Π.-Χ. Γ. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Α.Π.Θ.

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Κεφάλαιο **Σ. Προβλήματα παραγωγής και αποθήκευσης**

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ
ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Κεφάλαιο **11. Το πρόβλημα του ακέραιου προγραμματισμού Η μέθοδος κλάδου και φραγής**

Κεφάλαιο **12. Μέθοδοι περιορισμού του εφικτού χώρου Ι. Κλασματικοί αλγόριθμοι**

Κεφάλαιο **13. Μέθοδοι περιορισμού του εφικτού χώρου ΙΙ. Ακέραιοι Αλγόριθμοι**

Κάθε γνήσιο αντίτυπο υπογράφεται από τον συγγραφέα

ISBN 960-431-716-4

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 171 • Νέοι Επιβάτες Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 0392-72.222 (3 γραμ.) - Fax: 0392-72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ **ΖΗΤΗ**
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. (031) 203.720, Fax 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

www.ziti.gr

Κεφάλαιο Σ

Προβλήματα παραγωγής και αποθήκευσης

Κεφάλαιο Σ

Προβλήματα παραγωγής και αποθήκευσης

Σ.1. Εισαγωγή

Το πρόβλημα του κεφαλαίου αυτού είναι κεντρικό πρόβλημα κάθε παραγωγικής μονάδας εμπορικού ή άλλων προϊόντων. Σε κάθε χρονική περίοδο η παραγωγική μονάδα έχει μία πεπερασμένη δυνατότητα παραγωγής και μια πεπερασμένη δυνατότητα αποθήκευσής του. Την ίδια χρονική περίοδο υπάρχει μια ζήτηση του προϊόντος από την αγορά η οποία πρέπει για προφανείς λόγους να ικανοποιηθεί. Δηλαδή τα βασικά ερωτήματα για μια παραγωγική μονάδα είναι

(1) Πότε μια εντολή παραγωγής ενός προϊόντος πρέπει να δοθεί;

(2) Τι ποσότητα πρέπει να παραχθεί;

Η απάντηση στα δύο αυτά ερωτήματα θα πρέπει να δοθεί με βάση την ικανοποίηση κάποιου κριτηρίου. Το συνηθέστερο κριτήριο σ' αυτά τα προβλήματα είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους.

Είναι χρήσιμο σε αυτό το σημείο ν' αναφερθούμε σε μερικά από τα είδη κόστους που εμφανίζοννται σε προβλήματα παραγωγής και αποθήκευσης.

a) Κόστος παραγγελίας

Με τον όρο αυτό θα αναφερόμαστε στο κόστος το οποίο προκύπτει από την διαπραγματευτική διαδικασία μιας παραγγελίας, την τοποθέτηση των μηχανημάτων σε μια καινούργια αλυσίδα παραγωγής και σε οτιδήποτε κόστος προκύπτει από την απόφαση ν' αρχίσει η παραγωγή ενός προϊόντος. Είναι φανερό ότι αυτό το κόστος είναι ανεξάρτητο της ποσόστητας που θα πάρουμε απόφαση να παραχθεί και αναφέρεται στην προετοιμασία για ν' αρχίσει η παραγωγή του προϊόντος.

b) Κόστος αγοράς μονάδας προϊόντος

Το κόστος αυτό συμπεριλαμβάνει το κόστος που αντιστοιχεί στην μονάδα του προϊόντος, το κόστος του ανθρώπινου δυναμικού, την αποσβεση των μηχανημάτων , το κόστος του υλικού παραγωγής του προϊόντος και αυτό της παραγωγής και αποστολής του προϊόντος στο χώρο αποθήκευσης.

c) Κόστος αποθήκευσης μονάδας προϊόντος

Με τον όρο αυτό θ' αναφερόμαστε στο κόστος αποθήκευσης της μονάδας του προϊόντος για μία χρονική περίοδο. Σ' αυτό το κόστος συμπεριλαμβάνεται η συντήρηση της αποθήκευσης, η ασφάλιση του προϊόντος από κλοπή, η φορολογία των αποθηκευμένων και τέλος το κόστος της δέσμευσης του κεφαλαίου σε αποθηκευμένα προϊόντα.

c) Κόστος μη-ανταπόκρισης

Με τον όρο αυτό θ' αναφερόμαστε στο κόστος που προκύπτει όταν μία παραγγελία δεν μπορεί να ικανοποιηθεί. Το κόστος αυτό είναι δύσκολο να εκτιμηθεί γιατί όταν ένας πελάτης δεν μπορεί να λάβει το προϊόν το οποίο χρειάζεται τότε πηγαίνει σε ανταγωνιστή και και η παραγωγική μονάδα χάνει και μελλοντική ζήτηση και αξιοπιστία στην αγορά. Φυσικά υπάρχουν στοχαστικά μοντέλα για την εκτίμηση αυτού του κόστους κάτω από τις διαφορετικές κάθε φορά συνθήκες.

Τα προβλήματα παραγωγής και αποθήκευσης τα οποία θα παρουσιάσουμε θα τα λύσουμε με τη μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού. Για λόγους κατανόησης θα ξεκινήσουμε με πολύ απλουστευμένα προβλήματα και θα προχωρήσουμε μετά σε πλέον ρεαλιστικά.

Σ.2. Πρόβλημα παραγωγής και αποθήκευσης

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε ένα πρόβλημα παραγωγής και αποθήκευσης το οποίο έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά.

