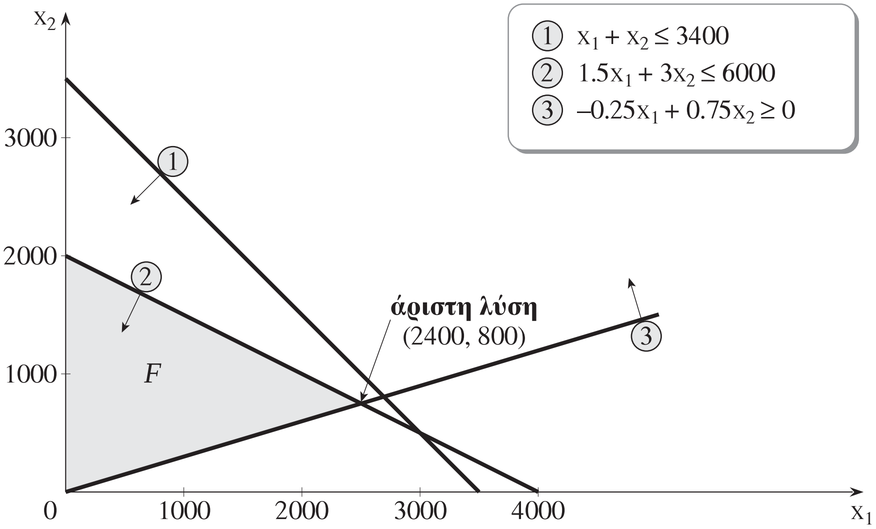
κι επομένως το πρόβλημά μας αφορά την εύρεση του

$$\max \quad z = (50000x_1+75000x_2)$$

με περιορισμούς

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 \leq 3400 && (\text{επεξεργαστές}) \\ 1.5x_1 &+ 3x_2 \leq 6000 && (\text{χρόνος εργασίας}) \\ -0.25x_1 &+ 0.75x_2 \geq 0 && (\%\ \text{απαίτηση}) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Η εφικτή περιοχή F φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί (ο περιορισμός ① είναι πλεονάζων) από το οποίο μπορούμε εύκολα να βρούμε και την άριστη λύση $x_1 = 2400$, $x_2 = 800$ η οποία δίνει κέρδος 180,000,000 χρηματικών μονάδων.



6

Σ' ένα ξυλουργείο υπάρχουν δύο μηχανήματα: ένα τρυπάνι και μια πλάνη. Το ξυλουργείο κατασκευάζει σε μόνιμη βάση δύο προϊόντα A και B, κάθε κομμάτι των οποίων απαιτεί χρόνο επεξεργασίας (σε λεπτά) ο οποίος δίνεται στον πιο κάτω πίνακα

Μηχάνημα / *Προϊόν*	*Τρυπάνι*	*Πλάνη*
A	*3*	*4*
B	*5*	*3*

Ο ξυλουργός δεν επιθυμεί κανένα από τα δύο είδη μηχανημάτων να δουλεύει περισσότερο από 30 λεπτά την ημέρα από το άλλο, αλλά ούτε και ο ίδιος περισσότερο από οκτώ ώρες. Αν το κέρδος του ανέρχεται σε 250 δρχ. από το προϊόν A και σε 180 δρχ. από το B, υποδείξτε ένα π.γ.π. για την εύρεση του αριθμού των προϊόντων που πρέπει να κατασκευάζει ημερησίως ώστε να μεγιστοποιεί το κέρδος του.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι κατασκευάζονται x_1 κομμάτια του προϊόντος Α και x_2 του Β. Τότε το τρυπάνι δούλεψε $3x_1+5x_2$ λεπτά, ενώ η πλάνη $4x_1+3x_2$.

Αφού ο ξυλουργός δε θέλει να δουλεύει πάνω από 8 ώρες $(= 8\times 60 = 480$ λεπτά), θα πρέπει $(3x_1+5x_2)+(4x_1+3x_2) \leq 480$ ή ισοδύναμα

$$7x_1+8x_2 \leq 480$$

Μια και η διαφορά του χρόνου λειτουργίας τρυπανιού - πλάνης δεν πρέπει να ξεπερνά τα 30 λεπτά, θα είναι

$$|(4x_1+3x_2)-(3x_1+5x_2)| \leq 30$$

δηλ.

$$|x_1-2x_2| \leq 30$$

Επομένως, το πρόβλημα αφορά την εύρεση του

$$\max \quad (250x_1+180x_2)$$

όταν

$$\begin{aligned} 7x_1+8x_2 &\leq 480 \\ x_1-2x_2 &\leq 30 \\ -x_1+2x_2 &\leq 30 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Άριστη λύση για το πρόβλημα αυτό είναι η $x_1 = 54.54546$, $x_2 = 12.27273$ που οδηγεί στο μέγιστο ημερήσιο κέρδος της τάξης των 15845.45 δρχ.

7

Βιοτεχνία λευκών ηλεκτρικών συσκευών, έχει αναλάβει υπεργολαβικά, για λογαριασμό γνωστής εταιρεία της αγοράς, την κατασκευή πλυντηρίων ρούχων και πιάτων. Για το σκοπό αυτό, η βιοτεχνία δημιούργησε τέσσερα διαφορετικά τμήματα: (1) συναρμολόγησης, (2) τελικής επεξεργασίας –που χρησιμοποιούνται και από τα δύο προϊόντα–, (3) κατασκευής του μοτέρ και λοιπών μηχανικών/ηλεκτρονικών μερών του πλυντηρίου ρούχων, (4) κατασκευής του μοτέρ και λοιπών μηχανικών/ηλεκτρονικών μερών του πλυντηρίου πιάτων. Αν οι εβδομαδιαίες κατασκευαστικές δυνατότητες του κάθε τμήματος φτάνουν για την κατασκευή

