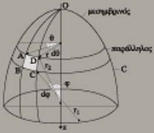
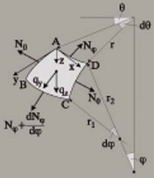
ΘΩΜΑ Ν. ΒΑΛΙΑΣΗ

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

- Στοιχεία θεωρίας ελαστικότητας
- Δίσκοι
- Πλάκες
- Επίλυση πλακών με τη βοήθεια πινάκων
- Κελύφη
- Μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων





ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2000

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

ISBN 960-431-602-8

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Νέοι Επιβάτες Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72.222 (10 γραμ.) - Fax: 23920 72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203.720, Fax 2310 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

www.ziti.gr

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό αποσκοπεί να χρησιμεύσει σαν βοήθημα στους φοιτητές του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών στο μάθημα "Επιφανειακοί φορείς Ι". Στοχεύοντας σε μία κατά το δυνατόν ολοκληρωμένη παρουσίαση του γνωστικού αντικειμένου, περιελήφθηκαν σ' αυτό οι κλασικές μέθοδοι επίλυσης, οι πρακτικές μέθοδοι επίλυσης οι οποίες στηρίζονται στη χρησιμοποίηση έτοιμων λύσεων υπό μορφήν πινάκων, καθώς και η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων η οποία εισάγει το προς επίλυση πρόβλημα στον Η.Υ. Περιελήφθηκαν επίσης οι Καρτεσιανοί τανυστές από τα μαθηματικά καθώς και στοιχεία της θεωρίας ελαστικότητας, γνώσεις απαραίτητες για τη σπουδή των Επιφανειακών φορέων.

Η ανάπτυξη των παραπάνω κεφαλαίων τα οποία πρέπει να καλύπτουν τις ανάγκες ενός εξαμηνιαίου μαθήματος το περιεχόμενο του οποίου διαμορφώθηκε από τους καθηγητές Δ. Ταλασλίδη, Γ. Μάνο και Γ. Μανώλη, δεν θα μπορούσε παρά να περιλαμβάνει μόνο απλές περιπτώσεις επιφανειακών φορέων. Πιο συγκεκριμένα η ύλη του συγγράμματος αυτού διαρθρώνεται ως εξής:

Στο κεφ. 1 αναπτύσσονται οι Καρτεσιανοί τανυστές.

Στα κεφ. 2, 3 και 4 δίδονται οι απαραίτητες γνώσεις της θεωρίας ελαστικότητας.

Στα κεφ. 5, 6 και 8 δίδεται η θεωρητική ανάλυση και οι κλασικές μέθοδοι επίλυσης των δίσκων των πλακών και των κελυφών.

Στο κεφ. 7 δίδονται οι μέθοδοι επίλυσης ορθογώνιων πλακών με τη βοήθεια πινάκων.

Στο κεφ. 9 τέλος δίδεται η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων.

Ευχαριστώ θερμά τον καθηγητή Γ. Μανώλη για την κριτική ανάγνωση των χειρογράφων και τις πολύτιμες παρατηρήσεις του.

Ευχαριστώ θερμά επίσης τις εκδόσεις Ζήτη που επιμελήθηκαν την έκδοση του βιβλίου αυτού.

Θεσσαλονίκη, Φεβρουάριος 2000 *Θωμάς Ν. Βαλιάσης*

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΤΑΝΥΣΤΕΣ

1.1. ΟΡΙΣΜΌς

Απο καθαρά μαθηματική άποψη ο τανυστής είναι ένα μέγεθος που ορίζεται από τις τιμές ενός αριθμού συνιστωσών, οι οποίες αναφέρονται πάντα σ' ένα σύστημα συντεταγμένων. Ο αριθμός των συνιστωσών του τανυστή προσδιορίζει και την τάξη του. Αν αναφερθούμε στον Ευκλείδιο τρισδιάτατο χώρο τότε μπορούμε να πούμε πως:

– Ο τανυστής μηδενικής τάξης έχει μία συνιστώσα. Ένας τέτοιος τανυστής είναι ένα βαθμωτό μέγεθος, π.χ. η μάζα, η θερμοκρασία κ.λπ.
– Ο τανυστής πρώτης τάξης έχει τρεις συνιστώσες. Ένας τέτοιος τανυστής είναι π.χ. ένα διάνυσμα.
– Ο τανυστής δεύτερης τάξης έχει εννέα συνιστώσεις. Ένας τέτοιος τανυστής είναι π.χ. η τάση ενός σημείου ελαστικού σώματος.

Αν οι συνιστώσες ενός τανυστή προσδιορισθούν σ' ένα σύστημα συντεταγμένων, τότε μπορούν να προσδιορισθούν και σ' οποιοδήποτε άλλο σύστημα συντεταγμένων. Οι νόμοι μετασχηματισμού των συνιστωσών ενός τανυστή μεταξύ δύο συστημάτων συντεταγμένων εξαρτώνται από την τάξη του. Για το λόγο αυτό ο ορισμός της τάξης ενός τανυστή γίνεται συνήθως βάσει των νόμων μετασχηματισμού στους οποίους αυτός υπακούει. Όταν ένας τανυστής αναφέρεται σ' ένα αυθαίρετο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων χαρακτηρίζεται σαν γενικός τανυστής. Όταν αναφέρεται σ' ένα ομογενές τρισδιάτατο σύστημα συντεταγμένων χαρακτηρίζεται σαν Καρτεσιανός τανυστής.

Εδώ θα εξετασθούν μόνο οι Καρτεσιανοί τανυστές οι οποίοι για συντομία θα αναφέρονται συνήθως μόνο με τη λέξη τανυστές.

Για την περιγραφή πολλών φυσικών μεγεθών χρησιμοποιούνται τανυστές. Επειδή δε ο μετασχηματισμός ενός τανυστή είναι γραμμικός και ομογενής οι τανυστικές εξισώσεις οι οποίες αποδίδουν τους νόμους μεταξύ των φυσικών αυτών μεγεθών δεν αλλάζουν μορφή με την αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων. Το αναλλοίωτο των τανυστικών εξισώσεων έναντι του μετασχηματισμού των συντεταγμένων είναι ένας από τους κύριους λόγους της χρησιμοποίησης τανυστικών μεθόδων στη μηχανική των συνεχών μέσων.

1.2 ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΌς ΤΩΝ ΤΑΝΥΣΤΏΝ

Ένας τανυστής συμβολίζεται με ένα γράμμα (βασικό σύμβολο), το οποίο ακολουθείται από ένα αριθμό δεικτών οι οποίοι, όταν είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, καλούνται ελεύθεροι δείκτες και προσδιορίζουν την τάξη τους. Π.χ.

A, α, B	:	είναι τανυστές μηδενικής τάξης και δεν έχουν δείκτες.
A_i, B_j, c_l	:	είναι τανυστές πρώτης τάξης.
T_{ij}, F_{ij}, $R_i^{\cdot j}$	:	είναι τανυστές δεύτερης τάξης. Η τελεία στον τρίτο τανυστή σημαίνει ότι ο δείκτης j είναι δεύτερος δείκτης.
E_{ijk}, E^{ijk}, $E_{ij}^{\cdot\cdot k}$	:	είναι τανυστές τρίτης τάξης.

Στο συμβολισμό ενός τανυστή, ένας δείκτης μπορεί να εμφανίζεται το πολύ δύο φορές οπότε στην περίπτωση αυτή καλείται άεργος δείκτης και δεν προσμετράται στην τάξη του τανυστή. π.χ.

A_{jkk}, $A_{i\ k}^{\cdot k}$	:	είναι τανυστές πρώτης τάξης.
$B^{ij}_{\cdot\cdot jk}$, A_{ijik}	:	είναι τανυστές δεύτερης τάξης.

Κάθε δείκτης τανυστή λαμβάνει διαδοχικά μία από τις τιμές ενός καθορισμένου συνόλου n ακέραιων, δηλαδή τις τιμές 1, 2, 3... n. Αν k είναι ο αριθμός των ελεύθερων δεικτών του τανυστή τότε το σύνολο των συνιστωσών του τανυστή ισούται με τον αριθμό των διατάξεων με επανάληψη των n αριθμών ανά k δηλαδή n^k.

