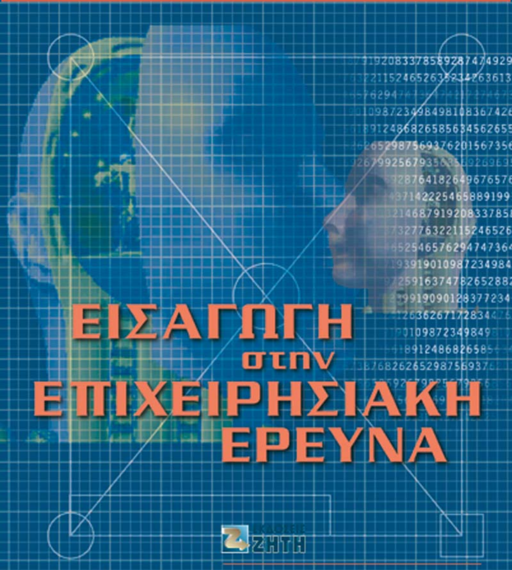
Ν. Δ. ΤΣΑΝΤΑΣ

Π.-Χ. Γ. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ



ΕΙΣΑΓΩΓΗ στην ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο υπογράφεται από τους συγγραφείς ή τον εκδότη

ISBN 960-431-390-8

Φωτοστοιχειοθεσία - Εκτύπωση **Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ**
Σόλωνος 79-81 ● ☎ (031) 825 453, 849 178
Θεσσαλονίκη 542 48 ● Fax (031) 825 453, 849 178

Βιβλιοπωλείο **ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ**
Αρμενοπούλου 27 ● ☎ (031) 203 720
Θεσσαλονίκη 546 35 ● Fax (031) 211 305

Αντί Προλόγου

Ένα Ιστορικό Σημείωμα

Η αρχή της Επιχειρησιακής Έρευνας σαν Επιστήμη μπορεί να προσδιοριστεί γύρω στα 1935. Υπάρχουν βέβαια και προγενέστερες προσπάθειες όπως αυτές του Erlang στην Κοπεγχάγη στην αρχή του αιώνα μας με τη θεωρία ουρών και τις εφαρμογές τους. Αυτές όμως όπως και άλλες σαν του Levinson και του Lanchester παρέμειναν αποσπασματικές.

Το 1935 η Βρετανική Αεροπορία με την ανακάλυψη του ραντάρ είχε την ανάγκη να σχεδιάσει τη στρατηγική της από την άποψη του εντοπισμού των Γερμανικών αεροπλάνων μέχρι την αναχαίτησή τους. Με τη στενή συνεργασία επιστημόνων και των πιλότων της Βρετανικής Αεροπορίας μεταξύ του καλοκαιριού του 1936 και του καλοκαιριού του 1937 αναπτύχθηκαν βασικές μέθοδοι επιχειρησιακού ελέγχου χωρίς τις οποίες η μάχη της Βρετανίας ποτέ δε θα είχε κερδηθεί. Οι βασικές αυτές μέθοδοι υπέστησαν τις συνεχείς επιδράσεις των αναγκών του πολέμου και δόθηκε η ευκαιρία να ελεγχθούν κάτω από την σκληρή πραγματικότητα. Σε σχέση μ' αυτή την επιστημονική δουλειά που γινόταν στο Bawdsey το 1938 ο A. P. Row αναφέρθηκε στην επιστημονική ομάδα σαν «επιχειρησιακή έρευνα» και πιστεύεται ότι αυτή είναι η ορολογία από όπου προέρχεται η ονομασία της Επιστήμης αυτής.

Γρήγορα αναπτύχθηκαν και άλλες ομάδες επιχειρησιακής έρευνας για τις συνεχώς νέες ανάγκες του πολέμου σε όλα τα όπλα του Βρετανικού στρατού. Πολύ γνωστή είναι η ομάδα που αναπτύχθηκε από το Φυσικό P.M.S Blackett (βραβείο Nobel) για τις ανάγκες του νυχτερινού πολέμου το φθινόπωρο του 1940 η οποία ήταν γνωστή και σαν «το τσίρκο του Blackett». Τον Οκτώβριο του 1942 οι πρώτες ομάδες επιχειρησιακής έρευνας εμφανίστηκαν στον Αμερικανικό καθώς και τον Καναδικό στρατό. Υπολογίζεται ότι οι επιστήμονες που εργάστηκαν σε ομάδες επιχειρησιακής έρευνας στους τρεις στρατούς ξεπερνούσαν τους 700. Στο Γερμανικό στρατό δεν υπάρχουν ενδείξεις ότι υπήρξαν τέτοιες ομάδες.

Οι ομάδες αυτές των επιστημόνων αποτέλεσαν το σπόρο για την ανάπτυξη της Επιχειρησιακής Έρευνας όταν διοχετεύθηκαν μετά το τέλος του Β′ Παγκοσμίου Πολέμου στη Βιομηχανία και στις άλλες ειρηνικές δραστηριότητες.

Στη δεύτερη και τρίτη δεκαετία της ανάπτυξής της η Επιχειρησιακή Έρευνα παρουσίασε το φαινόμενο της ανισοβαρούς ανάπτυξης της θεωρίας σε σχέση με την πράξη. Αυτό οφείλεται μερικά και στο απόρρητο (λόγω της ανταγωνιστικότητας) αρκετών εφαρμογών της. Παραμένει όμως από τις θετικές επιστήμες αυτή που έχει τη μεγαλύτερη επαφή με την πράξη.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειωθεί με έμφαση ότι μεταξύ της γνώσης των μεθοδολογιών της Επιχειρησιακής Έρευνας και των πρωτότυπων εφαρμογών τους υπάρχει μια απόσταση που πρέπει να διανύσει μόνος του ο Επιστήμονας που πρέπει να έχει τη διάθεση για κατάρτιση και το κλίμα δουλειάς που συναντάται σε ερευνητές και σε ερευνητικά ινστιτούτα κάποιου επιπέδου.

Η σημερινή κατάσταση της Επιχειρησιακής Έρευνας παρουσιάζει διαφορετικά χαρακτηριστικά από χώρα σε χώρα ανάλογα με την ανάπτυξή της. Από επιστημονικής πλευράς οι μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί είναι τόσες πολλές που εμφανίζονται ήδη ειδικότητες μέσα στην ίδια την επιστήμη και η δυναμική ανάπτυξη των εφαρμογών είναι πάρα πού μεγάλη και πολλές μέθοδοι που αναπτύχθηκαν με προφανή κίνητρα από την πράξη δεν έχουν ακόμη εμφανίσει όλες τις δυνατότητες των εφαρμογών τους.

Συστήματα - Μοντέλα

Πολλές φορές στην καθημερινή μας ζωή χρησιμοποιούμε τη λέξη σύστημα. Ίσως μία από τις πιο συχνά ακουγόμενες προτάσεις είναι «φταίει το σύστημα». Το «σύστημα» σύμφωνα με το λεξικό του Webster (New World Dictionary) είναι «είναι ένα σύνολο από τοποθετήσεις των αντικειμένων και υποκειμένων τα οποία σχετίζονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε ν' αποτελούν μία ολότητα». Είναι φανερή η ασάφεια που προκύπτει όταν κανείς θέλει να δώσει ένα κάπως αυστηρό ορισμό στη λέξη αυτή που τη χρησιμοποιούμε συχνά. Το σώμα μας δουλεύει σαν ένα σύστημα. Είμαστε όλοι μέλη πολλών και διαφόρων κοινωνικών συστημάτων όπως π.χ. της οικογένειάς μας, του κοινωνικού συστήματος που ζούμε, του Πανεπιστημιακού συστήματος κ.λπ.. Υπάρχουν συστήματα σ' όλες τις επιστήμες, κοινωνικές, φυσικές, χημικές, βιολογικές κ.λπ.