Τμήματα επεξεργασίας	***Προϊόν***	
	Πλυντήριο Ρούχων	*Πλυντήριο Πιάτων*
Κατασκευή των μερών του πλυντ. ρούχων	*2,000*	
Κατασκευή των μερών του πλυντ. πιάτων		*1,500*
Συναρμολόγηση	*3,500*	*2,500*
Τελική επεξεργασία (φινίρισμα)	*1,500*	*3,500*

συσκευών (για παράδειγμα, αν το τμήμα συναρμολόγησης συναρμολογούσε μόνο πλυντήρια ρούχων, τότε θα συναρμολογούσε 3,500 συσκευές, κοκ) και το κέρδος της εταιρείας είναι 250 χρηματικές μονάδες από ένα πλυντήριο ρούχων και 375 από ένα πλυντήριο πιάτων, υποδείξτε ένα π.γ.π. για την εύρεση της γραμμής παραγωγής που αφήνει στη βιοτεχνία τα περισσότερα κέρδη.

ΛΥΣΗ

Ας υποθέσουμε ότι εβδομαδιαία κατασκευάζονται x_1, x_2 πλυντήρια ρούχων και πιάτων αντίστοιχα. Τότε το συνολικό κέρδος της βιοτεχνίας που πρέπει βέβαια να μεγιστοποιηθεί ανέρχεται σε

$$275x_1+375x_2$$

χρηματικές μονάδες. Οι περιορισμοί του προβλήματος πρέπει να αντικατοπτρίζουν τις δυνατότητες επεξεργασίας που υπάρχουν στο καθένα από τα τέσσερα τμήματα της γραμμής παραγωγής. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος

❶ το τμήμα κατασκευής των μηχανικών/ηλεκτρονικών μερών για τα πλυντήρια ρούχων επαρκεί την εβδομάδα για 2,000 συσκευές:

$$x_1 \leq 2{,}000$$

❷ το τμήμα κατασκευής των μηχανικών/ηλεκτρονικών μερών για τα πλυντήρια πιάτων επαρκεί την εβδομάδα για 1,500 συσκευές:

$$x_2 \leq 1{,}500$$

❸ αφού σε μια εβδομάδα μπορούν να συναρμολογηθούν 3,500 πλυντήρια ρούχων, για τα x_1 που θα κατασκευαστούν απαιτείται το $\frac{x_1}{3500}$ της εβδομάδας. Όμοια βρίσκουμε ότι απαιτείται το $\frac{x_2}{2500}$ της εβδομάδας για τη συναρμολόγηση των x_2 πλυντηρίων πιάτων:

$$\frac{x_1}{3500} + \frac{x_2}{2500} \leq 1 \;\Rightarrow\; 10x_1+14x_2 \leq 35000$$

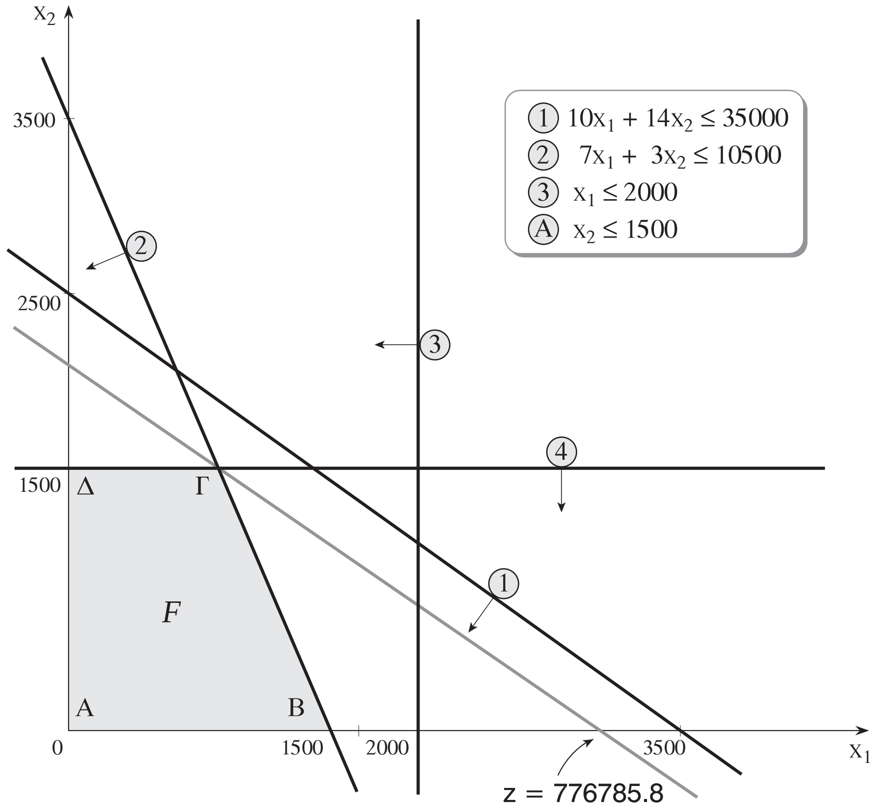
❹ ανάλογα για το τμήμα του φινιρίσματος των συσκευών βρίσκουμε ότι θα πρέπει:

$$\frac{x_1}{1500} + \frac{x_2}{3500} \leq 1 \;\Rightarrow\; 7x_1+3x_2 \leq 10500$$

Είναι ακόμη $x_1, x_2 \geq 0$.

Η εφικτή περιοχή του ανωτέρω π.γ.π. ορίζεται από το πολύγωνο ΑΒΓΔ (οι περιορισμοί ❶ και ❸ είναι πλεονάζοντες) του οποίου οι κορυφές έχουν συντεταγμένες Α(0, 0), Β(1500, 0), Γ(857.143, 1500) και Δ(0, 1500).

Άριστη λύση είναι το σημείο Γ. Η κατασκευή 857.143 πλυντηρίων ρούχων και 1500 πλυντηρίων πιάτων οδηγεί στο μέγιστο δυνατό εβδομαδιαίο κέρδος ίσο περίπου με 776,786 χρηματικές μονάδες.