Στην περίπτωση ενός καρτεσιανού τανυστή είναι $n = 3$ και ο αριθμό των συνιστωσών του είναι 3^k. Π.χ.:

- ο τανυστής πρώτης τάξης A_i έχει $3^1 = 3$ συνιστώσεις, τις A_1, A_2, A_3
- ο τανυστής δεύτερης τάξης A_{ij} έχει $3^2 = 9$ συνιστώσεις, τις $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}, A_{33}$.

Αν Ox_i όπου $i=1, 2, 3$ είναι ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τότε δείκτης με την τιμή 1 αντιστοιχεί στον άξονα x_1, δείκτης με την τιμή 2 στον άξονα x_2 και δείκτης με την τιμή 3 στον άξονα x_3.

Άλλοι τρόποι συμβολισμού των τανυστών οι οποίοι εξυπηρετούν κατά περίπτωση τη χρησιμοποίησή τους είναι:

- Με ένα έντονο γράμμα όπως ακριβώς τα διανύσματα π.χ.

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_i \qquad \mathbf{b} = b_{ij}$$

– Σε αναπτυγμένη μορφή τοποθετώντας τις συνιστώσεις ανάμεσα σε δύο παρενθέσεις π.χ.

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_i = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3) \quad ή \quad \boldsymbol{\alpha} = \alpha_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = b_{ij} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

– Οι τανυστές πρώτης και δεύτερης τάξης με μορφή μητρώου π.χ.:

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_i = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad ή \quad \boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$$

$$\mathbf{b} = b_{ij} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Ο συμβολισμός αυτός δεν σημαίνει ότι και κάθε μητρώο είναι ένας τανυστής.

1.3 Σ΄ΥΜΒΑΣΗ ΠΡ΄ΟΣΘΕΣΗς

Αν σ' ένα μονόνυμο ή σ' ένα όρο πολυωνύμου ένας δείκτης εμφανίζεται δύο φορές (άεργος δείκτης) αυτό δηλώνει πρόσθεση όρων που αντιστοιχούν στις τιμές 1, 2, 3 του επαναμβανόμενου δείκτη, π.χ.

$$\alpha_{ii} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ii} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$$

$$\alpha_{1n} b_{nk} c_{k2} = \sum_{n=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \alpha_{1n} b_{nk} c_{k2} = \alpha_{1n} (b_{n1} c_{12} + b_{n2} c_{22} + b_{n3} c_{32}) =$$

$$\alpha_{1n} b_{n1} c_{12} + \alpha_{1n} b_{n2} c_{22} + \alpha_{1n} b_{n3} c_{32} = (\alpha_{11} b_{11} + \alpha_{12} b_{21} + \alpha_{13} b_{31}) c_{12} +$$

$$+ (\alpha_{11} b_{12} + \alpha_{12} b_{22} + \alpha_{13} b_{32}) c_{22} + (\alpha_{11} b_{13} + \alpha_{12} b_{23} + \alpha_{13} b_{33}) c_{32}$$

Η σύμβαση πρόσθεσης δεν ισχύει για ένα δείκτη που εμφανίζεται πάνω από δύο φορές. Για να αποφεύγεται επομένως η σύγχυση απαγορεύεται η εμφάνιση άεργων δεικτών πάνω από δύο φορές.

Η σύμβαση πρόσθεσης μας δίνει το δικαίωμα:

– να αντικαταστήσουμε ένα ζεύγος άεργων δεικτών μ' ένα οποιοδήποτε άλλο π.χ.

$$\alpha_{in} b_{nj} = \alpha_{ik} b_{kj}$$

– να γράψουμε ένα σύστημα εξισώσεων με συντεντμημένη μορφή π.χ.

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= c_{11}\,x_1 + c_{12}\,x_2 + c_{13}\,x_3 \\ y_2 &= c_{21}\,x_1 + c_{22}\,x_2 + c_{23}\,x_3 \\ y_3 &= c_{31}\,x_1 + c_{32}\,x_2 + c_{33}\,x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_i = c_{ij}\,x_j$$

Δέλτα του Kronecker

Το δέλτα του Kronecker είναι ο μοναδιαίος τανυστής δ_{ij} ο οποίος ορίζεται από τις σχέσεις:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad i \neq j \\ 1 & \text{αν} \quad i = j \end{cases} \tag{1.1}$$

Το δέλτα του Kronecker σε μητρωική μορφή γράφεται

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I} \tag{1.2}$$

Μοναδιαίος τανυστής τρίτης τάξης ε_{ijk}

Ο τανυστής ε_{ijk} ορίζεται από τις σχέσεις:

$$\varepsilon_{ijk} \begin{cases} +1: & \text{στην περίπτωση που οι δείκτες } i, j, k \text{ εμφανίζουν μία από} \\ & \text{τις ακολουθίες 123, 231, 321 όπως αυτές προκύπτουν από τη} \\ & \text{διάταξη 12312} \\ -1: & \text{στην περίπτωση που οι δείκτες } i, j, k \text{ εμφανίζουν μία από τις} \\ & \text{ακολουθίες 321, 213, 132 όπως αυτές προκύπτουν από τη} \\ & \text{διάταξη 32132} \\ 0: & \text{στην περίπτωση που δύο δείκτες έχουν ίδια τιμή π.χ. 122} \end{cases} \tag{1.3}$$

1.4 ΠΡΆΞΕΙς ΜΕ ΤΟΥς ΤΑΝΥΣΤΕς

1. Πρόσθεση τανυστών

Μπορούν να προστεθούν (ή να αφαιρεθούν) μόνο τανυστές της ίδιας τάξης. Στην περίπτωση αυτή προκύπτει ένας τανυστής της ίδιας τάξης τα στοιχεία του οποίου ειναι το άθροισμα (ή η διαφορά) των αντίστοιχων στοιχείων των δύο τανυστών. π.χ.

$$A_{ij} \pm B_{ij} = C_{ij} \qquad \text{ή} \qquad \mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{C} \tag{1.4}$$

Επισημαίνεται ότι σε κάθε όρο του αθροίσματος υπάρχουν οι ίδιοι δείκτες με την ίδια σειρά.

2. Πολλαπλασιασμός τανυστού με αριθμητικό μεγέθος

Πολλαπλασιάζεται η κάθε συνιστώσα του τανυστή με το αριθμητικό μεγέθος όποτε προκύπτει ένας τανυστής της ίδιας τάξης με τον αρχικό π.χ.

$$\lambda\alpha_i = b_i \quad \text{ή} \quad \lambda\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}$$
$$\lambda A_{ij} = B_{ij} \quad \text{ή} \quad \lambda\mathbf{A} = \mathbf{B} \tag{1.5}$$

3. Πολλαπλασιασμός τανυστών

Το γινόμενο δύο τανυστών οποιασδήποτε τάξης αλλά χωρίς κανένα κοινό δείκτη είναι ένας τανυστής του οποίου οι συνιστώσεις προκύπτουν από τον πολλαπλιασιασμό της κάθε μιας συνιστώσας του ενός τανυστή με όλες τις συνιστώσεις του άλλου τανυστή. Η τάξη του τανυστή που προκύπτει κατά αυτόν τον τρόπο ισούται με το άθροισμα των τάξεων των δύο τανυστών π.χ.

$$\alpha_i b_i = c_{ij} \qquad A_{ij} B_{kl} = C_{ijkl}$$
$$\alpha_i F_{jk} = B_{ijk} \qquad e_{ijk} u_l = A_{ijkl} \tag{1.6}$$

Από τα παραδείγματα αυτά φαίνεται πως οι δείκτες του τανυστή που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό είναι η παράθεση των δεικτών των δύο τανυστών.

4. Σύμπτυξη τανυστών

Σύμπτυξη σ' ένα τανυστή συμβαίνει όταν δύο συντελεστές του εξοιμοιώνονται οπότε προκύπτει ένας τανυστής κατά δύο τάξεις μικρότερος. Η σύμπτυξη αυτή χαρακτηρίζεται σαν απλή.

Η σύμπτυξη μπορεί επίσης να αφορά την εξομοίωση τεσσάρων ή και παραπάνω δεικτών οπότε στην περίπτωση αυτή χαρακτηρίζεται σαν πολλαπλή. π.χ.