Η μελέτη των συστημάτων από την πλευρά της Επιχειρησιακής Έρευνας γίνεται με τη χρήση των μαθηματικών μοντέλων. Το μαθηματικό μοντέλο είναι μια προσομοίωση του πραγματικού κόσμου στο οποίο οι σημαντικές σχέσεις μεταξύ των πραγματικών στοιχείων έχουν αντικατασταθεί με παρόμοιες σχέσεις μεταξύ των μαθηματικών οντοτήτων, ενώ οι μη σημαντικές έχουν αγνοηθεί. Η βασική επιδίωξη είναι το μαθηματικό μοντέλο και το σύστημα να είναι ισόμορφα σε όλες τις σημαντικές για το σύστημα πλευρές.

Δηλ. όπως φτιάχνουμε ένα μικρό μοντέλο αεροπλάνου για να ελέγξουμε την ευστάθεια του πραγματικού σε διαφορετικές συνθήκες πτήσης, έτσι και το μαθηματικό μοντέλο χρησιμοποιείται για να μελετηθεί η συμπεριφορά του πραγματικού.

Τα μαθηματικά μοντέλα διακρίνονται σε προσδιοριστικά (deterministic) και στοχαστικά (stochastic). Αν οι συνέπειες οποιασδήποτε αλλαγής στο σύστημα μπορούν να προβλεφθούν με βεβαιότητα τότε το μοντέλο ονομάζεται προσδιοριστικό. Αν οι αλλαγές στο σύστημα μπορούν να εκφρασθούν μαθηματικά μόνο με τυχαίες μεταβλητές τότε το μοντέλο ονομάζεται στοχαστικό.

Οι φάσεις τις οποίες συνήθως ακολουθούμε για την κατασκευή και τη χρήση ενός μοντέλου είναι οι παρακάτω

α) Ο ορισμός του προβλήματος

Στη διάρκεια της φάσης αυτής εντοπίζονται οι βασικές παράμετροι του συστήματος, μέσα από τις επαφές με τους ενδιαφερόμενους και σε στενή συνεργασία μαζί τους ποσοτικοποιούνται οι σημαντικές συνιστώσες του προβλήματος, εντοπίζονται οι επιθυμητοί στόχοι καθώς και οι περιορισμοί που το σύστημα και οι υλικοτεχνικοί περιορισμοί επιβάλλουν.

β) Κατασκευή του μοντέλου

Η πρώτη ενέργεια είναι η συγκέντρωση των δεδομένων και ο έλεγχος της αξιοπιστίας τους. Μετά από αυτό ακολουθεί η οργάνωση και η μελέτη των δεδομένων, η καλή γνώση των οποίων είναι από τα βασικά για την επιτυχή κατασκευή ενός μοντέλου. Τώρα έχοντας ορίσει το πρόβλημα και οργανώσει το δεδομένα μας ακολουθεί η φάση της σκέψης μήπως κάποια από τις γνωστές στοχαστικές μεθόδους (μοντέλα) π.χ. Μαρκοβιανές αλυσίδες, θεωρία ουρών ή τις γνωστές διακεκριμένες μεθόδους (μοντέλα) π.χ. γραμμικός προγραμματισμός, ακέραιος προγραμματισμός, δυναμικός κ.λπ. ταιριάζει για τη λύση του προβλήματος. Στη φάση αυτή είναι που ελέγχεται σκληρά για πρώτη φορά το υπόβαθρο και οι πνευματικές ικανότητες της ομάδας Επιχειρησιακής Έρευνας. Θα πρέπει εδώ να τονισθεί ότι είναι σοβαρό λάθος να γίνεται προσπάθεια να «στριμωχθεί» το πρόβλημα σε μια από τις γνωστές μεθόδους όταν αυτό γίνεται σε βάρος της βαθύτερης ανάλυσης του προβλήματος. Σε περίπτωση που κάποια από τις γνωστές μεθόδους δεν προσφέρεται για τη λύση του προβλήματος τότε πρέπει να κατασκευαστεί ένα καινούριο στοχαστικό μοντέλο.

Παρακάτω αναλύουμε τι πρέπει να έχει κάποιος υπόψη του όταν κατασκευάζει ένα μοντέλο.

γ) Χρήση του μοντέλου

Στη φάση αυτή γίνεται η αξιοποίηση του μοντέλου που κατασκευάστηκε για να συμβάλλει στη λύση του προβλήματος. Έχει αποδειχθεί ότι είναι σημαντικό η ομάδα μελέτης ν' αναλάβει και την υλοποίηση των προτεινόμενων λύσεων. Η πράξη έχει δείξει ότι σε διαφορετική περίπτωση ο κίνδυνος οι μελέτες να μείνουν μόνο στα χαρτιά είναι πολύ μεγάλος.

Συνήθως ένα στοχαστικό μοντέλο κατασκευάζεται για ένα σύστημα με τους παρακάτω αντικειμενικούς σκοπούς:

α) Για να *περιγράψει* το σύστημα και να *εμβαθύνει* στις διάφορες πλευρές του.

β) Για να *προβλέψει* τη μελλοντική συμπεριφορά του συστήματος κάτω από διάφορες συνθήκες.

γ) Για να δώσει λύσεις «*πολιτικής*» σε διάφορα προβλήματα. Με τη λέξη «πολιτική» ονομάζουμε κάθε προγραμματισμένη αντιμετώπιση κάποιου προβλήματος στο σύστημα.

δ) Για την *αποφυγή* διαφόρων προβληματικών καταστάσεων οι οποίες μπορούν να προκύψουν προειδοποιώντας έγκαιρα πριν αυτές εμφανιστούν.

ε) Για να *συμβουλέψει* στο σχεδιασμό καλύτερων συστημάτων.

ζ) Για να μας δώσει *δείκτες* λειτουργικότητας ή άλλους για το σύστημα.

Τα παραπάνω αποτελούν συγχρόνως και κριτήρια καταλληλότητας ενός μοντέλου για κάποιο φαινόμενο.

Είναι η εφαρμογή της Επιχειρησιακής Έρευνας μόνο θέμα γνώσεων;

Από όσα έχουμε αναφέρει μέχρι στιγμής είναι φανερό ότι από τη στιγμή που κάποιο από τα συνήθη στοχαστικά μοντέλα δεν μπορεί να συμβάλλει στη λύση του προβλήματος υπάρχει η αναγκαιότητα της δημιουργίας ενός νέου στοχαστικού μοντέλου.

Για να φθάσει κάποιος στο επίπεδο να μπορεί να κατασκευάσει ένα νέο στοχαστικό μοντέλο και να το λύσει πέρα από τη βαθειά γνώση στο χειρισμό των τυχαίων μεταβλητών πρέπει τουλάχιστον να έχει κατανοήσει σε μεγάλο βάθος πως δημιουργούνται τα συνήθη στοχαστικά μοντέλα.

Αυτός είναι ένας από τους βασικούς λόγους που πιστεύουμε ότι είναι σοβαρό λάθος η παρουσίαση διάφορων στοχαστικών μοντέλων σε μορφή «συνταγών μαγειρικής». Αυτό το φαινόμενο μεταξύ των άλλων έχει οδηγήσει σε σωρεία κακών εφαρμογών της Επιχειρησιακής Έρευνας σε αναλογία με το αντίστοιχο φαινόμενο της Στατιστικής. Η τυφλή χρήση των πακέτων στοχαστικών μοντέλων στον ηλεκτρονικό υπολογιστή που γίνεται κυρίως από ανθρώπους χωρίς σοβαρό υπόβαθρο στη στοχαστική ανάλυση συνεισφέρει σοβαρά στην ανησυχητική επέκταση της πολύ κακής αυτής κατάστασης. Τις βλαβερές συνέπειες του φαινομένου αυτού μπορεί εύκολα να τις φανταστεί κάποιος αν και είναι αμφίβολο αν υπάρχουν αρκετοί που μπορούν να συνειδητοποιήσουν τους μεγάλους κινδύνους.