8

Ένα πολυ-κατάστημα παιδικών παιγνιδιών προσπαθεί να τοποθετήσει στην μήκους 50 m βιτρίνα του, ποδήλατα για μεγάλα (με δύο ρόδες) και μικρά παιδιά (με τέσσερις ρόδες). Κατά το διακοσμητή του καταστήματος θα πρέπει στη βιτρίνα να παρουσιάζονται τουλάχιστον 8 μεγάλα και τουλάχιστον 10 μικρά ποδήλατα. Κάθε μεγάλο ποδήλατο που τοποθετείται εκεί δεσμεύει χώρο 2.5 m κι εκτιμάται ότι έχει πιθανότητα πώλησης τη συγκεκριμένη ημέρα έκθεσής του 0.12. Το κέρδος που αφήνει στο κατάστημα μια τέτοια πώληση ανέρχεται σε 80 χρηματικές μονάδες. Ανάλογα, κάθε μικρό ποδήλατο δεσμεύει *χώρο 1.5 m, αποκτά πιθανότητα πώλησης 0.10, κι αφήνει κέρδος 40 χ.μ. Βρείτε τον αριθμό των μεγάλων και μικρών ποδηλάτων που θα πρέπει να τοποθετηθούν στη βιτρίνα του καταστήματος μια τυχαία ημέρα σε τρόπο ώστε:*

1. *να μεγιστοποιούνται τα συνολικά αναμενόμενα κέρδη.*
2. *να μεγιστοποιείται ο συνολικός αναμενόμενος αριθμός πωλήσεών τους.*
3. *να ελαχιστοποιείται ο συνολικός τους αριθμός.*

ΛΥΣΗ

Ας είναι x_1 ο αριθμός των μεγάλων (με δύο ρόδες) και x_2 ο αριθμός των μικρών (με τέσσερις ρόδες) ποδηλάτων που θα τοποθετηθούν στη βιτρίνα του καταστήματος την όποια τυχαία ημέρα. Σύμφωνα με τα δεδομένα που έχουμε:

❶ θα πρέπει να τοποθετηθούν τουλάχιστον 8 μεγάλα ποδήλατα:

$$x_1 \geq 8$$

❷ θα πρέπει να τοποθετηθούν τουλάχιστον 10 μικρά ποδήλατα:

$$x_2 \geq 10$$

❸ κάθε μεγάλο ποδήλατο χρειάζεται 2.5 m, κάθε μικρό 1.5 m, ενώ ολόκληρη η βιτρίνα έχει μήκος 50 m:

$$2.5x_1+1.5x_2 \leq 50$$

❹ και βέβαια:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1. Τα συνολικά αναμενόμενα ημερήσια κέρδη από την έκθεση των x_1 μεγάλων και x_2 μικρών ποδηλάτων ανέρχονται σε $80\times(0.12x_1) + 40\times(0.10x_2)$ χρηματικές μονάδες. Συνεπώς, το μοντέλο του γ.π. για το πρόβλημά μας στην περίπτωση αυτή είναι το

$$\text{maximize } z = 9.6x_1+4x_2$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad &\geq 8 \\ x_2 &\geq 10 \\ 2.5x_1 + 1.5x_2 &\leq 50 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Βέλτιστη λύση στο πρόβλημα αυτό είναι η $x_1=14$, $x_2=10$, $z=174.4$.

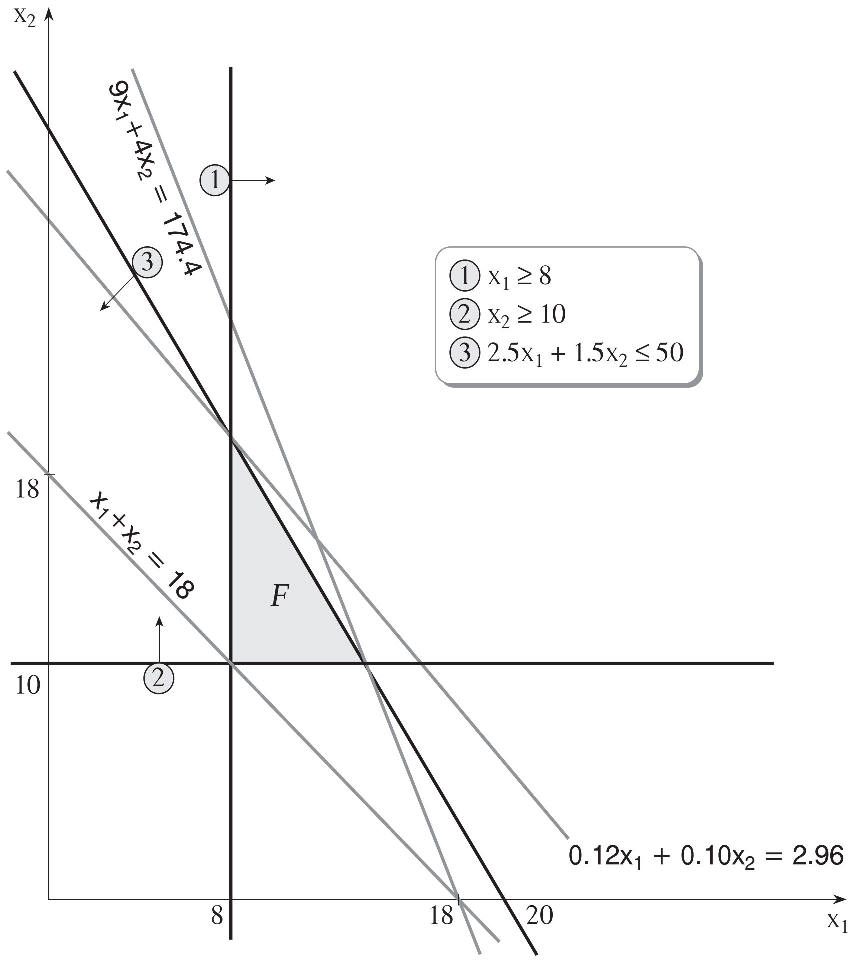
2. Ο συνολικός αναμενόμενος αριθμός πωλήσεων μεγάλων και μικρών ποδηλάτων είναι ίσος με $0.12x_1+0.10x_2$, οπότε μοντέλο γ.π. για το πρόβλημά μας είναι το

$$\text{maximize } z = 0.12x_1+0.10x_2$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad &\geq 8 \\ x_2 &\geq 10 \\ 2.5x_1 + 1.5x_2 &\leq 50 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