– απλή σύμπτυξη

$$A_{ij} \xrightarrow{\text{σύμπτυξη}} A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

$$\alpha_i b_j \xrightarrow{\text{σύμπτυξη}} \alpha_i b_i = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 \tag{1.7}$$

$$E_{ij} u_k \xrightarrow{\text{σύμπτυξη}} E_{ij} u_j = \alpha_i \quad \text{ή} \quad E_{ij} u_i = b_j \quad \text{ή} \quad E_{ii} u_k = c_k$$

$$A_{ij} B_{km} \xrightarrow{\text{σύμπτυξη}} \begin{array}{lcl} A_{ij} B_{im} = C_{jm} & \text{ή} & A_{ij} B_{kk} = F_{ij} \\ A_{ij} B_{ki} = D_{jk} & \text{ή} & A_{ij} B_{jm} = G_{im} \\ A_{ii} B_{km} = E_{km} & \text{ή} & A_{ij} B_{kj} = H_{ik} \end{array}$$

– πολλαπλή σύμπτυξη

$$A_{ij} B_{km} \xrightarrow{\text{σύμπτυξη}} A_{ij} B_{ij}$$

$$A_{ij} B_{km} C_{pq} \xrightarrow{\text{σύμπτυξη}} A_{ij} B_{jm} C_{mq} = D_{iq} \tag{1.8}$$

$$\varepsilon_{ijk} T_{lm} \xrightarrow{\text{σύμπτυξη}} \varepsilon_{ijk} T_{jk} = u_i$$

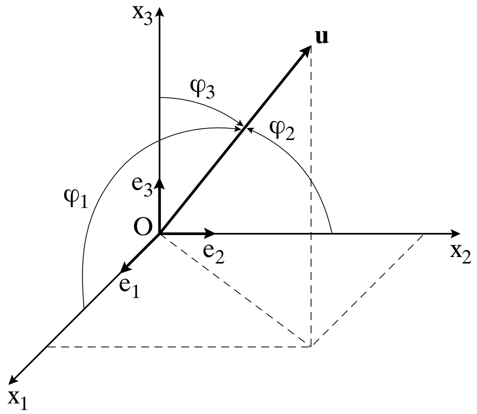
Όταν η σύμπτυξη γίνεται μεταξύ ενός τανυστή με το δέλτα του Kronecker οδηγεί απλώς στην αλλαγή του αθροιστικού δείκτη του τανυστή, π.χ.

$$\delta_{ij} A_i = A_j \qquad \delta_{ij} A_{jk} = A_{ik} \tag{1.9}$$

Συμβολισμοί στο ορθογώνιο Καρτεσιανό σύστημα

Ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ορίζεται αν δοθούν (σχ. 1.1)

- η αρχή O
- τρεις κάθετοι μεταξύ τους άξονες με αρχή το O που συμβολίζονται με Ox_1, Ox_2, Ox_3.
- τρία μοναδιαία διανύσματα κατά τις διευθύνσεις των αξόνων Ox_i που συμβολίζονται με $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.



Σχήμα 1.1

Η θέση ενός σημείου Σ στο χώρο ορίζεται από τις τρεις συντεταγμένες του που είναι οι προβολές της ΟΣ πάνω στους άξονες Ox_i.

Ένα διάνυσμα $\mathbf{u} = u_i$ εκφράζεται από τη σχέση (σχ. 1.1)

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 = u_i \mathbf{e}_i \tag{1.10}$$

όπου $\quad u_1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_1 = u \cos\varphi_1 \qquad u_2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_2 = u \cos\varphi_2 \qquad u_3 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_3 = u \cos\varphi_3$

Ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u}_o$ κατά τη διεύθυνση του $\mathbf{u}$ εκφράζεται από τη σχέση:

$$\mathbf{u}_o = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + c_3 \mathbf{e}_3 = c_i \mathbf{e}_i \tag{1.11}$$

όπου $c_1 = \cos\varphi_1$, $c_2 = \cos\varphi_2$, $c_3 = \cos\varphi_3$ τα συνημίτονα κατεύθυνσής του.

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ εκφράζεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{e_1} + a_2 \mathbf{e_2} + a_3 \mathbf{e_3}) \cdot (b_1 \mathbf{e_1} + b_2 \mathbf{e_2} + b_3 \mathbf{e_3}) = \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i \end{aligned} \tag{1.12}$$

Το μέτρο ενός διανύσματος $\mathbf{u}$ που είναι αναλλοίωτο στα διάφορα συστήματα συντεταγμένων δίδεται από τη σχέση:

$$|\mathbf{u}| = |u_i| = \sqrt{u_i u_i} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \quad (1.13)$$

Το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ισούται με ένα διάνυσμα $\mathbf{d}$ το οποίο ορίζεται από τη σχέση:

$$\mathbf{d} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e_1} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e_2} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e_3} \quad (1.14)$$

Με τη βοήθεια του μοναδιαίου τανυστή ε_{ijk} η σχέση αυτή γράφεται:

$$\mathbf{d} = d_i = \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k \quad (1.15)$$

Το μικτό γινόμενο $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{d}$ είναι ένα αριθμητικό μέγεθος λ που ορίζεται απο τη σχέση:

$$\lambda = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} = a_1b_2d_3 - a_1b_3d_2 - a_2b_1d_3 + a_2b_3d_1 + a_3b_1d_2 - a_3b_2d_1 \quad (1.16)$$

Με τη βοήθεια του μοναδικού τανυστή ε_{ijk} το μικτό γινόμενο γράφεται:

$$\lambda = \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j d_k \quad (1.17)$$

Με τους παραπάνω συμβολισμούς των διανυσμάτων, του εσωτερικού γινομένου, του εξωτερικού γινομένου και του μικτού γινομένου επιτυγχάνεται η εξομοίωση των γεωμετρικών πράξεων των διανυσμάτων με τανυστικές πράξεις.

1.5 ΝΌΜΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΎ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΏΝ ΤΑΝΥΣΤΏΝ

1.5.1 Τανυστής μηδενικής τάξης

Έστω $\Phi(x_i)$ η τιμή της συνάρτησης Φ στο σημείο x_i του συστήματος συντεταγμένων Ox_i και $\Phi(x_i')$ η τιμή της Φ όταν στο σύστημα συντεταγμένων Ox_i'.

Η Φ σαν τανυστής μηδενικής τάξης είναι ένα δαθμοτό μέγεθος που προσδιορίζεται μόνο από την τιμή του μέτρου του το οποίο δεν εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων. Συνεπώς είναι:

$$\Phi(x_i) = \Phi(x_i') \quad (1.18)$$

1.5.2 Τανυστής πρώτης τάξης

Έστω Ox_i, Ox_i' δύο ορθογώνια καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων με κοινή αρχή Ο. και $c_{ij} = \cos(x_i', x_j)$ τα συνημίτονα κατεύθυνσης μεταξύ των αξόνων των δύο συστημάτων όπως αυτά δείχνονται και στον πιν. 1.1.

Πίνακας 1.1

	x_1	x_2	x_3
x'_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}
x'_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}
x'_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}

Μεταξύ των δύο μοναδιαίων διανυσμάτων e_i, e'_i των αξόνων των δύο συστημάτων ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= c_{11}\mathbf{e}_1 + c_{12}\mathbf{e}_2 + c_{13}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 &= c_{21}\mathbf{e}_1 + c_{22}\mathbf{e}_2 + c_{23}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 &= c_{31}\mathbf{e}_1 + c_{32}\mathbf{e}_2 + c_{33}\mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{1.19}$$

οι οποίες με συντομία εκφράζονται από τη σχέση:

$$\mathbf{e}'_i = c_{ij}\mathbf{e}_j \tag{1.20}$$

Αλλάζοντας το ρόλο του πρώτου με το δεύτερο σύστημα συντεταγμένων προκύπτει επίσης:

$$\mathbf{e}'_j = c_{ij}\mathbf{e}_i \tag{1.21}$$

΄Ενα διάνυσμα $\mathbf{u}$ εκφράζεται στο σύστημα συντεταγμένων Ox_i από τη σχέση:

$$\mathbf{u} = u_j\,\mathbf{e}_j \tag{1.22}$$

και στο σύστημα συντεταγμένων Ox'_i από τη σχέση:

$$\mathbf{u} = u'_i\,\mathbf{e}'_i \tag{1.23}$$

Αν στην εξ. 1.23 αντικαθτασταθούν τα $\mathbf{e}'_i$ από την εξ. 1.20 προκύπτει:

$$\mathbf{u} = u'_i\,c_{ij}\,\mathbf{e}_j \tag{1.24}$$

Συγκρίνοντας τις εξισ. 1.22, 24 προκύπτει για τις συνιστώσεις του τανυστή $\mathbf{u}$ στα δύο συστήματα συντεταγμένων η σχέση:

$$u_j = c_{ij}\,u'_i \quad \text{ή} \quad \mathbf{u} = \mathbf{C}^T\mathbf{u}' \tag{1.25}$$