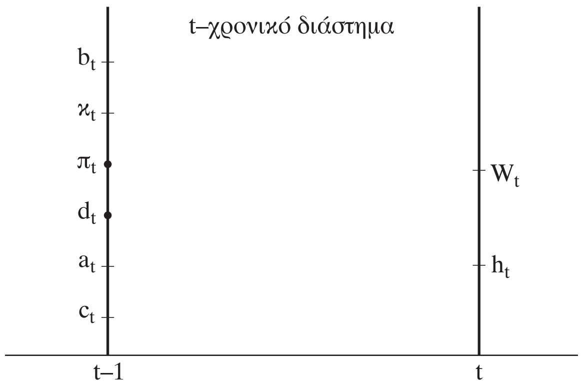
1. Υποθέτουμε ότι θέλουμε να ελέγχουμε την παραγωγή και αποθήκευση ενός προϊόντος για ένα χρονικό διάστημα από 0 έως T χρονικές μονάδες. Ο χρόνος είναι διακριτός $t = 1, 2, \ldots, T$.
2. Στην αρχή του χρονικού διαστήματος 1 ($[0, 1)$) δηλ. τη χρονική στιγμή 0 υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε την ζήτηση του προϊόντος στην αρχή του κάθε χρονικού διαστήματος t για $t = 1, 2, \ldots, T$.
3. Στην αρχή κάθε χρονικού διαστήματος η παραγωγική μονάδα αποφασίζει την ποσότητα παραγωγής του προϊόντος το οποίο θα παραχθεί και το οποίο υποθέτουμε ότι από εκείνη τη στιγμή είναι άμεσα στη διάθεση της παραγωγικής μονάδας. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα άνω όριο στην ποσότητα του προϊόντος που είναι δυνατό να παραχθεί για μια χρονική περίοδο.

4. Σε κάθε χρονική περίοδο ένα άνω όριο στην ποσότητα του προϊόντος που είναι δυνατόν ' αποθηκευτεί.
5. Σε κάθε χρονική περίοδο έχουμε κόστος παραγγελίας, κόστος αγοράς μονάδας προϊόντος και κόστος αποθήκευσης ανάλογα με τις αποφάσεις που θα πάρει η μονάδα παραγωγής.
6. Ο σκοπός της μονάδας παραγωγής είναι να ανταποκριθεί πλήρως στη ζήτηση με κριτήριο το ελάχιστο δυνατό κόστος.

Με βάση τα χαρακτηριστικά του προβλήματος παραγωγής και αποθήκευσης που μόλις περιγράψαμε ορίζουμε τις παρακάτω μεταβλητές του προβλήματος.

T: ο αριθμός των χρονικών περιόδων που η μονάδα παραγωγής θέλει να ελέγχει την παραγωγή και αποθήκευση του προϊόντος.

d_t: η ζήτηση του προϊόντος στην αρχή του t χρονικού διαστήματος, $t=1, 2, \ldots, T$ (βλ. σχήμα)



π_t: το άνω όριο της ποσότητας που είναι δυνατό να παραχθεί από τη μονάδα παραγωγής στην αρχή του t- χρονικού διασήματος, $t=1, 2, \ldots T$.

q_t: η ποσότητα το προϊόντος που είναι σε αποθήκευση στην αρχή του χρονικού διαστήματος $t=1, 2, \ldots, T$.

w_t: το άνω όριο της ποσότητας του προϊόντος που είναι δυνατό ν' αποθηκευτεί στο τέλος του του χρονικού διαστήματος t για $t=1, 2, \ldots, T$

c_t: το κόστος αγοράς της μονάδας προϊόντος στην αρχή του χρονικού διαστήματος t για $t=1, 2, \ldots, T$.

b_t: το κόστος παραγγελίας που προκύπτει όταν αποφαζίσουμε παραγωγή του προϊόντος στην αρχή του χρονικού διαστήματος t, για $t=1, 2, \ldots, T$.

x_t: η ποσότητα του προϊόντος που αποφασίζουμε να παραχθεί από την μονάδα παραγωγής στην αρχή του t-χρονικού διαστήματος για $t=1, 2, \ldots$ T.

h_t: το κόστος αποθήκευσης της μονάδας προϊόντος, από την ποσότητα που απομένει στο τέλος του t-χρονικού διαστήματος, για το t-χρονικό διάστημα με $t=1, 2, \ldots, T$.

Όπως πάντα το πρώτο σημαντικό βήμα είναι να ορίσουμε τη βέλτιστη συνάρτηση. Για να ορίσουμε τη βέλτιση συνάρτηση σημαντικό είναι να εντοπίσουμε τα σημεία που πρέπει να πάρουμε αποφάσεις n όπως έχουμε πει σε όλα τα προηγούμενα κεφάλαια τις φάσεις του προβλήματος. Αποφάσεις λαμβάνονται στην αρχή κάθε χρονικού διαστήματος και η απόφαση που πρέπει να ληφθεί είναι τι ποσότητα του προϊόντος πρέπει να παραχθεί ώστε το συνολικό κόστος του ελέγχου της παραγωγής και αποθήκευσης να είναι ελάχιστο.

Ορίζουμε βέλτιστη συνάρτηση την

$f_t(\alpha_t) = \{$το ελάχιστο κόστος που προκύπτει για την ικανοποίηση της ζήτησης για τα χρονικά διαστήματα $t, t+1, \ldots, T$ όταν η ποσότητα που είναι αποθηκευμένη στην αρχή του χρονικού διαστήματος t είναι $\alpha_t\}$.

Οι αποφάσεις μας λαμβάνονται στην αρχή κάθε χρονικού διαστήματος και σύμφωνα με την αρχή της βελτιστοποίησης πρέπει να είναι βέλτιστες κάθε φορά. Η απόφαση την οποία έχουμε να πάρουμε για το χρονικό διάστημα t, στην αρχή του, δηλ. στο χρονικό σημείο $t-1$ είναι τι ποσότητα του προϊόντος z_t να παραχθεί ώστε το κόστος το οποίο θα προκύψει για τα χρονικά διαστήματα $t, t+1, \ldots, T$ να είναι ελάχιστο. Ας υπολογίσουμε λοιπόν το κόστος το οποίο προκύπτει αν αποφασίσουμε να παράγουμε ποσότητα z_t από το προϊόν στην αρχή του χρονικού διαστήματος t. Το κόστος παραγωγής συνεπάγεται αυτόματα ένα κόστος παραγγελίας b_t και ένα κόστος παραγωγής της ποσότητας x_t ίσο με $c_t\, x_t$ δηλ. ένα συνολικό κόστος $b_t+c_t+x_t$. Όταν ικανοποιηθεί η ζήτηση d_t τότε θα έχει απομείνει όλο το χρονικό διάστημα t ποσότητα $(\alpha_t+x_t-d_t)$ της οποίας το κόστος αποθήκευσης είναι $h_t(\alpha_t+x_t-d_t)$. Το ελάχιστο κόστος το οποίο προκύπτει από την απόφαση παραγωγής ποσότητας x_t του προϊόντος για τα χρονικά διαστήματα $t+1, t+2, \ldots, T$ είναι προφανώς $f_{t+1}(\alpha+x-d_t)$. Επομένως αφού οι αποφάσεις μας σε κάθε σημείο απόφασης θα πρέπει να είναι βέλτιστες θα έχουμε ότι

$$f_t\,(\alpha_t) = \min_{x_t}\,\{b_t+c_t+x_t+h_t(\alpha_t+x_t-d_t) + f_{t+1}(\alpha_t+x_t-d_t)\}.$$

Συγχρόνως όμως θα πρέπει να ικανοποιούνται και κάποιοι περιορισμοί του προβλήματος. Το w_t είναι το άνω όριο της ποσότητας του προϊόντος που είναι δυνατό ν' αποθηκευθεί στο χρονικό διάστημα t επομένως

$$\alpha_t+x_t-d_t \leq w_r.$$

Επίσης η δυνατότητα παραγωγής έχει ανώτατο όριο π_t κατά συνέπεια

$$x_t \leq \pi_t$$

Άρα για τα χρονικά διαστήματα 1, 2, …, T–1 σε κάθε σημείο απόφασης δηλ. στην αρχή του χρονικού διαστήματος θα πρέπει

$$f_t(\alpha_t) = \min\{b_t+c_tx_t+h_t(\alpha_t+x_t-d_t)+(f_{t+1}(\alpha_t+x_t-d_t)\}$$

με τους περιορισμούς

$$\alpha_t+x_t-d_t \leq w_t$$

$$x_t \leq \pi_t$$

Για το τελευταίο χρονικό διάστημα T θα έχουμε ότι

$$x_T = d_T-\alpha_T, \quad x_T \geq 0$$

με κόστος

$$f_T(\alpha_T) = b_T+c_Tx_T$$

Για ν' αντιληφθούμε σε μεγαλύτερο βάθος το πρόβλημα θα δώσουμε τώρα ένα παράδειγμα το οποίο και θα το λύσουμε μέχρι το τέλος.

Παράδειγμα Σ.1

Μια εταιρία παραγωγής ποντικιών για ηλεκτρονικούς υπολογιστές γνωρίζει τη ζήτηση για τους επόμενους 3 μήνες ότι θα είναι για τον μήνα Ιανουάριο 1000 ποντίκια, το Φεβρουάριο 2000 και τον Μάρτη 1500. Όταν ξεκινά ο Ιανουάριος δεν έχει κανένα απόθεμα σε ποντίκια στην αποθήκη της στην οποία διαθέτει χώρο για 2000 ποντίκια. Το κόστος παραγγελίας για τον μήνα Ιανουάριο είναι 500.000 δρχ. για τον Φεβρουάριο 700.000 και για το Μάρτιο 500.000 δρχ. ενώ οι παραγγελίες είναι δυνατόν να δοθούν μόνο κατά πεντακοσάδες. Το κόστος παραγωγής ανά ποντίκι είναι 1000 δρχ. και τους τρεις μήνες. Το κόστος αποθήκευσης ανά ποντίκι τον Ιανουάριο είναι 500 δρχ. το Φεβρουάριο 600 δρχ. και το Μάρτιο 400 δρχ. Η εταιρία έχει τη δυνατότητα τον Ιανουάριο να παράγει 1500 ποντίκια το Φεβρουάριο 2500 και το Μάρτιο 1000. Να σχεδιασθεί η πολιτική της εταιρίας ούτως ώστε το κόστος της στρατηγικής που θ' ακολουθήσει να είναι ελάχιστο.

