

Π.-Χ. Γ. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ

Καθηγητής Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

# ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ — ΣΤΙΣ — ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΕΣ ΕΡΕΥΝΕΣ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ



Κάθε γνήσιο αντίτυπο υπογράφεται από το συγγραφέα

ISBN 960-431-583-8

© Copyright, Π.-Χ. Γ. Βασιλείου, Εκδόσεις Ζήτη, Δεκέμβριος 1999

*Απαγορεύεται η με κάθε τρόπο αντιγραφή ή αναπαραγωγή μέρους ή όλου του βιβλίου χωρίς την έγγραφη άδεια του συγγραφέα και εκδότη*



**Φωτοστοιχειοθεσία - Εκτύπωση**

**Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ**

18° κλμ Θεσσαλονίκης-Περαίας

Τ.Κ. 570 19, Νέοι Επιβάτες, Θεσσαλονίκη

• ☎ (0392) 72 222 (3 γραμμές)

• Fax (0392) 72 229

**Βιβλιοπωλείο**

**ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ**

Αρμενοπούλου 27

Τ.Κ. 546 35, Θεσσαλονίκη

• ☎ (031) 203 720

• Fax (031) 211 305

[www.ziti.gr](http://www.ziti.gr)

e-mail: [ziti@hyper.gr](mailto:ziti@hyper.gr)

*«Τα πνεύματά μας, δέκτες και πομποί  
παίρνουν και στέλνουν των καιρών το πνεύμα  
σε μια αρχαία και νέα ζωής πομπή  
που ακολουθεί της ιστορίας το πνεύμα»*

***Γιάννης Ρίτσος, (Προσωπικότητες)***

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι επιχειρησιακές έρευνες είναι η εφαρμογή των μεθόδων της μαθηματικής επιστήμης σε πολύπλοκα προβλήματα που ανακύπτουν στη διεύθυνση μεγάλων συστημάτων, που έχουν σα μέλη ανθρώπους, μηχανές, διάφορες υλικοτεχνικές δομές κ.λπ. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι η κατασκευή ενός μαθηματικού μοντέλου για το σύστημα το οποίο να περιέχει μέσα διάφορους σημαντικούς παράγοντες γι' αυτό. Η ουσία των προβλημάτων αυτών συνήθως χάνεται αν κανείς προσπαθήσει ν' αγνοήσει τον παράγοντα τύχη. Σ' αυτές βεβαίως τις περιπτώσεις τα προβλήματα μπορούν ν' αντιμετωπισθούν μόνο με στοχαστικές μεθόδους.

Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι οι στοχαστικές μέθοδοι άρχισαν ν' αναπτύσσονται σαν μέρος της θεωρίας πιθανοτήτων και μετά σιγά - σιγά άρχισαν να γίνονται μέρος των Επιχειρησιακών Ερευνών (Ε.Ε.). Σήμερα η σχέση είναι αμφίδρομη δηλαδή από συγκεκριμένα προβλήματα των (Ε.Ε.) φτάνουμε σε γενικευμένες θεωρίες και γενικές στοχαστικές μεθόδους και αντίστροφα γενικές θεωρίες από τις πιθανότητες βρίσκουν μία ακόμα δικαίωση σε συγκεκριμένες εφαρμογές. Το υλικό από το οποίο κανείς θα μπορούσε να επιλέξει για ένα προπτυχιακό μάθημα είναι πραγματικά τεράστιο. Έτσι η επιλογή είναι δύσκολη, γιατί όλο και κάτι σημαντικό αναπόφευκτα, θα παραληφθεί. Πολλούς φυσικά περιορισμούς φέρνουν οι συνθήκες κάτω από τις οποίες αυτό το υλικό θα διδαχθεί. Είναι δηλαδή η άριστη λύση συνδεδεμένη με το μαθηματικό υπόβαθρο των φοιτητών που διδάσκεται και με την ανταπόκριση που δέχεται κανείς από αυτούς. Η τελευταία ήταν πράγματι από τα πλέον ενθαρρυντικά σημεία στην όλη προσπάθεια.

Το παρόν βιβλίο αποτελεί μία τέταρτη βελτιωμένη έκδοση του προηγούμενου που εμφανίστηκε με τον ίδιο τίτλο για πρώτη φορά το 1983. Η τρίτη έκδοση έχει εμφανισθεί το 1994, η δεύτερη έκδοση το 1985. Στην παρούσα έκδοση δεν υπάρχουν πλέον ασκήσεις με τις λύσεις τους. Μια συλλογή ασκήσεων με λύσεις πάνω στο υλικό που περιέχει το βιβλίο αυτό υπάρχει σε άλλο βιβλίο του συγγραφέα μαζί με άλλους συγγραφείς. Στο τέλος του βιβλίου υπάρχει μία γενική βιβλιογραφία των θεμάτων των κεφαλαίων του βιβλίου καθώς και στατιστικοί πίνακες απαραίτητοι για τις μεθόδους που προτείνονται στο βιβλίο.

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>1. Εισαγωγή</b>	
1.1. Ένα Ιστορικό Σημείωμα .....	13
1.2. Συστήματα - Μοντέλα .....	14
1.3. Είναι η εφαρμογή της Επιχειρησιακής Έρευνας μόνο θέμα γνώσεων.....	16
1.4. Στοχαστικές Διαδικασίες .....	17
1.5. Μοντέλα ουράς ή θεωρία γραμμών αναμονής.....	19
1.6. Πεπερασμένες Μακροβιανές Αλυσίδες.....	20
<b>2. Ομογενείς Μακροβιανές Αλυσίδες</b>	
2.1. Εισαγωγή.....	27
2.2. Οι πιθανότητες μετάβασης μιας ομογενούς Μακροβιανής Αλυσίδας .....	27
2.3. Η κατανομή πιθανοτήτων στις καταστάσεις μιας Μακροβιανής Αλυσίδας.....	37
2.4. Στατιστική συμπερασματολογία σε πεπερασμένες Μακροβιανές Αλυσίδες.....	54
2.5. Χρόνοι στάσης και η ισχυρή Μακροβιανή ιδιότητα .....	61
2.6. Μακροβιανές Αλυσίδες ανώτερης τάξης .....	65
2.7. Ομαδοποιήσιμες Μακροβιανές Αλυσίδες.....	68
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.....	70
<b>3. Ασυμπτωτική Συμπεριφορά Μακροβιανών Αλυσίδων</b>	
<b>Η Πιθανοθεωρητική Προσέγγιση</b>	
3.1. Εισαγωγή.....	75
3.2. Κατηγοριοποίηση των καταστάσεων μιας Μακροβιανής Αλυσίδας .....	75
Διαδικασία εύρεσης των βασικών και μη βασικών καταστάσεων.....	77
Διαδικασία γραφής της κανονικής μορφής.....	79
Κυκλικές υποκλάσεις.....	84
Ο Αλγόριθμος εύρεσης των κυκλικών υποκλάσεων.....	86
3.3. Επαναληπτικές και παροδικές καταστάσεις .....	87
3.4. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά των Μακροβιανών Αλυσίδων.....	98