Η εξ. 1.25 εκφράζει το νόμο μετασχηματισμού των καρτεσιανών τανυστών πρώτης τάξης. Αλλάζοντας το ρόλο του πρώτου με το δεύτερο σύστημα συντεταγμένων μπορούμε επίσης να γράψουμε:

$$u'_i = c_{ij}\,u_j \quad \text{ή} \quad \mathbf{u}' = \mathbf{C}\,\mathbf{u} \tag{1.26}$$

Επισημαίνεται η διαφορά μεταξύ των εξ. 1.25, 26. Στην εξ. 1.25 ο ελεύθερος δείκτης του c_{ij} είναι ο δεύτερος ενώ στην εξ. 1.26 ο ελεύθερος δείκτης του c_{ij} είναι ο πρώτος.

Συνθήκες ορθογωνικότητας

Από την αντικατάσταση της εξ. 1.26 στην εξ. 1.25 και με την κατάλληλη επιλογή των άεργων δεικτών προκύπτει η εξίσωση:

$$u_j = c_{ij}\,c_{ik}\,u_k$$

Επειδή το $\mathbf{u}$ είναι αυθαίρετο η εξίσωση αυτή ανάγεται στην ταυτότητα $\mathbf{u_j = u_j}$ αν η σταθερά $c_{ij}\,c_{ik}$ ισούται με 1. Αλλά η τιμή της $c_{ij}\,c_{ik}$ εξαρτάται από τους δείκτες j, k.

Αν $j = k$ αυτή ισούται με 1 ενώ αν $j \neq k$ ισούται με $\emptyset$. Επομένως ισχύει η σχέση:

$$c_{ij}\, c_{ik} = \delta_{jk} \quad ή \quad \mathbf{C}\,\mathbf{C}^T = \mathrm{I} \tag{1.27}$$

Η εξ. 1.27 σε ανεπτυγμένη μορφή αντιστοιχεί σε εννέα εξισώσεις οι οποίες καλούνται συνθήκες ορθογωνικότητας.

Αν αντιθέτως η εξ. 1.25 αντικατασταθεί στην εξ. 1.26 προκύπτει η εξίσωση:

$$u'_i = c_{ij}\, c_{kj}\, u'_k$$

από την οποία οι συνθήκες ορθωγονικότητας προκύπτουν με τη μορφή:

$$c_{ij}\, c_{kj} = \delta_{ik} \quad ή \quad \mathbf{C}^T\,\mathbf{C} = \mathbf{I} \tag{1.28}$$

΄Ενας γραμμικός μετασχηματισμός όπως αυτός των εξ. 1.25, 1.26 των οποίων οι συντελεστές πληρούν τις εξ. 1.27, 28 καλείται ορθογώνιος μετασχηματισμός.

1.5.3 Τανυστής δεύτερης τάξης

Ο μετασχηματισμός του τανυστή δεύτερης τάξης $T_{ij} = u_i \upsilon_j$ σ' ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων γίνεται με την χρησιμοποίηση των εξ. 1.25 1.26

$$T'_{ij} = u'_i\, \upsilon'_j = (c_{ik}\, u_k)\,(c_{jl}\, \upsilon_l) = c_{ik}\, c_{jl}\, u_k\, \upsilon_l$$

$$T'_{ij} = c_{ik}\, c_{jl}\, T_{kl} \quad ή \quad \mathbf{T}' = \mathbf{C}^T\,\mathbf{T}\mathbf{C} \tag{1.29}$$

Με τη χρησιμοποίηση των συνθηκών ορθογωνικότητας εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύει και ο αντίστροφος μετασχηματισμός:

$$T_{ij} = c_{ki}\, c_{lj}\, T'_{kl} \quad ή \quad \mathbf{T} = \mathbf{C}\mathbf{T}'\mathbf{C}^T \tag{1.30}$$

1.5.3 Τανυστές νιοστής τάξης

Ο νόμος μετασχηματισμού των τανυστών πρώτης και δεύτερης τάξης γενικεύεται και για τανιστάς νιοστής τάξης.

$$T_{ijm\cdots\cdots} = c_{ik}\, c_{jl}\, c_{mn} \cdots\cdots T_{kln\cdots} \tag{1.31}$$

1.6 Η ΣΥΜΜΕΤΡ΄ΙΑ ΣΤΟΥς ΤΑΝΥΣΤ΄Ες

΄Ενας τανυστής είναι συμμετρικός ως προς δύο δείκτες όταν η αμοιβαία ανταλλαγή τους αφήνει ανεπηρέαστο τον τανυστή, π.χ.

$T_{ij} = T_{ji}$ (συμμετρίας ως προς i, j)

$A_{ijk} = A_{ikj}$ (συμμετρία ως προς j, k)

$B_{ijklm} = B_{jikml}$ (συμμετρία ως προς i, j και l, m)

Η συμμετρία σ' ένα τανυστή μπορεί επίσης να αναφέρεται σ' όλους τους δείκτες οπότε η σειρά αναγραφής τους δεν παίζει ρόλο, π.χ.

$$A_{ijk} = A_{ikj} = A_{jki} = A_{kij} = A_{kji}$$

Ένας τανυστής είναι αντισυμμετρικός ως προς δύο δείκτες όταν η αμοιβαία ανταλλαγή τους επιφέρει μόνο αλλαγή προσήμου, π.χ.

$A_{ijk} = -A_{kji}$ (αντισυμμετρία ως προς j, k)

Και η αντισυμμετρία μπορεί επίσης να είναι ολική.

Θα εξετασθεί τώρα λεπτομερέστερα η συμμετρία και η αντισυμμετρία στον τανυστή δεύτερης τάξης.

– Επειδή λόγω της συμμετρίας $A_{ij} = A_{ji}$, η αλλαγή αυτή των δεικτών στην περίπτωση που ο τανυστής γραφεί σε μητρωική μορφή, ισοδυναμεί με την αλλαγή των στηλών σε σειρές και αντίστροφα. Συνεπώς ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \tag{1.32}$$

Ένας συμμετρικός τανυστής δεύτερης τάξης έχει επομένως μόνο έξι ανεξάρτητες συνιστώσες.

– Επειδή λόγω αντισυμμετρίας $B_{ij} = -B_{ji}$ τα διαγώνια στοιχεία είναι μηδέν. Συνεπώς για ένα αντισυμμετρικό τανυστή ισχύει η σχέση:

$$B = -B^T = \begin{bmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} \\ -B_{12} & 0 & B_{23} \\ -B_{13} & -B_{23} & 0 \end{bmatrix} \tag{1.33}$$

– Ένας οποιοσδήποτε τανυστής δεύτερης τάξης T_{ij} μπορεί να αναλυθεί σ' ένα συμμετρικό και σ' ένα αντισυμμετρικό τανυστή δεύτερης τάξης σύμφωνα με την εξίσωση:

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = T_{ij}^{(\Sigma)} + T_{ij}^{(A)} \tag{1.34}$$

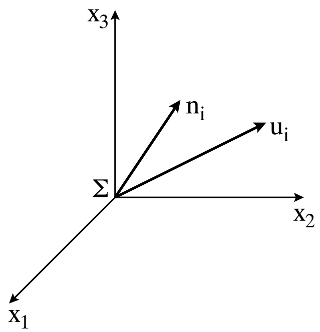
όπου $T_{ij}^{(\Sigma)} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$ είναι ο συμμετρικός τανυστής

και $T_{ij}^{(A)} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$ είναι ο αντισυμμετρικός τανυστής.