κι έχει ως βέλτιστη τη λύση $x_1=8$, $x_2=20$, $z=2.96$.



3. Στην περίπτωση αυτή έχουμε το πρόβλημα

$$\text{minimize } z = x_1+x_2$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad & \geq 8 \\ x_2 & \geq 10 \\ 2.5x_1 + 1.5x_2 & \leq 50 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

που έχει ως βέλτιστη λύση τη $x_1=8$, $x_2=10$, $z=18$.

9

Ο Νίκος Τσάντας, πλασιέ του σκευάσματος τροφής για αγελάδες «Moo Buffet», επισκέπτεται τον Παναγιώτη Βασιλείου επιτυχημένο παραγωγό γάλακτος, που έχει στην κατοχή του ένα κοπάδι 1000 αγελάδων. Μέρος της επιτυχίας του Βασιλείου οφείλεται και στην αυστηρή δίαιτα την οποία ακολουθούν οι αγελάδες του. Ειδικότερα, κάθε αγελάδα λαμβάνει ημερήσια τουλάχιστον 100 μονάδες ασβέστιο, 20,000 θερμίδες και 1,500 μονάδες πρωτεΐνης. Για το σκοπό αυτό ο Βασιλείου χρησιμοποιεί το σκεύασμα τροφής «Cow Feed», 1 Kr του οποίου κοστίζει 0.015 χρηματικές μονάδες και παρέχει 1 μονάδα ασβεστίου, 400 θερμίδες και 20 μονάδες πρωτεΐνης. Σε αντιδιαστολή, 1 Kr «Moo Buffet» θα κοστίσει στον Βασιλείου 0.020 χρηματικές μονάδες παρέχοντας 2 μονάδες ασβεστίου, 250 θερμίδες και 20 μονάδες πρωτεΐνης.

1. *Σε ποιο ποσό ανέρχονται τα τρέχοντα (: με το σκεύασμα «Cow Feed») ημερήσια έξοδα τροφής για μια αγελάδα του κοπαδιού Βασιλείου;*
2. *Για ποιο λόγο ο Τσάντας δεν κατάφερε να πείσει τον Βασιλείου να αντικαταστήσει το σκεύασμα «Cow Feed» με το «Moo Buffet»;*
3. *Ο Τσάντας, ως πολυμήχανος πλασιέ που είναι, όταν κατάλαβε ότι απέτυχε στη βασική του επιδίωξη, πρότεινε ως εναλλακτική λύση ένα μείγμα των δύο σκευασμάτων «Cow Feed» και «Moo Buffet» το οποίο με χαμηλότερο κόστος ικανοποιεί τις ανάγκες της δίαιτας. Ποιο είναι αυτό;*
4. *Πόσα χρήματα εξοικονομεί ημερήσια ο Βασιλείου ταΐζοντας το κοπάδι των 1000 αγελάδων του με το προτεινόμενο μείγμα;*

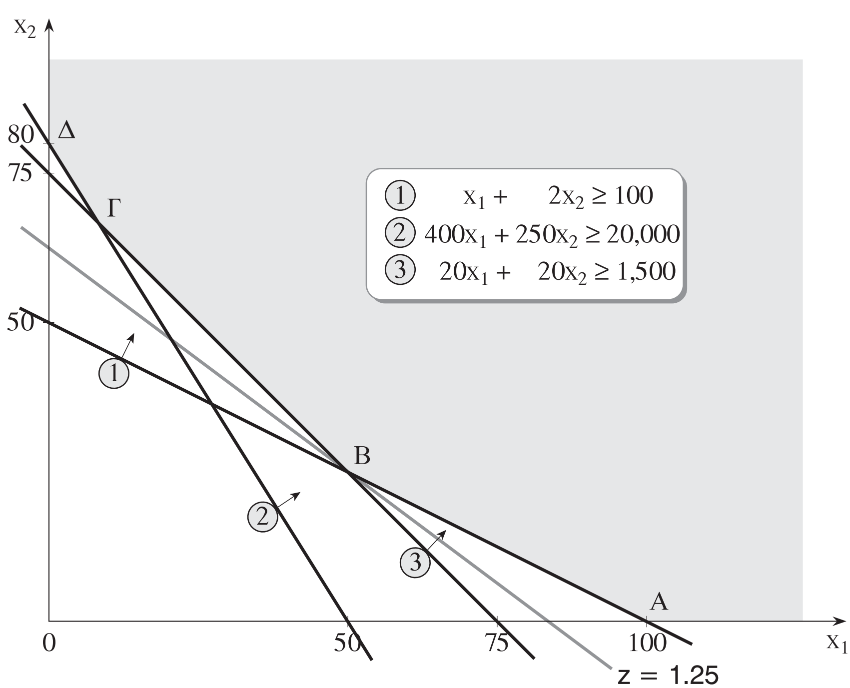
ΛΥΣΗ

1. Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης, 1 Kr του σκευάσματος «Cow Feed» παρέχει 1 μονάδα ασβεστίου, 400 θερμίδες και 20 μονάδες πρωτεΐνης. Συνεπώς, κάθε αγελάδα χρειάζεται τουλάχιστον 100/1 = 100 Kr τροφής για να εξασφαλίσει τις απαιτήσεις της δίαιτάς της σε ασβέστιο, τουλάχιστον 20000/400 = 50 Kr για να εξασφαλίσει τις απαιτήσεις σε θερμίδες και τουλάχιστον 1500/20 = 75 Kr για να εξασφαλίσει τις απαιτήσεις σε πρωτεΐνες. Απαιτούνται επομένως τουλάχιστον 100 Kr του σκευάσματος «Cow Feed» με κόστος 100×0.015 = 1.50 χρηματικών μονάδων για τη διατροφή της κάθε αγελάδας του κοπαδιού.

2. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι απαιτούνται 80 Kr του σκευάσματος «Moo Buffet» για να εξασφαλιστούν οι απαιτήσεις της δίαιτας που ακολουθείται. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ένα κόστος 1.60 χρηματικών μονάδων ανά αγελάδα, που είναι μεγαλύτερο από το προηγούμενο κι άρα ασύμφορο.

3. Συμβολίζουμε με x_1, x_2 την ποσότητα (Kr) που θα υπάρχει στο μείγμα από τα δύο σκευάσματα τροφής «Cow Feed» και «Moo Buffet» αντίστοιχα. Τότε το συνολικό κόστος για τη διατροφή της κάθε αγελάδας, το οποίο θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε, ανέρχεται σε

$$0.015x_1 + 0.020x_2$$



Βέβαια, θα πρέπει να εξασφαλίσουμε τις απαιτήσεις της δίαιτας σε ασβέστιο, θερμίδες και πρωτεΐνες:

❶ $x_1 + 2x_2 \geq 100$ (απαιτήσεις σε ασβέστιο)

❷ $400x_1 + 250x_2 \geq 20{,}000$ (απαιτήσεις σε θερμίδες)

❸ $20x_1 + 20x_2 \geq 1500$ (απαιτήσεις σε πρωτεΐνες)

ενώ είναι και $x_1, x_2 \geq 0$.

Η εφικτή περιοχή του ανωτέρω π.γ.π. ορίζεται από τα σημεία Α(100, 0), Β(50, 25), Γ(8.333, 66.667), Δ(0, 80) και τους θετικούς ημιάξονες, είναι δε μη φραγμένη. Άριστη λύση είναι το σημείο Β. Η δημιουργία ενός μείγματος τροφής από 50 Kr «Cow Feed» και 25 Kr «Moo Buffet» εξασφαλίζει τις απαιτήσεις της δίαιτας με κόστος μόλις 1.25 χρηματικών μονάδων.

4. Η αντικατάσταση του σκευάσματος τροφής «Cow Feed» από το παραπάνω μείγμα οδηγεί τον Βασιλείου σ' ένα ημερήσιο κέρδος για ολόκληρο το κοπάδι του ύψους $1000\times(1.50-1.25) = 250$ χρηματικών μονάδων.

10

Εταιρεία προμηθεύεται από δύο διαφορετικές πηγές ορυκτά, τα οποία στη συνέχεια επεξεργάζεται με σκοπό τη δημιουργία διαφόρων μεταλλευμάτων. Οι τρέχουσες ανάγκες της ανέρχονται σε 800 Kr χαλκού, 600 Kr ψευδάργυρου και 500 Kr σιδήρου. Η ποσότητα που το καθένα μετάλλευμα υπάρχει ανά 100 Kr ορυκτού μαζί με το κόστος αγοράς του δίνονται στον πιο κάτω πίνακα:

Ορυκτό (100 Kr)	*Χαλκός (Kr)*	*Ψευδάργυρος (Kr)*	*Σίδηρος (Kr)*	*Απώλειες (Kr)*	*Κόστος (χ.μ.)*
A	*20*	*20*	*20*	*40*	*100*
B	*40*	*25*	*10*	*25*	*140*

1. *Προσδιορίστε τις ποσότητες που πρέπει να αγοραστούν από το κάθε ορυκτό σε τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι ανάγκες της εταιρείας με το μικρότερο δυνατό κόστος.*
2. *Υποθέστε επιπλέον ότι η συνολική απώλεια δεν πρέπει να ξεπερνά τα 1000 Kr. Δώστε το νέο (;) βέλτιστο σχέδιο αγοράς.*

ΛΥΣΗ

1. Συμβολίζουμε με x_1, x_2 την ποσότητα (100 Kr) του ορυκτού Α, Β αντίστοιχα που προμηθεύεται η εταιρεία. Το συνολικό κόστος τότε αγοράς το οποίο θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε ανέρχεται σε

