

Π.-Χ. Γ. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Α.Π.Θ.

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ



ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ZHTE

*Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα
ή τη σφραγίδα του εκδότη.*

ISBN 960-431-715-6

© Copyright: Π. -Χ. Γ. Βασιλείου, Εκδόσεις Ζήτη, Μάιος 2001, Θεσσαλονίκη

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις του Ελληνικού νόμου (Ν.2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής άδειας του εκδότη κατά οποιοδήποτε τρόπο ή μέσο αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή (ηλεκτρονική, μηχανική ή άλλη) και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.



www.ziti.gr

**Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση**

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ

18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας

Τ.Θ. 171 • Νέοι Επιβάτες Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19

Τηλ.: 03920-72.222 (5 γραμ.) - Fax: 03920-72.229

e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη

Τηλ. 0310-203.720, Fax 0310-211.305

e-mail: sales@ziti.gr

*Αφιερώνεται σε αυτούς
που θέλουν πολύ να μάθουν.*

Περιεχόμενα

1ο Κεφάλαιο

Εισαγωγή	9
----------------	---

2ο Κεφάλαιο

Εισαγωγή στην Θεωρία Πιθανοτήτων

2.1 Εισαγωγή	19
2.2 Ο δειγματοχώρος Ω και τα απλά ενδεχόμενα	20
2.3 Πιθανότητα	22
2.4 Βασικές Ιδιότητες της πιθανότητας	29
2.5 Υπό συνθήκη πιθανότητες	30
2.6 Ανεξάρτητα ενδεχόμενα	34
2.7 Τυχαία μεταβλητή	36
2.8 Απαριθμητές τυχαίες μεταβλητές	37
2.9 Πιθανότητες και Θεωρία Μέτρου	43
2.10 Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές	44
2.11 Μέση τιμή και διασπορά μίας τυχαίας μεταβλητής	51
2.12 Συνδιακύμανση δύο τυχαίων μεταβλητών	55
2.13 Ασυμπτωτικά αποτελέσματα	56

3ο Κεφάλαιο

Επιτόκια - Χρονική αξία χρήματος

3.1 Εισαγωγή	61
3.2 Βασικά είδη επιτοκίων	62
3.3 Χρονική Αξία Χρήματος	67
3.4 Ποσοστό επιστροφής μίας επένδυσης	70

4ο Κεφάλαιο

Χρηματιστηριακή αγορά και παράγωγα

4.1	Εισαγωγή	77
4.2	Μετοχή (Equity, Stock or Share)	78
4.3	Ξένο συνάλλαγμα (foreign exchange - currencies), πρώτες ύλες (Commodities)	82
4.4	Μελλοντικά Συμβόλαια (Forward Contracts), Μελλοντικά Συμβόλαια Ανταλλαγής (Future Contracts)	83
4.5	Ανταλλαγές (Swaps)	88
4.6	Δικαίωμα	91
4.7	Τύποι συναλλασσομένων	93

5ο Κεφάλαιο

Τιμολόγηση κέρδους

5.1	Εισαγωγή	97
5.2	Το δυωνιμικό μοντέλο τιμολόγησης	98
5.3	Η τιμολόγηση κέρδους του δυωνιμικού μοντέλου σε χρόνο δύο	107
5.4	Η τιμολόγηση κέρδους του δυωνιμικού μοντέλου σε χρόνο n	125
	• Προβλήματα	127

6ο Κεφάλαιο

Υπό συνθήκη Μέση Τιμή

6.1	Εισαγωγή	133
6.2	Υπό συνθήκη μέση τιμή: Η διακριτή περίπτωση	134
6.3	Υπό συνθήκη μέση τιμή: Η συνεχής περίπτωση	142
6.4	Εφαρμογές της υπό συνθήκη μέσης τιμής	144
6.5	Ιδιότητες της υπό συνθήκη μέσης τιμής	156
6.6	Υπό συνθήκη μέση τιμή περισσότερης της μίας τυχαίας μεταβλητής ...	163

7ο Κεφάλαιο

Martingales

7.1	Εισαγωγή	161
7.2	Ένα Ιστορικό Σημείωμα	181

7.3	Πεπερασμένες Μαρκοβιανές Αλυσίδες	182
7.4	Martingales	188
7.5	Μία ελαφρά διαφορετική θεώρηση	200
7.6	Μετασχηματισμοί Martingale	201
7.7	Χρόνοι στάσης και η ισχυρή Μαρκοβιανή ιδιότητα	205
7.8	Το επιλεκτικό θεώρημα στάσης	210
7.9	Ασυμπτωτικά Θεωρήματα των Martingales	221
	• Προβλήματα	223

8ο Κεφάλαιο

Αυτοχρηματοδοτούμενες διαδικασίες κεφαλαίου

8.1	Εισαγωγή	211
8.2	Το Μοντέλο Αγοράς	212
8.3	Εφικτές στρατηγικές	219
8.4	Η διαδικασία αξιών του απλού Ευρωπαϊκού δικαιώματος	221
8.5	Η Μαρκοβιανή Ιδιότητα	226
8.6	Αμερικάνικα δικαιώματα	232
8.7	Η τιμολόγηση ενός Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης μίας μετοχής σε χρόνο 3	233
8.8	Βέλτιστη στρατηγική εξασφάλισης για Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης ή αγοράς	253
8.9	Ο Αλγόριθμος του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης μίας μετοχής σε χρόνο T	267
	• Προβλήματα	277

9ο Κεφάλαιο

Λίγα ακόμη σκαλοπάτια στη θεωρία των Martingales

9.1	Εισαγωγή	303
9.2	Το Μοντέλο Αγοράς	304
9.3	Υπό συνθήκη μέση τιμή δεδομένης μίας σ-άλγεβρας	315
9.4	Ιδιότητες της υπό συνθήκη μέσης τιμής δεδομένης μίας σ-άλγεβρας ...	318
9.5	Martingales σε σχέση με φιλτράρισμα	321
9.6	Martingales σε χρόνο συνεχή	326
9.7	Τετραγωνικά ολοκληρώσιμα martingales	333

10ο Κεφάλαιο

Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις, διαδικασία Wiener (κίνηση Brown)

10.1	Εισαγωγή	337
10.2	Η γέννηση της διαδικασίας του Wiener	340
10.3	Κίνηση Brown	350
10.4	Η γεωμετρική κίνηση Brown	357
10.5	Η επανερχόμενη στο μέσο στοχαστική διαδικασία (Mean Reverting Process)	363
10.6	Στοχαστικές διαδικασίες με στοχαστική διακύμανση	366
10.7	Πολυδιάσταση κίνηση Brown	369
	• Προβλήματα	372

11ο Κεφάλαιο

Στοχαστική ολοκλήρωση, το λήμμα του Itô

11.1	Εισαγωγή	379
11.2	Το ολοκλήρωμα του Itô	381
11.3	Ιδιότητες του ολοκληρώματος του Itô	389
11.4	Το λήμμα του Itô	390
11.5	Πολυδιάστατη μορφή του τύπου του Itô	401
11.6	Ύπαρξη και είδη λύσεων των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων ...	408
	• Προβλήματα	411

12ο Κεφάλαιο

Τιμολόγηση ευρωπαϊκού δικαιώματος σε χρόνο συνεχή

12.1	Εισαγωγή	417
12.2	Η τιμολόγηση του ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς σε χρόνο συνεχή με τη μέθοδο των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους	418
12.3	Η μεθοδολογία των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους για την τιμολόγηση παραγώγων	424
12.4	Το θεώρημα του Girsanov	427

12.5	Η τιμολόγηση παραγώγων με τη μέθοδο των ισοδυνάμων martingale μέτρων	434
12.6	Εφαρμογή: ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς μετοχής	446
•	Προβλήματα	452
•	Παράρτημα	
	<i>Στατιστικοί πίνακες</i>	
1.	Κατανομή Poisson	457
2.	Εκθετικές συναρτήσεις e^x , e^{-x}	463
3.	Πίνακας πιθανοτήτων $P(0 < Z < z)$ για την κανονική κατανομή $N(0, 1)$	469
•	Βιβλιογραφία	470
•	Ευρετήριο όρων	475

1ο Κεφάλαιο

ΕΙΣΑΓΩΓΗ



1ο Κεφάλαιο

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η προϋστορία και τα πρακτικά προβλήματα στα στοχαστικά χρηματοοικονομικά είναι μία πολύ παλιά ιστορία, όπως υπαινίσσεται εν μέρει και το εξώφυλλο. Στην πραγματικότητα, η ιστορία ξεκίνησε την πρώτη ημέρα που μία ανθρώπινη κοινωνία αποφάσισε ν' ανταλλάξει ένα αγαθό με μία άλλη και να μην πολεμήσει για να της το αρπάξει. Όμως, η επαναστατική θεωρία στα χρηματοοικονομικά, η οποία άλλαξε ποικιλότητες και το αντικείμενο, αλλά και την αγορά, καθώς και η πρακτική ενέργεια που συνέβαλε τα μέγιστα για να συμβεί αυτό, έγιναν το 1973.

Το 1973 άνοιξε η πρώτη χρηματιστηριακή εταιρεία αγοράς και πώλησης δικαιωμάτων (options) στο Chicago. Την ίδια χρονιά οι Black and Scholes δημοσίευσαν στο περιοδικό *Journal of Political Economy* την διάσημη πλέον εργασία τους για την τιμολόγηση ενός δικαιώματος (option pricing) και για τις στρατηγικές εξασφάλισης (hedging strategies) που μπορούν να υπάρξουν και να εγγυηθούν την εξασφάλιση (hedging), με βάση την αρχή του μη-βέβαιου κέρδους (arbitrage). Μέσα στον ίδιο χρόνο η εργασία τους αυτή επεκτάθηκε από τον Robert Merton.

Οι επαναστατικές αυτές θεωρίες των Black-Scholes και Morton έγιναν πολύ δύσκολα αποδεκτές στο διεθνές οικονομικό και επιστημονικό περιβάλλον. Όπως συμβαίνει σε τέτοιες περιπτώσεις ήταν αρκετά μπροστά από την εποχή τους. Με το χρόνο οι απόψεις τους αφομοιώθηκαν από την επιστημονική κοινότητα και ακολούθησαν και άλλοι καθώς δημιουργήθηκε και σύνδεση της χρηματοοικονομικής θεωρίας με τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών των martingales. Από τότε η θεωρία των μαθηματικών οικονομικών αναπτύχθηκε τάχιστα σε παραλληλία με την τεράστια ανάπτυξη της αγοράς των παραγώγων, η οποία έχει φθάσει στο ύψος πολλών εκατομμυρίων τρισεκατομμυρίων δολαρίων. Όταν τέτοια ποσά διακινούνται σε μία αγορά όπως η αγορά των παραγώγων και η μαθηματική επιστήμη παίζει τον σπουδαιότερο ρόλο στη δημιουργία νέων αγορών των παραγώγων τότε έχουμε στα χέρια μας μία πάρα πολύ σοβαρή υπόθεση.

Σήμερα η μαθηματική θεωρία των χρηματοοικονομικών είναι παγκόσμια αποδεκτή και σημαντική και υπάρχει ένας μικρός πυρήνας της, που είναι κατάλληλος για να κτίσεις γνώσεις και προσλαμβάνουσες παραστάσεις σε νέους ανθρώπους.

Η αναγνώριση για τους αρχικούς ερευνητές ήλθε το 1997 με την απονομή του Βραβείου Νόμπελ στους δύο επιβιώσαντες από αυτούς, τους Myron Scholes και Robert Merton.

Ο πυρήνας της γνώσης στα Μαθηματικά Χρηματοοικονομικά έχει εξελιχθεί στη δημιουργία μαθημάτων στα καλά Πανεπιστήμια όλου του κόσμου σχετικά με το αντικείμενο, παρόλο που φαίνεται να υπάρχει ένα πρόβλημα στην εύρεση ανθρώπων με το κατάλληλο μαθηματικό υπόβαθρο και επίπεδο για το σκοπό αυτό. Τέτοια μαθήματα έχουν αναπτυχθεί σε τμήματα Μαθηματικών, Οικονομικών και Χρηματοοικονομικών, Στατιστικής, Μηχανικών των Χρηματοοικονομικών και συνδυασμών από αυτά.

Ο πυρήνας της γνώσης στα Μαθηματικά Χρηματοοικονομικά αφορά κυρίως προβλήματα όπως:

Η τιμολόγηση των παραγώγων (δικαιώματα, ανταλλαγές κ.λπ.) και η στρατηγική εξασφάλισης (hedging) έναντι όλων των δυνατών εξελίξεων. Αυτό πρέπει να γίνει με βάση την αρχή του μη βέβαιου κέρδους (no-arbitrage). Άσχημη τιμολόγηση που θα δημιουργήσει συνθήκες βέβαιου κέρδους (arbitrage) θα έχει σαν συνέπεια την εμφάνιση των arbitrageurs των κυνηγών δηλαδή του βέβαιου κέρδους, οι οποίοι θα δημιουργήσουν μία τεράστια ζήτηση η οποία θα αλλάξει τις ανεκτές ισορροπίες στην αγορά και θα δημιουργήσει ένα τέτοιο κλίμα που είναι άγνωστο πού θα υπάρξει ισορροπία ξανά. Αν αυτό δεν είναι αρκετό η άμεση συνέπεια για τον εμπορευόμενο ένα τέτοιο παράγωγο είναι η άντληση του κεφαλαίου του από τους κυνηγούς του βέβαιου κέρδους και η διάθεσή του σε άλλες επενδύσεις στην αγορά. Σ' αυτόν θα έχει μείνει «η κουβέρτα ή το χαλάκι» αν του επιτρέψουν να σκεπαστεί μ' αυτό.

Σχεδόν όλα τα μεγάλα Χρηματιστηριακά γραφεία και οι μεγάλες Τράπεζες έχουν προσλάβει arbitrageurs με εξαιρετική μόρφωση και ικανότητες που κάνουν αποκλειστικά αυτή τη δουλειά. Αναζητούν δηλαδή το σημείο της αγοράς σ' όλο τον πλανήτη (όπου αυτό είναι δυνατόν), όπου υπάρχει το βέβαιο κέρδος.

Η μαθηματική θεωρία στο μεταξύ έχει φθάσει σε τέτοιο σημείο ωριμότητας που έχει αρχίσει να γίνεται γνωστή σε ευρύτερα στρώματα εμπλεκομένων και διαπλεκομένων. Αποτέλεσμα αυτού του πράγματος είναι τα περιθώρια κέρδους για τα κεθερωμένα παράγωγα που χρησιμοποιούν τον κωδικό «vanilla» να έχουν περιορισθεί σημαντικά. Συνέπεια αυτού είναι η δημιουργία όλο και πλέον πολύπλοκων παραγώγων τα λεγόμενα με το σκοπικό προσωνύμιο «εξωτικά» παράγωγα ώστε να αυξηθούν τα περιθώρια κέρδους. Αυτό γεννά την ανάγκη νέων μαθηματικών θεωριών για την επίλυση του προβλήματος τιμολόγησης και στρατηγικών εξασφάλισης.

Η μαθηματική θεωρία στα χρηματοοικονομικά έχει σοβαρές απαιτήσεις σε μαθηματικές γνώσεις που είναι κυρίως από τη Θεωρία Μέτρου και Πιθανότητας, Θε-

ωρία των Στοχαστικών διαδικασιών (Μαρκοβιανές διαδικασίες και Martingales), Στοχαστικό Ολοκληρωτικό Λογισμό, Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις και κυρίως μία όσο το δυνατό βαθύτερη και καθαρότερη Στοχαστική Σκέψη.

Όταν ένα βιβλίο γράφεται με την υπόθεση ότι αυτές οι προϋποθέσεις ικανοποιούνται τότε είναι σίγουρο ότι αυτό θα είναι ένα εξαιρετικό βιβλίο για να συμβάλει στην περαιτέρω ανάπτυξη των μαθηματικών θεωριών για την επίλυση συγκεκριμένων πραγματικών προβλημάτων στα Χρηματοοικονομικά. Όμως ένα τέτοιο βιβλίο θα ήταν δυνατό ν' αφομωθεί από μία ελίτ ανθρώπων στο σημερινό κόσμο.

Ένα επιπλέον πρόβλημα είναι ότι στο χώρο των μαθηματικών Χρηματοοικονομικών έχουν προσέλθει άνθρωποι με πολλά διαφορετικά υπόβαθρα, Μαθηματικοί, Οικονομολόγοι, Μηχανικοί. Αλλά ακόμα και ανάμεσα στους Μαθηματικούς τα υπόβαθρα διαφέρουν σοβαρά.

Στα προβλήματα αυτά τρεις τάσεις έχουν διαμορφωθεί και αυτό απεικονίζεται ξεκάθαρα στα βιβλία που έχουν γραφεί στο αντικείμενο τα τελευταία χρόνια, που μία πλούσια συλλογή τους υπάρχει στη βιβλιογραφία.

- Η πρώτη τάση έχει ήδη αναφερθεί, γράφεις με την υπόθεση ότι ο αναγνώστης έχει το αναγκαίο Μαθηματικό υπόβαθρο.
- Η δεύτερη τάση που έχει καθιερωθεί είναι αυτή που απευθύνεται σε επιστήμονες με αδύναμο Μαθηματικό υπόβαθρο. Η προσέγγιση σ' αυτές τις περιπτώσεις είναι «θα σου δείξω περίπου πώς να το κάνεις» αφού στο στολίσιω και με κάποιες Μαθηματικές εξηγήσεις που αν σε πολυδυσκολεύουν άφησε τες κατά μέρος. Φτάνουμε σχεδόν δηλαδή στο επίπεδο «συνταγής μαγειρέματος» για φαγητό. Αυτή η προσέγγιση είναι εξαιρετικά ευάλωτη και ως προς το αποτέλεσμα αλλά και ως προς το μέλλον αυτού που επιλέγει αυτό τον τρόπο μόρφωσης.
- Η τρίτη τάση που είναι πλέον πρόσφατη είναι περίπου κοντά στην πρώτη, χωρίς ν' ακολουθεί την προϋπόθεση της ύπαρξης του αναγκαίου υπόβαθρου και πολύ μακριά από τη δεύτερη. Υποθέτει δηλαδή την ύπαρξη πολύ μικρότερου υπόβαθρου από την πρώτη τάση και προσπαθεί στην πορεία να κτήσει τα ελάχιστα δυνατά υπόβαθρα για την κατά το δυνατόν βαθύτερη γνώση των πραγματικών προβλημάτων, των λύσεών τους και των μεθόδων που χρησιμοποιούνται γι' αυτό.

Στο παρόν βιβλίο ξεκίνησα με την προϋπόθεση ότι ο αναγνώστης γνωρίζει ή ακριβέστερα έχει εκτεθεί σε γνώσεις ενός πρώτου μαθήματος Θεωρίας Πιθανοτήτων και κλασσικές γνώσεις Μαθηματικής Ανάλυσης που δίνονται στην Ελλάδα εν μέρει στο Λύκειο και στα δύο πρώτα έτη σπουδών στα Μαθηματικά τμήματα αλλά και σε άλλες ανεβασμένες σπουδές από μαθηματικής πλευράς Οικονομικών και Μηχανικών. Παρόλα αυτά το δεύτερο κεφάλαιο περιέχει μία επισκόπηση γνώσε-

ων από τη Θεωρία Πιθανοτήτων ώστε να έχει το βιβλίο στοιχειώδη αυτονομία. Στα επόμενα κεφάλαια γίνεται προσπάθεια ν' αναπτυχθούν διαδεχόμενες η μία την άλλη οι οικονομικές γνώσεις και οι μαθηματικές όπως και οι στοχαστικές. Υπάρχουν κεφάλαια με στόχο την ανάπτυξη του στοχαστικού υπόβαθρου του αναγνώστη όπως για παράδειγμα το κεφάλαιο των martingales σε χρόνο διακριτό. Υπάρχουν κομμάτια του περισσότερο ανεβασμένα που μπορεί ο αναγνώστης να τα παραλείψει στην πρώτη ανάγνωση. Όταν έλθει στο αντίστοιχο καθαρά χρηματοοικονομικό κεφάλαιο θα καταλάβει αν υπάρχει ανάγκη να επανέλθει ή όχι.

Ένα δεύτερο χαρακτηριστικό πρόβλημα για το βιβλίο ήταν μέχρι ποιο σημείο θ' ανέπτυξε τη σύζευξη Θεωρίας Μέτρου και πιθανότητας. Αυτό το πρόβλημα ήταν άμεσα συνδεδεμένο με τη δυνατότητα κατανόησης του βιβλίου από τον αναγνώστη. Η προσέγγιση που ακολουθείται είναι η ελάχιστη κατά το δυνατόν χρήση αυτή της γνώσης και όσο προχωράει το βιβλίο να την αναπτύσσει κατ' ελάχιστο όπου πραγματικά τη χρειάζεται στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων.

Το παρόν είναι μία πρώτη προσέγγιση ανάπτυξης αυτού του υλικού για τις ανάγκες του μαθήματος Στοχαστικές Μέθοδοι στα Χρηματοοικονομικά στο Μαθηματικό Τμήμα του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Το ένστικτο του συγγραφέα του δίνει τη βεβαιότητα ότι πολλά μεν ακόμα έχουν να γίνουν σ' αυτή την κατεύθυνση αλλά ότι συγχρόνως κάποια χρήσιμα πράγματα θα έχουν προστεθεί στο οπλοστάσιο των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών των φοιτητών του μαθήματος ή των πιθανών αναγνωστών του βιβλίου. Η πλέον ανακουφιστική σκέψη πάντως για τον συγγραφέα είναι γιατί έχει τη διαίσθηση (ψευδαίσθηση αν θέλετε) ότι το παρόν θα συμβάλει κατά τι στην ανάπτυξη της Στοχαστικής Σκέψης του φοιτητή ή του αναγνώστη και αυτό είναι σημαντικό.

Αν το βιβλίο αυτό σας δώσει κάποια έντονα ερεθίσματα και θέλετε να έλθετε σε επαφή με τον συγγραφέα μπορείτε είτε προσωπικά στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης είτε στο Vasiliou@ccf.auth.gr. Δύσκολα θα βρείτε συγγραφέα που να μην λατρεύει τους αναγνώστες του.