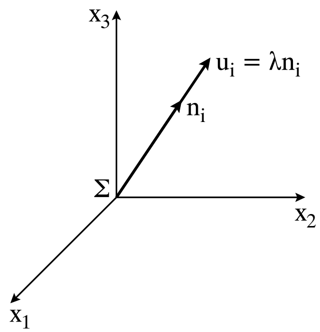
1.7 ΚΎΡΙΕς ΤΙΜΈς ΚΑΙ ΚΎΡΙΕς ΔΙΕΥΘΎΝΣΕΙς ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΏΝ ΤΑΝΥΣΤΏΝ ΔΕΎΤΕΡΗς ΤΆΞΗς

Έστω T_{ij} ένας συμμετρικός τανυστής δεύτερης τάξης ο οποίος ορίζεται σε κάποιο σημείο Σ του χώρου, και n_i ένα τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα το οποίο ορίζει μια διεύθυνση δια του σημείου Σ (σχ. 1.2). Το γινόμενο $T_{ij} n_j$ αντιστοιχεί σε τρεις συνιστώσες, οι οποίες μπορούμε να πούμε ότι ανήκουν σ' ένα διάνυσμα **u** το οποίο και ορίζουν. Συνεπώς ισχύει η σχέση:

$$u_i = T_{ij} n_j \tag{1.35}$$



Σχήμα 1.2



Σχήμα 1.3

Γενικά μια εξίσωση της μορφής

$$b_i = T_{ij}\,\alpha_j$$

αποτελεί ένα μετασχηματισμό του διανύσματος α_j στο διάνυσμα b_i μέσω του μητρώου T_{ij}.

Στην περίπτωση που για κάποιο διάνυσμα n_i το διάνυσμα u_i που προκύπτει από το μετασχηματισμό της εξ. 1.35 είναι συνευθειακό με το n_i (σχ. 1.3) τότε ισχύει η σχέση:

$$u_i = \lambda n_i \tag{1.36}$$

όπου λ μία σταθερά.
Η διεύθυνση για την οποία ισχύει η εξ. 1.36 καλείται κύρια διεύνθυνση.
Θα βρεθούν οι κύριες διευθύνσεις του συμμετρικού τανυστή T_{ij}.
Από τις εξ. 1.35, 36 και αντικαθιστώντας όπου $n_i = \delta_{ij} n_j$ προκύπτει:

$$T_{ij}\,n_j = \lambda\,\delta_{ij}\,n_j \quad \Rightarrow \quad (T_{ij} - \lambda\delta_{ij})\,n_j = 0 \tag{1.37}$$

Σε ανεπτυγμένη μορφή το σύστημα των εξ. 1.37 γράφεται:

$$\begin{aligned} (T_{11} - \lambda)n_1 + T_{12}n_2 + T_{13}n_3 &= 0 \\ T_{12}n_1 + (T_{22} - \lambda)n_2 + T_{23}n_3 &= 0 \\ T_{13}n_1 + T_{23}n_2 + (T_{33} - \lambda)n_3 &= 0 \end{aligned} \tag{1.38}$$

Το σύστημα των εξισώσεων 1.38 είναι ομογενές και για να έχει λύση, δηλαδή να προκύπτουν διευθύνσεις $n_i \neq 0$ πρέπει να είναι:

$$\begin{bmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33}-\lambda \end{bmatrix} = 0 \quad \text{ή} \quad \left| T_{ij} - \lambda\delta_{ij} \right| = 0 \tag{1.39}$$

Από την ανάπτυξη του συστήματος των εξ. 1.39 προκύπτει η εξίσωση:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 - I_2\lambda - I_3 = 0 \tag{1.40}$$

όπου οι βαθμωτοί συντελεστές

$$I_1 = \mathrm{Tr}\,\mathbf{T} = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_1 - \mathrm{Tr}\,T^2) = T_{11}T_{22} + T_{22}T_{33} + T_{33}T_{11} - T_{23}^2 - T_{13}^2 - T_{12}^2 \tag{1.41}$$

$$I_3 = |T_{ij}| = T_{11}T_{22}T_{33} - 2T_{12}T_{23}T_{13} + T_{11}T_{23}^2 + T_{22}T_{13}^2 + T_{33}T_{12}^2$$

καλούνται αναλλοίωτες πρώτης δεύτερης και τρίτης τάξης αντίστοιχα του τανυστή T_{ij} και είναι ανεξάρτητες του συστήματος συντεταγμένων.

Οι τρεις ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ της εξ. 1.40 καλούνται κύριες τιμές του T_{ij} και στην περίπτωση που είναι διαφορετικές μεταξύ τους, ορίζουν τρίες διευθύνσεις οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους και καλούνται κύριες διευθύνσεις.

Οι ρίζες της εξ. 140 είναι πάντα πραγματικές και συνήθως χαρακτηρίζονται έτσι που να ισχύει η σχέση $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$.

Εάν ο T_{ij} δεν αναφέρεται στο τυχόν σύστημα συντεταγμένων Ox_i αλλά στο σύστημα των κύριων αξόνων τότε έχει τη διαγώνια μορφή:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{1.42}$$

και οι αναλλοίωτες πρώτης δεύτερης και τρίτης τάξης έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \\ I_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned} \tag{1.43}$$

Εάν $\lambda_1 = \lambda_2$ τότε ορίζεται μόνο ο κύριος άξονας που αντιστοιχεί στην λ_3 ενώ κάθε διεύθυνση στο κάθετο επίπεδο είναι κύρια διεύθυνση (τανυστής συμμετρικός εκ περιστροφής).

Εάν $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ κάθε διεύθυνση είναι κύρια διεύθυνση (τανυστής ισότροπος).

Αν συμβολίσουμε με $n_i^{(1)}, n_i^{(2)}, n_i^{(3)}$ τα συνημίτονα κατεύθυνσης των τριών αξόνων του κυρίου συστήματος Ox_i^* σχετικά με το σύστημα Ox_i τότε το μητρώο μετασχηματισμού προκύπτει από τον πιν. 1.2.

Πίνακας. 1.2

	x_1	x_2	x_3
x_1^*	$c_{11} = n_1^{(1)}$	$c_{12} = n_2^{(1)}$	$c_{13} = n_3^{(1)}$
x_2^*	$c_{21} = n_1^{(2)}$	$c_{22} = n_2^{(2)}$	$c_{23} = n_3^{(2)}$
x_3^*	$c_{31} = n_1^{(3)}$	$c_{32} = n_2^{(3)}$	$c_{33} = n_3^{(3)}$

1.8 ΤΑΝΥΣΤΙΚΌ ΠΕΔΊΟ - ΠΑΡΆΓΩΓΟΙ ΤΑΝΥΣΤΏΝ

Τα τανυστικά μεγέθη που εκφράζουν μια ορισμένη κατάσταση ενός χώρου είναι γενικά συναρτήσεις των συντεταγμένων των σημείων του χώρου. Ένα ορισμένο τανυστικό πεδίο επομένως είναι ο χώρος στον οποίο ο τανυστής $\mathbf{T}$ ορίζεται σαν συνάρτηση των συντεταγμένων $\mathbf{x}$ των σημείων του. $\{\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x})\}$.

Το τανυστικό πεδίο χαρακτηρίζεται σαν συνεχές εάν οι συνιστώσεις του $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ είναι συνεχείς (ή διαφορίσιμες) συναρτήσεις του $\mathbf{x}$.

Σ' ένα ορθογώνιο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο οποίο το διάνυσμα θέσης ενός σημείου εκφράζεται απο τη σχέση $\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$ τανυστικά πεδία διαφόρων τάξεων παριστάνονται από τις εκφράσεις:

– βαθμωτό πεδίο : $\phi = \phi(x_i)$ ή $\phi = \phi(\mathbf{x})$
– διανυσματικό πεδίο : $u_i = u_i(x_i)$ ή $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$
– δεύτερης τάξης τανυστικό πεδίο : $T_{ij} = T_{ij}(x_i)$ ή $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$
– κλπ.

Οι συνιστώσεις των τανυστικών αυτών συναρτήσεων έχουν μερικές παραγώγους ο συμβολισμός των οποίων φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \phi_i$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_{i,i} \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{i,j} \qquad \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} = u_{i,jk}$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = T_{ij,j} \qquad \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} = T_{ij,k} \qquad \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} = T_{ij,kl}$$

Μερικοί σημαντικοί διαφορικοί τελεστές οι οποίοι συνήθως εμφανίζονται στη μηχανική των συνεχών μέσων και με τους οποίους συμβολίζονται χαρακτηριστικά μεγέθη είναι:

1. $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{e}_3$ (διανυσματικός τελεστής ανάδελτα)

2. $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_3^2}$ (Λαπλασιανή)

Ορισμένα χαρακτηριστικά μεγέθη που συμβολίζονται με τους τελεστές αυτούς είναι:

1. Κλίση της συνάρτησης ϕ η οποία είναι ένα διάνυσμα:

$$\mathrm{grad}\phi = \nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\mathbf{e}_i \quad \text{ή} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\phi = \phi,_i \tag{1.44}$$

2. Απόκλιση του διανύσματος **u.** Επειδή εκφράζεται από ένα εσωτερικό γινόμενο είναι αριθμητικό μέγεθος.

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad ή \quad \frac{\partial}{\partial x_i} u_i = u_{i,i} \tag{1.45}$$

3. Περιστροφή του διαλύματος **u**. Επειδή εκφράζεται από ένα εξωτερικό γινόμενο είναι μέγεθος διανυσματικό.

$$\mathrm{curl}\,\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u} \quad ή \quad \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} u_k = \varepsilon_{ijk}\, u_{k,j} \tag{1.46}$$

4. Λαπλασιανή μιας συνάρτησης ϕ. Επειδή εκφράζεται με ένα εσωτερικό γινόμενο είναι αριθμητικό μέγεθος.

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot \nabla\phi \quad ή \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial^2 x_i}\, \phi_i = \phi_{,ii} \tag{1.47}$$

Από τους παραπάνω συμβολισμούς φαίνεται πως:

– από την παραγώγιση ενός τανυστή ορισμένης τάξης ως προς ελεύθερο δείκτη προκύπτει τανυστής μιας τάξης ανώτερος ενώ
– από την παραγώγιση ενός τανυστή ορισμένης τάξης ως προς άεργο δείκτη προκύπτει τανυστής μιας τάξης κατώτερος.

Έστω σαν παράδειγμα για την απόδειξη των παραπάνω ο τανυστής πρώτης τάξης $u_s(\mathbf{x})$. Θα δειχθεί ότι η μερική παραγωγός του υπόκειται σ' ένα μετασχηματισμό τανυστή δεύτερης τάξης και συνεπώς είναι τανυστής δεύτερης τάξης.
Αν Ox_i και Ox_i' είναι τα δύο συστήματα συντεταγμένων είναι:

$$u_s' = c_{sr}\, u_r \tag{1.48}$$

συνεπώς

$$\frac{\partial u_s'}{\partial x_k'} = \frac{\partial u_s'}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_k'} \tag{1.49}$$

Αν στο δεύτερο μέρος της εξ. 1.49 αντικατασταθεί η u_s' απο την εξ. 1.48 προκύπτει:

$$\frac{\partial u_s'}{\partial x_k'} = c_{sr} \frac{\partial u_r}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_k'} \tag{1.50}$$

Για τις Καρτεσιανές συντεταγμένες έχουμε δει πως ισχύουν οι σχέσεις μετασχηματισμού:

$$x_j = c_{kj}\, x_k' \qquad x_k' = c_{kj}\, x_j \tag{1.51}$$

Οι εξισώσεις αυτές αν πρόκειται να μετασχηματισθούν τα διανύσματα dx_k', dx_j γράφονται

$$dx_j = c_{kj} dx_k' \qquad dx'_k = c_{kj} dx_j \tag{1.52}$$

Από τις οποίες προκύπτουν:

$$\frac{\partial x_j}{\partial x'_k} = c_{kj} \qquad \frac{\partial x'_k}{\partial x_j} = c_{kj} \tag{1.53}$$

Δι' αντικαταστάσεως της πρώτης των εξ. 1.53 στην εξ. 150 προκύπτει η σχέση:

$$\frac{\partial u'_s}{\partial x'_k} = c_{sr} c_{kj} \frac{\partial u_r}{\partial x_j} \tag{1.54}$$

η οποία εκφράζει νόμο μετασχηματισμού τανυστή δεύτερης τάξης.

Παράγωγος τανυστή κατά μια ορισμένη διεύθυνση

Έστω π.χ. ο τανυστής T_{kl} ο οποίος ορίζεται στα σημεία $P(x_i)$ μιας καμπύλης C στο χώρο (σχ. 1.4). Αν $T_{kl}(x_i), T_{kl}(x_i + dx_i)$ είναι οι τιμές του τανυστή στα σημεία $P(x_i)$ και $P'(x_i + dx_i)$ τα απέχουν Δs μεταξύ τους, τότε το όριο:

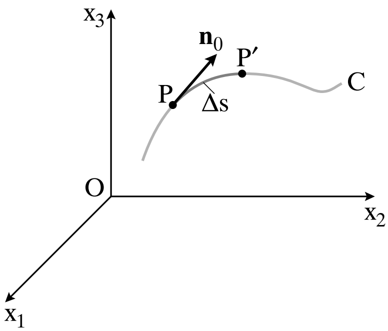
$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{T_{kl}(x_i + dx_i) - T_{kl}(x_i)}{\Delta s} = \frac{d\,T_{kl}}{ds} \tag{1.55}$$

αν υπάρχει καλείται παράγωγος διεύθυνσης

Επειδή

$$dT_{kl}(x_i) = \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_i} dx_i \tag{1.56}$$

λαμβάνοντας υπόψη τις εξ. 1.55 και 1.56 έχουμε:



Σχήμα 1.4

$$\frac{dT_{kl}}{ds} = \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds} = \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_2}\frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_3}\frac{dx_3}{ds} = T_{kl,i}\frac{dx_i}{ds} \tag{1.57α}$$

Η εξίσωση αυτή σε διανυσματική μορφή γράφεται:

$$\frac{dT_{kl}}{ds} = \left(\frac{\partial T_{kl}}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_3}\mathbf{e}_3\right)\left(\frac{dx_1}{ds}\mathbf{e}_1 + \frac{dx_2}{ds}\mathbf{e}_2 + \frac{dx_3}{ds}\mathbf{e}_3\right) = \tag{1.57 b}$$

$$= \nabla T_{kl}\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla T_{kl}\cdot\mathbf{n}_o$$

όπου $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{n}_o$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα το εφαπτόμενο της καμπύλης C στο σημείο x_i.

Συνεπώς η παράγωγος διεύθυνσης του τανυστή T_{kl} σ' ένα σημείο x_i είναι η συνιστώσα της κλίσης του, ∇T_{kl} κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης στο σημείο x_i της καμπύλης C.

Η πρόταση αυτή ισχύει και για τανυστές οποιασδήποτε τάξης.

Παράδειγμα 1.1 Να βρεθεί τι παριστάνουν οι τανυστικές παραστάσεις A_{ii}, B_{iij}, $a_i T_{ij}$, $a_i b_j D_{ij}$, F_{ij}.

Οι τέσσερεις πρώτες παραστάσεις παριστάνουν τα αθροίσματα:

$$A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_3$$

$$B_{iij} = (B_{111} + B_{221} + B_{331}) + (B_{112} + B_{222} + B_{332}) + (B_{113} + B_{223} + B_{333})$$

$$a_i T_{ij} = (a_1 T_{11} + a_2 T_{21} + a_3 T_{31}) + (a_1 T_{12} + a_2 T_{22} + a_3 T_{32}) + (a_1 T_{13} + a_2 T_{23} + a_3 T_{33})$$

$$a_i b_j D_{ij} = (a_1 b_1 D_{11} + a_1 b_2 D_{12} + a_1 b_3 D_{13}) + (a_2 b_1 D_{21} + a_2 b_2 D_{22} + a_2 b_3 D_{23}) + (a_3 b_1 D_{31} + a_3 b_2 D_{32} + a_3 b_3 D_{33})$$

Ο τανυστής F_{ij} περιλαμβάνει τις εννέα συνιστώσεις:

$$F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{31}, F_{32}, F_{33}.$$

Παράδειγμα 1.2 Να βρεθούν οι τιμές των τανυστικών παραστάσεων: α) δ_{ii}, β) $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}$, γ) $\varepsilon_{ijk} b_j b_k$

α) $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$

β) $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{1j}\delta_{1k}\delta_{jk} + \delta_{2j}\delta_{2k}\delta_{jk} + \delta_{3j}\delta_{3k}\delta_{jk}$

για $j = k = 1$ είναι $\delta_{11}\delta_{11}\delta_{11} + \delta_{21}\delta_{21}\delta_{11} + \delta_{31}\delta_{31}\delta_{11} = 1 + 0 + 0 = 1$

για $j = k = 2$ είναι $\delta_{12}\delta_{12}\delta_{22} + \delta_{22}\delta_{22}\delta_{22} + \delta_{32}\delta_{32}\delta_{22} = 0 + 1 + 0 = 1$

για $j = k = 3$ είναι $\delta_{13}\delta_{13}\delta_{33} + \delta_{23}\delta_{23}\delta_{33} + \delta_{33}\delta_{33}\delta_3 = 0 + 0 + 1 = 1$

για $j \neq k$ όλοι οι παράγοντες του αθροίσματος είναι μηδενικοί.