Πέρα όμως από όλα τα παραπάνω η «καλή εφαρμογή» των μεθόδων της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι και κάτι παραπάνω. Αυτό φαίνεται ίσως καθαρά από την αρκετά γνωστή ιστορία που φέρει τον τίτλο το «πρόβλημα του ανελκυστήρα»: Κάπου σ' ένα ψηλό κτίριο με γραφεία ο κόσμος εξέφρασε σοβαρά παράπονα στη διοίκηση ότι οι ανελκυστήρες δημιουργούσαν καθυστερήσεις στη διακίνηση του κόσμου. Μία ομάδα αναλυτών επιχειρησιακής έρευνας ανέλαβε να μελετήσει το πρόβλημα. Η μελέτη έδειξε ότι οι μέσοι χρόνοι αναμονής έλευσης του ανελκυστήρα καθώς και οι αναμενόμενοι χρόνοι αναμονής από τη στιγμή εισόδου στο κτίριο μέχρι την άφιξη στον προορισμό ενός επισκέπτη στο κτίριο ήταν παραδεκτοί σε όλη τη διάρκεια της ημέρας. Η ομάδα έλυσε το πρόβλημα με τη σχετικά ανέξοδη λύση της τοποθέτησης μεγάλων καθρεπτών σε όλους τους ορόφους γύρω από τους ανελκυστήρες.

Η ιστορία αυτή φέρει το μήνυμα ότι η επιτυχής λύση προβλημάτων από την πραγματική ζωή χρειάζεται και ένα δείκτη ευφυΐας και ανθρώπινη ωριμότητα.

Η δομή του παρόντος βιβλίου

Το βιβλίο αυτό αποτελεί μια προσπάθεια να γραφεί ένα βιβλίο με πολλά παραδείγματα για τις σημαντικότερες μεθόδους της Επιχειρησιακής Έρευνας. Το ενδιαφέρον μας έχει συγκεντρωθεί περισσότερο στη διαισθητική εμβάθυνση των μεθόδων και τη φυσική τους ερμηνεία, παρά στην αυστηρή μαθηματική θεμελίωσή τους. Αυτή, εξίσου απαραίτητη, υπάρχει σε άλλα βιβλία των συγγραφέων.

Στην προσέγγιση που επιχειρούμε εδώ, το βιβλίο χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος αναπτύσσεται ο Γραμμικός Προγραμματισμός και στο δεύτερο μέρος οι Μαρκοβιανές Αλυσίδες.

Στο κεφάλαιο 1 δίνονται οι βασικές ιδέες του Γραμμικού Προγραμματισμού και θεμελιώνεται το αντίστοιχο μαθηματικό μοντέλο για έναν μεγάλο αριθμό πρακτικών εφαρμογών. Στο 2ο κεφάλαιο παρουσιάζεται ο αλγόριθμος Simplex, μια επαναληπτική τεχνική για την επίλυση π.γ.π., ενώ στο κεφάλαιο 3 αναπτύσσεται η δυϊκή θεωρία και η ανάλυση ευαισθησίας μαζί με την οικονομική ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Στο 4ο κεφάλαιο καταγράφονται οι σημαντικότερες ειδικές εφαρμογές του γραμμικού προγραμματισμού: τα προβλήματα μεταφοράς, μεταφόρτωσης και εκχώρησης.

Στο επόμενο κεφάλαιο (5ο), παρουσιάζονται οι Μαρκοβιανές Αλυσίδες με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων. Αναπτύσσονται μεταξύ των άλλων οι μέθοδοι εκτίμησης των παραμέτρων τους, η ασυμπτωτική τους συμπεριφορά, οι μέσοι χρόνοι εισόδου με τις διακυμάνσεις τους, κ.λπ. Στο 6ο κεφάλαιο τέλος, δίνεται μια διαισθητική εισαγωγή στις Μαρκοβιανές διαδικασίες.

Το βιβλίο περιέχει ένα μεγάλο αριθμό παραδειγμάτων, που με συμπλήρωμα το βιβλίο ασκήσεων των Βασιλείου, Τσακλίδη και Τσάντα (1996) προσφέρει την ευκαιρία για μια καλή εξοικείωση στα θέματα που πραγματεύεται. Επιπλέον, σαφείς αναφορές σε γνωστά λογισμικά πακέτα Επιχειρησιακής Έρευνας υπάρχουν για όλα σχεδόν τα θέματα που πραγματεύεται το βιβλίο.

Θεσσαλονίκη 1996 *Π. - Χ. Γ. Βασιλείου*
Ν. Τσάντας

Περιεχόμενα

Ι. Διακεκριμενεσ Μεθοδοι στην Επιχειρησιακη Ερευνα

1. Βασικές έννοιες Γραμμικού Προγραμματισμού

2. Η μέθοδος Simplex

3. Δυϊκή θεωρία

6. Μαρκοβιανές Διαδικασίες

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Ο γραμμικός προγραμματισμός είναι μια τεχνική που ασχολείται με το πρόβλημα της κατανομής των *περιορισμένων* πόρων ενός συστήματος σε *ανταγωνιζόμενες* δραστηριότητες κατά τον *καλύτερο* δυνατό τρόπο (καθώς και με άλλα προβλήματα με ανάλογη ή παραπλήσια διαμόρφωση). Θεωρείται σαν μια από τις πιο σπουδαίες μαθηματικές ανακαλύψεις των μέσων χρόνων του εικοστού αιώνα και στις μέρες μας αποτελεί ένα μοντέλο ευρείας χρήσης για καθημερινά ζητήματα των περισσότερων μεσαίου και μεγάλου μεγέθους εμπορικών - βιομηχανικών εταιρειών.

Από μαθηματικής σκοπιάς, ο γραμμικός προγραμματισμός περιγράφει ένα μοντέλο που αφορά τη μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση μιας γραμμικής συνάρτησης κάτω από κάποιους γραμμικούς περιορισμούς. Ο όρος «προγραμματισμός» δεν έχει την έννοια του «προγραμματισμού ηλεκτρονικών υπολογιστών» αλλά αυτήν του «σχεδιασμού». Ο γραμμικός προγραμματισμός ασχολείται με τη σχεδίαση των δραστηριοτήτων του συστήματος που περιγράφει για να προκύψει το *άριστο* αποτέλεσμα, το αποτέλεσμα δηλαδή εκείνο, που μεταξύ όλων των δυνατών εναλλακτικών λύσεων πραγματώνει τον προκαθορισμένο σκοπό κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Η αρχική μαθηματική διατύπωση του προβλήματος καθώς και μια συστηματική διαδικασία λύσης του, **η μέθοδος Simplex**, οφείλεται στον G. B. Dantzig στα 1947. Νωρίτερα διάφορα προβλήματα τύπου γραμμικού προγραμματισμού είχαν διαμορφωθεί και επιλυθεί. Τα σημαντικότερα από αυτά αφορούν το πρόβλημα μεταφοράς (Hitchcock 1941, Koopmans 1949) και το πρόβλημα της δίαιτας (Stigler 1945). Ο Dantzig ήταν όμως ο άνθρωπος που κατασκεύασε το γενικό πλαίσιο και ταυτόχρονα ανακάλυψε μέθοδο επίλυσής του.

Στο βιβλίο αυτό τα τέσσερα πρώτα κεφάλαια αφορούν το γραμμικό προγραμματισμό. Ασχολούμαστε όχι μόνο με τη θεωρία αλλά και τις εφαρμογές του.