3.5. Οι μέσοι χρόνοι πρώτης εισόδου .....	120
3.6. Αναστρέψιμες χρονικά Μαρκοβιανές αλυσίδες.....	131
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.....	139
<b>4. Μαρκοβιανές Αλυσίδες Απορρόφησης</b>	
4.1. Εισαγωγή.....	151
4.2. Ο βασικός πίνακας .....	154
4.3. Εφαρμογές του βασικού πίνακα.....	158
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.....	171
<b>5. Μαρκοβιανές Διαδικασίες</b>	
5.1. Εισαγωγή.....	177
5.2. Η εξίσωση των Chapman-Kolmogorov.....	178
5.3. Ο πίνακας των τάσεων μιας Μαρκοβιανής διαδικασίας .....	186
5.4. Αναλυτική λύση των διαφορικών εξισώσεων του Kolmogorov.....	195
5.5. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά των ομογενών Μαρκοβιανών διαδικασιών .....	233
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.....	240
<b>6. Εισαγωγή στη Θεωρία Ουρών</b>	
6.1. Εισαγωγή.....	245
6.2. Χαρακτηρισμός συστημάτων ουράς.....	245
6.3. Ο συμβολισμός του Kendall για τα συστήματα ουρών.....	247
6.4. Η Poisson διαδικασία αφίξεων .....	248
6.5. Ιδιότητες της διαδικασίας Poisson.....	255
6.6. Γενικεύσεις της διαδικασίας Poisson.....	259
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.....	264
<b>7. Συνήθεις Ουρές</b>	
7.1. Εισαγωγή.....	269
7.2. Η ουρά M/M/1.....	269
7.3. Η εύρεση των πιθανοτήτων σε κατάσταση «στατιστικής ισορροπίας».....	272
7.4. Μέτρα λειτουργικότητας του συστήματος της ουράς .....	273
7.5. Κατανομές του χρόνου αναμονής .....	275
7.6. Πεπερασμένη χωρητικότητα ουρές. Η ουρά M/M/1/K.....	279
7.7. Ένα γενικό μοντέλο ουράς. Η διαδικασία γέννησης - θανάτου .....	281
7.8. Η ουρά M/M/S. Ουρές με παράλληλα κανάλια εξυπηρέ- τησης .....	283

7.9. Ουρές με παράλληλα κανάλια εξυπηρέτησης και πεπερασμένης χωρητικότητας. Η ουρά M/M/S/K.....	289
7.10. Ουρές με πηγή πελατών πεπερασμένη.....	292
7.11. Ουρές με χρόνο εξυπηρέτησης εξαρτώμενο από το μέγεθος της ουράς.....	293
7.12. Ουρές με πολλαπλές αφίξεις.....	295
7.13. Η ουρά MIE <sub>k</sub>  1.....	299
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.....	306

## 8. Εφαρμόζοντας την Θεωρία Ουρών

8.1. Εισαγωγή.....	315
8.2. Η επιλογή του κατάλληλου στοχαστικού μοντέλου.....	315
Το F-τέστ.....	319
Το Kolmogorov - Smirnov τεστ.....	319
Το Anderson - Darling τεστ.....	320
8.3. Η λήψη βέλτιστων αποφάσεων.....	322

## 9. Θεωρία Ανανέωσης

9.1. Εισαγωγή.....	325
9.2. Η συνήθης διαδικασία ανανέωσης.....	327
9.3. Χρήσιμες συναρτήσεις της κατανομής του χρόνου ζωής.....	331
9.4. Μετασχηματισμοί Laplace.....	333
9.5. Αντιπροσωπευτικές του χρόνου ζωής κατανομές.....	339
9.6. Ο χρόνος μέχρι την ν-οστή ανανέωση.....	355
9.7. Η κατανομή του αριθμού των ανανεώσεων.....	357
9.8. Η συνάρτηση ανανέωσης.....	360
9.9. Η πυκνότητα ανανέωσης.....	362
9.10. Χρόνοι επανεμφάνισης.....	365
9.11. Μερικά ασυμπτωτικά αποτελέσματα.....	366
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.....	375

## 10. Ημι-Μαρκοβιανές Αλυσίδες

10.1. Εισαγωγή.....	383
10.2. Χρόνοι παραμονής και χρόνοι αναμονής.....	384
10.3. Οι πιθανότητες μετάβασης στο χρονικό διάστημα (0, t).....	388
10.4. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της ημι-Μαρκοβιανής αλυσίδας.....	392
10.5. Ο παράγοντας του αριθμού των μεταβάσεων.....	399
10.6. Ο υπολογισμός των πιθανοτήτων εισόδου.....	404
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.....	408

**11. Ομογενή Μαρκοβιανά Συστήματα**

11.1. Εισαγωγή.....	413
11.2. Το ομογενές Μαρκοβιανό σύστημα (ΟΜΣ) .....	413
11.3. Η πληθυσμιακή δομή του συστήματος.....	416
11.4. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά του ΟΜΣ.....	418

**12. Μια Μικρή Επισκόπηση Χρήσιμων Γνώσεων**

12.1. Εισαγωγή.....	425
12.2. Σύγκλιση ακολουθιών και σειρών .....	425
12.3. Μια μικρή επισκόπηση από χρήσιμες γνώσεις της θεω- ρίας πιθανοτήτων.....	431
12.4. Πιθανογεννήτριες συναρτήσεις.....	436
12.5. Χαρακτηριστικές συναρτήσεις – Ροπογεννήτριες .....	443
12.6. Οριακά θεωρήματα και ανισότητες.....	448
12.7. Υπό συνθήκες μέσες τιμές και διακυμάνσεις .....	450

**Στατιστικοί πίνακες .....** 465**Απαντήσεις - Υποδείξεις των Ασκήσεων.....** 489

2 <sup>ου</sup> κεφαλαίου.....	491
3 <sup>ου</sup> κεφαλαίου.....	494
4 <sup>ου</sup> κεφαλαίου.....	506
5 <sup>ου</sup> κεφαλαίου.....	509
6 <sup>ου</sup> κεφαλαίου.....	514
7 <sup>ου</sup> κεφαλαίου.....	516
9 <sup>ου</sup> κεφαλαίου.....	520
10 <sup>ου</sup> κεφαλαίου.....	524

**Βιβλιογραφία .....** 527



## 1.1. Ένα Ιστορικό Σημείωμα

Η αρχή της Επιχειρησιακής Έρευνας σαν Επιστήμη μπορεί να προσδιοριστεί γύρω στα 1935. Υπάρχουν βέβαια και προγενέστερες προσπάθειες όπως αυτές του Erlang στην Κοπεγχάγη στην αρχή του αιώνα μας με τη θεωρία ουρών και τις εφαρμογές τους. Αυτές όμως όπως και άλλες σαν του Levinson και του Lanchester παρέμειναν αποσπασματικές.