Συνεπώς $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk} = 3$.

γ) Με τη χρησιμοποίηση της σύμβασης πρόσθεσης για τους δείκτες j, k και παραλείποντας συγχρόνως τους μηδενικούς όρους προκύπτει:

$$\varepsilon_{ijk} b_j b_k = \varepsilon_{i1k} b_1 b_k + \varepsilon_{i2k} b_2 b_k + \varepsilon_{i3k} b_3 b_k =$$
$$= \varepsilon_{i12} b_1 b_2 + \varepsilon_{i13} b_1 b_3 + \varepsilon_{i21} b_2 b_1 + \varepsilon_{i23} b_2 b_3 + \varepsilon_{i31} b_3 b_1 + \varepsilon_{i32} b_3 b_2$$

Από την έκφραση αυτή παραλείποντας πάλι τους μηδενικούς όρους προκύπτουν:

για $i = 1$ $\quad \varepsilon_{1jk} b_j b_k = b_2 b_3 - b_3 b_2 = 0$

για $i = 2$ $\quad \varepsilon_{2jk} b_j b_k = b_1 b_3 - b_3 b_1 = 0$

για i = 3 $\quad \varepsilon_{3jk} b_j b_k = b_1 b_2 - b_2 b_1 \;=\; 0$

Συνεπώς $\varepsilon_{ijk}\, b_j b_k = 0$.

Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει αμέσως αν σκεφθούμε ότι η τανυστική παράσταση $\varepsilon_{ijk} b_j b_k$ παριστάνει το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{b}\times\mathbf{b} = 0$.

Παράδειγμα 1.3 Δίδεται το διάνυσμα $\mathbf{u} = 3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ εκφρασμένο στο σύστημα αξόνων Ox_i. Να βρεθεί η έκφρασή του στο σύστημα αξόνων Ox'_i αν το σύστημα Ox'_i είναι στραμμένο γύρω απο τον άξονα $x_3 = x'_3$ κατά γωνία ∂=30°.

Οι γωνίες μεταξύ των αξόνων των δύο συστημάτων φαίνονται στο διπλανό πίνακα από τον οποίο προκύπτει το μητρώο μετασχηματισμού.

	x_1	x_2	x_3
x'_1	30	60	90
x'_2	120	30	90
x'_3	90	90	0

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με την εξίσωση μετασχηματισμού $u'_i = c_{ij} u_j$ είναι:

$$u'_1 = c_{1j} u_j = c_{11} u_1 + c_{12} u_2 + c_{13} u_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 5 = 5{,}098.$$

$$u'_2 = c_{2j} u_j = c_{21} u_1 + c_{22} u_2 + c_{23} u_3 = -\frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 5 = 2{,}83$$

$$u'_3 = c_{3j} u_j = c_{31} u_1 + c_{32} u_2 + c_{33} u_3 = 1\cdot u_3 = u_3$$

Παράδειγμα 1.4 Δίδεται το διάνυσμα

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

εκφρασμένο στο σύστημα Ox_i. Να βρεθεί η έκφρασή του στο σύστημα Ox'_i. Στον πίνακα δίδονται μερικές από τις γωνίες που σχηματίζουν οι άξονες των δύο συστημάτων αξόνων.

	x_1	x_2	x_3
x'_1	45°	60°	60°
x'_2	90°	?	?
x'_3	?	?	?

Τα συνημίτονα κατεύθυνσης c_{22}, c_{23} θα βρεθούν από τις συνθήκες ορθογωνικοτητας $c_{ij} c_{kj} = \delta_{ik}$ (εξ. 1.28)

για i = 1 k =2 είναι $\quad c_{1j} k_{2j} = c_{11} c_{21} + c_{12} c_{22} + c_{13} c_{23} = 0$

$$0{,}707\cdot 0 + \frac{1}{2} c_{22} + \frac{1}{2} c_{23} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{22} = -c_{23}$$

για i = k = 2 είναι $c_{2j}c_{2j} = c_{21}c_{21} + c_{22}c_{22} + c_{23}c_{23} = 1$

$$0^2 + c_{22}^2 + c_{23}^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{matrix} c_{23} = \pm 0{,}707 \\ c_{22} = \mp 0{,}707 \end{matrix}$$

$$2c_{23}^2 = 1$$

Εκλέγεται το ζεύγος $c_{22} = 0{,}707$ ($\partial_{22} = 45°$) $c_{23} = -0{,}707$ ($\partial_{23} = 135$).

Τα συνημίτονα κατεύθυνσης του $\mathbf{e}'_3$ προκύπτουν από τον υπολογισμό του $\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2$.

$$\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0{,}707 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}707 & -0{,}707 \end{bmatrix} = -0{,}707\mathbf{e}_1 + 0{,}5\mathbf{e}_2 + 0{,}5\mathbf{e}_3$$

$$c_{31} = -0{,}707 \qquad c_{32} = 0{,}5 \qquad c_{33} = 0{,}5$$

Συνεπώς το μητρώο μετασχηματισμού είναι:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}707 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}707 & -0{,}707 \\ -0{,}707 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με την εξίσωση $u'_i = c_{ij}u_j$ (εξ. 1.26) είναι:

$$u'_1 = c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + c_{13}u_3 = 0{,}707 \cdot 3 + 0{,}5 \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 1 = 5{,}121$$

$$u'_2 = c_{21}u_1 + c_{22}u_2 + c_{23}u_3 = 0 \cdot 3 + 0{,}707 \cdot 5 - 0{,}707 \cdot 1 = 2{,}828$$

$$u'_3 = c_{31}u_1 + c_{32}u_2 + u_{33}u_3 = -0{,}707 \cdot 3 + 0{,}5 \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}879$$

συνεπώς $\mathbf{u}' = 5{,}121\,\mathbf{e}_1 + 2{,}828\,\mathbf{e}_2 + 0{,}879\,\mathbf{e}_3$.

Παράδειγμα 1.5 Στο διπλανό πίνακα δίδονται οι γωνίες μεταξύ των συστημάτων αξόνων Ox'_i και Ox_i. Να βρεθεί ο πίνακας μετασχηματισμού και να δειχθεί ότι πληρούνται οι συνθήκες ορθογωνικότητας.

	x_1	x_2	x_3
x'_1	135	60	120
x'_2	90	45	45
x'_3	45	60	120

Οι συντελεστές μετασχηματισμού c_{ij} είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του πίνακα και υπολογίζονται αμέσως όποτε προκύπτει ο πίνακας μετασχηματισμού:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Θα εξετασθεί αν οι συνθήκες ορθογωνικότητας $c_{ij}c_{ik} = \delta_{ik}$ επαληθεύονται για τις διάφορες τιμές των j και k.

– για $j = k = 1$ είναι $c_{11}c_{11} + c_{21}c_{21} + c_{31}c_{31} = c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2$
$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

– για $j = k = 2$ και $j = k = 3$ αποδεικνύεται ομοίως ότι το άθροισμα των τετραγώνων των όρων της δεύτερης καθώς και της τρίτης στήλης του c_{ij} ισούται με μονάδα.

– για $j = 1$ $k = 2$ είναι $c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} + c_{31}c_{32} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = 0$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι και για τις άλλες τιμές των j, k για τις οποίες είναι $j \neq k$ το άθροισμα των γινομένων των αντίστοιχων όρων δύο στηλών είναι μηδέν.