$$100x_1 + 140x_2$$

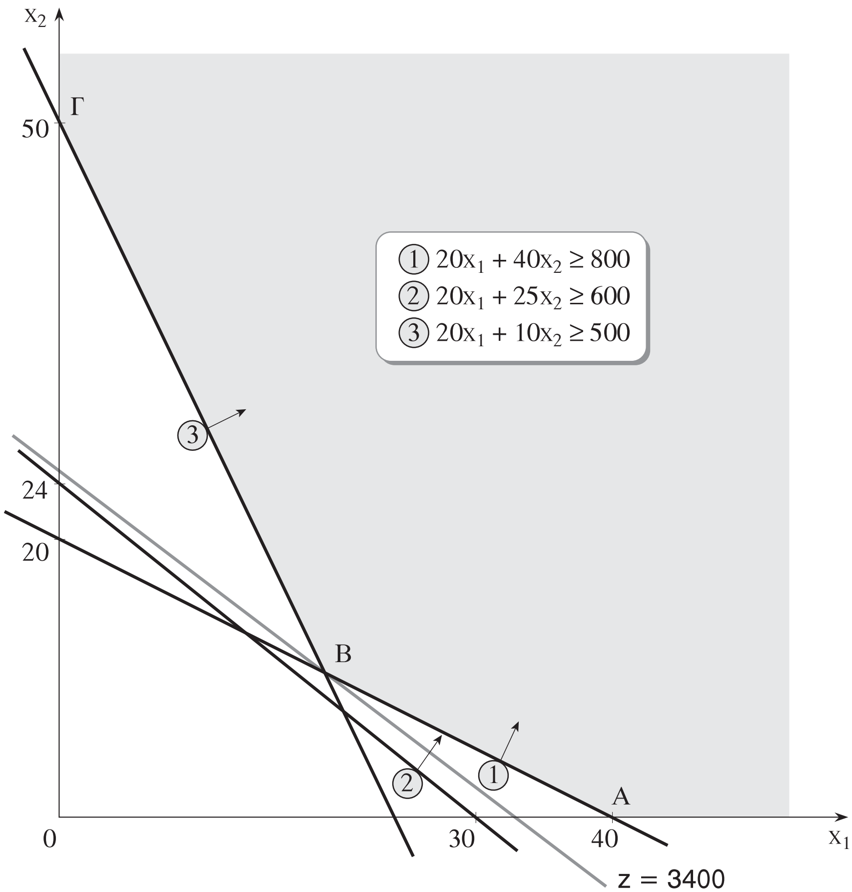
χρηματικές μονάδες. Οι περιορισμοί του προβλήματος αφορούν τις ζητούμενες ποσότητες χαλκού, ψευδαργύρου και σιδήρου:

❶ $20x_1 + 40x_2 \geq 800$ (ζητούμενη ποσότητα χαλκού)

❷ $20x_1 + 25x_2 \geq 600$ (ζητούμενη ποσότητα ψευδαργύρου)

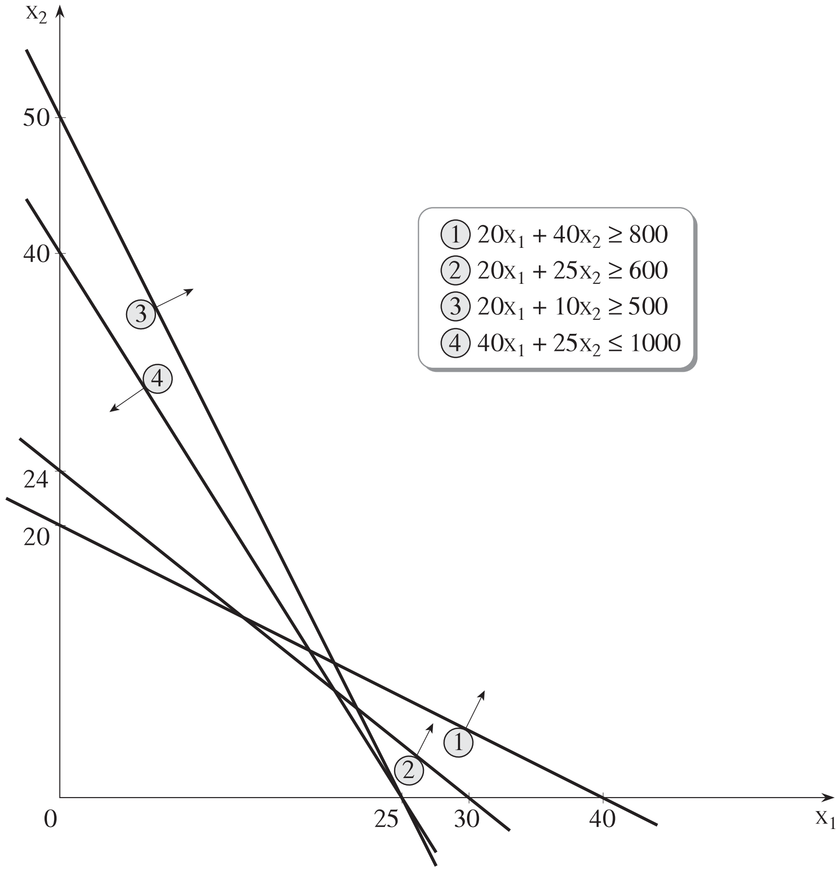
❸ $20x_1 + 10x_2 \geq 500$ (ζητούμενη ποσότητα σιδήρου)

Επιπλέον, $x_1, x_2 \geq 0$.



Η εφικτή περιοχή του ανωτέρω π.γ.π. ορίζεται από τα σημεία Α(40, 0), Β(20, 10), Γ(0, 50) και τους θετικούς ημιάξονες, είναι δε μη φραγμένη ενώ ο περιορισμός ❷ είναι πλεονάζων. Άριστη λύση είναι το σημείο Β. Η αγορά 2,000 Kr του ορυκτού Α και 1,000 Kr του ορυκτού Α εξασφαλίζει τις απαιτήσεις της εταιρείας με κόστος 3400 χρηματικών μονάδων.

2. Η προσθήκη του περιορισμού «$40x_1+25x_2 \leq 1000$» στο πρόβλημα, καθιστά την εφικτή περιοχή το κενό σύνολο, $F=\varnothing$. Το νέο π.γ.π. δεν έχει εφικτές λύσεις (αδύνατο π.γ.π.).