Λύση

Για να διευκολυνθούμε και να έχουμε όλα τα δεδομένα του προβλήματος συγκεντρωμένα σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

ΠΙΝΑΚΑΣ Σ.1

Μήνας	d_t	π_t	w_t	c_t	b_t	h_r
Ιανουάριος	1000	1500	2000	1000	500.000	500
Φεβρουάριος	2000	2500	2000	1000	700.000	600
Μάρτιος	1500	1000	2000	1000	500.000	400

Το πρώτο βήμα είναι να ορίσουμε την βέλτιση συνάρτηση. Τα σημεία που παίρνουμε αποφάσεις είναι η αρχή του Ιανουαρίου, η αρχή του Φεβρουαρίου και η αρχή του Μαρτίου. Η βέλτιστη συνάρτηση πρέπει να είναι τέτοια ώστε να δίνει απάντηση στις αποφάσεις που έχουμε να πάρουμε στις διάφορες φάσεις του προβλήματος. Έτσι ορίζουμε σαν βέλτιστη συνάρτηση την

$f_t(\alpha_t)$ = {το ελάχιστο κόστος που προκύπτει για την εταιρία υπολογιστών ώστε να έχει τα ποντίκια για να ικανοποιήσει τη ζήτηση για τα χρονικά διαστήματα τα $t+1, t+2\ldots, T$ όταν η ποσότητα ποντικιών που είναι αποθηκευμένη στην αρχή του χρονικού διαστήματος t είναι α_t}

όπου $t=1, 2, 3$ με 1-χρονικό διάστημα τον Ιανουάριο, 2-χρονικό διάστημα τον Φεβρουάριο και 3-χρονικό διάστημα το Μάρτιο.

Ο Μάρτιος είναι ο τελευταίος μήνας στην χάραξη της στρατηγικής ελαχίστου κόστους για την εταιρία επομένως θα έχουμε

$$x_3 = d_3 - \alpha_3 \quad \text{με} \quad x_3 \geq 0$$

με κόστος

$$f_3(\alpha_3) = b_3 + c_3 x_3$$

Λαμβάνοντας όλες τις δυνατές τιμές του α_3 έχουμε ότι:

- Για $\alpha_3=0$ τότε $x_3 = 1500-0 = 1500$ και

$$f_3(0) = 500.000 + 1.500.000 = 2.000.000$$

- Για $\alpha_3=500$ τότε $x_3=1500-500 = 1000$ και

$$f_3(1000) = 500.000 + 500.000 = 1.000.000$$

- Για $\alpha_3=1500$ τότε $x_3=1500,\ 1500=0$ και

$$f_3(1500) = 0$$

- Για $\alpha_3=2000$ τότε $x_3 = 1500-2000 = -500$ οπότε

$$f_3(2000) = \infty$$

αφού δεν υπάρχει αρνητική παραγωγή. Το α_3 παίρνει μέγιστη τιμή 2000 επειδή ο χώρος που διατίθεται στην αποθήκη είναι για 2000 ποντίκια.

Για τους μήνες Φεβρουάριο και Ιανουάριο η επαναληπτική σχέση για t=2,1 θα είναι

$$f_t(\alpha_t) = \min_{x_t}\{b_t + c_r x_t + h_t(\alpha_r + x_t - d_t) + f_{t+1}(\alpha + x_t - d_t)\}$$

με τους περιορισμούς

$$\alpha_t + x_t - d_t \leq w_t$$

Επομένως για t=2 και όλες τις δυνατές τιμές για το α_2 θα έχουμε

- Για α_2=0

$$f_2(0) = \min\{700.000+1000x_t+600(0+x_t-2000)+f_3(0+x_t-2000)\} = x_2$$
$$= \min\{700.000+100.2000^*+600+f_3(0),\ 700.000+1000\cdot 2500+600\cdot 500+ +f_3(500)\} =$$
$$= \min\{4.700.000^*,\ 5.000.000\} = 4.700.000 \text{ δρχ.}$$

όπου με αστερίσκο σημειώνουμε την απόφαση που προκαλεί το ελάχιστο κόστος.

- Για α_2=500 έχουμε ότι

$$f_2(500) = \min\{700.000 + 1000x_2+600(500 + x_t-2000)+f_3(500+x_t-2000)\}$$
$$= \min\{700.000+1000\cdot 1500 +600(0) +f_3(0),$$
$$700.000+1000\cdot 2000 +600(500)+f_3(500),$$
$$700.000+1000\cdot 2500+600(1000)+f_3(1000)\} =$$
$$= \min\{4.200.000^*,\ 4.500.000,\ 4.800.000\} = 4.200.000 \text{ δρχ.}$$

- Για α_2=1000 έχουμε ότι

$$f_2(1000) = \min\{700.000 + 1000x_2+600(1000+x_t-2000)+f_3(1000+x_t-2000)\} =$$
$$= \min\{700.000+1000\cdot 1000+600(0)+f_3(0),$$
$$700.000+1000\cdot 1500+600(500)+f_3(500),$$
$$700.000 +1000\cdot 2000+600(1000)+f_3(1000),$$
$$700.000+1000\cdot 2500+600(1500)+f_3(1500)\} =$$
$$= \min\{(3.700.000^*,\ 4.000.000,\ 4.300.000,\ 4.100.000\} =$$
$$= 3.700.000 \text{ δρχ.}$$

- Για α_2=1500 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f_2(1500) &= \min\{700.000+1000x_2+600(1500+x_t-2000)+f_3(1500+x_t-2000)\} = \\ &= \min\{700.000+1000\cdot500+600())+f_3(0), \\ &\qquad 700.000+1000\ \cdot1000+600(500+f_3(500), \\ &\qquad 700.000 + 1000\ 1500+600(1000)+f_3(1000), \\ &\qquad 700.000+1000\cdot2000+600(1500)+f_3(1500), \\ &\qquad 700.000+1000\cdot2500+600(2000)+f_3(2000)\} = \\ &= \min\{3200.000^*, 3.500.000, 3.800.000, 3.600.000, \infty\} = \\ &= 3.200.000 \text{ δρχ} \end{aligned}$$

- Για α_2=2000 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f_2(2000) &= \min\{700.000+1000x_2+600(2000+x_t-2000)+f_3(2000+x_t-2000)\} = x_2 \\ &= \min\{700.000+1000\cdot0+600(0)+f_3(0), \\ &\qquad 700.000+1000\cdot500+600(500+f_3(500) \\ &\qquad 700.000+1000+600(1500)+f_3(1000), \\ &\qquad 700.000+1000\cdot1500+600(1500)+f_3(1500), \\ &\qquad 700.000+1000\cdot2000+600(2000)+f_3(2000)\} \\ &= \min\{2.700.000^*, 3.000.000, 3.300.000, 3.100.000, \infty\} = \\ &= 2.700.000 \text{ δρχ} \end{aligned}$$

- Για t=1 γνωρίζουμε ότι η εταιρία δεν έχει κανένα απόθεμα από ποντίκια στην αποθήκη της, επομένως α_1=0.

Άρα έχουμε ότι

$$f_1(0) = \min\{500.000+1000z_1+500(x_1-1000)+f_1(x_1-1000)\}.$$

Το x_t είναι δυνατό να πάρει σαν ελάχιστη τιμή αυτή που θα ικανοποιήσει την ζήτηση του μηνα 1 δηλαδή του Ιανουαρίου και μέγιστη τιμή την μέγιστη δυνατότητα παραγωγής ποντικιών για το μήνα Ιανουάριο. Επομένως έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f_1(0) &= \min\{500.000+1000\cdot1000+500(0)+f_2(0), \\ &\qquad 500.000+1000\cdot1500+500\cdot500+f_2(500)\} = \\ &= \min\{6.200.000^*, 6.450.000\} = 6.200.000 \text{ δρχ.} \end{aligned}$$

Επομένως η βέλτιστη πολιτική της εταιρίας είναι η παραγωγή 1000 ποντικών τον μήνα Ιανουάριο, 2000 ποντικών τον μήνα Φεβρουάριο και 1500 ποντικών τον μήνα Μάρτιο. Δηλαδή η παραγωγή της εταιρίας πρέπει να είναι γι' αυτούς τους τρεις μήνες όση η ζήτηση και να μην υπάρχει καθόλου αποθήκευση. Το σχολικό κόστος του τριμήνου θα είναι 6.200.000 δρχ.

Σ.3. Πρόβλημα παραγωγής και αποθήκευσης με υστέρηση

Σε πολλές περιπτώσεις όταν δοθεί μια παραγγελία για ένα προϊόν τότε αυτό δεν παραδίδεται αμέσως αλλά παρεμβάλεται ένα χρονικό διάστημα κατά τη διάρκεια του οποίου το προϊόν παρασκευάζεται, συσκευάζεται και μεταφέρεται στον τόπο παράδοσης. Προβλήματα αυτής της φύσης ονομάζονται προβλήματα παραγωγής και αποθήκευσης με υστέρηση. Τα προβλήματα αυτά έχουν τα παρακάτω χαρακτηριστικά.

1. Υποθέτουμε ότι θέλουμε να ελέγχουμε την παραγωγή και αποθήκευση ενός προϊόντος για ένα χρονικό διάστημα από 0 έως T χρονικές μονάδες. Ο χρόνος δηλ. είναι διακριτός $t=0, 1, \ldots, T$.
2. Στην αρχή του χρονικού διαστήματος 1([0,1)) δηλ. την χρονική στιγμή 0 υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε την ζήτηση του προϊόντος στην αρχή κάθε χρονικού διαστήματος t για $\gamma=1, 2, \ldots, T$.
3. Στην αρχή κάθε χρονικού διαστήματος η παραγωγική μονάδα αποφασίζει την ποσότητα παραγωγής του προϊόντος το οποίο θα παραχθεί και το οποίο υποθέτουμε ότι θα παραδοθεί τ χρονικές μονάδες μετά. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα άνω όριο στην ποσότητα του προϊόντος που είναι δυνατό να παραχθεί για μια χρονική περίοδο.
4. Σε κάθε χρονική περίοδο υπάρχει ένα άνω όριο στην ποσότητα του προϊόντος που είναι δυνατόν ν' αποθηκευτεί.
5. Σε κάθε χρονική περίοδο έχουμε κόστος παραγγελίας, κόστος αγοράς μονάδας προϊόντος, κόστος αποθήκευσης, ανάλογα με τις αποφάσεις που θα πάρουμε.
6. Υπάρχει ένα κόστος αν δεν ικανοποιηθεί η ζήτηση και ένα κόστος αν στο τέλος περισσέψει προϊόν.
7. Ο σκοπός της μονάδας παραγωγής είναι ν' ανταποκριθεί πλήρως στη ζήτηση με κριτήριο το ελάχιστο δυνατό κόστος.
8. Με βάση τα χαρακτηριστικά του προβλήματος παραγωγής και αποθήκευσης που μόλις περιγράψαμε ορίζουμε τις παρακάτω μεταβλητές του προβλήματος. Αυτές είναι οι ίδιες με το προηγούμενο πρόβλημα μόνο που κάποιες από αυτές είναι ελαφρά τροποποιημένες.

T : ο αριθμός των χρονικών περιόδων που η μονάδα παραγωγής θέλει να ελέγχει την παραγωγή και αποθήκευση του προϊόντος.

d_t: η ζήτηση του προϊόντος στην αρχή του t χρονικού διαστήματος, $t=1, 2, \ldots, T$.

π_t: το άνω όριο της ποσότητας που είναι δυνατό να παραχθεί από τη μονάδα παραγωγής στην αρχή του t-χρονικού διαστήματος.

w_t: το άνω όριο της ποσότητας του προϊόντος που είναι δυνατόν ν' αποθηκευθεί στο χρονικό διάστημα t για $t=1,2, \ldots, T$.

c_t: το κόστος αγοράς της μονάδας προϊόντος το οποίο παραδίδεται στην αρχή του χρονικού διαστήματος $t+\tau$ και το οποίο παραγγέλεται στην αρχή του χρονικού διαστήματος t για $t=1, 2, \ldots, T$.

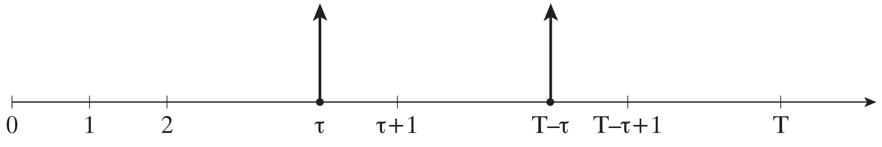
b_t: το κόστος παραγγελίας που προκύπτει όταν αποφασίζουμε παραγωγή προϊόντος στην αρχή του χρονικού διαστήματος t και το οποίο χρεώνεται στην αρχή του χρονικού διαστήματος $t+\tau$ για $t=1, 2, \ldots, T$.

s_T: το κόστος που προκύπτει αν στο χρονικό διάστημα T απομένει μία μονάδα του προϊόντος.

x_t: η ποσότητα του προϊόντος που παραδίδεται στην αρχή του χρονικού διαστήματος $t+\tau$ το οποίο παραγγέλθηκε στην αρχή του χρονικού διαστήματος t για $t=1, 2, \ldots, T$.

J_t: το κόστος που προκύπτει αν στην αρχή του χρονικού διαστήματος t ($t=1, 2, \ldots, T$) μία μονάδα μονάδα ζήτησης του προϊόντος δεν ικανοποιήθηκε.

Το επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε τη βελτιστη συνάρτηση. Για να ορίσουμε τη βέλτιση συνάρτηση σημαντικό είναι να εντοπίσουμε τα σημεία που πρέπει να πάρουμε αποφάσεις και να διακρίνουμε τι είδους αποφάσεις μπορούμε να πάρουμε. Είναι φανερό ότι οι αποφάσεις για παραγωγή που θα πάρουμε στην αρχή του χρονικού διαστήματος 1 θα παραδοθούν στην αρχή του χρονικού διστήματος τ οπότε και θ' αρχίσουν να επηρεάζουν το κόστος του προβλήματος. Αυτό σημαίνει ότι από την αρχή του χρονικού διαστήματος 1 μέχρι το τέλος του χρονικού διαστήματος $\tau-1$ δεν έχουμε τη



δυνατότητα γι' αυτό το διάστημα να επηρεάσουμε το κόστος του προβλήματος αφού το μόνο που συμβαίνει είναι ότι θα πρέπει να υπάρχει αρκετό απόθεμα στην αποθήκη την χρονική στιγμή 0 ούτως ώστε να ικανοποιηθεί η ζήτηση μέχρι την χρονική στιγμή $\tau-1$.

Στο χρονικό διάστημα $(\tau, T-\tau)$ το κόστος επηρεάζεται από τις παραγγελίες οι οποίες έχουν γίνει στο χρονικό διάστημα τ χρονικές στιγμές πριν, οι οποίες παραδίνονται μέσα σ' αυτό το διάστημα.

Στο χρονικό διάστημα $(T-\tau+1, T)$ δεν έχει νόημα να γίνουν παραγγελίες γιατί αυτές θα φθάσουν μέχρι το τέλος του χρονικού διαστήματος T. Έτσι στο χρονικό αυτό διάστημα δεν έχουμε να πάρουμε αποφάσεις παρά μόνο να ικανοποιήσουμε τη ζήτηση από τις παραγγελίες οι οποίες θα καταφθάνουν και για τις οποίες αποφάσεις πήραμε πριν t χρονικές στιγμές.

Για τους λόγους αυτούς ορίζουμε σαν βέλτιστη συνάρτηση την

$f_t(\alpha_t) =$ {το ελάχιστο κόστος το οποίο προκύπτει για την ικανοποίηση της ζήτησης για τα χρονικά δαστήματα $t+\tau, t+\tau+1, \ldots, T$ όταν η ποσότητα η αποθηκευμένη και αυτή η οποία έχει ήδη παραγγελθεί (χωρίς να παραδοθεί) στις χρονικές στιγμές $t-1, t-2, \ldots, t-\tau-1$ είναι α_t. Εξαιρείται η παραγγελία x_t που θα δοθεί στο χρονικό διάστημα t}.

Η απόφαση την οποία έχουμε να πάρουμε για το χρονικό διάστημα t, στο χρονικό σημείο $t-1$ είναι τι ποσότητα του προϊόντος x_t θα παραγγείλουμε ούτως ώστε το κόστος το οποίο θα προκύψει για τα χρονικά διαστήματα $t+\tau, t+\tau+1, \ldots, T$ να είναι ελάχιστο. Ας υπολογίσουμε το κόστος το οποίο προκύπτει αν αποφασίσουμε να παράγουμε ποσότητα x_t στην αρχή του χρονικού διαστήματος t.

Το πρώτο κόστος είναι φυσικά το κόστος παραγγελίας που είναι c_t και το μήκος της ποσότητας x_t του προϊόντος που είναι $x_t b_t$. Ένα επιπλέον κόστος το οποίον πρέπει να υπολογιστεί είναι και το κόστος που προκύπτει αν έχουμε μη- ικανοποίηση της ζήτησης. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$\sigma(y_t) = \begin{cases} y_t s_t & \text{αν } y_t < 0 \\ 0 & \text{αν } y_t \geq 0 \end{cases}$$

όπου y_t είναι η ποσότητα του προϊόντος του οποίου η ζήτηση δεν θα ικανοποιηθεί το χρονικό διάστημα t. Στο χρονικό διάστημα t δηλ. τη χρονική στιγμή $t-1$ έχουμε ποσότητα α_t του προϊόντος στην αποθήκευση και σε παραγγελία (χωρίς να έχει παραδοθεί) το οποίο θα παραδοθεί τις χρονικές στιγμές $t, t+1\ldots, t-\tau-2$. Άρα τη χρονική στιγμή $t+\tau-1$ δηλ. το χρονικό διάστημα $t+\tau$ η ποσότητα $y_{t+\tau}$ θα είναι

$$y_{t+\tau} = \alpha_t + x_t - \sum_{i=t}^{t+\tau} d_i$$

Επομένως η $\sigma(y_{t+\tau})$ θα εκφράζει το κόστος της μη ικανοποίησης της ζήτησης για το χρονικό διάστημα $t+\tau$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$J(y_T) = \begin{cases} y_T J_t & \text{αν } y_T > 0 \\ 0 & \text{αν } y_T \leq 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή ορίζει το κόστος το οποίο επέρχεται αν στο τέλος του χρονικού διαστήματος T έχει παραμείνει y_T ποσότητα από το προϊόν. Στο χρονικό διάστημα $T-\tau$ έχουμε ποσότητα $\alpha_{T-\tau}$ του προϊόντος στην αποθήκη και σε παραγγελίες (χωρίς να παραδοθεί) το οποίο θα παραδοθεί τις χρονικές στιγμές $T-\tau+1, T-\tau+2, \ldots, T$. Άρα στο τέλος του χρονικού διαστήματος T θα έχουμε ότι

$$y_T = \alpha_{T-\tau} + x_{T-\tau} - \sum_{i=T-\tau}^{T} d_i$$

Το επόμενο κόστος το οποίο θα υπολογίσουμε για το χρονικό διάστημα $t+\tau$ είναι το κόστος αποθήκευσης. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$h(y_t) = \begin{cases} y_t h_t & \text{αν } y_t > 0 \\ 0 & \text{αν } y_t \leq 0 \end{cases}$$

Τότε η $h(y_{t+\tau})$ είναι το κόστος αποθήκευσης του προϊόντος για το χρονικό διάστημα $t+\tau$ και x ποσότητα $y_{t+\tau}$ δίνεται όπως και προηγούμενα από τη σχέση

$$y_{t+\tau} = \alpha_t + x_t - \sum_{i=t}^{t+\tau} d_i$$

Το ελάχιστο κόστος το οποίο προκύπτει από την απόφαση παραγγελίας ποσότητας x_t του προϊόνοτος για τα χρονικά διαστήματα $t+\tau++1$, $t+\tau+2$, $\ldots, T$ είναι προφανώς $f_{t+}1\left(\alpha_t + x_t - \sum_{i=t}^{t+\tau} d_i\right)$.

Επομένως αφού οι αποφάσεις μας σε κάθε σημείο απόφασης θα πρέπει να είναι βέλτιστες θα έχουμε ότι

$$f_t(\alpha_t) = \min_{x_t} \left\{ b_t + c_t x_t + h\left(\alpha_t + x_t - \sum_{i=t}^{t+\tau} d_i\right) + \sigma\left(\alpha_t + x_t - \sum_{i=t}^{t+\tau} d_i\right) + f_{t+1}\left(\alpha_t + x_t - \sum_{i=t}^{t+\tau} d_i\right) \right\}$$

Συγχρόνως όμως θα πρέπει να ικανοποιούνται και κάποιοι περιορισμοί του προβλήματος. Το $w_{t+\tau}$ είναι το άνω όριο της ποσότητας του προϊόντος που είναι δυνατό ν' αποθηκευθεί στο χρονικό διάστημα $t+\tau$ επομένως

$$\alpha_t+x_t-\sum_{i=t}^{t+\tau} d_i \le w_{t+\tau}.$$

Επίσης υπάρχει ένα ανώτατο όριο παραγωγής π_t για κάθε χρονικό διάστημα και επομένως θα πρέπει να ισχύει

$$x_t \le \pi_t \quad \text{για} \quad t=1, 2, \ldots, T-\tau.$$

Συνοψίζοντας έχουμε ότι για $t=1, 2, \ldots, T-\tau-1$

$$f_t(\alpha_t) = \min_{x_t}\left\{b_t+c_t x_t+h\left(\alpha_t+x_t-\sum_{i=t}^{t+\tau} d_i\right)+\sigma\left(\alpha_t+x_t-\sum_{i=t}^{t+\tau} d_i\right)+f_{t+1}\left(\alpha_t+x_t-\sum_{i=t}^{t+\tau} d_i\right)\right\}$$

με περιορισμούς

$$\alpha_t+x_t-\sum_{i=t}^{t+\tau} d_i \le w_{t+\tau}$$

$$x_t \le \pi_t \qquad \text{για} \quad t=1, 2, \ldots, T-\tau.$$

Είναι προφανές ότι αν

$$\alpha_t+x_t-\sum_{i=t}^{t+\tau} d_i \le 0$$

τότε το $f_{t+1}\ (\alpha_t+x_t-\Sigma\ d_i) \le 0$ αντικαθίσταται με το $f_{t+1}(0)$ μια και δεν υπάρχουν αρνητική παραγγελία κι αποθήκευση.

Για το τελευταίο χρονικό διάστημα T θα έχουμε ότι:

$$f_{T-\tau}(\alpha_{T-\tau}) = \min_{x_{T-\tau}}\left\{b_T+c_T x_{T-\tau}+h\left(\alpha_{T-\tau}+x_{T-\tau}-\sum_{i=T-\tau}^{T} di\right) +J\left(\alpha_{T-\tau}+x_{T-\tau}-\sum_{i=T-\tau}^{T} d_i\right)+\right.$$

$$\left.+\sigma\left(\alpha_{T-\tau}+x_{T-\tau}-\sum_{i=T-\tau}^{T} d_i\right)\right\}.$$

με περιορισμούς

$$\alpha_{T-\tau}+x_{T-\tau}-\sum_{i=T-\tau}^{t+\tau} d_i \le w_T$$

$$x_{T-\tau} \le \pi_{T-\tau}.$$

Για ν' αντιληφθούμε σε μεγαλύτερο βάθος το πρόβλημα θα δώσουμε τώρα ένα παράδειγμα το οποίο θα το λύσουμε μέχρι το τέλος.

Παράδειγμα Σ.2

Μια εταιρία βιομηχανικού επίπλου χρειάζεται δυο μήνες για να παραδώσει μια παραγγελία. Η εταιρία θέλει να οργανώσει την παραγωγή κι αποθήκευσή της για τους πρώτους έξη μήνες του χρόνου αφού ακολουθεί το καλοκαίρι και οι άδειες του προσωπικού. Είναι γνωστό ότι η Ελλάδα το καλοκαίρι είναι πολύ μαγευτική για να γίνει οποιαδήποτε σοβαρή σκέψη για δουλειά. Η ζήτηση για τον Ιανουάριο είναι 50 γραφεία, το Φεβρουάριο 100, το Μάρτη 50, τον Απρίλιο 150, το Μάϊο 100 και τον Ιούνιο 150. Όταν ξεκινά ο Ιανουάριος η εταιρία έχει 200 γραφεία στην αποθήκη της η οποία έχει χώρο για 250. Το κόστος παραγγελίας για τον Ιανουάριο είναι 200.000, για το Φεβρουάριο 250.000 δρχ., το Μάρτιο 300.000 δρχ., τον Απρίλιο 250.000 δρχ., το Μάϊο 300.000 δρχ., τον Ιούνιο 300.000 δρχ., ενώ οι παραγγελίες είναι δυνατόν να δοθούν κατά εκατοντάδες. Το κόστος παραγωγής ανα γραφείο είναι 300.000 για όλη τη χρονική περίοδο εκτός τους δύο τελευταίους μήνες που είναι 200.000. Το κόστος αποθήκευσης ανά γραφείο είναι τον Ιανουάριο 1000 δρχ., το Φεβρουάριο 1200, το Μάρτιο 800, Απρίλιο 1000, Μάϊο 1500 και τον Ιούνιο 1000 δρχ. Η ζημιά για κάθε γραφείο που περισσεύει στο τέλος Ιουνίου είναι 500.000 δρχ και όταν η ζήτηση δεν είναι δυνατόν να ικανοποιηθεί για οποιοδήποτε μήνα η ζημιά για κάθε γραφείο είναι 500.000. Το ανώτατο όριο παραγωγής της εταιρίας σε οποιαδήποτε παραγγελία είναι 200 γραφεία.

Να χαράξετε την πολιτική της εταιρίας σε ότι αφορά την παραγωγή και αποθήκευση γραφείων από το μήνα Ιανουάριο μέχρι και τον Ιούνιο κατά τέτοιο τρόπο ώστε το κόστος το οποίο θα προκληθεί στο διάστημα αυτό για την εταιρία να είναι ελάχιστο.

Λύση

Για να διευκολυνθούμε και να έχουμε όλα τα δεδομένα του προβλήματος συγκεντρωμένα σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα.

ΠΙΝΑΚΑΣ Σ.2

Μήνας	d_t	π_t	w_t	c_t	b_t	h_r
Ιανουάριος	50	200	250	200.000	300.000	1000
Φεβρουάριος	100	200	250	250.000	300.000	1200
Μάρτιος	50	200	250	300.000	300.000	800
Απρίλιος	150	200	250	250.000	300.000	1000
Μάϊος	100	200	250	300.000	200.000	1500
Ιούνιος	150	200	250	300.000	200.000	1000