– Αν οι συνθήκες ορθογωνικότητας είναι της μορφής $c_{ji}c_{ki} = \delta_{ik}$ όλες οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν και για τις σειρές.

Παράδειγμα 1.6

α) Να βρεθούν οι κύριες τιμές και οι κύριες διευθύνσεις του τανυστή
$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

β) Να βρεθεί αν οι κύριοι άξονες του T_{ij} σχηματίζουν δεξιόστροφο ή αριστερόστροφο σύστημα αξόνων.

γ) Να βρεθεί η διαγώνια μορφή του T_{ij}.

α) Θα πρέπει σύμφωνα με την εξ. 1.39 να είναι:
$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)[(4-\lambda)^2 - 1] =$$
$$= (1-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda)$$

Συνεπώς οι κύριες τιμές είναι $\lambda_1 = 5$ $\lambda_2 = 3$ $\lambda_3 = 1$

Για $\lambda_1 = 5$ το σύστημα των εξ. 1.38 γίνεται:
$$\left.\begin{aligned} -n_1^{(1)} - n_2^{(1)} &= 0 \\ -n_1^{(1)} - n_2^{(1)} &= 0 \\ -4n_3^{(1)} &= 0 \end{aligned}\right\} \overset{\text{ή}}{\Longrightarrow} \begin{aligned} n_1^{(1)} &= -n_2^{(1)} \\ n_3^{(1)} &= 0 \end{aligned}$$

και από τη συνθήκη ορθογωνικότητας

$$n_i^{(1)}\, n_i^{(1)} = n_1^{(1)^2} + n_2^{(1)^2} + n_3^{(1)^2} = 2 n_1^{(1)^2} = 1$$

προκύπτει $\quad n_1^{(1)} = -n_2^{(1)} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} \qquad n_3^{(1)} = 0$

Για $\lambda_2 = 3$ το σύστημα των εξ. 1.38 γίνεται:

$$\left.\begin{aligned} -n_1^{(2)} - n_2^{(2)} &= 0 \\ -n_1^{(2)} - n_2^{(2)} &= 0 \\ -2\, n_3^{(2)} \qquad &= 0 \end{aligned}\right\} \overset{\text{ή}}{\Rightarrow} \quad \begin{aligned} n_1^{(2)} &= n_2^{(2)} \\ n_3^{(2)} &= 0 \end{aligned}$$

και από τη συνθήκη ορθογωνικότητας

$$n_i^{(2)}\, n_i^{(2)} = n_1^{(2)^2} + n_2^{(2)^2} + n_3^{(2)^2} = 2 n_1^{(2)^2} = 1$$

προκύπτει $\quad n_1^{(2)} = n_2^{(2)} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} \qquad n_3^{(2)} = 0$

Για $\lambda_3 = 1$ το σύστημα των εξ. 1.38 γίνεται:

$$\left.\begin{aligned} 3 n_1^{(3)} - n_2^{(3)} &= 0 \\ -n_1^{(3)} + 3 n_2^{(3)} &= 0 \\ 0 \cdot n_3 \qquad &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad n_1^{(3)} = n_2^{(3)} = 0$$

και από τη συνθήκη ορθογωνικότητας

$$n_i^{(3)}\, n_i^{(3)} = n_1^{(3)^2} + n_2^{(3)^2} + n_3^{(3)^2} = n_3^{(3)^2} = 1$$

προκύπτει $\quad n_3^{(3)} = \pm 1.$

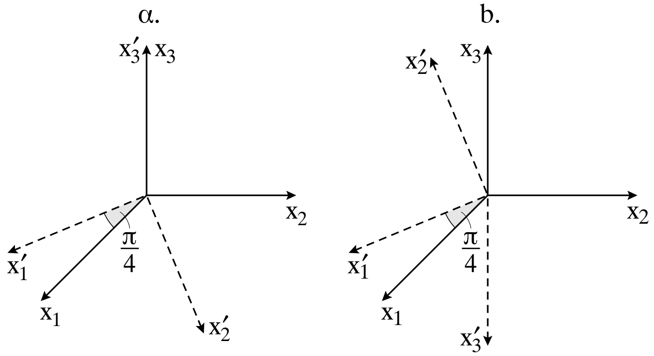
Σύμφωνα με τις ευρεθείσες τιμές των συνημιτόνων κατευθύνσεως των κυρίων αξόνων το μητρώο μετασχηματισμού είναι:

$$c_{ij} = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \pm 1/\sqrt{2} & \mp 1/\sqrt{2} & 0 \\ \pm 1/\sqrt{2} & \pm 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

β) Για να είναι το σύστημα αξόνων ορθογώνιο θα πρέπει να πληρούνται οι συνθήκες ορθογωνικότητας $c_{ij} c_{ik} = \delta_{ik}$.

Επειδή η συνθήκη $n_i n_i = 1$ χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του c_{ij}, οι συνθήκες ορθογωνικότητας για $i = k$ πληρούνται.

Για $j \neq k$ πρέπει να δειχθεί ότι ο πολλαπλασιασμός των όρων δύο οποιδήποτε στηλών (ή γραμμών) και η άθροισή τους είναι μηδέν. Και αυτό όπως εύκολα προκύπτει συμβαίνει.



Σχήμα 1.5

Για να είναι το σύστημα των κυρίων αξόνων δεξιόστροφο θα πρέπει να ισχύει η σχέση $\mathbf{n}^{(1)}\times\mathbf{n}^{(2)} = \mathbf{n}^{(3)}$. Πράγματι αν για τα $n^{(1)}_i$, $n^{(2)}_i$ λάβουμε τα πρώτα πρόσημα προκύπτει σύστημα δεξιόστροφο (σχ. 1.5.α).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = 0\cdot\mathbf{e}_1 + 0\cdot\mathbf{e}_2 + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3$$

Αν λάβουμε τα δεύτερα πρόσημα προκύπτει επίσης σύστημα δεξιόστροφο (σχ. 1.5b)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = 0\cdot\mathbf{e}_1 + 0\cdot\mathbf{e}_2 + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3$$

γ) Σύμφωνα με το νόμο μετασχηματισμού των τανυστών 2ης τάξης $\mathbf{T}' = \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{C}^{\mathbf{T}}$ και λαμβάνοντας τα πρώτα πρόσημα του μητρώου μετασχηματισμού είναι:

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} & 0 \\ -5/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΉΣΕΙς

A.1.1 α) Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ και $\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ είναι κάθετα μεταξύ τους και να βρεθεί το διάνυσμα $\mathbf{w}$ ώστε η τριάδα των διανυσμάτων $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\upsilon}$, $\mathbf{w}$ να αποτελεί μια ορθογώνια δεξιόστροφη τριάδα διανυσμάτων.

β) Να βρεθεί το μητρώο μετασχηματισμού μεταξύ των $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\upsilon}$, $\mathbf{w}$ και των διευθύνσεων του συστήματος συντεταγμένων.

απ.: α) $\mathbf{w} = -1/\sqrt{6}\,(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$

$$\beta)\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

A1.2 Για τον συμμετρικό τανυστή $T_{ij} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ να βρεθούν οι κύριες τιμές και οι διευθύνσεις των κύριων τάσεων.

απ.: $\lambda_1 = 12$ $\lambda_2 = 7$ $\lambda_3 = 2$

	x_1	x_2	x_3
x'_1	$4/5\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$3/5\sqrt{2}$
x'_2	$-3/5$	0	$4/5$
x'_3	$-4/5\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$-3/5/\sqrt{2}$

A.1.3 Να αποδειχθούν οι ισότητες

$$I_1 = a_{ii} \qquad I_2 = \frac{1}{2}(a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ij}) \qquad I_3 = \delta_{ijk}\,a_{1i}a_{2j}a_{3k}$$

A.1.4 Στο διδιάστατο χώρο το μητρώο του συμμετρικού τανυστή $a_{ik} = a_{ki}$ έχει τη μορφή $\mathbf{a} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}$. Να βρεθούν τα αναλλοίωτα μεγέθη και να γραφεί το μητρώο στον κύριο σύστημα αξόνων.

A.1.5 Εάν $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$ $\nabla\times\mathbf{u} = \times\dot{\mathbf{w}}$ και $\nabla\times\mathbf{w} = -\dot{\boldsymbol{\upsilon}}$. Να δειχθεί ότι $\nabla^2\mathbf{u} = \ddot{u}$.