11

Να βρεθεί γραφικά η εφικτή περιοχή των πιο κάτω π.γ.π.:

i) $x + y \leq 5$, $2x + y \leq 8$, $x, y \geq 0$

ii) $4x + y \geq 8$, $3x + 2y \geq 6$, $x, y \geq 0$

iii) $2x + 5y + 5z \leq 20$, $4x + 2y + z \leq 8$, $x, y, z \geq 0$

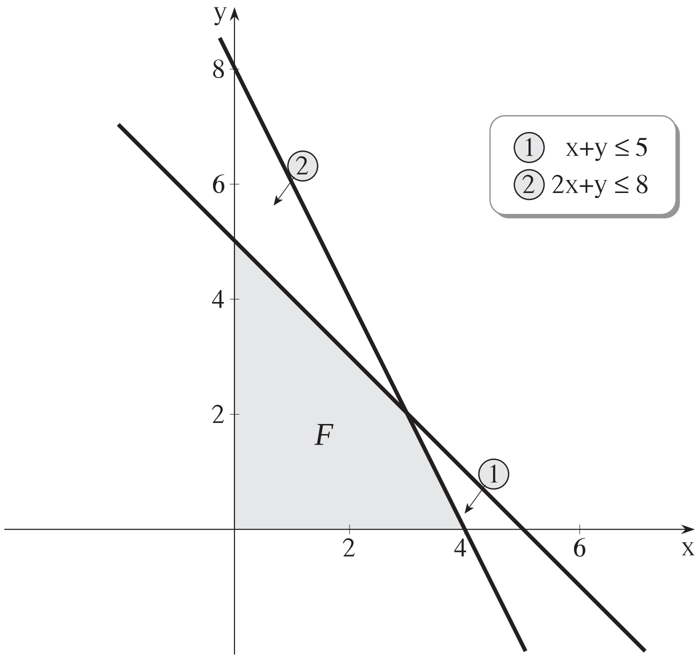
iv) $-x + y \leq 2$, $2x + y \leq 4$, $x, y \geq 0$

v) $x + y \geq 3$, $-3x + 2y \leq 6$, $x, y \geq 0$

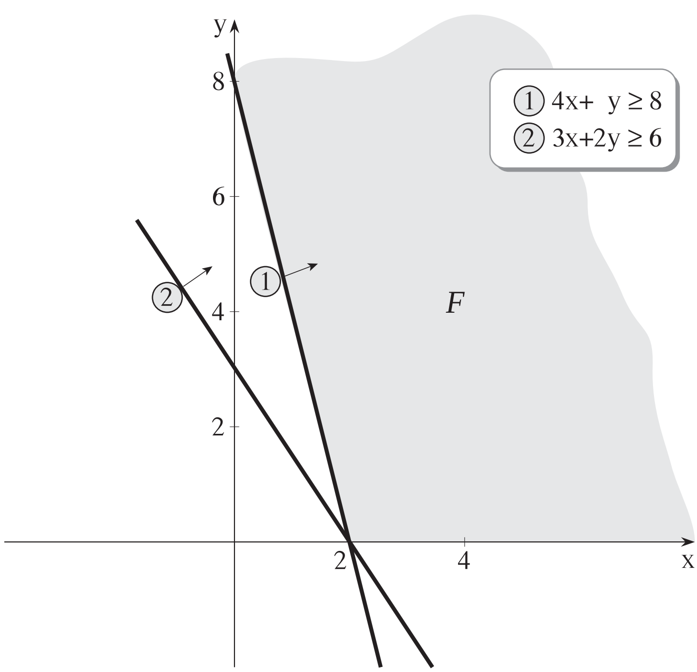
vi) $6x + 4y + 9z \leq 36$, $2x + 5y + 4z \leq 20$, $x, y, z \geq 0$

ΛΥΣΗ

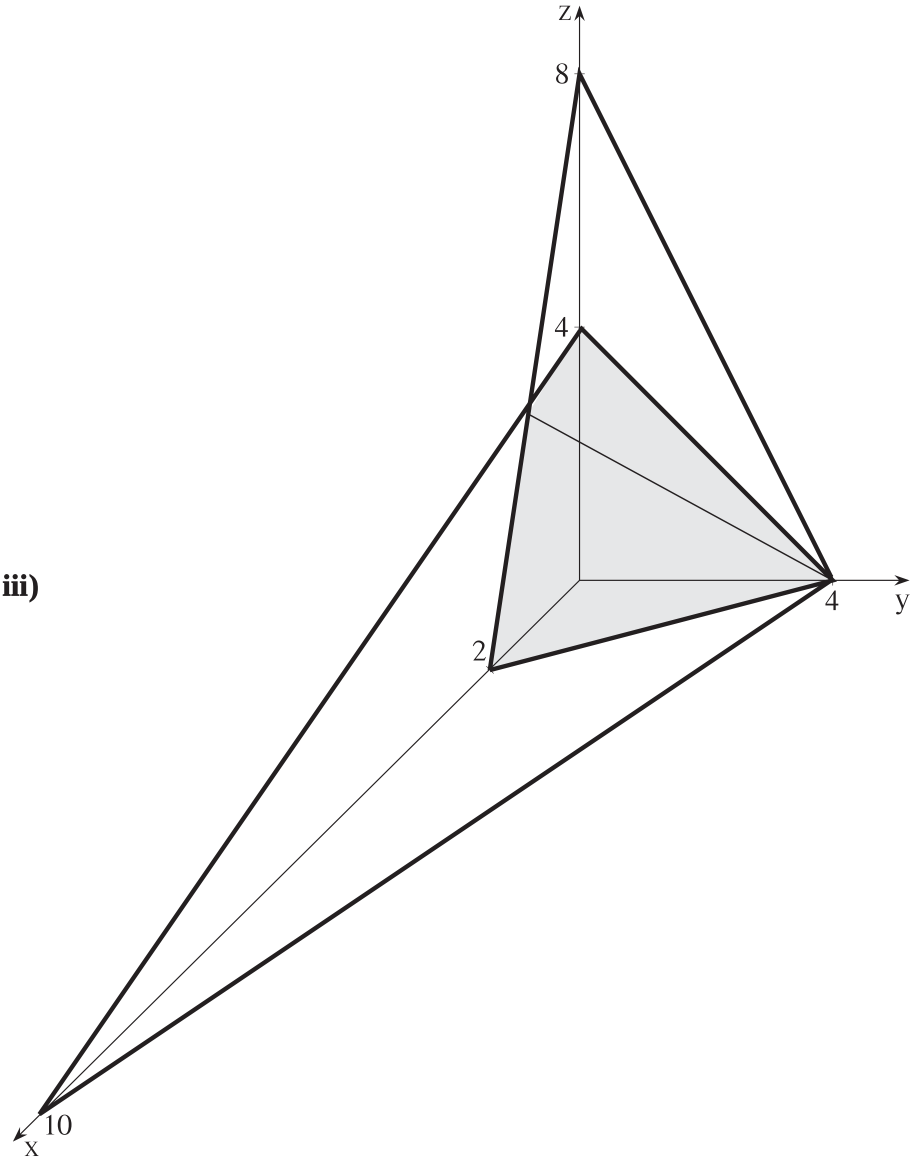
i)



