Π.-Χ. Γ. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ
Καθηγητής Α.Π.Θ.

Γ. ΤΣΑΚΛΙΔΗΣ
Επικ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

Ν. ΤΣΑΝΤΑΣ
Επικ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ στην ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

ΤΟΜΟΣ 2

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο υπογράφεται από τους συγγραφείς ή τον εκδότη

ISBN set 960-431-499-8
ISBN Τ.2 960-431-501-3

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 171 • Νέοι Επιβάτες Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72.222 (5 γραμ.) - Fax: 23920 72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203.720, Fax 2310 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

www.ziti.gr

Το βιβλίο αφιερώνεται στη μνήμη αυτών που έφυγαν τόσο σύντομα από κοντά μας

Στον πατέρα μου Μιχάλη Τσακλίδη
Στο φίλο μου Ρίζο Κ. Μάνικα
Στο φίλο μου Κώστα Μέγα

«Τα πνεύματά μας, δέκτες και πομποί
παιρνούν και στέλνουν των καιρών το πνεύμα
σε μιαν αρχαία και νέα ζωής πομπή
που ακολουθεί της ιστορίας το νεύμα»

Γιάννης Ρίτσος

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στο βιβλίο αυτό δίνεται μια ολοκληρωμένη συλλογή ασκήσεων (+400 ασκήσεις) πάνω σε θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας.

Στον πρώτο τόμο οι ασκήσεις αφορούν το Γραμμικό Προγραμματισμό. Για τις περισσότερες από αυτές δίνεται και ο τρόπος λύσης του από κάποιο λογισμικό (LINDO, QSB+ ή EXCEL) οι οδηγίες λειτουργίας των οποίων υπάρχουν σε ειδικό παράρτημα του βιβλίου.

Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να αποκτήσει τα αρχεία δεδομένων τους κάνοντας ανώνυμο ftp στον εξυπηρετή του Μαθηματικού Τμήματος

(`ftp://ftp.math.auth.gr directory/pub/or`).

Στο δεύτερο τόμο έχουν συγκεντρωθεί ασκήσεις Δυναμικού Προγραμματισμού κι Ακέραιου Προγραμματισμού, καθώς επίσης και ασκήσεις από τη θεωρία των μη Γραμμικών Μεθόδων Βελτιστοποίησης, των Μαρκοβιανών Αλυσίδων, τη θεωρία Ουρών, τις ΗμιΜαρκοβιανές Αλυσίδες, τη θεωρία Ανανέωσης και τη θεωρία των Μαρκοβιανών Διαδικασιών.

Ο συμβολισμός και η ορολογία που χρησιμοποιείται είναι από τα βιβλία των Τσάντα και Βασιλείου (1996), Βασιλείου (1990, 1991, 1996).

Θεσσαλονίκη, 1998

Π. - Χ. Βασιλείου
Γ. Τσακλίδης
Ν. Τσάντας

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο

1°

ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΑΛΥΣΙΔΕΣ

1.1. Ομογενείς Μαρκοβιανές Αλυσίδες

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1

Μια στοχαστική διαδικασία είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών ορισμένων σ' ένα χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Εάν υπάρχει αριθμήσιμο πλήθος των μελών της οικογένειας τότε η διαδικασία συμβολίζεται με $X_1, X_2, X_3, \ldots$. Εάν το πλήθος των μελών της οικογένειας δεν είναι αριθμήσιμο τότε η διαδικασία συμβολίζεται με $\{X(t): t\geq 0\}$ ή $\{X_t\}_{t\geq 0}$. Στην πρώτη περίπτωση η διαδικασία ονομάζεται μια διαδικασία σε χρόνο διακριτό ενώ στη δεύτερη περίπτωση μια στοχαστική διαδικασία σε χρόνο συνεχή.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2

Ο χώρος των καταστάσεων S, είναι ο χώρος που δημιουργείται απ' όλες τις πιθανές τιμές X_i. Εάν $S = (0, 1, 2, \ldots)$ αναφερόμαστε στη στοχαστική διαδικασία σα μια διαδικασία με ακέραιες τιμές ή μια διακριτών καταστάσεων διαδικασία. Εάν $S = (-\infty, \infty)$ τότε η στοχαστική διαδικασία καλείται μια στοχαστική διαδικασία με πραγματικές τιμές.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3

Μια στοχαστική διαδικασία καλείται Μαρκοβιανή αν για κάθε $t_1, t_2, \ldots, t_\kappa$

$$\text{πιθ}\{\alpha < X_t < \beta \mid X_{t_1} = x_1, X_{t_2}=x_2, \ldots, X_{t_n} = x_n\} = \text{prob}\{\alpha < X_t < \beta \mid X_{t_n} = x_n\}$$

όπου $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t$.

Η κατηγορία των Μαρκοβιανών διαδικασιών που είναι σε χρόνο διακριτό και με χώρο καταστάσεων διακριτό καλούνται Μαρκοβιανές αλυσίδες.

Έτσι μπορούμε να ορίσουμε μια αλυσίδα του Markov σαν μια ακολουθία $X_0, X_1, X_2, \ldots$ διακεκριμένων τυχαίων μεταβλητών με την ιδιότητα ότι η υπό συνθήκη κατανομή της X_{n+1} όταν δίνονται οι $X_0, X_1, \ldots, X_n$ εξαρτάται μόνο από την τιμή της X_n δηλαδή

$$\pi\iota\theta\{X_{n+1}=j \mid X_n=i, \ldots, X_0=\lambda\} = \pi\iota\theta\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\} = p_{ij}(n) .$$

Οι πιθανότητες $p_{ij}(n)$ για $i, j=1, 2, \ldots, k$ και $n=0, 1, \ldots$ ονομάζονται και *πιθανότητες μετάβασης* της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Ο πλέον βολικός τρόπος αναφοράς σ' αυτές τις πιθανότητες είναι με τη μορφή ενός πίνακα $\mathbf{P}(t)$ με πεπερασμένες διαστάσεις όταν ο χώρος των καταστάσεων S είναι πεπερασμένος. Δηλαδή

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \ldots & p_{1k}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \ldots & p_{2k}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{k1}(t) & p_{k2}(t) & \ldots & p_{kn}(t) \end{pmatrix} .$$

Ο πίνακας $\mathbf{P}(t)$ ονομάζεται *πίνακας μετάβασης* της Μαρκοβιανής αλυσίδας για το χρονικό διάστημα $[t-1, t)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4

Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα καλείται *στατική* ή *ομογενής* αν η πιθανότητα μετάβασης από τη μια κατάσταση στην άλλη είναι ανεξάρτητη από το χρόνο που γίνεται η μετάβαση. Έτσι έχουμε για όλες τις καταστάσεις i και j

$$\pi\iota\theta\{X_n=j \mid X_{n-1}=i\} = p_{ij} \quad \text{για κάθε} \quad t=1, 2, \ldots .$$

Για μια ομογενή Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ ορίζουμε τις πιθανότητες

$$p_j(t) = \pi\iota\theta\{X_t=j\} , \quad j=0, 1, \ldots, k, \quad t=0, 1, \ldots .$$

Έστω το διάνυσμα

$$\mathbf{p}(t) = [p_0(t), p_1(t), \ldots, p_k(t)] .$$

➯ *Θεώρημα 1.1*

Εάν ο πίνακας μετάβασης μιας πεπερασμένης ομογενούς Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι $\mathbf{P}$ τότε ισχύουν τα παρακάτω

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{p}(0)\,\mathbf{P}^t \quad \text{για} \quad t=1, 2, \ldots$$

$$p_{ij}(m+n) = \sum_{l=0}^{k} p_{il}(m)\, p_{lj}(n) .$$

Η δεύτερη σχέση είναι γνωστή και σαν η Chapman-Kolmogorov σχέση για τις Μαρκοβιανές αλυσίδες.

1.2. Στατιστική συμπερασματολογία σε πεπερασμένες Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Συμβολίζουμε με n_{ij} τον αριθμό των μεταβάσεων από το i στο j και με

$$n_i = \sum_{i=1}^{k} n_{ij} \ , \quad \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} n_{ij} = n \ .$$

Οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας των πιθανοτήτων μετάβασης p_{ij} είναι

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i} \quad i, j = 1, 2, \ldots, k \ .$$

Έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε αν τα δεδομένα μας προέρχονται από μια συγκεκριμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα $\mathbf{P}^*$ σε σχέση με τα πειραματικά μας δεδομένα από όπου εκτιμούμε ότι ο πίνακας είναι $\mathbf{P}$. Η μηδενική υπόθεση δηλαδή είναι

$$H_0 : \hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^* \ .$$

Για μια συγκεκριμένη μετάβαση ένα στατιστικό κριτήριο ελέγχου υπόθεσης μπορεί να στηριχθεί στο γεγονός ότι το στατιστικό

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i (\hat{p}_{ij} - p^*_{ij})^2}{p^*_{ij}} \quad j=1, 2, \ldots, k$$

έχει τη χ^2 κατανομή με $k-1$ βαθμούς ελευθερίας. Οι βαθμοί αυτοί ελευθερίας υπολογίζονται με την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχουν μηδενικά στοιχεία p^*_{ij} στο παραπάνω στατιστικό. Αν υπάρχουν μηδενικά στοιχεία στην i γραμμή τότε πρέπει να ληφθούν υπόψη μόνο τα μη μηδενικά στοιχεία. Για την περίπτωση που θέλουμε να ελέγξουμε όλες μαζί τις μεταβάσεις τότε ένα στατιστικό κριτήριο ελέγχου υπόθεσης μπορεί να στηριχθεί στο γεγονός ότι το στατιστικό

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \frac{n_i(\hat{p}_{ij} - p^*_{ij})^2}{p^*_{ij}}$$

έχει την χ^2 κατανομή με $k(k-1)-\alpha$ βαθμούς ελευθερίας, όπου α είναι ο αριθμός των μηδενικών στοιχείων στον πίνακα $\mathbf{P}^*$.

Το δεύτερο σκέλος του ελέγχου στατιστικής υπόθεσης που θα μας απασχολήσει είναι ο έλεγχος ομογένειας.

Σ' αυτήν την περίπτωση έστω ότι $\mathbf{P}(t)$ είναι ο πίνακας μετάβασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας κατά τη χρονική στιγμή t. Τότε ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας για την πιθανότητα μετάβασης $p_{ij}(t)$ σε μια δεδομένη χρονική στιγμή είναι

$$\hat{p}_{ij}(t) = \frac{n_{ij}(t)}{n_i(t-1)} \ .$$

Όταν έχουμε ένα σύνολο από παρατηρήσεις μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας σε ένα μεγάλο χρονικό διάστημα $[0, T]$ και υποθέτουμε ότι οι πιθανότητες μετάβασης είναι ομογενείς τότε ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας για οποιαδήποτε μετάβαση δίνεται από

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T} n_{ij}(t)}{\sum_{t=1}^{T} n_i(t)} \ .$$

Αν θεωρήσουμε τη μηδενική υπόθεση ότι οι πιθανότητες μετάβασης για μια συγκεκριμένη κατάσταση παραμένουν σταθερές μέσα στο χρόνο τότε

$$H_0 : p_{ij}(t) = p_{ij} \quad \text{για όλα τα } j \in F(i) \ \text{ και } t, \ \text{δεδομένου του } i$$

όπου $F(i)$ είναι το σύνολο των τιμών του j για το οποίο $p_{ij}(t) > 0$ και έστω $n(i)$ ο αριθμός των μελών του συνόλου $F(i)$. Τότε κάτω από αυτή την υπόθεση το στατιστικό

$$\chi^2(i) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{F(i)} n_i(t) \frac{[\hat{p}_{ij}(t) - \hat{p}_{ij}]^2}{\hat{p}_{ij}}$$

έχει κατά προσέγγιση την χ^2 κατανομή με $(T-1) \times [F(i)-1]$ βαθμούς ελευθερίας.

1.3. Κατηγοροποίηση των καταστάσεων μιας Μαρκοβιανής Αλυσίδας

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5

Μια κατάσταση i καλείται *προσιτή* από την κατάσταση j εάν για κάποιο ακέραιο $n \geq 0$ ισχύει $p_{ij}(n) \geq 0$. Δύο καταστάσεις που είναι προσιτές μεταξύ τους λέμε ότι βρίσκονται σε *επικοινωνία*. Η σχέση επικοινωνίας δύο καταστάσεων i, j συμβολίζεται $i \leftrightarrow j$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6

Μια κατάσταση i ονομάζεται *μη βασική* εάν για κάποια κατάσταση j για την οποία $i \leftrightarrow j$ ισχύει $j \not\leftrightarrow i$. Επίσης η i ονομάζεται μη βασική εάν δεν υπάρχει καμιά κατάσταση j τέτοια ώστε $i \rightarrow j$. Μια κατάσταση ονομάζεται *βασική* εάν δεν είναι *μη βασική*. Κατά συνέπεια εάν η i είναι βασική και $i \rightarrow j$ τότε $i \leftrightarrow j$.

Πρόταση 1.1

(i) Για κάθε κατάσταση i που δεν είναι κατάσταση απορρόφησης υπάρχουν τουλάχιστον μια κατάσταση j τέτοια ώστε $i \rightarrow j$.

(ii) Αν η κατάσταση i είναι βασική τότε $i \leftrightarrow i$.

(iii) Αν $i \leftrightarrow j$ και $j \leftrightarrow k$ τότε $i \leftrightarrow k$.

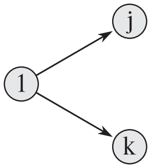
(iv) Αν η i κατάσταση είναι βασική και $i \rightarrow j$ τότε και η j είναι βασική και $i \leftrightarrow j$.

(v) Έστω B το σύνολο των βασικών καταστάσεων μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας. Η σχέση επικοινωνίας είναι μια σχέση ισοδυναμίας για το σύνολο B.

Αφού η σχέση επικοινωνίας αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας το σύνολο των βασικών καταστάσεων χωρίζεται με βάση τη σχέση επικοινωνίας σε κλάσεις βασικών καταστάσεων. Καταστάσεις βασικές που ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις βασικών καταστάσεων δεν είναι προσιτές μεταξύ τους. Η εύρεση των βασικών και μη βασικών καταστάσεων ενός πίνακα, καθώς και των κλάσεών τους, μπορεί να γίνει με την παρακάτω διαδικασία.

Φάση 1

Ξεκινάμε με την κατάσταση 1 σημειώνοντας σε ένα διάγραμμα ροής όλες τις καταστάσεις j οι οποίες είναι ποσιτές από την κατάσταση 1, δηλαδή



Φάση 2

Συνεχίζουμε το διάγραμμα ροής για κάθε κατάσταση στην οποία έχουν καταλήξει τόξα από την 1, σημειώνοντας όλες τις καταστάσεις που είναι προσιτές από αυτήν. Συνεχίζουμε μ' αυτόν τον τρόπο το διάγραμμα ροής για όλες τις καταστάσεις οι οποίες εμφανίζονται στο δεξί άκρο, εκτός από αυτές που έχουν ήδη εμφανισθεί σε προηγούμενη φάση. Τελειώνουμε τη διαδικασία όταν έχουν εμφανισθεί όλες οι καταστάσεις. Εάν υπάρχουν καταστάσεις, που δεν έχουν εμφανιστεί στο διάγραμμα ροής, ξεκινάμε με κάποια από αυτές ένα κανούργιο διάγραμμα μέχρι που να εξαντληθούν όλες.

Διαδικασία γραφής της κανονικής μορφής

Η *κανονική μορφή* ενός στοχαστικού πίνακα προκύπτει από την αρχική του μορφή τηρώντας την παρακάτω σειρά γραφής των καταστάσεων:

α) Γράφουμε πρώτα τις κλάσεις των βασικών καταστάσεων με αύξουσα σειρά ως προς το πλήθος των καταστάσεων των κλάσεων.

β) Γράφουμε μετά τις κλάσεις των μη βασικών καταστάσεων με τέτοια σειρά, ώστε να είναι πρώτες εκείνες που είναι προσιτές από άλλες. Δηλαδή δεν πρέπει να υπάρχει στον πίνακα μη βασική κλάση καταστάσεων η οποία να είναι προσιτή από άλλη κλάση που βρίσκεται "ψηλότερα" στον πίνακα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7

Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα καλείται αδιαχώριστη αν έχει μόνο μια βασική κλάση καταστάσεων και δεν έχει μη βασικές καταστάσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8

Η κατάσταση j έχει περίοδο d εάν οι παρακάτω δύο συνθήκες ισχύουν

(i) $p_{jj}(n) = 0$ για κάθε n εκτός εάν $n=md$ για κάποιο θετικό ακέραιο m

(ii) d είναι ο μέγιστος ακέραιος με την ιδιότητα (i).

Η κατάσταση i ονομάζεται απεριοδική όταν $d=1$. Συμβολίζουμε την περίοδο μιας κατάστασης με $\pi(i) = d$. Ένας ισοδύναμος ορισμός της περιόδου μιας κατάστασης μιας Μαρκοβιανής Αλυσίδας είναι ο παρακάτω.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9

Περίοδος μιας κατάστασης j είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης (μ.κ.δ.) όλων των $n \geq 1$ για τους οποίους $p_{jj}(n) > 0$.

⇨ *Θεώρημα 1.2*

Εάν $i \leftrightarrow j$ τότε και $\pi(i) = \pi(j)$.

Έστω μία αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα n μία βασική κλάση καταστάσεων E με περίοδο d. Για δεδομένο $i \in E$ μπορούμε να θεωρήσουμε το υποσύνολο $C_b(i)$ του E το οποίο αποτελείται από όλες τις καταστάσεις που αντιστοιχούν στην ίδια κλάση υπολοίπου $b \pmod d$ δηλαδή

$$C_b(i) = \{ j \in E : p_{ij}(n) > 0, \text{ για όλα τα } n \equiv b \ (\text{mod } d) \}, \quad 0 \le b \le d-1 .$$

Τότε τα σύνολα $C_b(i)$, $0 \le b \le d-1$ δεν εξαρτώνται από το i. Ονομάζουμε τις κλάσεις C_b $(0 \le b \le d-1)$ των οποίων η τομή τους είναι ανά δύο το κενό σύνολο και η ένωσή τους η βασική κλάση καταστάσεων E, κυκλικές υποκλάσεις της κλάσης E.

➯ *Θεώρημα 1.3*

Έστω μια αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα n μία κλάση βασικών καταστάσεων E με περίοδο d. Εάν $\varkappa \in C_b$, $0 \le b \le d-1$ και $p_{\varkappa j} > 0$ τότε $j \in C_{b-1}$.

Ο πίνακας μετάβασης μιας αδιαχώριστης Μαρκοβιανής αλυσίδας περιόδου d μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{d-2} \\ C_{d-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C_0 & C_1 & C_2 & \dots & C_{d-1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{P}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{P}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{P}_{d-2} \\ \mathbf{P}_{d-1} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \end{pmatrix} \end{array}$$

όπου $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_{d-1}$ στοχαστικοί πίνακες γενικά ορθογώνιοι.