Το 1935 η Βρετανική Αεροπορία με την ανακάλυψη του ραντάρ είχε την ανάγκη να σχεδιάσει τη στρατηγική της από την άποψη του εντοπισμού των Γερμανικών αεροπλάνων μέχρι την αναχαίτησή τους. Με τη στενή συνεργασία επιστημόνων και των πιλότων της Βρετανικής Αεροπορίας μεταξύ του καλοκαιριού του 1936 και του καλοκαιριού του 1937 αναπτύχθηκαν βασικές μέθοδοι επιχειρησιακού ελέγχου χωρίς τις οποίες η μάχη της Βρετανίας ποτέ δε θα είχε κερδηθεί. Οι βασικές αυτές μέθοδοι υπέστησαν τις συνεχείς επιδράσεις των αναγκών του πολέμου και δόθηκε η ευκαιρία να ελεγχθούν κάτω από την σκληρή πραγματικότητα. Σε σχέση μ' αυτή την επιστημονική δουλειά που γινόταν στο Bawdsey το 1938 ο A. P. Row αναφέρθηκε στην επιστημονική ομάδα σαν «επιχειρησιακή έρευνα» και πιστεύεται ότι αυτή είναι η ορολογία από όπου προέρχεται η ονομασία της Επιστήμης αυτής.

Γρήγορα αναπτύχθηκαν και άλλες ομάδες επιχειρησιακής έρευνας για τις συνεχώς νέες ανάγκες του πολέμου σε όλα τα όπλα του Βρετανικού στρατού. Πολύ γνωστή είναι η ομάδα που αναπτύχθηκε από το Φυσικό P.M.S Blackett (βραβείο Nobel) για τις ανάγκες του νυχτερινού πολέμου το φθινόπωρο του 1940 η οποία ήταν γνωστή και σαν «το τσίρκο του Blackett». Τον Οκτώβριο του 1942 οι πρώτες ομάδες επιχειρησιακής έρευνας εμφανίστηκαν στον Αμερικανικό καθώς και τον Καναδικό στρατό. Υπολογίζεται ότι οι επιστήμονες που εργάστηκαν σε ομάδες επιχειρησιακής έρευνας στους τρεις στρατούς ξεπερνούσαν τους 700. Στο Γερμανικό στρατό δεν υπάρχουν ενδείξεις ότι υπήρξαν τέτοιες ομάδες.

Οι ομάδες αυτές των επιστημόνων αποτέλεσαν το σπόρο για την ανάπτυξη της Επιχειρησιακής Έρευνας όταν διοχετεύθηκαν μετά το τέλος του Β' Παγκοσμίου Πολέμου στη Βιομηχανία και στις άλλες ειρηνικές δραστηριότητες.

Στη δεύτερη και τρίτη δεκαετία της ανάπτυξής της η Επιχειρησιακή Έρευνα παρουσίασε το φαινόμενο της ανισοβαρούς ανάπτυξης της θεωρίας σε σχέση με την πράξη. Αυτό οφείλεται μερικά και στο απόρρητο (λόγω της ανταγωνιστικότητας) αρκετών εφαρμογών της. Παραμένει όμως από τις θετικές επιστήμες αυτή που έχει τη μεγαλύτερη επαφή με την πράξη.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειωθεί με έμφαση ότι μεταξύ της γνώσης των μεθοδολογιών της Επιχειρησιακής Έρευνας και των πρωτότυπων

εφαρμογών τους υπάρχει μια απόσταση που πρέπει να διανύσει μόνος του ο Επιστήμονας που πρέπει να έχει τη διάθεση για κατάρτιση και το κλίμα δουλειάς που συναντάται σε ερευνητές και σε ερευνητικά ινστιτούτα κάποιου επιπέδου.

Η σημερινή κατάσταση της Επιχειρησιακής Έρευνας παρουσιάζει διαφορετικά χαρακτηριστικά από χώρα σε χώρα ανάλογα με την ανάπτυξη της. Από επιστημονικής πλευράς οι μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί είναι τόσες πολλές που εμφανίζονται ήδη ειδικότητες μέσα στην ίδια την επιστήμη και η δυναμική ανάπτυξη των εφαρμογών είναι πάρα πολύ μεγάλη και πολλές μέθοδοι που αναπτύχθηκαν με προφανή κίνητρα από την πράξη δεν έχουν ακόμη εμφανίσει όλες τις δυνατότητες των εφαρμογών τους.

## **1.2. Συστήματα - Μοντέλα**

Πολλές φορές στην καθημερινή μας ζωή χρησιμοποιούμε τη λέξη σύστημα. Ίσως μία από τις πιο συχνά ακουγόμενες προτάσεις είναι «φταίει το σύστημα». Το «σύστημα» σύμφωνα με το λεξικό του Webster (New World Dictionary) είναι «είναι ένα σύνολο από τοποθετήσεις των αντικειμένων και υποκειμένων τα οποία σχετίζονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε ν' αποτελούν μία ολότητα». Είναι φανερό η ασάφεια που προκύπτει όταν κανείς θέλει να δώσει ένα κάπως αυστηρό ορισμό στη λέξη αυτή που τη χρησιμοποιούμε συχνά. Το σώμα μας δουλεύει σαν ένα σύστημα. Είμαστε όλοι μέλη πολλών και διαφόρων κοινωνικών συστημάτων όπως π.χ. της οικογένειάς μας, του κοινωνικού συστήματος που ζούμε, του Πανεπιστημιακού συστήματος κ.λπ.. Υπάρχουν συστήματα σ' όλες τις επιστήμες, κοινωνικές, φυσικές, χημικές, βιολογικές κ.λπ.

Η μελέτη των συστημάτων από την πλευρά της επιχειρησιακής έρευνας γίνεται με τη χρήση των μαθηματικών μοντέλων. Το μαθηματικό μοντέλο είναι μια προσομοίωση του πραγματικού κόσμου στο οποίο οι σημαντικές σχέσεις μεταξύ των πραγματικών στοιχείων έχουν αντικατασταθεί με παρόμοιες σχέσεις μεταξύ των μαθηματικών οντοτήτων, ενώ οι μη σημαντικές έχουν αγνοηθεί. Η βασική επιδίωξη είναι το μαθηματικό μοντέλο και το σύστημα να είναι ισόμορφα σε όλες τις σημαντικές για το σύστημα πλευρές. Δηλ. όπως φτιάχνουμε ένα μικρό μοντέλο αεροπλάνου για να ελέγξουμε την ευστάθεια του πραγματικού σε διαφορετικές συνθήκες πτήσης, έτσι και το μαθηματικό μοντέλο χρησιμοποιείται για να μελετηθεί η συμπεριφορά του πραγματικού.

Τα μαθηματικά μοντέλα διακρίνονται σε προσδιοριστικά (deterministic) και στοχαστικά (stochastic). Αν οι συνέπειες οποιασδήποτε αλλαγής στο σύστημα μπορούν να προβλεφθούν με βεβαιότητα τότε το μοντέλο ονομάζε-

ται προσδιοριστικό. Αν οι αλλαγές στο σύστημα μπορούν να εκφρασθούν μαθηματικά μόνο με τυχαίες μεταβλητές τότε το μοντέλο ονομάζεται στοχαστικό.

Οι φάσεις τις οποίες συνήθως ακολουθούμε για την κατασκευή και τη χρήση ενός μοντέλου είναι οι παρακάτω

### ***α) Ο ορισμός του προβλήματος***

Στη διάρκεια της φάσης αυτής εντοπίζονται οι βασικές παράμετροι του συστήματος, μέσα από τις επαφές με τους ενδιαφερόμενους και σε στενή συνεργασία μαζί τους ποσοτικοποιούνται οι σημαντικές συνιστώσες του προβλήματος, εντοπίζονται οι επιθυμητοί στόχοι καθώς και οι περιορισμοί που το σύστημα και οι υλικοτεχνικοί περιορισμοί επιβάλλουν.

### ***β) Κατασκευή του μοντέλου***

Η πρώτη ενέργεια είναι η συγκέντρωση των δεδομένων και ο έλεγχος της αξιοπιστίας τους. Μετά από αυτό ακολουθεί η οργάνωση και η μελέτη των δεδομένων, η καλή γνώση των οποίων είναι από τα βασικά για την επιτυχή κατασκευή ενός μοντέλου. Τώρα έχοντας ορίσει το πρόβλημα και οργανώσει το δεδομένα μας ακολουθεί η φάση της σκέψης μήπως κάποια από τις γνωστές στοχαστικές μεθόδους (μοντέλα) π.χ. Μαρκοβιανές αλυσίδες, θεωρία ουρών ή τις γνωστές διακεκριμένες μεθόδους (μοντέλα) π.χ. γραμμικός προγραμματισμός, αθέριος προγραμματισμός, δυναμικός κ.λπ. ταιριάζει για τη λύση του προβλήματος. Στη φάση αυτή είναι που ελέγχεται σκληρά για πρώτη φορά το υπόβαθρο και οι πνευματικές ικανότητες της ομάδας Επιχειρησιακής Έρευνας. Θα πρέπει εδώ να τονισθεί ότι είναι σοβαρό λάθος να γίνεται προσπάθεια να «στριμωχθεί» το πρόβλημα σε μια από τις γνωστές μεθόδους όταν αυτό γίνεται σε βάρος της βαθύτερης ανάλυσης του προβλήματος. Σε περίπτωση που κάποια από τις γνωστές μεθόδους δεν προσφέρεται για τη λύση του προβλήματος τότε πρέπει να κατασκευαστεί ένα καινούριο στοχαστικό μοντέλο.

Παρακάτω αναλύουμε τι πρέπει να έχει κάποιος υπόψη του όταν κατασκευάζει ένα μοντέλο.

### ***γ) Χρήση του μοντέλου***

Στη φάση αυτή γίνεται η αξιοποίηση του μοντέλου που κατασκευάστηκε για να συμβάλει στη λύση του προβλήματος. Έχει αποδειχθεί ότι είναι σημαντικό η ομάδα μελέτης ν' αναλάβει και την υλοποίηση των προτεινόμενων λύσεων. Η πράξη έχει δείξει ότι σε διαφορετική περίπτωση ο κίνδυνος οι μελέτες να μείνουν μόνο στα χαρτιά είναι πολύ μεγάλος.

Συνήθως ένα στοχαστικό μοντέλο κατασκευάζεται για ένα σύστημα με

τους παρακάτω αντικειμενικούς σκοπούς:

- α) Για να περιγράψει το σύστημα και να εμβαθύνει στις διάφορες πλευρές του.
- β) Για να προβλέψει τη μελλοντική συμπεριφορά του συστήματος κάτω από διάφορες συνθήκες.
- γ) Για να δώσει λύσεις «πολιτικής» σε διάφορα προβλήματα. Με τη λέξη «πολιτική» ονομάζουμε κάθε προγραμματισμένη αντιμετώπιση κάποιου προβλήματος στο σύστημα.
- δ) Για την αποφυγή διαφόρων προβληματικών καταστάσεων οι οποίες μπορούν να προκύψουν προειδοποιώντας έγκαιρα πριν αυτές εμφανιστούν.
- ε) Για να συμβουλέψει στο σχεδιασμό καλύτερων συστημάτων.
- ζ) Για να μας δώσει δείκτες λειτουργικότητας ή άλλους για το σύστημα.

Τα παραπάνω αποτελούν συγχρόνως και κριτήρια καταλληλότητας ενός μοντέλου για κάποιο φαινόμενο.

### **1.3. Είναι η εφαρμογή της Επιχειρησιακής Έρευνας μόνο θέμα γνώσεων;**

Από όσα έχουμε αναφέρει μέχρι στιγμής είναι φανερό ότι από τη στιγμή που κάποιο από τα συνήθη στοχαστικά μοντέλα δεν μπορεί να συμβάλει στη λύση του προβλήματος υπάρχει η αναγκαιότητα της δημιουργίας ενός νέου στοχαστικού μοντέλου.

Για να φθάσει κάποιος στο επίπεδο να μπορεί να κατασκευάσει ένα νέο στοχαστικό μοντέλο και να το λύσει πέρα από τη βαθειά γνώση στο χειρισμό των τυχαίων μεταβλητών πρέπει τουλάχιστον να έχει κατανοήσει σε μεγάλο βάθος πως δημιουργούνται τα συνήθη στοχαστικά μοντέλα.

Αυτός είναι ένας από τους βασικούς λόγους που πιστεύω ότι είναι σοβαρό λάθος η παρουσίαση διάφορων στοχαστικών μοντέλων σε μορφή «συνταγών μαγειρικής». Αυτό το φαινόμενο μεταξύ των άλλων έχει οδηγήσει σε σωρεία κακών εφαρμογών της Επιχειρησιακής Έρευνας σε αναλογία με το αντίστοιχο φαινόμενο της Στατιστικής. Η τυφλή χρήση των πακέτων στοχαστικών μοντέλων στον ηλεκτρονικό υπολογιστή που γίνεται κυρίως από ανθρώπους χωρίς σοβαρό υπόβαθρο στη στοχαστική ανάλυση συνεισφέρει σοβαρά στην ανησυχητική επέκταση της πολύ κακής αυτής κατάστασης. Τις βλαβερές συνέπειες του φαινομένου αυτού μπορεί εύκολα να τις φανταστεί κάποιος αν και είναι αμφίβολο αν υπάρχουν αρκετοί που μπορούν να συνειδητοποιήσουν τους μεγάλους κινδύνους.

Στο παρόν βιβλίο η προσέγγιση στα συνήθη στοχαστικά μοντέλα που εί-

να οι Μαρκοβιανές Αλυσίδες και η θεωρία των γραμμών αναμονής θα είναι η όσο το δυνατό καλύτερη μαθηματική θεμελίωση. Πιστεύω ότι μέσα απ' αυτή την προσέγγιση, ο ελάχιστος στόχος που έχει μία σοβαρή πιθανότητα να επιτευχθεί είναι να φθάσει ο αναγνώστης στο επίπεδο να μπορεί ν' αναγνωρίσει πότε είναι κατάλληλο να χρησιμοποιηθεί ένα στοχαστικό μοντέλο για τη λύση ενός προβλήματος.

Πέρα όμως από όλα τα παραπάνω η «καλή εφαρμογή» των μεθόδων της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι και κάτι παραπάνω. Αυτό φαίνεται ίσως καθαρά από την αρκετά γνωστή ιστορία που φέρει τον τίτλο το «πρόβλημα του ανεγκυστήρα»: Κάπου σ' ένα ψηλό κτίριο με γραφεία ο κόσμος εξέφρασε σοβαρά παράπονα στη διοίκηση ότι οι ανεγκυστήρες δημιουργούσαν καθυστερήσεις στη διακίνηση του κόσμου. Μία ομάδα αναλυτών επιχειρησιακής έρευνας ανέλαβε να μελετήσει το πρόβλημα. Η μελέτη έδειξε ότι οι μέσοι χρόνοι αναμονής έλευσης του ανεγκυστήρα καθώς και οι αναμενόμενοι χρόνοι αναμονής από τη στιγμή εισόδου στο κτίριο μέχρι την άφιξη στον προορισμό ενός επισκέπτη στο κτίριο ήταν παραδεκτοί σε όλη τη διάρκεια της ημέρας. Η ομάδα έλυσε το πρόβλημα με τη σχετικά ανέξοδη λύση της τοποθέτησης μεγάλων καθρεπτών σε όλους τους ορόφους γύρω από τους ανεγκυστήρες.

Η ιστορία αυτή φέρει το μήνυμα ότι η επιτυχής λύση προβλημάτων από την πραγματική ζωή χρειάζεται και ένα δείκτη ευφυΐας και ανθρώπινη ωριμότητα.

## 1.4. Στοχαστικές Διαδικασίες

### ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1

Μία στοχαστική διαδικασία είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών ορισμένων σε ένα χώρο πιθανοτήτων  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . Εάν υπάρχει αριθμησιμότητα πλήθος των μελών της οικογένειας τότε η διαδικασία συμβολίζεται με  $X_1, X_2, X_3, \dots$ . Εάν το πλήθος των μελών της οικογένειας δεν είναι αριθμησιμότητα τότε η διαδικασία συμβολίζεται με  $\{X(t): t \geq 0\}$  ή  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ . Στην πρώτη περίπτωση η διαδικασία ονομάζεται μία διαδικασία σε χρόνο διακριτό ενώ στη δεύτερη περίπτωση μία στοχαστική διαδικασία σε χρόνο συνεχή.

### ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2

Ο χώρος των καταστάσεων  $S$ , είναι ο χώρος που δημιουργείται απ' όλες τις πιθανές τιμές  $X_t$ . Εάν  $S=(0, 1, 2, \dots)$  αναφερόμαστε στη στοχαστική διαδικασία σαν μία στοχαστική διαδικασία με ακέραιες τιμές ή μία διακριτών καταστάσεων διαδικασία. Εάν  $S=(-\infty, \infty)$  τότε η στοχαστική διαδικασία

σία καλείται μία στοχαστική διαδικασία με πραγματικές τιμές. Εάν  $S$  είναι ο  $\mathbb{R}^n$  τότε η στοχαστική διαδικασία καλείται μία  $n$ -διάσταση στοχαστική διαδικασία.

Για να εξηγήσει κανείς την «κατάσταση» σύντομα, θα πρέπει να γίνει αντιληπτό ότι η παρούσα κατάσταση ενός φυσικού συστήματος μπορεί συνήθως να καθοριστεί από ένα σύνολο αριθμών που περιγράφουν το σύστημα. Στις εφαρμογές λοιπόν σαν κατάσταση του συστήματος θα ορίζεται το σύνολο των στοιχείων που χρειαζόμαστε για να οριστεί το σύστημα σε μια χρονική στιγμή.

### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1**

Ο αριθμός  $Q(t)$  των πελατών σε ένα σύστημα ουράς είναι μια στοχαστική διαδικασία σε χρόνο συνεχής, μια και η παράμετρος  $t$  είναι συνεχής.

Είναι και μια στοχαστική διαδικασία διακριτών καταστάσεων, μια και ο χώρος των καταστάσεων, δηλ. όλες οι δυνατές τιμές της  $Q(t)$  είναι  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

Στα πρώτα δέκα χρόνια του αιώνα μας δημοσιεύθηκαν αρκετές εργασίες, που μπορούν να θεωρηθούν από το σημερινό αναγνώστη, σαν η αρχή της θεωρίας των στοχαστικών διαδικασιών. Η θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών τέθηκε πάνω σε σωστές και αυστηρές μαθηματικές βάσεις στη διάρκεια της δεκαετίας 1930-1940.

Ο Bachelier (1900) ανέλυσε τις μεταπτώσεις στις τιμές των προϊόντων στην αγορά και οδηγήθηκε σε μια σημαντική ειδική κατηγορία των στοχαστικών διαδικασιών. Το 1905 η ίδια διαδικασία διαπιστώθηκε από τον Einstein στην πολύ γνωστή του εργασία για την κίνηση Brown, Einstein (1905). Μεταξύ των εργασιών του Bachelier και Einstein υπάρχει η διατριβή του Lundberg (1903) γραμμένη στα Σουηδικά. Ο Lundberg εξετάζει το ποσό των εισπράξεων μιας ασφαλιστικής εταιρείας και οδηγείται σε μια σημαντική κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών. Το 1905 η διαδικασία Poisson προτάθηκε από τον Erlang, σε ένα πρόβλημα συνωστισμού σε τηλεφωνικές γραμμές και από τον Rutherford-Geiger (1908) στην ανάλυση της ραδιενεργού αποσύνθεσης. Όλες αυτές οι πρωτοπόρες εργασίες χρησιμοποιούσαν μαθηματικές μεθόδους που λίγο-πολύ στερούνταν μαθηματικής αυστηρότητας. Όμως ανέπτυξαν μια θαυμάσια ικανότητα για το διαισθητικό χειρισμό προβλημάτων και μεθόδων, που έπρεπε να περιμένουν ως το 1930 για να τεθούν πάνω σε αυστηρές μαθηματικές βάσεις. Από τότε μέχρι σήμερα οι στοχαστικές διαδικασίες έχουν γνωρίσει μια ραγδαία και τεράστια ανάπτυξη και εφαρμογές τους εμφανίζονται σε όλους σχεδόν τους κλάδους της επιστήμης. Η αιτία των πολλών αυτών εφαρμογών μπορεί να αποδοθεί στο μεγάλο βαθμό αβεβαιότητας που συνυπάρχει σε κάθε εκδήλωση της καθημερινής ζωής.

Στοχαστικά μοντέλα και στοχαστικές διαδικασίες υπάρχουν πολλά στις επιχειρησιακές έρευνες. Στο παρόν θα αναπτύξουμε τη μαθηματική υποδομή και θα παρουσιάσουμε μερικές εφαρμογές στα σπουδαιότερα και συνήθεστερα εμφανιζόμενα στην πράξη στοχαστικά μοντέλα. Οι σπουδαιότερες στοχαστικές μέθοδοι με τις οποίες και θ' ασχοληθούμε είναι οι παρακάτω.

### **1.5. Μοντέλα ουράς ή θεωρία γραμμών αναμονής**

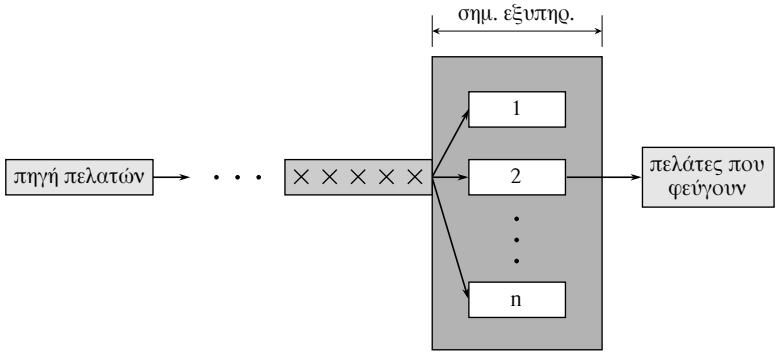
Όλοι μας έχουμε νιώσει την ενόχληση να περιμένουμε σε κάποια ουρά. Δυστυχώς αυτό το φαινόμενο γίνεται όλο και πιο συχνό στο σημερινό συνωστισμένο τρόπο ζωής μας. Σκεφτήκατε ν' αθροίσετε τον χρόνο που χάσατε περιμένοντας σε διάφορες ουρές αυτή την εβδομάδα; Η συμπεριφορά σε μια ουρά είναι και αυτή ένας δείκτης πολιτισμού και για τη βελτίωση αυτού του δείκτη μέρα τη μέρα είναι ο καθένας μας αυτόπτης μάρτυρας.

Ουρές όμως σχηματίζονται και σε περιπτώσεις που ίσως δεν είναι τόσο φανερές και όπου το κόστος δεν είναι ίσως, μόνο ο χρόνος κάποιου ανθρώπου, που κατά τη γνώμη μας είναι εξαιρετικά πολύτιμος (ζούμε κατά μέσο όρο 67 χρόνια, από αυτά κοιμόμαστε περίπου τα 22 και βιολογικά είμαστε σε θέση να δημιουργήσουμε από τα 30 μέχρι τα 60 περίπου και από αυτά τα 30 χρόνια τα 10 κοιμόμαστε και αρκετά καταναλίσκουμε περιμένοντας ...). Ουρές σχηματίζονται και σ' ένα διάδρομο προσγειώσεως κάποιου αεροδρομίου και αρκετοί από μας ίσως, έχουν κάνει κύκλους πάνω από ένα διάδρομο προσγειώσεως περισσότερο χρόνο από όσο χρειάστηκε για το ταξίδι. Ένα τραγικό παράδειγμα ουράς είναι οι άρρωστοι που περιμένουν σ' ένα διάδρομο νοσοκομείου για κάποιο κρεβάτι κ.λπ.

Είναι λοιπόν σημαντικό να μελετήσουμε τα συστήματα ουράς. Κοινό χαρακτηριστικό των ουρών είναι οι «πελάτες» που έρχονται από κάποια πηγή ή πηγές, ένας-ένας ή σε ομάδες. Οι «πελάτες» μπορεί να είναι άνθρωποι, αντικείμενα, προγράμματα υπολογιστή, αυτοκίνητα, ζώα κ.λπ. Δεύτερο χαρακτηριστικό είναι τα σημεία εξυπηρέτησης όπου υπάρχουν εκείνοι που παρέχουν την εξυπηρέτηση (μηχανές, άνθρωποι ή αντικείμενα). Τα σημεία αυτά μπορεί να είναι ένα ή πολλά σε σειρά ή παράλληλα. Ένα σύστημα ουράς ορίζεται έτσι ώστε να περιέχει τη γραμμή αναμονής των πελατών και τα σημεία ή κανάλια εξυπηρέτησης. Ο αριθμός των πελατών στην ουρά είναι ο αριθμός των πελατών στη γραμμή αναμονής και οι πελάτες που εξυπηρετούνται στα σημεία εξυπηρέτησης. Σχηματικά ένα σύστημα ουράς μπορεί να παρουσιαστεί όπως στο σχήμα 1.1.

Σε ένα σύστημα ουράς οι αφίξεις των πελατών συνήθως είναι τυχαίες και ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι τυχαία μεταβλητή. Είναι λοιπόν φυσικό η αντιμετώπιση των προβλημάτων τους να γίνεται με στοχαστικά μοντέλα. Η

πρακτική σκοπιμότητα της μελέτης των συστημάτων ουράς είναι συνήθως η βελτίωση του συστήματος με κάποια αλλαγή. Για παράδειγμα μπορεί οι αφίξεις να είναι τόσο πυκνές, ώστε να σχηματίζονται μεγάλες ουρές με αποτέλεσμα ο χρόνος αναμονής για εξυπηρέτηση ενός πελάτη να είναι ο ελάχιστος αριθμός σημείων εξυπηρέτησης που πρέπει να προστεθούν έτσι ώστε να βελτιωθεί το σύστημα (π.χ. οι χρόνοι αναμονής να είναι σε ανεκτά όρια).



Σχήμα 1.1. Σύστημα ουράς

### 1.6. Πεπερασμένες Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Τα πλέον σημαντικά ίσως στοχαστικά μοντέλα στις Επιχειρησιακές Έρευνες είναι αυτά που μπορούν να τεθούν κάτω από το γενικό τίτλο πεπερασμένες Μαρκοβιανές αλυσίδες. Η μαθηματική υποδομή οφείλεται στο Ρώσο μαθηματικό Μαρκον το 1905. Μπορεί κανείς εύκολα να βρει εφαρμογές των Μαρκοβιανών αλυσίδων σε εντελώς διαφορετικές επιστήμες όπως στην καρκινογένεση, στις τάσεις της αγοράς, στους κινδύνους των επιχειρήσεων, στις ασφαλιστικές μεθόδους, στα πληθυσμιακά προβλήματα, στη δημογραφία, στην αστρονομία, στη θεωρία αποθήκευσης, κ.λπ.

Χαρακτηριστικό όλων αυτών των συστημάτων είναι ότι έχουν την ιδιότητα του Μαρκον ή Μαρκοβιανή ιδιότητα, η οποία με απλά λόγια λέει ότι η μελλοντική εξέλιξη του συστήματος εξαρτάται από την παρούσα του κατάσταση και δεν εξαρτάται από το παρελθόν του. Φανταστείτε ότι μια ηλιόλουστη μέρα της άνοιξης είσαστε δίπλα σε μια λιμνούλα με νούφαρα. Ένας βάτραχος πηδάει από ένα νούφαρο στο άλλο. Τα νούφαρα είναι ας πούμε 12. Υποθέτουμε ότι ο βάτραχος είναι στο νούφαρο 6 και ότι δεν πηδάει μέσα στο νερό. Θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα ο βάτραχος να πηδήσει σε κάθε ένα από τα υπόλοιπα νούφαρα. Είναι φυσικό και ρεαλιστικό να



υποθέσουμε ότι η πιθανότητα αυτή εξαρτάται από το νούφαρο στο οποίο βρίσκεται ο βάτραχος τώρα και όχι από το σε πια νούφαρο βρισκότανε στο πιο μακρινό παρελθόν. Δηλαδή το σύστημα που περιγράψαμε έχει τη Μακροβιανή ιδιότητα. Το παράδειγμα αυτό με το βάτραχο θα το αναφέρουμε πολλές φορές για να εξηγήσουμε τις διάφορες ιδέες στις Μακροβιανές αλυσίδες. Όλες οι καλές ιδέες έχουν ένα απλό τρόπο να εξηγηθούν αρκεί βέβαια να μπορούμε να τον βρούμε. Περιγραφικά, θα δώσουμε μερικά παραδείγματα από τις εφαρμογές των Μακροβιανών αλυσίδων για να αποκτηθεί μία πρώτη γεύση αυτού του χώρου.

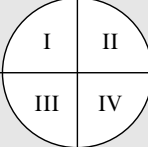
Χωρίς αυστηρή θεμελίωση μία στοχαστική διαδικασία με την ιδιότητα, ότι δεδομένης της τιμής  $X_t$ , οι τιμές των  $X_s$ ,  $s > t$  δεν εξαρτώνται από τις τιμές των  $X_u$ ,  $u < t$  καλείται μία διαδικασία Markov. Η ιδιότητα αυτή σημαίνει ότι η πιθανότητα οποιασδήποτε μελλοντικής κατάστασης της διαδικασίας, όταν η παρούσα κατάσταση είναι γνωστή δεν αλλοιώνεται από επιπλέον δεδομένα που αφορούν τη συμπεριφορά της διαδικασίας στο παρελθόν. Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή σαν ιδιότητα του Markov (1907). Σε αυστηρή θεμελίωση μία στοχαστική διαδικασία καλείται Μακροβιανή αν για κάθε  $t, t_1, t_2, \dots, t_k$

$$\text{prob}\{\alpha < X_t < \beta | X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_n} = x_n\} = \text{prob}\{\alpha < X_t < \beta | X_{t_n} = x_n\} \quad (6.1)$$

όπου  $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$ .

Στο παρόν βιβλίο θα ξεκινήσουμε τη μελέτη μας με την κατηγορία των Μακροβιανών διαδικασιών σε χρόνο διακριτό, με χώρο καταστάσεων διακριτό. Την κατηγορία αυτή των Μακροβιανών διαδικασιών καλούμε Μακροβιανές αλυσίδες. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε μία αλυσίδα του Markov σαν μία ακολουθία  $X_0, X_1, X_2, \dots$  διακεκριμένων τυχαίων μεταβλητών με την ιδιότητα ότι η υπό συνθήκη κατανομή της  $X_{n+1}$  όταν δίνονται οι  $X_0, X_1, \dots, X_n$  εξαρτάται μόνο από την τιμή της  $X_n$  δηλ.

$$\text{prob}\{X_{n+1} = \kappa | X_n = r, \dots, X_0 = \lambda\} = \text{prob}\{X_{n+1} = \kappa | X_n = r\}$$

Διακριτός χρόνος Χώρος καταστάσεων διακριτός	<b>Μακροβιανές</b>	Συνεχής χρόνος Χώρος καταστάσεων διακριτός
		
Διακριτός χρόνος Χώρος καταστάσεων συνεχής		Συνεχής χρόνος Χώρος καταστάσεων συνεχής

**Σχήμα 1.2.** Κλάσεις στοχαστικών διαδικασιών

Ειδικά όταν ο χώρος των καταστάσεων  $S$  είναι ένα πεπερασμένο σύνολο τότε έχουμε τις λεγόμενες πεπερασμένες Μαρκοβιανές αλυσίδες.

Απ' όσα αναφέραμε είναι φανερό ότι περιληπτικά οι κλάσεις των στοχαστικών διαδικασιών μπορούν να δοθούν όπως στο σχήμα 1.2.

Είναι φανερό ότι θα ασχοληθούμε με την κλάση του χωρίου  $I$  ενώ η θεωρία γραμμών αναμονής είναι μια ειδική κατηγορία του χωρίου  $II$ .

### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2.** Αλλαγές στις προτιμήσεις πελατών

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα προϊόν το οποίο παρασκευάζεται από τρεις κατασκευαστές  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$ . Επιθυμία μας είναι να μελετήσουμε τις τάσεις των πελατών. Αυτοί αγοράζουν σταθερά το προϊόν από ένα κατασκευαστή ή αλλάζουν κάθε μήνα (ένα τακτό χρονικό διάστημα) ή αλλάζουν σε τυχαία χρονικά διαστήματα. Το βασικό πρόβλημα σ' αυτή τη περίπτωση είναι να προβλέψουμε το πόσοι πελάτες θα αγοράσουν το προϊόν από κάθε αγοραστή. Αυτό αντιμετωπίζεται υποθέτοντας ότι το σύστημα έχει τη Μαρκοβιανή ιδιότητα και φτιάχνοντας ένα στοχαστικό μοντέλο για την περίπτωση. Άλλα σχετικά προβλήματα που μπορούν έτσι ν' απαντηθούν μ' αυτήν την αντιμετώπιση είναι, πιο είναι το μέσο χρονικό διάστημα που ένας πελάτης αγοράζει από κάποιο αγοραστή, ποια είναι η ασυμπτωτική συμπεριφορά του συστήματος κ.λπ.

### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.** Ασφαλιστικά προβλήματα

Ας υποθέσουμε ότι μια ασφαλιστική εταιρεία εργάζεται προσφέροντας συμβόλαια για διάφορα ατυχήματα. Έστω  $X(t)$ ,  $t \geq 0$  η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το κεφάλαιο της εταιρείας τη χρονική στιγμή  $t$ . Έστω ότι ο χρόνος είναι διακριτός και έστω  $I_t$  η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τις εισπράξεις της ασφαλιστικής εταιρείας το χρονικό διάστημα  $[t-1, t)$ ,  $C_t$  η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τις πληρωμές της ασφαλιστικής εταιρείας στο χρονικό διάστημα  $[t-1, t)$ . Η κατάσταση της εταιρείας στη χρονική στιγμή  $t$  δίνεται προφανώς από

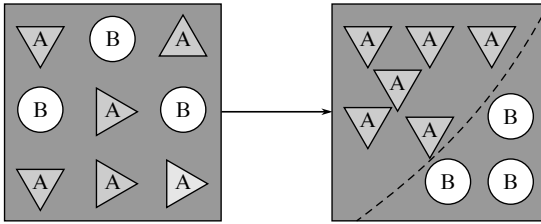
$$X_t = X_0 + (I_1 - C_1) + (I_2 - C_2) + \dots + (I_t - C_t) .$$

Προφανώς, όταν  $X_t \leq 0$  η εταιρεία έχει καταστραφεί. Φτιάχνοντας ένα μοντέλο Μαρκοβιανής αλυσίδας μπορούμε ν' απαντήσουμε, ποια είναι η πιθανότητα η ασφαλιστική εταιρεία να καταστραφεί δεδομένης μιας πολιτικής της. Δεδομένου ενός κοστολογίου και ενός επιπέδου κέρδους, ποια πρέπει να είναι η τιμή κοστολογίου για την ομαλή λειτουργία της εταιρείας;

### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.** Πληθυσμιακά προβλήματα

Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες έχουν χρησιμοποιηθεί κατ' επανάληψη με επι-

τυχία για την αντιμετώπιση προβλημάτων ανάπτυξης πληθυσμών, βιολογικών, ανθρώπινων κ.λπ. Ένα μικρό παράδειγμα είναι αν θεωρήσουμε (βλ. σχήμα 1.3), πάνω σ' ένα πλαίσιο δύο ειδών μικροοργανισμούς A και B. Όταν ένας μικροοργανισμός A συναντά ένα μικροοργανισμό B τότε με πιθανότητα  $p_1$  ο A καταστρέφει το B με πιθανότητα  $p_2$  χωρίζονται χωρίς συνέπειες και με πιθανότητα  $p_3$  καταστρέφονται και οι δύο. Πολύ ενδιαφέρον ερώτημα σ' αυτή την περίπτωση είναι για πολύ μεγάλο  $t$  ποιοι είναι οι αναμενόμενοι πληθυσμοί κάθε ενός από τους μικροοργανισμούς. Είναι ενδιαφέρον σ' αυτήν την περίπτωση ότι βρέθηκε πως ακόμα και όταν το  $p_1 \gg p_2$ , στις περισσότερες περιπτώσεις, οι απόγονοι του B αποκτούν ιδιαίτερες ιδιότητες που τους επιτρέπουν να επιζούν σε μια δυναμική μείωση ψηφία. Ιδιαίτερης σημασίας είναι επίσης σ' αυτή την περίπτωση οι μεθοδολογίες στοχαστικού ελέγχου για τη διάσωση κάποιου πληθυσμού που κινδυνεύει μ' εξαφάνιση.



Σχήμα 1.3

Κλασική εφαρμογή των Μαρκοβιανών αλυσίδων είναι η λεγόμενη δημογραφία όπου ο πληθυσμός μιας χώρας χωρίζεται σε ομάδες ηλικιών και προσπαθούμε να εκτιμήσουμε τις πιθανότητες επιβίωσης των διαφόρων ηλικιών τις πιθανότητες γονιμότητας των διαφόρων ηλικιών να προβλέψουμε τους επιμέρους πληθυσμούς σε κάθε ηλικία και άλλα.

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.5. Επιδημιακά προβλήματα

Μια άλλη πολύ ενδιαφέρουσα περιοχή προβλημάτων που αντιμετωπίζονται με τη βοήθεια των Μαρκοβιανών Αλυσίδων είναι αυτή της επιδημιολογίας και της διάδοσης των ψιθύρων. Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε ένα κοινωνικό σύνολο το οποίο αρχικά περιέχει μία ομάδα ασθενών και έχουν τη δυνατότητα να μεταδίδουν την ασθένεια, να θεραπεύονται και να πεθαίνουν από αυτή την ασθένεια. Με ένα αρχικό αριθμό μελών του κοινωνικού συνόλου στο χρόνο 0 μας ενδιαφέρει να προβλέψουμε τον αναμενόμενο αριθμό μελών του συστήματος που θα έχουν την ασθένεια. Επίσης με διάφορες μεθόδους μπορούμε να διαπιστώσουμε και την αποτελεσματικότητα δια-

φόρων τρόπων καταστολής των επιδημιών. Η ίδια μεθοδολογία ακολουθείται και για τη διάδοση των ψιθύρων μια και οι επιδημίες και οι ψίθυροι έχουν τους ίδιους φυσικούς μηχανισμούς εξάπλωσης.

### ***ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.6. Προβλήματα δεξαμενών***

Τα προβλήματα δεξαμενών για την αποθήκευση οποιουδήποτε υγρού π.χ. πετρελαίου, νερού κ.λπ. αποτελούν μία ιδιαίτερη κατηγορία εφαρμογών των πεπερασμένων Μακροβιανών αλυσίδων. Στα προβλήματα αυτά έχουμε ένα πεπερασμένο χώρο που αποθηκεύουμε υγρό, επίσης έχουμε μια τυχαία έξοδο του υγρού για χρήση και επίσης μια τυχαία είσοδο του υγρού μέσα στη δεξαμενή. Προβλήματα όπως η πιθανότητα ξεχειλίσματος της δεξαμενής, αδειάσματος και άλλα συναφή παρουσιάζουν εξαιρετικό ενδιαφέρον από πρακτικής πλευράς.

Υπάρχουν και άλλες κατηγορίες προβλημάτων στις Επιχειρησιακές Έρευνες που λύνονται με τις μεθόδους των πεπερασμένων Μακροβιανών Αλυσίδων. Περιλήψεις αυτών καθώς και κατάταξή τους σε κατηγορίες μπορεί κανείς να βρει στο περιοδικό *International abstracts in Operations Research*.