1.1 Μορφοποίηση Προβλημάτων σε Προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού

Μορφοποίηση Προβλημάτων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1

Η βιοτεχνία χρωμάτων «ΧΡΩΤΕΞ Α.Ε.» κατασκευάζει δύο είδη χρωμάτων, πλαστικά και υδροχρώματα, τα οποία στη συνέχεια διαθέτει χονδρικώς στην αγορά. Η παραγωγή τους γίνεται αποκλειστικά σχεδόν από τα υλικά Α και Β σύμφωνα με τα πιο κάτω (ημερήσια) δεδομένα:

	Τόννοι υλικού ανά τόννο χρώματος		**Διαθέσιμες ποσότητες (τόννοι)**
	ΠΛΑΣΤΙΚΟ	**ΥΔΡΟΧΡΩΜΑ**	
ΥΛΙΚΟ Α	1	2	6
ΥΛΙΚΟ Β	2	1	8

Μια έρευνα αγοράς που πραγματοποιήθηκε για λογαριασμό της «ΧΡΩΤΕΞ Α.Ε.» έδειξε ότι οι ημερήσιες απαιτήσεις σε υδρόχρωμα δεν ξεπερνούν τις απαιτήσεις σε πλαστικά χρώματα τον ένα τόννο και ότι η μέγιστη ημερήσια ζήτησή τους (των υδροχρωμάτων) περιορίζεται στους δύο τόννους. Αν το κέρδος ανά τόννο πλαστικού χρώματος ανέρχεται στις 300 000 δρχ. και ανά τόννο υδροχρώματος στις 200 000 δρχ., προσδιορίστε τις ημερήσιες παραγόμενες ποσότητες για το κάθε είδος χρώματος ώστε να μεγιστοποιούνται τα ολικά κέρδη της βιοτεχνίας.

Λύση

Για να διαμορφώσουμε το μαθηματικό πρότυπο (μοντέλο) ενός τέτοιου προβλήματος θα πρέπει να προσδιορίσουμε:

i) τις *μεταβλητές* (αγνώστους) του προβλήματος,

ii) τους *περιορισμούς* που θα πρέπει να ενσωματώσουμε στις μεταβλητές ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες του προβλήματος, και

iii) έναν *αντικειμενικό στόχο* που θα πρέπει να επιτευχθεί.

Στην εφαρμογή μας ψάχνουμε να βρούμε τις ποσότητες πλαστικών χρωμάτων και υδροχρωμάτων (μεταβλητές) που θα πρέπει να παραχθούν ημερησίως ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό κέρδος της βιοτεχνίας (αντικειμενικός στόχος) ενώ παράλληλα θα ικανοποιούνται οι περιορισμοί προσφοράς που αφορούν τις πρώτες ύλες Α και Β, καθώς και οι περιορισμοί ζήτησης της αγοράς.

Μεταβλητές. Μια και θέλουμε να προσδιορίσουμε τις ποσότητες (σε τόννους) πλαστικών χρωμάτων και υδροχρωμάτων που θα πρέπει να παραχθούν ημερήσια, ορίζουμε να είναι

x_1 οι τόννοι της ημερήσιας παραγωγής σε πλαστικά χρώματα

x_2 οι τόννοι της ημερήσιας παραγωγής σε υδρόχρωμα

Αντικειμενικός στόχος. Αφού το κέρδος από την πώληση ενός τόννου πλαστικού χρώματος ανέρχεται στις 300 000 δρχ., το κέρδος από την πώληση των x_1 τόννων θα είναι $300x_1$ (χιλιάδες δρχ.). Όμοια το κέρδος από την πώληση των x_2 τόννων υδροχρώματος θα είναι $200x_2$ (χιλιάδες δρχ.). Έτσι αν συμβολίσουμε με z το συνολικό κέρδος (σε χιλιάδες δρχ.) αντικειμενικός σκοπός του προβλήματός μας είναι η επιλογή των τιμών των μεταβλητών x_1, x_2 κατά τρόπο ώστε να μεγιστοποιείται η

$$z = 300x_1 + 200x_2 \quad \text{(συνολικό κέρδος)}$$

Περιορισμοί. Οι περιορισμοί του προβλήματος αφορούν αφενός μεν την προσφορά των πρώτων υλών A και B:

$$\begin{pmatrix} \text{απαιτήσεις σε υλικά} \\ \text{των δύο ειδών χρωμάτων} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \text{μέγιστες διαθέσιμες ποσότητες} \\ \text{των υλικών} \end{pmatrix}$$

αφετέρου δε τη ζήτηση της αγοράς σε χρώματα:

$$\begin{pmatrix} \text{απαιτήσεις της αγοράς σε υδρόχρωμα} \\ \text{ως προς τις} \\ \text{απαιτήσεις της αγοράς σε πλαστικά χρώματα} \end{pmatrix} \le 1 \text{ τόννου ημερησίως}$$

$$\begin{pmatrix} \text{απαιτήσεις της αγοράς} \\ \text{σε υδρόχρωμα} \end{pmatrix} \le 2 \text{ τόννων ημερησίως}$$

Από τον πίνακα με τα δεδομένα της παραγωγής προκύπτει ότι για έναν τόννο πλαστικού χρώματος χρειάζονται ένας τόννος από το υλικό A, ενώ για έναν τόννο υδροχρώματος απαιτούνται δύο τόννοι του ίδιου υλικού (A). Άρα για την παραγωγή των x_1, x_2 τόννων πλαστικού χρώματος και υδροχρώματος αντίστοιχα, χρειάζονται $x_1 + 2x_2$ τόννοι υλικού A ενώ είναι διαθέσιμοι έξι. Επομένως θα πρέπει

$$x_1 + 2x_2 \le 6 \quad \text{(υλικό A)}$$

και όμοια

$$2x_1 + x_2 \le 8 \quad \text{(υλικό B)}$$

Αναφορικά τώρα με τους περιορισμούς στην πώληση των δύο ειδών χρωμάτων (απαιτήσεις της αγοράς) θα έχουμε

$$x_2 - x_1 \le 1 \quad \text{(περίσσεια ζήτηση υδροχρώματος ως προς τα πλαστικά χρώματα)}$$

$$x_2 \le 2 \quad \text{(μέγιστη ζήτηση υδροχρώματος)}$$

Τέλος, αφού οι ποσότητες παραγωγής των δύο ειδών χρωμάτων δεν μπορούν να είναι αρνητικοί, είναι αναγκαίο να περιορίσουμε τις τιμές των μεταβλητών να είναι μη αρνητικές, δηλαδή $x_1 \ge 0$ και $x_2 \ge 0$.

Συνοψίζοντας, το μαθηματικό πρότυπο για το πρόβλημα της βιοτεχνίας «ΧΡΩΤΕΞ Α.Ε.» είναι το εξής:

Προσδιορίστε τους τόννους πλαστικού χρώματος x_1 και υδροχρώματος x_2 που πρέπει να παραχθούν ημερήσια, κατά τρόπο ώστε:

$$\text{maximize } \; z = 300x_1 + 200x_2$$

κάτω από τις συνθήκες (περιορισμούς):

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ 2x_1 + x_2 &\le 8 \\ -x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

▲

Γραμμικός Προγραμματισμός

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1. Μια πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}: \; \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(\mathbf{x})$$

είναι **γραμμική** αν και μόνο αν για κάποιο σύνολο πραγματικών σταθερών αριθμών $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ισχύει

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2. Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης χαρακτηρίζεται σαν **πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού** (π.γ.π.) όταν

i) Αφορά την μεγιστοποίηση (ή ελαχιστοποίηση) μιας *γραμμικής* συνάρτησης των αγνώστων (μεταβλητών). Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται *αντικειμενική συνάρτηση*.

ii) Οι τιμές των αγνώστων (μεταβλητών) ικανοποιούν ένα σύνολο *περιορισμών*. Κάθε περιορισμός πρέπει να είναι μια *γραμμική* εξίσωση ή ανίσωση.

iii) Κάθε μεταβλητή x_j είναι μη αρνητική ($x_j \geq 0$) ή δεν έχει περιορισμό στο πρόσημο ($x_j \in \mathbb{R}$).