Ορίζουμε με $f_{ii}(n)$ την πιθανότητα επαναφοράς του συστήματος της Μαρκοβιανής αλυσίδας μετά n-βήματα στην κατάσταση i για πρώτη φορά δηλαδή

$$f_{ii}(n) = \pi\iota\theta\{ X_n = i, X_r \neq i, r=1,\dots, n-1 | X_0 = i \} .$$

Έστω $f_{j\varkappa}(n)$ η πιθανότητα το σύστημα να μεταβεί από την κατάσταση j στην κατάσταση $\varkappa$ σε n-βήματα για πρώτη φορά δηλ.

$$f_{j\varkappa}(n) = \pi\iota\theta\{ X_n = \varkappa, X_r \neq \varkappa, r=1,\dots, n-1 | X_0 = j \} .$$

Οι παραπάνω ορισμοί συμπληρώνονται και από το γεγονός ότι ορίζουμε $f_{ii}(0) = f_{ij}(0) = 0$. Είναι προφανές ότι αν συμβολίσουμε με f_i την πιθανότητα επαναφοράς της Μαρκοβιανής αλυσίδας στην κατάσταση i για πρώτη φορά τότε

$$f_i = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}(n) .$$

Επίσης συμβολίζοντας με $f_{j\varkappa}$ την πιθανότητα μετάβασης για πρώτη φορά από την κατάσταση j στην κατάσταση $\varkappa$ με το ίδιο σκεπτικό έχουμε ότι

$$f_{j\varkappa} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{j\varkappa}(n) \,.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.10

Μία κατάσταση i καλείται επαναληπτική εάν $f_i = 1$. Εάν $f_i < 0$ τότε η κατάσταση καλείται παροδική.

Στην περίπτωση που η κατάσταση i είναι επαναληπτική έχει νόημα να συζητάμε για το μέσο χρόνο της πρώτης επαναφοράς έτσι ο μέσος χρόνος μ_i της πρώτης επαναφοράς στην κατάσταση i είναι

$$\mu_i = \sum_{n=1} n\, f_{ii}(n) \,.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.11

Εάν μ_i είναι πεπερασμένος αριθμός τότε η κατάσταση i καλείται θετικά-επαναληπτική, αλλιώς καλείται ασαφώς-επαναληπτική.

Πρόταση 1.2

Ισχύει η σχέση

$$p_{ij}(n) = \sum_{\varkappa=0}^{n} f_{ij}(\varkappa)\, p_{jj}(n-\varkappa) \qquad n \geq 1 \,.$$

Θεώρημα 1.4

Η κατάσταση i είναι επαναληπτική εάν και μόνο εάν

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty \,.$$

Θεώρημα 1.5

Εάν οι καταστάσεις i και j βρίσκονται σε επικοινωνία τότε είναι του ιδίου τύπου δηλαδή είναι και οι δύο παροδικές ή ασαφώς επαναληπτικές ή θετικά επαναληπτικές και επιπλέον έχουν την ίδια περίοδο.

Θεώρημα 1.6

Μία κατάσταση $\varkappa$ της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι παροδική εάν και μόνον εάν $\sum_{n} p_{\varkappa\varkappa}(n) < \infty$, και σ' αυτήν την περίπτωση

$$\sum_{n} p_{j\varkappa}(n) < \infty \quad \text{για κάθε } j \,.$$

➧ *Πρόταση 1.3*

Μία κατάσταση μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι βασική αν και μόνο εάν είναι επαναληπτική ή απορρόφησης. Οι μη βασικές καταστάσεις είναι παροδικές.

Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες με πίνακα μετάβασης

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{bmatrix}.$$

ονομάζονται indecomposable Μαρκοβιανές αλυσίδες.

➯ *Θεώρημα 1.7* *(Εργοδικό θεώρημα)*

Έστω $\varkappa$ μία επαναληπτική κατάσταση και έστω

$$\mu_\varkappa = \sum_n n\, f_{\varkappa\varkappa}(n)$$

ο μέσος χρόνος επανάληψης.

i) Εάν $\varkappa$ είναι μη περιοδική κατάσταση τότε

$$\lim_{n\to\infty} p_{\varkappa\varkappa}(n) = \frac{1}{\mu_\varkappa}$$

και

$$\lim_{n\to\infty} p_{j\varkappa}(n) = \frac{F_{j\varkappa}(1)}{\mu_\varkappa}$$

όπου $F_{j\varkappa}(s)$ η πιθανογεννήτρια συνάρτηση των πιθανοτήτων $f_{jk}(n)$.

ii) Εάν $\varkappa$ έχει περίοδο d τότε

$$\lim_{n\to\infty} p_{\varkappa\varkappa}(nd) = \frac{d}{\mu_\varkappa}$$

και για κάθε κατάσταση j που βρίσκεται σε επικοινωνία με την $\varkappa$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} p_{j\varkappa}(r_{j\varkappa}+nd) = d\,\frac{F_{j\varkappa}(1)}{\mu_\varkappa}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.12

Έστω $\mathbf{P}$ ένας στοχαστικός πίνακας. Ο συντελεστής εργοδικότητας του $\mathbf{P}$ ο οποίος συμβολίζεται με $\alpha(\mathbf{P})$ ορίζεται σαν

$$\alpha(\mathbf{P}) = 1 - \sup_{i,\,\varkappa} \sum_{j=1}^{\infty} [p_{ij} - p_{\varkappa j}]^+$$

όπου

$$[p_{ij} - p_{\kappa j}]^+ = \max\,(0, p_{ij} - p_{\kappa j})\ .$$

Ο συντελεστής εργοδικότητας έχει τις παρακάτω ιδιότητες.

i) $0 \le \alpha(\mathbf{P}) \le 1$.

ii) $\alpha(\mathbf{P}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right) \sup\limits_{i,\,\kappa} \sum\limits_{j=1}^{\infty} |p_{ij} - p_{\kappa j}|\ .$

iii) Έστω $\mathbf{P}$ ένας στοχαστικός πίνακας, τότε

$$\alpha(\mathbf{P}) = \inf_{i,\,\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} \min\,(p_{ij}, p_{\kappa j})\ .$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.13

Μία αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα θα λέμε ότι είναι κανονική αν και μόνο αν αποτελείται από ένα κλειστό σύνολο επαναληπτικών καταστάσεων ή μία κλάση βασικών καταστάσεων και είναι απεριοδική.

⇨ *Θεώρημα 1.8*

Έστω μία κανονική Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης $\mathbf{P}$ τότε το όριο του πίνακα $\mathbf{P}^n$ καθώς το $n \to \infty$ είναι ένας ευσταθής πίνακας $\mathbf{\Pi}$ όπου $\boldsymbol{\pi}$ είναι η γραμμή του πίνακα η οποία έχει θετικά στοιχεία. Η ταχύτητα σύγκλισης είναι τέτοια ώστε

$$|p_{ij}(n) - \pi_j| \le (1 - \alpha(P^{n_0}))^{n/n_0 - 1}$$

όπου n_0 είναι ο ελάχιστος ακέραιος τέτοιος ώστε $\alpha(\mathbf{P}^{n_0}) > 0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα των Chapman - Kolmogorov έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0) \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = p(0)\,\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\kappa)$$

δηλ. ασυμπτωτικά οι πιθανότητες η Μαρκοβιανή αλυσίδα να είναι στις καταστάσεις $1, 2, \ldots, \kappa$ δίνονται από τη γραμμή του πίνακα $\mathbf{\Pi}$.