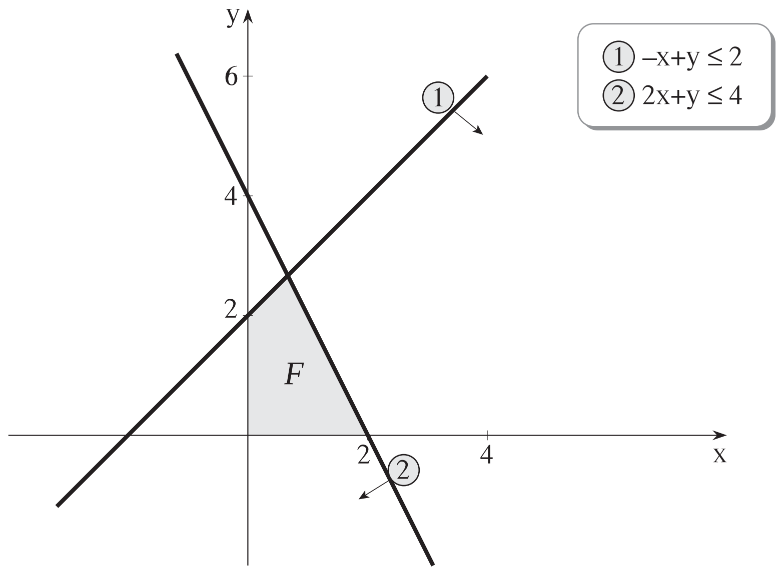
ii)



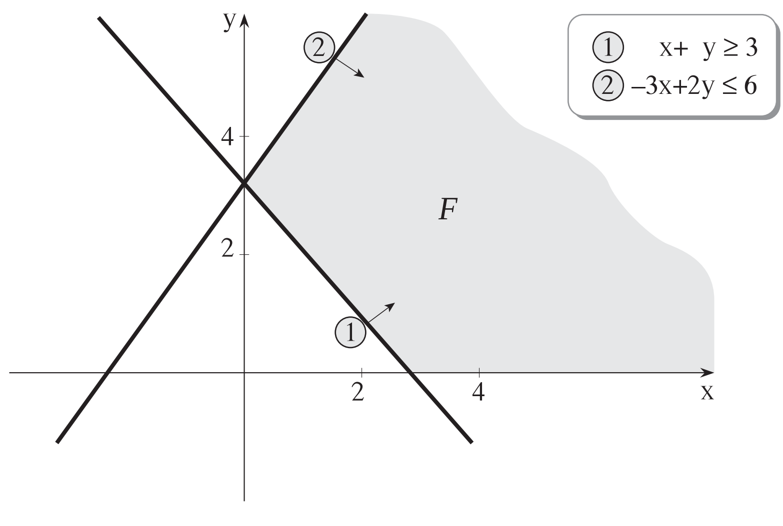
iii)



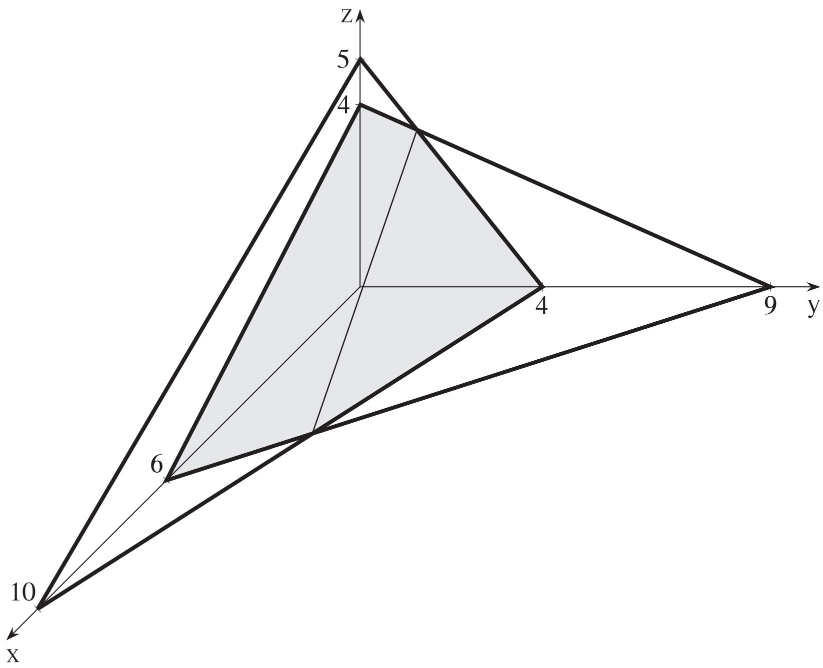
iv)



v)



vi)



12

Δίνεται το π.γ.π.

$$\max\ (4x_1+2x_2)$$

όταν

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & & & \leq & 4 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & \leq & 24 \\ 2x_1 & + & x_2 & \geq & 6 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1. *Να λυθεί γραφικά.*
2. *Ποια είναι η άριστη λύση αν η αντικειμενική συνάρτηση είναι συνάρτηση ελαχιστοποίησης κι όχι μεγιστοποίησης;*

ΛΥΣΗ

1. Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται η γραφική παράσταση της εφικτής περιοχής του προβλήματος: