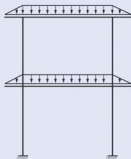


ΘΩΜΑ Ν. ΒΑΛΙΑΣΗ

ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- Ισοστατικοί Φορείς
- Μέθοδος Δυνάμεων
- Μέθοδος Μετακινήσεων
- Μέθοδος Cross



Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

ISBN 978-960-456-161-2

© Copyright: Βαλιάσης Θωμάς, Εκδόσεις Ζήτη, Μάιος 2009

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις του Ελληνικού νόμου (Ν.2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής άδειας του εκδότη και συγγραφέα κατά οποιοδήποτε τρόπο ή μέσο αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή (ηλεκτρονική, μηχανική ή άλλη) και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.



Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση -
Βιβλιοδεσία

Βιβλιοπωλείο

www.ziti.gr

Π. ΖΗΤΗ & ΣΙΑ ΟΕ

18ο χλμ Θεσσαλονίκης - Περαιάς
Τ.Θ. 4171 • Περαιά Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72.222 (10 γραμ.) • Fax: 23920 72.229
e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ **ΖΗΤΗ**

Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203.720, Fax 2310 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

Πρόλογος

Στο βιβλίο αυτό υπάρχουν οι λύσεις στα «Θέματα εξεταστικών περιόδων» που περιλαμβάνονται στο βιβλίο «Στατική των Γραμμικών Φορέων» του Θωμά Ν. Βαλιάση και επιπλέον μερικά ακόμη παραδείγματα.

Αφορούν θέματα ισοστατικών φορέων, μεθόδου δυνάμεων, μεθόδου μετακινήσεων και μεθόδου Cross.

Από τις δύο παραλλαγές της μεθόδου μετακινήσεων, επιλέχθηκε για την επίλυση όλων των παραδειγμάτων η μέθοδος δυσκαμψίας και μόνο πέντε παραδείγματα για διδακτικούς λόγους επιλύθηκαν και με την κλασική μέθοδο μετακινήσεων. Η επιλογή αυτή δικαιολογείται από το γεγονός ότι σήμερα η μέθοδος δυσκαμψίας, σαν τμήμα της γενικότερης μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, αποτελεί τη βάση κατασκευής προγραμμάτων υπολογισμού.

Το βοήθημα αυτό ελπίζεται να συμβάλλει στην κατανόηση των προβλημάτων της Εφ. Στατικής. Επισημαίνεται όμως πως την ικανότητα να επιλύει ο φοιτητής τα θέματα της Εφ. Στατικής την αποκτά κατά βάση από την παρακολούθηση των μαθημάτων και την προσπάθεια που ο ίδιος καταβάλλει για να επιλύσει άγνωστα θέματα. Για το λόγο αυτό για ένα αριθμό θεμάτων δίδεται μόνο η εκφώνηση και ορισμένες τιμές για τον έλεγχο της ορθότητας της επίλυσής τους.

Θεσσαλονίκη, Μάιος 2009

Θ. Ν. Βαλιάσης

Περιεχόμενα

I. ΙΣΟΣΤΑΤΙΚΟΙ ΦΟΡΕΙΣ	9
<i>Ασκήσεις</i>	65
II. ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ	75
<i>Ασκήσεις</i>	130
III. ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ	135
<i>Ασκήσεις</i>	219
IV. ΜΕΘΟΔΟΣ CROSS.....	223
<i>Ασκήσεις</i>	253
<i>Πίνακες</i>	255

I. ΙΣΟΣΤΑΤΙΚΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

Παράδειγμα 1

Στο φορέα του σχ. 1 να υπολογιστούν:

α) Τα διαγράμματα $M_{,p}$, $Q_{,p}$

β) Η στροφή του κόμβου E

Δεδομένα: b/h δοκών: 0,3/0,6 m

α) Ο φορέας αποτελείται από το τριαρθρωτό πλαίσιο FKG το οποίο με μία τομή αποχωρίζεται και επιλύεται, και από το τριαρθρωτό πλαίσιο ADB, το οποίο επιλύεται στη συνέχεια

Αντιδράσεις

Τριαρθρωτό (FKG)

$$\Sigma M_G = 0 \quad F_y \cdot 8 - 50 \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_y = 25$$

$$\Sigma M_K = 0 \quad F_x \cdot 4 - 25 \cdot 4 - 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_x = 35$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad G_x + 35 - 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad G_x = 15$$

Τριαρθρωτό (ADB)

$$\Sigma M_B = 0 \quad A_y \cdot 12 - 25 \cdot 12 - 35 \cdot 8 + 25 \cdot 4 - 15 \cdot 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 50$$

$$\Sigma M_D = 0 \quad A_x \cdot 4 + 50 \cdot 4 - 35 \cdot 4 - 25 \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 10$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad B_x - 50 - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = 60$$

Φορτία διατομής

$$Q_C^\delta = -50 + 25 = -25 \quad Q_N^a - 50 + 25 = -25$$

$$M_H = 35 \cdot 4 = 140 \quad M_L = -15 \cdot 4 = -60$$

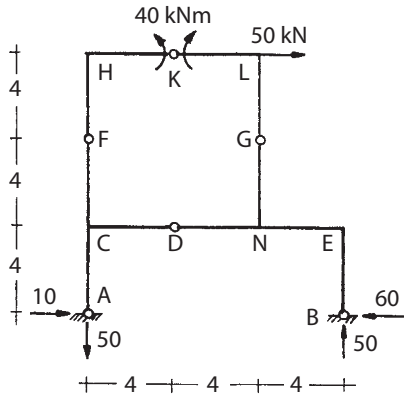
$$M_C^\pi = -35 \cdot 4 = -140 \quad M_C^\delta = 35 \cdot 4 - 10 \cdot 4 = 100$$

$$M_C^k = -10 \cdot 4 = -40 \quad M_E = -60 \cdot 4 = -240$$

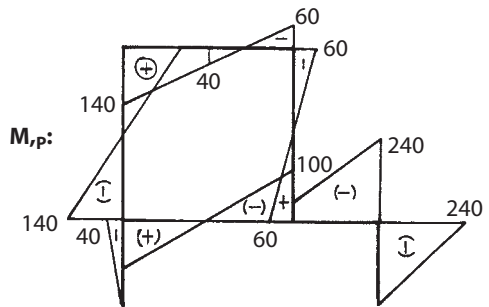
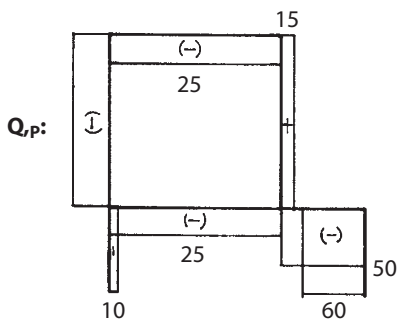
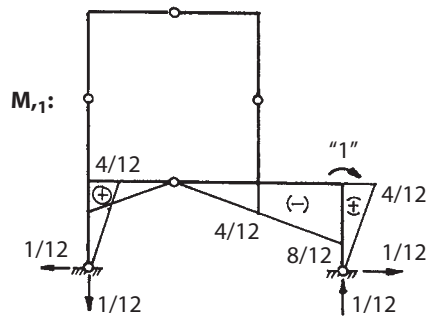
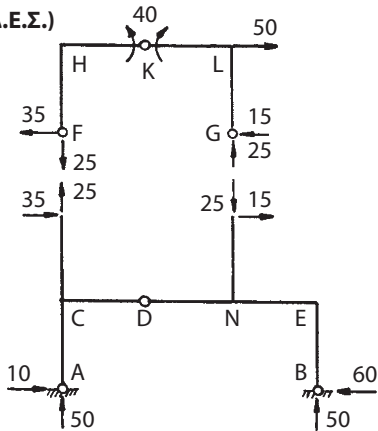
$$M_N^\delta = 50 \cdot 4 - 60 \cdot 4 = -40 \quad M_N^\pi = 15 \cdot 4 = 60$$

$$M_N^a = 50 \cdot 4 - 60 \cdot 4 - 15 \cdot 4 = -100 \quad M_N^\delta = 50 \cdot 4 - 60 \cdot 4 = -40$$

Φορέας



(Δ.Ε.Σ.)



Σχήμα 1

$$\beta) I = \frac{bd^3}{12} = \frac{0,3 \cdot 0,6^3}{12}, \quad E = 21 \cdot 10^7, \quad EI = 1134 \cdot 10^3 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

Αν ληφθεί υπόψη μόνο η επίδραση των ροπών στη μετακίνηση φ_E τότε είναι

$$\begin{aligned} \varphi_E &= \int \frac{M_{i,p} M_{i,1}}{EI} ds = \left[\frac{1}{3}(-40) \frac{4}{12} \cdot 4 + \frac{1}{3} 100 \frac{4}{12} \cdot 4 + \frac{1}{3}(-100) \left(-\frac{4}{12} \right) 4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \left[(-40) \left(-\frac{8}{12} - \frac{8}{12} \right) + (-240) \left(-\frac{4}{12} - \frac{16}{12} \right) \right] 4 + \frac{1}{3}(-240) \frac{4}{12} 4 \right] = \\ &= \frac{226,67}{EI} = 0,235 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2

Στο φορέα του σχήματος 2 να υπολογισθεί η μετακίνηση του F.

Δεδομένα: $EI = 1134 \cdot 10^3 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$, $EF_r = 1650 \cdot 10^3 \text{ kN}$

Ο φορέας αποτελείται από το τριαρθρωτό πλαίσιο (ADE) το οποίο στηρίζεται στην ενισχυμένη δοκό (EBC)

Διάγραμμα $M_{i,p}$

Τριαρθρωτό (ADE)

Λόγω συμμετρίας είναι $A_y = E_y = 25$

$$\Sigma M_D^a = 0 \quad A_x \cdot 4 - 25 \cdot 8 = 0 \Rightarrow A_x = 50$$

Ενισχυμένη δοκός (EBC)

Τίθεται $S_{11'} = X$ και εκφράζονται οι αξονικές δυνάμεις των ράβδων συναρτήσει της X

$$\left. \begin{aligned} \Sigma M_B \quad B_y \cdot 16 + X \cdot 12 + X \cdot 4 - 25 \cdot 20 = 0 \quad 16B_y + 16X = 500 \\ \Sigma M_C \quad B_y \cdot 12 + X \cdot 8 - 25 \cdot 16 = 0 \quad 12B_y + 8X = 400 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} B_y = 37,5 \\ X = -6,25 \end{aligned}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad C_y - 37,5 + 2 \cdot 6,25 + 25 = 0 \Rightarrow C_y = 0$$

$$S_{1'B'} = S_{2'C'} = \frac{-6,25}{\cos 45} = -8,84 \quad S_{11'} = S_{22'} = S_{1'2'} = -6,25$$

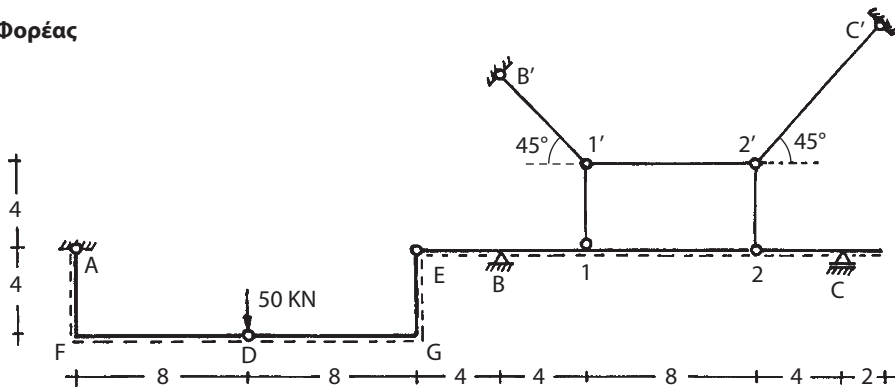
$$M_F = -50 \cdot 4 = -200, \quad M_B = -25 \cdot 4 = -100, \quad M_1 = -25 \cdot 8 + 37,5 \cdot 4 = -50$$

Διάγραμμα $M_{i,1}$

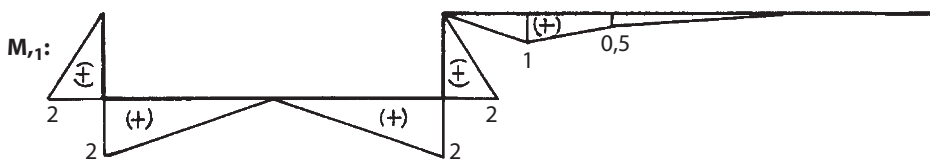
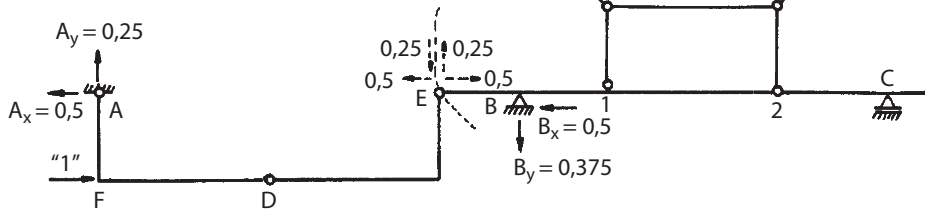
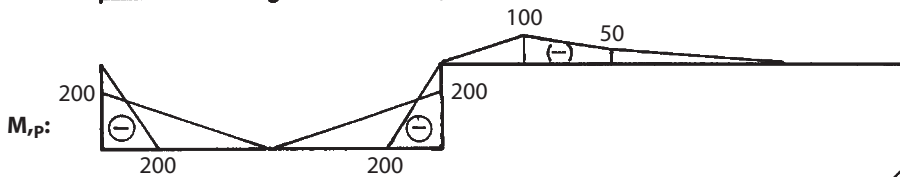
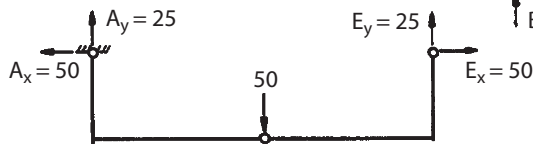
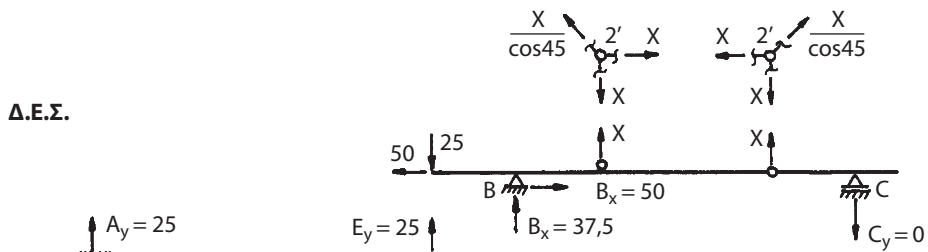
$$(ADE): \Sigma M_E = 0 \quad A_y \cdot 16 - 1 \cdot 4 = 0 \Rightarrow A_y = 0,25$$

$$\Sigma M_D = 0 \quad A_x \cdot 4 - 0,25 \cdot 8 = 0 \Rightarrow A_x = 0,5$$

Φορέας



Δ.Ε.Σ.



Σχήμα 2

$$(EBC): \begin{cases} \sum M_C = 0 & B_y \cdot 16 - X \cdot 12 - X \cdot 4 - 0,25 \cdot 20 = 0 & 16B_y - 16X = 5 \\ \sum M_2 = 0 & B_y \cdot 12 - X \cdot 8 - 0,25 \cdot 16 = 0 & 12B_y - 8X = 4 \end{cases} \begin{cases} B_y = 0,375 \\ X = 0,0625 \end{cases}$$

$$S_{1B'} = S_{2C'} = \frac{0,0625}{\cos 45} = 0,088$$

$$M_F = 0,5 \cdot 4 = 2, \quad M_B = 0,25 \cdot 4 = 1, \quad M_1 = 0,25 \cdot 8 - 0,375 \cdot 4 = 0,5$$

Υπολογισμός της u_F

$$u_F = \int \frac{M_p M_1}{EI} ds + \sum \frac{S_{r,p} S_{r,1} l_r}{EF_r} = \frac{1}{1134 \cdot 10^3} \cdot \left[\frac{1}{3} (-200) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 + \frac{1}{3} (-200) \cdot 2 \cdot 8 \cdot 2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} (-100) \cdot 1 \cdot 4 + \frac{1}{6} [(-100)(2 \cdot 1 + 0,5) + (-50)(1 + 2 \cdot 0,5)] \cdot 4 + \frac{1}{3} (-50) \cdot 0,5 \cdot 8 \right] + \\ + \frac{1}{1650 \cdot 10^3} [(-6,25) \cdot 0,0625 \cdot 4 \cdot 2 + (-6,25) \cdot 0,0625 \cdot 8 + (-8,84) \cdot 0,088 \cdot 5,657 + \\ + (-8,84) \cdot 0,088 \cdot 8,485]$$

$$u_F = \frac{1}{1134 \cdot 10^3} \cdot (-3633,3) + \frac{1}{1650 \cdot 10^3} \cdot (-17,250) = \\ = (-3,204 - 0,010) \cdot 10^{-3} = -3,214 \cdot 10^{-3}.$$

Παράδειγμα 3

- α)** Στο φορέα του σχ. 3 να υπολογισθούν τεκμηριωμένα οι μέγιστες τιμές των μεγεθών M_B^r , Q_C^r , C_y όταν ένα ομοιόμορφο φορτίο $q = 50 \text{ kN/m}$, μήκους 4 m κινείται στο διάστημα ΑΗ.
- β)** Να υπολογισθεί επίσης η βύθιση της άρθρωσης F που αντιστοιχεί στην υπολογισθείσα $\max M_B^r$.

α) Ο φορέας αποτελείται από την ενισχυμένη δοκό ABF και από τη συνεχή δοκό ECDH. Υπολογίζονται οι γραμμές επιρροής $[M_B^r]$, $[Q^r]$, $[C_y]$

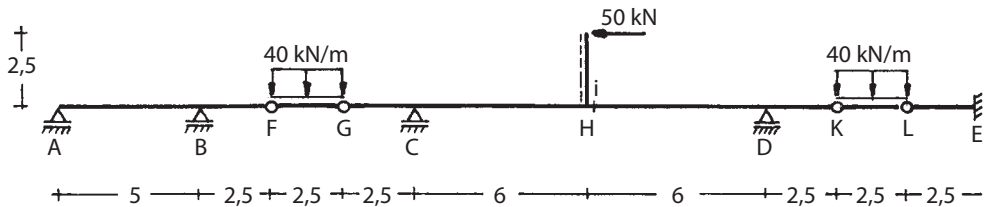
- $[M_B^r]$: Τίθεται άρθρωση δεξιά της στήριξης B και προκαλείται μετακίνηση $\Delta\varphi = -1 \text{ rad}$
- $[Q^r]$: Τίθεται μονοκινήτη πάκτωση δεξιά της στήριξης B και προκαλείται μετακίνηση $\Delta h = -1 \text{ m}$
- $[C_y]$: Καταργείται η στήριξη C και προκαλείται μετακίνηση $u = -1 \text{ m}$

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Στο φορέα του σχήματος να υπολογισθούν:

- α) Τα διαγράμματα M, Q, N .
- β) Οι γραμμές επιρροής $[M_i], [Q_i]$



Απ.: Αποτελέσματα

α) $A_y = -25, B_y = 75, C_y = 60,42, E_y = 50$

$M_E = -125, M_H^a = -62,48, M_H^d = -187,52, N_{HE} = -50$

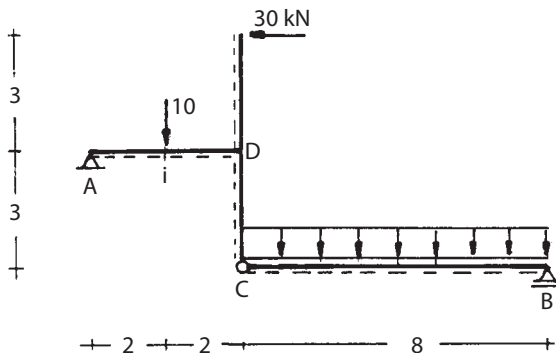
β) $[M_i]: u_G = -1,25, u_i = 3, u_k = -1,25,$

$[Q_i]: u_G = 0,21, u_i^a = -0,5, u_i^d = 0,5, u_k = -0,21$

Άσκηση 2

Στο φορέα σχήματος να υπολογισθούν:

- α) Τα διαγράμματα M, Q, N
- β) Οι γραμμές επιρροές επιρροής $[Q_i], [M_i], [N_i]$ για κίνηση μοναδιαίου φορτίου από το C έως το B.



Απ.:

$A_y = 130, A_x = 106,67$

$B_y = 120, B_x = 136,67,$

$N_{AD} = 106,67 M_D^a = 500,$

$M_D^k = 410, M_D^p = -90$

$[N_i]: u_C = 1,33, [Q_i]: u_C = 1$

$[M_i]: u_C = 2$