Το ασυμπτωτικό διάνυσμα $\boldsymbol{\pi}$ προσδιορίζεται πολύ εύκολα από τη λύση του συστήματος

$$\boldsymbol{\pi}\,\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$$

$$\sum_{i=1}^{\kappa} \pi_i = 1\ .$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.14

Θα λέμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης $\mathbf{P}$ ότι είναι *μικτή* αν ο πίνακας μετάβασης $\mathbf{P}$ είναι τέτοιος ώστε για κάποιο ακέραιο n_0 να ισχύει $\alpha(\mathbf{P}^{n_0}) > 0$.

➯ *Θεώρημα 1.9*

Εάν $\mathbf{P}$ είναι ένας πίνακας μετάβασης μιας μικτής Μαρκοβιανής αλυσίδας τότε ο πίνακας $\mathbf{P}^n$ καθώς το $n \to \infty$ συγκλίνει σε ένα ευσταθή στοχαστικό πίνακα $\mathbf{\Pi}$ του οποίου η γραμμή $\boldsymbol{\pi}$ εν γένει δεν έχει όλα τα στοιχεία θετικά. Τα θετικά στοιχεία του στοχαστικού διανύσματος $\boldsymbol{\pi}$ αντιστοιχούν στις επαναληπτικές καταστάσεις της Μαρκοβιανής αλυσίδας.

Έχουμε επίσης ότι

$$|p_{ij}(n) - \pi_j| \le (1 - \alpha(\mathbf{P}^{n_0}))^{n/n_0 - 1}$$

για κάθε κατάσταση i και j που ανήκουν στο S και για κάθε ακέραιο n.

Θεωρούμε τώρα μια Μαρκοβιανή αλυσίδα η οποία είναι αδιαχώριστη και περιοδική με περίοδο d. Ο πίνακας μετάβασης μιας τέτοιας Μαρκοβιανής αλυσίδας μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\begin{array}{c} \\ C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{d-2} \\ C_{d-1} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C_0 & C_1 & C_2 & \dots & C_{d-1} \end{array} \\
\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{P}_{d-2} \\ \mathbf{P}_{d-1} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \end{pmatrix} \end{array}$$

➯ *Θεώρημα 1.10*

Έστω μία αδιαχώριστη περιοδική Μαρκοβιανή αλυσίδα με περίοδο d. Έστω $\mathbf{P}$ ο πίνακας μετάβασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας τότε η ακολουθία $\{\mathbf{P}^n\}_{n=0}^{\infty}$ διασπάται σε d συγκλίνουσες υπακολουθίες με όρια τα

$$\mathbf{P}^*\mathbf{P}^r \quad \text{για} \quad r = 0, 1, \dots, d-1$$

όπου $\mathbf{P}^* = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}^{nd}$.

Έστω $C_0, C_1, \dots, C_{d-1}$ οι κυκλικές υποκλάσεις της Μαρκοβιανής αλυσίδας και $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_{d-1}$ οι αντίστοιχοι πίνακες μετάβασης. Τότε έστω

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{P}_i\, \mathbf{P}_{i+1} \dots \mathbf{P}_{d-1}\, \mathbf{P}_1 \dots \mathbf{P}_{i-1} \quad \text{για} \quad i=1, 2, \dots, d-1.$$

Οι πίνακες $\mathbf{X}_i$ $(i=1, 2, \dots, d-1)$ ορίζουν d κανονικές Μαρκοβιανές αλυσίδες και $\mathbf{\Pi}_i = \lim_{n\to\infty} \mathbf{X}_i^n$ ευσταθείς στοχαστικοί πίνακες και

$$\mathbf{P}^* = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} C_0 & C_1 & \dots & C_{d-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{d-1} \end{array} & \begin{pmatrix} \mathbf{\Pi}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{\Pi}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{\Pi}_{d-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

Έστω $\boldsymbol{\pi}_i$ η γραμμή του πίνακα $\mathbf{\Pi}_i$. Η ακολουθία $\{\mathbf{P}^n\}_{n=0}^{\infty}$ συγκλίνει κατά Cesaro στον πίνακα

$$\mathbf{\Pi}_d = \frac{1}{d}\sum_{r=0}^{d-1} \mathbf{P}^*\mathbf{P}^r$$

όπου $\mathbf{\Pi}_d$ είναι ένας ευσταθής στοχαστικός πίνακας του οποίου η γραμμή $\boldsymbol{\pi}_d$ δίνεται από

$$\boldsymbol{\pi}_d = \frac{1}{d}(\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\pi}_1, \dots, \boldsymbol{\pi}_{d-1}).$$

Οι μέσοι χρόνοι πρώτης εισόδου

Θα συμβολίσουμε με m_{ij} τη μέση τιμή του χρόνου πρώτης εισόδου στην κατάσταση j δεδομένου ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι στην κατάσταση i και με $\mathbf{M}$ τον πίνακα των m_{ij}, $i, j \in S$.

➯ *Θεώρημα 1.11*

Έστω μία κανονική Μαρκοβιανή αλυσίδα τότε m_{ij}, $i, j \in S$ πεπερασμένοι.

Αν συμβολίσουμε τον πίνακα $\mathbf{E}$ που έχει όλα τα στοιχεία του μονάδες τότε

ΠΟΡΙΣΜΑ 1.1

Έστω μία κανονική Μαρκοβιανή αλυσίδα τότε

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}(\mathbf{M} - \mathbf{M}_{dg}) + \mathbf{E}\ .$$

➯ *Θεώρημα 1.12*

Έστω $\mathbf{P}$ ο πίνακας μετάβασης μιας κανονικής Μαρκοβιανής αλυσίδας και έστω ότι

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \mathbf{\Pi}.$$

Τότε ο πίνακας

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{\Pi})]^{-1}$$

υπάρχει και είναι το όριο της παράστασης

$$\mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{P}^{n} - \mathbf{\Pi}) .$$

➯ *Θεώρημα 1.13*

Έστω $\mathbf{P}$ ο πίνακας μετάβασης μιας κανονικής Μαρκοβιανής αλυσίδας τότε

i) $\mathbf{PZ} = \mathbf{ZP}$ ii) $\mathbf{Z1'} = \mathbf{1'}$ iii) $\boldsymbol{\pi}\mathbf{Z} = \boldsymbol{\pi}$ iv) $\mathbf{I} - \mathbf{Z} = \mathbf{\Pi} - \mathbf{PZ}$

όπου $\mathbf{1'} = [1, 1, \ldots, 1]'$.

➯ *Θεώρημα 1.14*

Έστω μία κανονική Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης $\mathbf{P}$ τότε $m_{ij} = \frac{1}{\pi_i}$ όπου $\mathbf{\Pi} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$ και $\boldsymbol{\pi}$ η γραμμή του και τέλος

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Z} + \mathbf{E}\, Z_{dg})\, \mathbf{\Pi}_{dg}^{-1} .$$

Συμβολίζουμε με w_{ij} τη μέση τιμή του τετραγώνου του χρόνου πρώτης εισόδου στην κατάσταση j δεδομένου ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι στην κατάσταση i. Έστω $\mathbf{W}$ ο πίνακας $\{w_{ij}\}_{i,\, j\in S}$ τότε ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

➯ *Θεώρημα 1.15*

Έστω μια κανονική Μαρκοβιανή αλυσίδα, $\mathbf{P}$ ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \mathbf{\Pi}$ και $\mathbf{Z} = [\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{\Pi})]^{-1}$ τότε

$$\mathbf{W} = \mathbf{P}\, [\mathbf{W} - \mathbf{W}_{dg}] - 2\mathbf{P}\, [\mathbf{Z} - \mathbf{E}\, \mathbf{Z}_{dg}]\, \mathbf{\Pi}_{dg}^{-1} + \mathbf{E}.$$

➯ *Θεώρημα 1.16*

Έστω μία κανονική Μαρκοβιανή αλυσίδα, $\mathbf{P}$ ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \mathbf{\Pi}$ και $\mathbf{Z} = [\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{\Pi})]^{-1}$ τότε

$$\mathbf{W} = \mathbf{M}\, (2\mathbf{Z}_{dg}\, \mathbf{\Pi}_{dg}^{-1} - \mathbf{I}) + 2\, (\mathbf{ZM} - \mathbf{E}(\mathbf{ZM})_{dg}).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1

Βρείτε τον πίνακα μετάβασης $\boldsymbol{P}$ *για την παρακάτω αλυσίδα του Markov: N μαύρες μπάλες και N λευκές τοποθετούνται σε δύο δοχεία έτσι ώστε σε κάθε δοχείο να υπάρχουν N μπάλες. Σε κάθε βήμα μία μπάλα εκλέγεται τυχαία από κάθε δοχείο και οι δύο μπάλες αλλάζουν δοχεία. Η κατάσταση του συστήματος είναι οι λευκές μπάλες στο πρώτο δοχείο.*

ΛΥΣΗ

Ορίζουμε σαν (j, k) στοιχείο του πίνακα $\mathbf{P}$ το

$p_{jk} =$ πιθ {κ λευκές μπάλες στο πρώτο δοχείο μετά $n+1$ ανταλλαγές / j λευκές μπάλες στο πρώτο δοχείο μετά n ανταλλαγές}.

για $n=1, 2, \ldots,$

$$p_{jk} = \begin{cases} \left(\dfrac{j}{N}\right)^2 & \text{εάν } k = j-1 \quad j=1, 2, \ldots, N \\ 2\left(\dfrac{j}{N}\right)\left(\dfrac{N-j}{N}\right) & \text{εάν } k=j \quad j=0, 1, \ldots, N \\ \left(1-\dfrac{j}{N}\right)^2 & \text{εάν } k = j+1 \quad j=0, 1, \ldots, N-1 \\ 0 & \text{στις άλλες περιπτώσεις} \end{cases}$$

2

Θεωρούμε δύο δοχεία A και B τα οποία περιέχουν N μπάλες. Στο χρόνο t (t = 1, 2, …) διαλέγουμε μία μπάλα τυχαία. Μετά διαλέγουμε ένα δοχείο, το A με πιθανότητα p και το B με πιθανότητα q (p+q = 1), και η μπάλα τοποθετείται στο δοχείο που διαλέξαμε. Ορίζουμε σαν κατάσταση του συστήματος τον αριθμό από μπάλες που περιέχει το δοχείο A. Να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης της αλυσίδας του Markov που περιγράψαμε.

ΛΥΣΗ

Ορίζουμε σαν (i, j) στοιχείο του πίνακα P το

$p_{ij} =$ {i μπάλες στο δοχείο A στο χρόνο $t+1$ | j μπάλες στο δοχείο A στο χρόνο t} για t=1, 2, …,

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{N-j}{N}\,p & \text{εάν } i = j+1 \\ \frac{j}{N}\,p + \frac{N-j}{N}\,q & \text{εάν } i=j \\ \frac{j}{N}\,q & \text{εάν } i = j-1 \\ 0 & \text{στις άλλες περιπτώσεις} \end{cases}$$

3

Δείξτε ότι σε μια Μαρκοβιανή Αλυσίδα το παρελθόν και το μέλλον είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητα δεδομένου του παρόντος.

ΛΥΣΗ

Έστω ένα τυχαίο ενδεχόμενο A προγενέστερο του χρόνου n για μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ και B ένα τυχαίο ενδεχόμενο μεταγενέστερο του χρόνου n για την ίδια Μαρκοβιανή Αλυσίδα.

Δεχόμαστε ότι η χρονική στιγμή n είναι το παρόν για την Μαρκοβιανή Αλυσίδα και ότι $X_n=i$. Τότε προφανώς έχουμε ότι το A είναι ένα οποιοδήποτε τυχαίο ενδεχόμενο από το παρελθόν και το B είναι ένα οποιοδήποτε τυχαίο ενδεχόμενο από το μέλλον. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητα δεδομένου του ενδεχομένου $X_n=i$. Έχουμε λοιπόν ότι

$$\text{Prob}\{B \cap A \mid X_n=i\} = \text{Prob}\{B \mid X_n=i, A\}\,\text{Prob}\{A \mid X_n=i\} .$$

Βάση της πρότασης 3 του Βασιλείου (1994) έχουμε ότι

$$\text{Prob}\{B \mid X_n=i, A\} = \text{Prob}\{B \mid X_n=i\}$$

κατά συνέπεια

$$\text{Prob}\{B \cap A \mid X_n=i\} = \text{Prob}\{B \mid X_n=i\}\,\text{Prob}\{A \mid X_n=i\} .$$

4

Έστω ένα τυχαίο ενδεχόμενο B μεταγενέστερο του χρόνου n για μια Μαρκοβιανή Αλυσίδα $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$. Δείξτε ότι

$$Prob\{X_{n-1} = i_{n-1} \mid X_n=i_n, B\} = Prob\{X_{n-1} = i_{n-1} \mid X_n=i_n\} .$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι:

$$\text{Prob}\{X_{n-1} = i_{n-1} | X_n=i_n, B\} = \frac{\text{Prob}\{X_{n-1} = i_{n-1}, X_n=i_n, B\}}{\text{Prob}\{X_n=i_n, B\}} =$$

$$= \frac{\text{Prob}\{B | X_n=i_n, X_{n-1} = i_{n-1}\}\ \text{Prob}\{X_n=i_n,\ X_{n-1} = i_{n-1}\}}{\text{Prob}\{B | X_n=i_n\}\ \text{Prob}\{X_n=i_n\}} =$$

(επειδή το τυχαίο ενδεχόμενο B είναι μεταγενέστερο του χρόνου n)

$$= \frac{\text{Prob}\{B | X_n=i_n\}\ \text{Prob}\{X_n=i_n, X_{n-1} = i_{n-1}\}}{\text{Prob}\{B | X_n=i_n\}\ \text{Prob}\{X_n=i_n\}} =$$

$$= \text{Prob}\{X_{n-1} = i_{n-1} | X_n=i_n\}\ .$$

5

Έστω μία ομογενής Μαρκοβιανή Αλυσίδα και $X_0=i$. Δείξτε ότι

i) $Prob(X_n=i$ για τουλάχιστον m φορές$| X_0=i) = (f_i)^m$.

ii) Δείξτε επίσης ότι αν η κατάσταση i είναι επαναληπτική, τότε η πιθανότητα επαναφοράς στην κατάσταση i άπειρες φορές είναι ίση με 1. Αντίθετα, εάν η κατάσταση i είναι παροδική, τότε η πιθανότητα επαναφοράς στην κατάσταση i άπειρες φορές είναι ίση με το 0.

ΛΥΣΗ

i) Για m=1 έχουμε

$$\text{Prob}(X_n=i \ \text{ για τουλάχιστο μία φορά} | X_0=i) = \sum_{\varkappa\geq 1} f_{ii}^{(\varkappa)} = f_i\,,$$

που ισχύει από τον ορισμό της f_i.

Θεωρούμε ότι η (i) ισχύει για m–1, δηλαδή ότι

$$\text{Prob}(X_n=i \ \text{ για τουλάχιστο } m-1 \text{ φορές} | X_0=i) = (f_i)^{m-1}\,,$$

και θα δείξουμε ότι η (i) είναι αληθινή και για m φορές. Έχουμε ότι

$$\text{Prob}(X_n=i \ \text{ για τουλάχιστο } m \text{ φορές} | X_0=i) =$$

$$= \sum_{r\geq 1} \text{Prob}(\tau_i=r,\ X_{\tau_i+r}=i \ \text{ για τουλάχιστο } m-1 \text{ φορές } | X_0=i)$$

$$= \sum_{r\geq 1} \text{Prob}(\tau_i=r | X_0=i)\, \text{Prob}(X_{\tau_i+r}=i \text{ για τουλάχιστο } m-1 \text{ φορές} | \tau_i=r, X_0=i)$$

= (επειδή $X_{\tau_i+r} = i$ είναι το βέβαιο γεγονός)

$= \sum_{r\geq 1} f_i^{(r)}\, \text{Prob}(X_{\tau_i+r}=i$ για τουλάχιστο $m-1$ φορές $\mid X_{\tau_i}=i,\ \tau_i=r,\ x_0=i)$

= (επειδή το ενδεχόμενο $\tau_i=\kappa$ είναι προγενέστερο του $X_{\tau_i}=i$)

$= \sum_{r\geq 1} f_i^{(r)}\, \text{Prob}(X_{\tau_i+r}=i$ για τουλάχιστο $m-1$ φορές $\mid X_{\tau_i}=i,\ X_0=i)$

= (σύμφωνα με την ισχυρή ιδιότητα του Markov)

$= \sum_{r\geq 1} f_i^{(r)}\, \text{Prob}(X_n=i$ για τουλάχιστο $m-1$ φορές $\mid X_0=i)$

= (σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής)

$$= \sum_{r\geq 1} f_i^{(r)}\, (f_i)^{m-1} = (f_i)^{m-1} \sum_{r\geq 1} f_i^{(r)} = (f_i)^m.$$

ii) Έστω E το ενδεχόμενο

$$E = \{\text{η Μ.Α επανέρχεται στην κατάσταση } i \text{ άπειρες φορές}\}\ .$$

Τότε,

$\text{Prob}(E) =$

$= \lim_{r\to\infty} \text{Prob}\{$η Μ.Α επανέρχεται στην κατάσταση i τουλάχιστον r φορές$\} =$

$$= \lim_{r\to\infty} (f_i)^r = \begin{cases} 1 & \text{εάν } f_i=1 \text{ δηλαδή } i \text{ επαναληπτική} \\ 0 & \text{εάν } f_i<1 \text{ δηλαδή } i \text{ παροδική}\ . \end{cases}$$

6

Έστω μία ομογενής Μαρκοβιανή Αλυσίδα και $X_0=i$. Δείξτε ότι

i) Η πιθανότητα ότι η κατάσταση j θα εμφανισθεί τουλάχιστο r φορές είναι ίση με

$$f_{ij}(f_j)^{r-1}\ .$$

ii) Εάν η κατάσταση j είναι παροδική, τότε ανεξάρτητα από την αρχική κατάσταση, η πιθανότητα να εμφανισθεί άπειρες φορές είναι ίση με το 0.

iii) Αν T το σύνολο των παροδικών καταστάσεων της Μαρκοβιανής Αλυσίδας ($T\subset S$), δείξτε ότι η πιθανότητα η Μαρκοβιανή Αλυσίδα να παραμείνει για πάντα στο σύνολο T είναι ίση με το 0.

ΛΥΣΗ

i) Η λύση είναι δυνατή κατά τρόπο ανάλογο με την άσκηση 4.

ii) Έχουμε

Prob (η κατάσταση j να εμφανισθεί άπειρες φορές) =

$$= \sum_{k\in S} \text{Prob}(X_0=i)\,\text{Prob(η κατάσταση j να εμφανισθεί άπειρες φορές} \mid X_0=i)$$

$$= \sum_{i\in S} \text{Prob}(X_0=i)\cdot 0 = 0\,,$$

(σύμφωνα με το (i) και το γεγονός ότι η j είναι παροδική ($f_i<1$)).

iii) Έχουμε προφανώς

$\text{Prob}(X_n\in T$ για όλα τα $n\geq 0) \leq$

$$\leq \sum_{j\in T} \text{Prob (η κατάσταση j να εμφανισθεί άπειρες φορές)} = 0$$

7

Έστω $\boldsymbol{P} = \{p_{ij}\}_{k\times k}$ ένας στοχαστικός πίνακας.

i) Δείξτε ότι για κάθε ακέραιο $n\geq 2$ ο πίνακας $\boldsymbol{P}^n$ είναι επίσης στοχαστικός.

ii) Δείξτε ότι αν οι γραμμές του πίνακα $\boldsymbol{P}^n$ συμπίπτουν, τότε $\boldsymbol{P}^l=\boldsymbol{P}^n$ για κάθε ακέραιο $l\geq n$.

iii) Βρείτε το μέσο χρόνο παραμονής στην j-κατάσταση, όπου

$j\in\{1, 2, \ldots, k\}$.

ΛΥΣΗ

i) Έστω $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$ το διάνυσμα-γραμμή που όλα του τα στοιχεία είναι μονάδες. Τότε, αφού ο **P** είναι στοχαστικός, έχουμε

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{1}' = \mathbf{1}'\,,$$

και πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με **P**

$$\mathbf{P}^2\cdot\mathbf{1}' = \mathbf{P}\cdot\mathbf{1}' = \mathbf{1}',\ \ldots,\ \mathbf{P}^n\cdot\mathbf{1}' = \mathbf{1}'\ ,$$

άρα ο $\mathbf{P}^n$ είναι στοχαστικός για κάθε $n\geq 2$.

ii) Έστω ότι

$$p_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad \forall\ i, j \in S\ .$$

Τότε, από το θεώρημα των Chapman - Kolmogorov έχουμε

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{l=1}^{k} p_{il}\, p_{lj}^{(n)} = \pi_j \sum_{l=1}^{k} p_{il} = \pi_j \cdot 1 = \pi_j \quad ,$$

αφού ο **P** είναι στοχαστικός και κατά συνέπεια $\sum_{l=1}^{k} p_{il} = 1$.

Επομένως $\mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{P}^{n}$.

Επίσης,

$$\mathbf{P}^{n+2} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{n} = \mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{P}^{n} \ ,$$

οπότε τελικά $\mathbf{P}^{l} = \mathbf{P}^{n}$ για κάθε ακέραιο $l \geq n$.

iii) Αποδεικνύεται ότι ο μέσος χρόνος παραμονής σε κάθε κατάσταση δίνεται από τον πίνακα $(\mathbf{I}-\mathbf{P})^{-1}$. Την απόδειξη θα την αποφύγουμε σ' αυτή τη φάση.

8

Στη θέση "Κατάρα" του δρόμου Ιωάννινα - Τρίκαλα μια μέρα κατά την περίοδο του χειμώνα μπορεί να χαρακτηριστεί σαν χιονισμένη ή σαν καθαρή. Κάθε αυτοκίνητο που θα προσπαθήσει να περάσει τον δρόμο αυτό μια χιονισμένη ημέρα, θα πρέπει να έχει οπωσδήποτε αλυσίδες. Αν μια χιονισμένη ημέρα διαδέχεται μια καθαρή με πιθανότητα 0.335 και μια καθαρή διαδέχεται μια χιονισμένη ημέρα με πιθανότητα 0.25, να βρεθεί.

i) Η πιθανότητα ένα αυτοκίνητο να χρειαστεί αλυσίδες στις 28 Δεκεμβρίου, αν τα Χριστούγεννα ήταν χιονισμένα.

ii) Ποιο είναι το μέσο μήκος μια χιονισμένης περιόδου και ποιο το μέσο μήκος μιας καθαρής περιόδου.

ΛΥΣΗ

Ορίζουμε σαν κατάσταση 0 όταν ο δρόμος είναι καθαρός, και κατάσταση 1 όταν ο δρόμος είναι χιονισμένος. Τότε ο πίνακας μετάβασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \ \ 0 & \qquad 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.655 & 0.335 \\ 0.250 & 0.750 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Έχουμε σαν δεδομένο ότι τα Χριστούγεννα ήταν χιονισμένα και θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα να είναι χιονισμένη και η 28 Δεκεμβρίου, δηλαδή $25 \to 26 \to 27 \to 28$ μετά 3-βήματα της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Επομένως ζητάμε να βρούμε την πιθανότητα $p_{11}^{(3)}$.

Είναι

$$p_{11}^{(3)} = \sum_{j=0}^{1} p_{1j}^{(1)} p_{j1}^{(2)} = p_{10} p_{01}^{(2)} + p_{11} p_{11}^{(2)} = 0.603 ,$$

γιατί

$$p_{01}^{(2)} = \sum_{j=0}^{1} p_{0j} p_{j1} = p_{00} p_{01} + p_{01} p_{11} = 0.474 ,$$

$$p_{11}^{(2)} = \sum_{j=0}^{1} p_{1j} p_{j1} = p_{10} p_{01} + p_{11} p_{11} = 0.646 .$$

Έστω W_1 η τυχαία μεταβλητή που δηλώνει τον αριθμό των συνεχόμενων χιονισμένων ημερών. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{W=n\} &= \text{Prob}\{X_1=X_2=\ldots=X_n=1,\ X_{n+1}=0 \mid X_1=1\} = \\ &= \text{Prob}\{X_2=1 \mid X_1=1\}\, \text{Prob}\{X_3=1 \mid X_2=1\} \ldots \\ &\quad \text{Prob}\{X_n=1 \mid X_{n-1}=1\} \cdot \text{Prob}\{X_{n+1}=0 \mid X_n=1\} = p_{11}^{n-1} \cdot p_{10} , \end{aligned}$$

δηλαδή η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής W είναι η γεωμετρική με πιθανότητα επιτυχίας p_{11}, κατά συνέπεια η μέση τιμή αυτής θα είναι

$$E(W) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, p_{11}^{n-1} p_{10} = p_{10}^{-1} = 4.0 \text{ ημέρες} .$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι το μέσο μήκος μιας καθαρής περιόδου είναι 2.96 ημέρες.

9

Ένα άσπρο ποντίκι του εργαστηρίου ψυχολογίας τοποθετείται στο λαβύρινθο του σχήματος 1. Το ποντίκι κινείται μέσα στα διαμερίσματα τυχαία, δηλαδή αν υπάρχουν K έξοδοι σ' ένα διαμέρισμα κάθε έξοδος εκλέγεται με πιθανότητα $\frac{1}{K}$, ενώ σε κάθε χρονική στιγμή αλλάζει διαμέρισμα μόνο μια φορά. Αφού ορίσετε τον πίνακα μεταβάσεων να υπολογίσετε την πιθανότητα $Prob[X_\nu=7 / X_{\nu-2}=9]$.