Το πρόβλημα της βιοτεχνίας «ΧΡΩΤΕΞ Α.Ε.» είναι π.γ.π. αφού η αντικειμενική συνάρτηση:

$$\max\,(300x_1 + 200x_2)$$

είναι μια γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών x_1, x_2 και όλοι οι περιορισμοί:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

είναι γραμμικές ανισώσεις. Επιπλέον δε, ικανοποιείται και η απαίτηση του μη αρνητικού προσήμου των μεταβλητών:

$$x_1, x_2 \geq 0\,.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3. Το υποσύνολο F του $\mathbb{R}^n$ που σχηματίζεται από τα σημεία $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ που ικανοποιούν *όλους* τους περιορισμούς ενός π.γ.π. ονομάζεται **εφικτή περιοχή** του π.γ.π., τα δε σημεία $\mathbf{x}$ **εφικτές λύσεις**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4. Σ' ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης **άριστη** ή **βέλτιστη λύση** ονομάζεται κάθε εφικτή λύση, η οποία μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση:

$$\mathbf{x}^* \in F:\ f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}) \quad \forall\, x \in F$$

Ομοίως σ' ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης θα είχαμε:

$$\mathbf{x}^* \in F:\ f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall\, x \in F.$$

Τα πιο πολλά π.γ.π. έχουν μόνο μια άριστη λύση. Εντούτοις υπάρχουν π.γ.π. που δεν έχουν άριστη λύση και άλλα που έχουν άπειρες λύσεις.

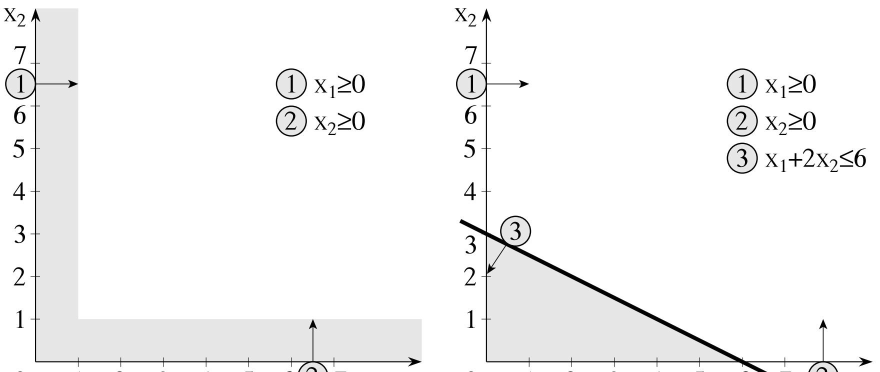
1.2 Γραφική Επίλυση Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού

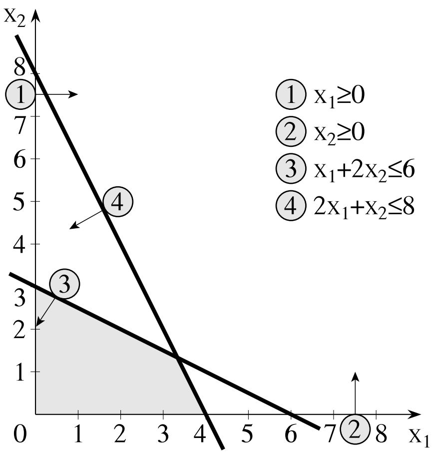
Οποιοδήποτε π.γ.π. με δύο μόνο μεταβλητές μπορεί να λυθεί γραφικά. Σε μια τέτοια περίπτωση, ονομάζουμε τις μεταβλητές x_1 και x_2 και εισάγουμε μια γραφική παράσταση με δύο άξονες (x_1 και x_2 επίσης). Στην παράγραφο αυτή θα αναπτύξουμε την τεχνική της γραφικής επίλυσης ενός π.γ.π. παραθέτοντας τη γραφική επίλυση του προβλήματος της βιοτεχνίας «ΧΡΩΤΕΞ Α.Ε.».

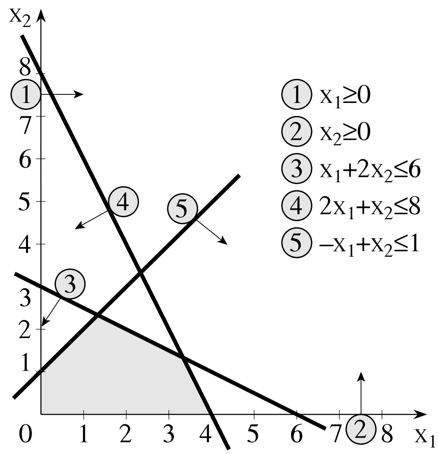
Το πρώτο βήμα στη διαδικασία της γραφικής επίλυσης ενός π.γ.π. αφορά το σχεδιασμό της εφικτής περιοχής, την εύρεση δηλαδή του συνόλου των (x_1, x_2) που επιτρέπονται από τους περιορισμούς. Σημειώστε εδώ, ότι λόγω των περιορισμών της μη αρνητικότητας η εφικτή περιοχή είναι μέρος του πρώτου τεταρτημορίου (θετικοί ημιάξονες).

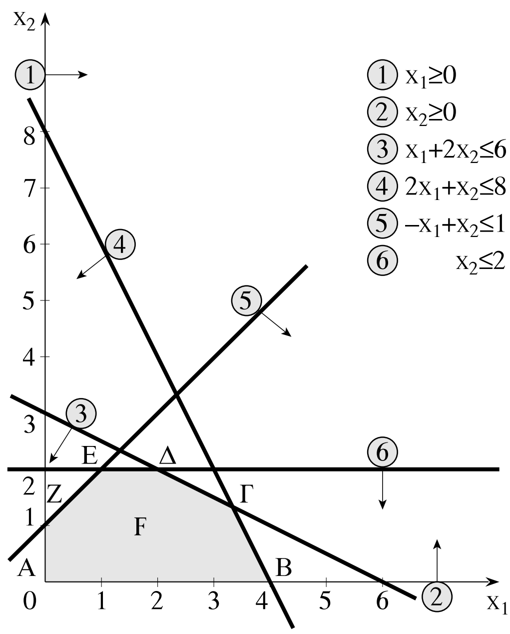
Θεωρούμε τον τυχαίο γραμμικό περιορισμό $f(x_1, x_2)\geq b$ ή $f(x_1, x_2)\leq b$. Το σύνολο των σημείων (x_1, x_2) που τον ικανοποιούν σχηματίζεται από τα σημεία της ευθείας $f(x_1, x_2)=b$ μαζί με όλα τα σημεία που βρίσκονται στη μια πλευρά της ευθείας. Για να προσδιορίσουμε την πλευρά αυτή διαλέγουμε ένα τυχαίο σημείο $P(x_1, x_2)$ το οποίο δεν ικανοποιεί τη σχέση $f(x_1, x_2)=b$. Αν ικανοποιεί τον περιορισμό, τότε και όλα τα σημεία που βρίσκονται από την πλευρά της ευθείας $f(x_1, x_2)=b$ που βρίσκεται το P ικανοποιούν τον περιορισμό (και αντιθέτως).

Η εφαρμογή της διαδικασίας αυτής στο πρόβλημα της βιοτεχνίας «ΧΡΩΤΕΞ Α.Ε.» δίνεται διαδοχικά στα σχήματα



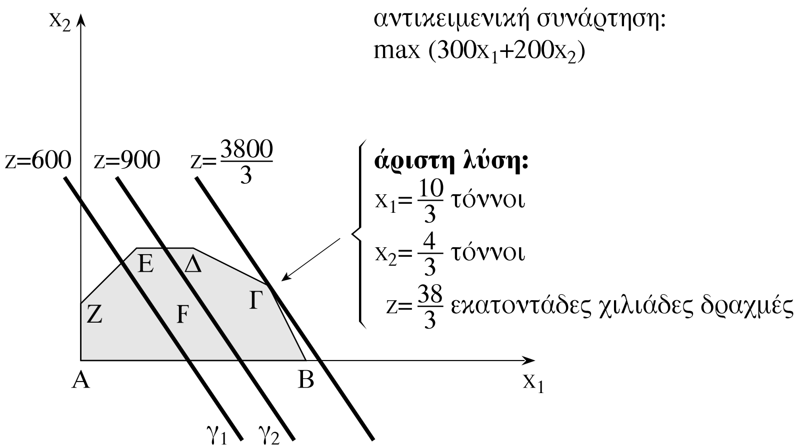






το τελευταίο των οποίων δίνει τη ζητούμενη εφικτή περιοχή.

Κάθε σημείο του πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς του προβλήματος και επομένως αντιπροσωπεύει μια εφικτή λύση. Αν και υπάρχουν άπειρες εφικτές λύσεις, μπορούμε να βρούμε την άριστη λύση παρατηρώντας την κατεύθυνση προς την οποία η αντικειμενική συνάρτηση $z = 300x_1 + 200x_2$ μεγαλώνει (έχουμε πρόβλημα μεγιστοποίησης).



Κατασκευάζουμε την τυχαία ευθεία γραμμή γ_1: $300x_1+200x_2 = 600$. Παρατηρούμε ότι για αυξανόμενες τιμές του $z = 600, 900, \ldots$ οι αντίστοιχες ευθείες $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ είναι παράλληλες και συνεχώς απομακρυνόμενες από την τομή των αξόνων. Επομένως πρέπει να σύρουμε μια οικογένεια παράλληλων προς την γ_1 ευθειών, που να έχουν τουλάχιστον ένα σημείο στην εφικτή περιοχή και να επιλέξουμε την ευθεία εκείνη της οποίας η απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι η μέγιστη δυνατή.

Στην εφαρμογή μας η άριστη λύση δίνεται στο σημείο Γ (10/3, 4/3) που δίνει (μέγιστη) τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση $12+\frac{2}{3}$ εκατοντάδων χιλιάδων δραχμών. Για την παραγωγή των 10/3 τόννων πλαστικού χρώματος και των 4/3 τόννων υδροχρώματος θα χρησιμοποιηθούν όλες οι διαθέσιμες ποσότητες των υλικών Α και Β. ▲

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2

Η μικρή εταιρεία ξύλινων παιγνιδιών «ΞΥΛΑΞ» παράγει αποκλειστικά στρατιωτάκια και τραινάκια. Ένα στρατιωτάκι για να κατασκευαστεί χρειάζεται μία ώρα ξυλουργική εργασία και δύο ώρες βάψιμο με κόστος 1000 δρχ. σε πρώτες ύλες και 1400 δρχ. σε εργατικά. Αντίστοιχα, για ένα τραινάκι χρειάζονται μία ώρα ξυλουργική εργασία και μία ώρα βάψιμο, ενώ το κόστος ανέρχεται σε 900 δρχ. για πρώτες ύλες και 1000 δρχ. για εργατικά.

Μια πρόχειρη οικονομοτεχνική μελέτη που έγινε στην «ΞΥΛΑΞ», έδειξε ότι εβδομαδιαίως υπάρχουν διαθέσιμες 80 ώρες ξυλουργικής εργασίας και 100 ώρες για βάψιμο, ενώ η αγορά μπορεί να απορροφήσει όσα τραινάκια κι αν παρασκευαστούν αλλά μόνο 40 στρατιωτάκια.

Αν τα έσοδα από κάθε στρατιωτάκι ανέρχονται στις 2700 δρχ. κι από κάθε τραινάκι στις 2100 δρχ. προσδιορίστε την εβδομαδιαία παραγωγή η οποία μεγιστοποιεί το κέρδος της «ΞΥΛΑΞ».

Λύση

Μεταβλητές. Ψάχνουμε να βρούμε τον αριθμό από στρατιωτάκια και τραινάκια που θα πρέπει να παράγονται εβδομαδιαία. Έτσι ορίζουμε να είναι:

x_1 ο αριθμός των ξύλινων στρατιωτών που κατασκευάζονται εβδομαδιαία.

x_2 ο αριθμός των ξύλινων τραίνων που κατασκευάζονται εβδομαδιαία

Αντικειμενική συνάρτηση. Ας συμβολίσουμε με z το συνολικό εβδομαδιαίο κέρδος της «ΞΥΛΑΞ». Ο στόχος του προβλήματος είναι η εύρεση εκείνων των τιμών x_1, x_2 οι οποίες μεγιστοποιούν το z (κάτω από τους περιορισμούς που επιβάλλονται από τη δυναμικότητα της εταιρείας και τη ζήτηση της αγοράς). Είναι μάλλον φανερό ότι σε εβδομαδιαία βάση έχουμε:

κέρδη = έσοδα – κόστος πρώτης ύλης – κόστος εργατικών

Στο πρόβλημά μας είναι:

εβδομαδιαία έσοδα =

$$\begin{aligned} &= \text{έσοδα από τα στρατιωτάκια} && + \text{έσοδα από τα τραινάκια} \\ &= \left(\frac{\text{δρχ.}}{\text{στρατιωτάκι}}\right)\left(\frac{\text{στρατιωτάκι}}{\text{εβδομάδα}}\right) && + \left(\frac{\text{δρχ.}}{\text{τραινάκι}}\right)\left(\frac{\text{τραινάκι}}{\text{εβδομάδα}}\right) \\ &= 2700x_1 && + 2100x_2 \end{aligned}$$

εβδομαδιαίο κόστος πρώτης ύλης =

$$\begin{aligned} &= \text{κόστος από τα στρατιωτάκια} && + \text{κόστος από τα τραινάκια} \\ &= \left(\frac{\text{κόστος}}{\text{στρατιωτάκι}}\right)\left(\frac{\text{στρατιωτάκι}}{\text{εβδομάδα}}\right) && + \left(\frac{\text{κόστος}}{\text{τραινάκι}}\right)\left(\frac{\text{τραινάκι}}{\text{εβδομάδα}}\right) \\ &= 1000x_1 && + 900x_2 \end{aligned}$$

εβδομαδιαίο κόστος εργατικών =

$$\begin{aligned} &= \text{εργατικά από τα στρατιωτάκια} && + \text{εργατικά από τα τραινάκια} \\ &= \left(\frac{\text{εργατικά}}{\text{στρατιωτάκι}}\right)\left(\frac{\text{στρατιωτάκι}}{\text{εβδομάδα}}\right) && + \left(\frac{\text{εργατικά}}{\text{τραινάκι}}\right)\left(\frac{\text{τραινάκι}}{\text{εβδομάδα}}\right) \\ &= 1400x_1 && + 1000x_2 \end{aligned}$$

κι άρα:

$$\begin{aligned} z &= (2700x_1 + 2100x_2) - (1000x_1 + 900x_2) - (1400x_1 + 1000x_2) \\ &= (300x_1 + 200x_2) \end{aligned}$$

Περιορισμοί. Αν δεν υπήρχαν κάποιου είδους περιορισμοί η αντικειμενική συνάρτηση (: εβδομαδιαία κέρδη της «ΞΥΛΑΞ») θα μπορούσε να αυξάνεται απεριόριστα. Στο πρόβλημά μας κάτι τέτοιο εμποδίζεται, αφενός μεν από τη δυναμικότητα της εταιρείας σε ώρες βαψίματος και ξυλουργικής εργασίας, αφετέρου δε από τη ζήτηση της αγοράς σε στρατιωτάκια. Πιο συγκεκριμένα:

1. για να κατασκευαστεί ένα στρατιωτάκι χρειάζονται 2 ώρες βάψιμο, για το ένα τραινάκι 1 ώρα ενώ οι διαθέσιμες ώρες εβδομαδιαία είναι 100:

   $2x_1 + x_2 \leq 100$ (ώρες βαψίματος την εβδομάδα)

2. για να κατασκευαστεί ένα στρατιωτάκι χρειάζονται 1 ώρα ξυλουργικής εργασίας, για το ένα τραινάκι επίσης 1 ώρα ενώ οι διαθέσιμες ώρες εβδομαδιαία είναι 80:

   $x_1 + x_2 \leq 80$ (ώρες ξυλουργικής εργασίας την εβδομάδα)

3. η αγορά δεν μπορεί να απορροφήσει περισσότερα από 40 στρατιωτάκια την εβδομάδα:

   $x_1 \leq 40$ (εβδομαδιαία ζήτηση της αγοράς σε στρατιωτάκια)

4. φυσικά έχουμε και

   $x_1, x_2 \geq 0$ (δεν είναι δυνατόν η κατασκευή αρνητικού αριθμού παιγνιδιών)

Συνοψίζοντας, το μαθηματικό πρότυπο που περιγράφει το πρόβλημα της «ΞΥΛΑΞ» είναι το εξής:

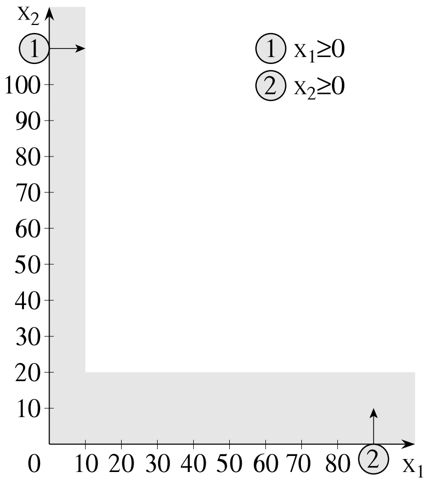
$$\text{maximize} = (300x_1 + 200x_2)$$

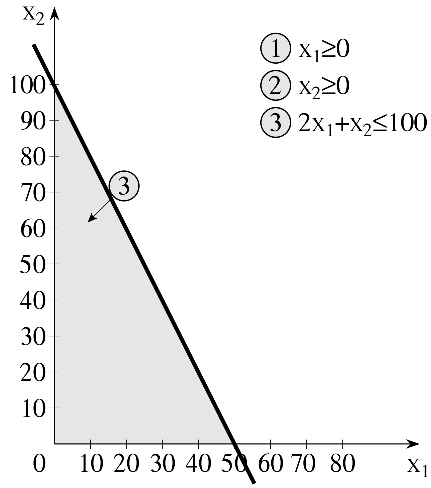
όταν:

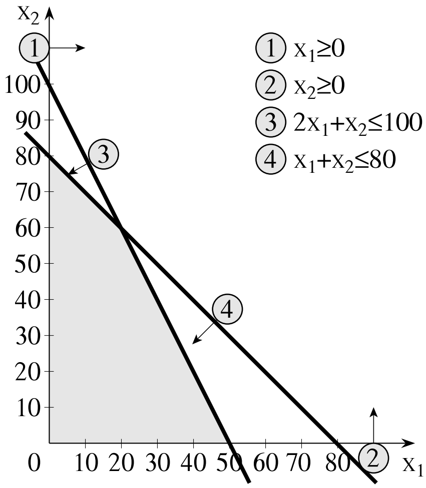
$2x_1 + x_2 \leq 100$		(διαθέσιμες ώρες βαψίματος)
$x_1 + x_2 \leq 80$		(διαθέσιμες ώρες ξυλουργικής εργασίας)
$x_1 \leq 40$		(απορρόφηση αγοράς σε στρατιωτάκια)
$x_1 , x_2 \geq 0$		

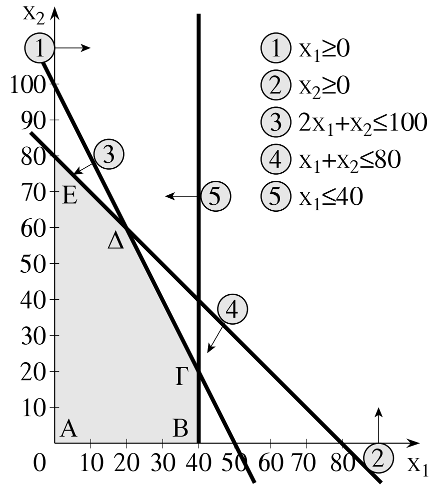
Στο μοντέλο αυτό, τόσο η αντικειμενική συνάρτηση όσο και οι περιορισμοί είναι γραμμικοί των μεταβλητών x_1, x_2 και επομένως έχουμε ένα π.γ.π.

Γραφική επίλυση. Τα σχήματα που ακολουθούν δίνουν τη γραφική παράσταση της εφικτής περιοχής του προβλήματος αυτού καθώς η διαδικασία επηρεάζεται διαδοχικά από τους περιορισμούς:

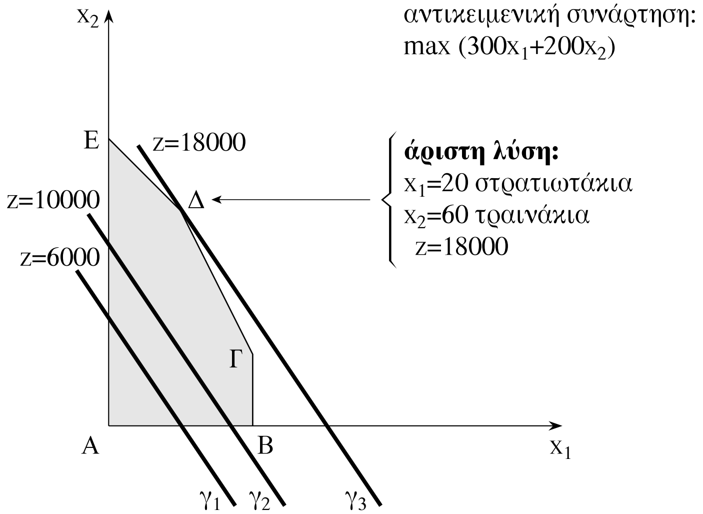








Η εφικτή περιοχή ορίζεται από το πολύγωνο ΑΒΓΔΕ. Για την εύρεση της άριστης λύσης κατασκευάζουμε αρχικά την ευθεία γραμμή γ_1 που διέρχεται από ένα τυχαίο σημείο της εφικτής περιοχής, έστω το (0, 30) γ_1: $300x_1 + 200x_2 = 6000$. Οποιαδήποτε παράλληλη μετακίνηση της ευθείας γ_1 σε κατεύθυνση βορειο-ανατολική μεγαλώνει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.



Τελικά, η ευθεία που απέχει περισσότερο από την αρχή των αξόνων (στην υποδεικνυόμενη κατεύθυνση) έχοντας τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με την εφικτή περιοχή είναι η ευθεία $\gamma_3 : 300x_1 + 200x_2 = 18000$ που διέρχεται από το σημείο Δ(20, 60). Η άριστη λύση δηλαδή για το πρόβλημά μας απαιτεί την κατασκευή 20 ξύλινων στρατιωτών και 60 τραίνων, αποφέρει δε εβδομαδιαίο κέρδος 18000 δρχ. ▲

Αφού βρούμε την άριστη λύση σ' ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, είναι απαραίτητο στη συνέχεια (βλέπε 3ο κεφάλαιο) να ταξινομήσουμε τους περιορισμούς του σε δεσμευτικούς ή χαλαρούς.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5. Ένας περιορισμός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού χαρακτηρίζεται σαν **δεσμευτικός** αν-ν η άριστη λύση τον καθιστά ισότητα. Στην αντίθετη περίπτωση ονομάζεται **χαλαρός**.

Έτσι για το παράδειγμα της «ΞΥΛΑΞ» –: άριστη λύση η (20, 60)– οι περιορισμοί

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 100 \\ x_1 + x_2 &\leq 80 \end{aligned}$$

είναι δευσμευτικοί, ενώ ο

$$x_1 \leq 40$$

χαλαρός (περίσσευμα 20 μονάδων).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3

Μια βιομηχανία αυτοκινήτων κατασκευάζει φορτηγά και επιβατικά αυτοκίνητα. Η γραμμή παραγωγής διαχωρίζεται χονδρικά σε δύο στάδια, αυτό της συναρμολόγησης και εκείνο της βαφής. Μια σχετική μελέτη έδειξε ότι αν το τμήμα συναρμολόγησης κατασκεύαζε αποκλειστικά φορτηγά θα παράγονταν ημερήσια 50 αυτοκίνητα, ενώ αν στους φούρνους βαφής έβαφαν αποκλειστικά φορτηγά θα βάφονταν ημερήσια 40 αυτοκίνητα. Οι αριθμοί για τα επιβατικά αυτοκίνητα είναι αντίστοιχα 50 (κατασκευή) και 60 (βαφή). Αν το κέρδος από κάθε φορτηγό ανέρχεται στο ποσό των 3 000 000 δρχ και από κάθε επιβατικό σε 2 000 000 δρχ. προσδιορίστε την ημερήσια παραγωγή η οποία μεγιστοποιεί το κέρδος της αυτοκινητοβιομηχανίας.

Λύση

Μεταβλητές. Ψάχνουμε να βρούμε τον αριθμό φορτηγών και επιβατικών αυτοκινήτων (παραγωγή) που θα πρέπει να κατασκευαστούν ημερήσια. Έτσι ορίζουμε να είναι

x_1 ο αριθμός των φορτηγών που παράγονται ημερήσια

x_2 ο αριθμός των επιβατικών αυτοκινήτων που παράγονται ημερήσια

Αντικειμενική συνάρτηση. Αν συμβολίσουμε με z το συνολικό κέρδος (σε εκατομμύρια δρχ.) αντικειμενικός σκοπός του προβλήματος είναι η επιλογή τιμών για τις μεταβλητές x_1, x_2 έτσι ώστε επιτυγχάνεται η μεγιστοποίηση της συνάρτησης

$$z = 3x_1 + 2x_2 \quad \text{(συνολικό κέρδος)}$$

Περιορισμοί. Οι περιορισμοί του προβλήματος αφορούν τις (ημερήσιες) δυνατότητες των γραμμών παραγωγής και βαφής της αυτοκινητοβιομηχανίας. Από τα δεδομένα προκύπτει ότι, αφού σε μια ημέρα κατασκευάζονται 50 φορτηγά, για τα x_1 που θα παραχθούν απαιτείται $\frac{x_1}{50}$ της ημέρας. Ομοίως απαιτείται $\frac{x_2}{50}$ της ημέρας για την παραγωγή των x_2 επιβατικών αυτοκινήτων. Επομένως θα πρέπει

$$\frac{x_1}{50} + \frac{x_2}{50} \leq 1 \text{ ημέρας} \quad \text{(γραμμή παραγωγής)}$$

Αναφορικά με τη βαφή, τα δεδομένα μας οδηγούν να συμπεράνουμε ότι χρειάζεται $\frac{x_1}{40}$ ημέρας για τη βαφή των x_1 φορτηγών και $\frac{x_2}{60}$ ημέρας για τη βαφή των x_2 επιβατικών αυτοκινήτων. Άρα

$$\frac{x_1}{40} + \frac{x_2}{60} \leq 1 \text{ ημέρας} \quad \text{(βαφή)}$$

Τέλος, αφού δεν είναι προφανώς δυνατόν η κατασκευή αρνητικού αριθμού αυτοκινήτων θα είναι και $x_1, x_2 \geq 0$.

Συνοψίζοντας, έχουμε το εξής μαθηματικό πρότυπο:

Προσδιορίστε τον αριθμό φορτηγών x_1 και επιβατικών αυτοκινήτων x_2 που πρέπει να παραχθούν ημερήσια ώστε

$$\text{maximize} \quad z = 3x_1 + 2x_2$$

κάτω από τις συνθήκες

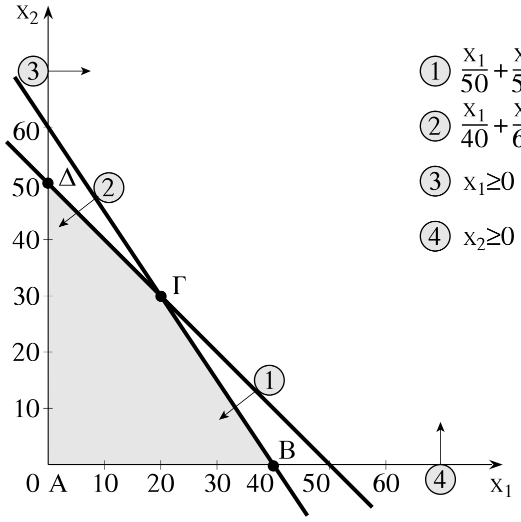
$$\frac{x_1}{50} + \frac{x_2}{50} \leq 1$$

$$\frac{x_1}{40} + \frac{x_2}{60} \leq 1$$

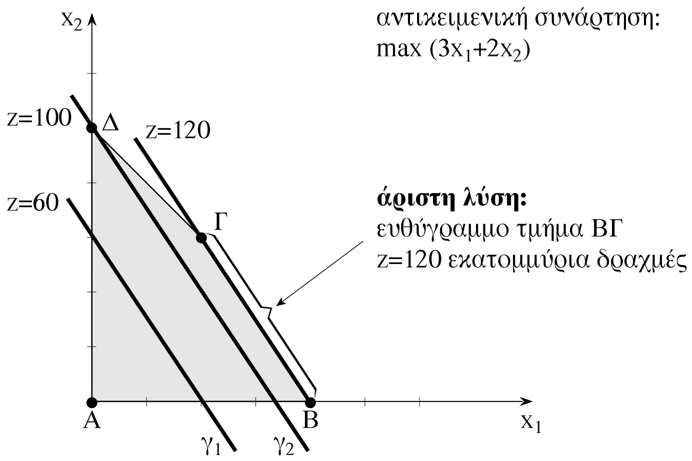
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Στο μοντέλο αυτό, τόσο η αντικειμενική συνάρτηση όσο και οι περιορισμοί είναι γραμμικοί των μεταβλητών x_1, x_2 και επομένως έχουμε ένα π.γ.π.

Γραφική επίλυση. Η εφικτή περιοχή ορίζεται από το πολύγωνο ΑΒΓΔ:



Για την εύρεση της άριστης λύσης κατασκευάζουμε αρχικά την ευθεία γραμμή γ_1 που διέρχεται από το σημείο $(20, 0)$ γ_1: $3x_1 + 2x_2 = 60$



Οποιαδήποτε παράλληλη μετακίνηση της ευθείας γ_1 σε κατεύθυνση βορειο-ανατολική μεγαλώνει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Παρατηρούμε τελικά, ότι η ευθεία που απέχει περισσότερο από την αρχή των αξόνων (στην υποδεικνυόμενη κατεύθυνση) έχοντας τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με την εφικτή περιοχή είναι ολόκληρο το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ.

Ως εκ τούτου, οποιοδήποτε σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν άριστη λύση και το πρόβλημα έχει *άπειρες* άριστες λύσεις. ▲

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4

Υποθέτοντας ότι οι αντιπρόσωποι της αυτοκινητοβιομηχανίας του παραδείγματος 1.3 απαιτούν την ημερήσια παράδοση τουλάχιστον 30 φορτηγών και 20 αυτοκινήτων, πώς διαμορφώνεται η πολιτική παραγωγής;

Λύση

Στην περίπτωση αυτή το π.γ.π. που ακολουθεί περιγράφει τη νέα κατάσταση του συστήματος που μελετάμε:

Προσδιορίστε τον αριθμό φορτηγών x_1 και επιβατικών αυτοκινήτων x_2 που πρέπει να παραχθούν ημερήσια ώστε

$$\text{maximize} \quad z = 3x_1 + 2x_2$$

όταν

$$\frac{x_1}{50} + \frac{x_2}{50} \le 1$$

$$\frac{x_1}{40} + \frac{x_2}{60} \le 1$$

$$x_1 \ge 30$$

$$x_2 \ge 20$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Τα σχήματα που ακολουθούν δίνουν τη γραφική παράσταση της εφικτής περιοχής του παραπάνω προβλήματος καθώς η διαδικασία επηρεάζεται διαδοχικά από τους περιορισμούς