Στοιχεία Μαθηματικής Λογικής

Αθ. Τζουβάρας

ℵ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 1998

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό γράφτηκε για να καλύψει διδακτική ύλη δυο εξαμήνων στη Μαθηματική Λογική και στηρίχτηκε κατά τα δυο πρώτα κεφάλαια σε παλιότερες σημειώσεις.

Τα θέματα που πραγματεύεται είναι «κλασσικά», με την έννοια ότι τα βρίσκει κανείς, σε μικρότερη ή μεγαλύτερη έκταση, σ' οποιοδήποτε (ξένο) εγχειρίδιο του κλάδου. Τα βιβλία αυτά, πάντως, ανταποκρινόμενα σ' ένα καθεστώς διαβαθμισμένης και υψηλά εξειδικευμένης πανεπιστημιακής παιδείας έχουν ένα σαφή προσανατολισμό, άλλοτε προπτυχιακό, άλλοτε μεταπτυχιακό, άλλοτε ερευνητικό.

Αντίθετα, το πρόβλημα με την πανεπιστημιακή διδασκαλία στην Ελλάδα −σ' οποιονδήποτε επιστημονικό χώρο− είναι ότι, λόγω έλλειψης μεταπτυχιακών σπουδών και έρευνας, αναγκάζεται να παρέχει ένα μίγμα στοιχειωδών και προχωρημένων γνώσεων με σκοπό και να εισάγει τον αναγνώστη στο αντικείμενο αλλά και να του δείξει μερικές ενδιαφέρουσες και δύσκολες πλευρές του. Δεν υπάρχουν περιθώρια επανειλημμένων προσεγγίσεων του θέματος σε κλιμακούμενο βάθος σε διάφορα στάδια σπουδής. Αυτό όμως είναι δύσκολο έργο και συχνά αποτυγχάνει και ως προς τα δυό του σκέλη.

Η ίδια δυσκολία μεταφέρεται στο γράψιμο των βιβλίων. Απαιτούνται βιβλία που να ελίσσονται από το απλό στο πολύπλοκο, από τη διαίσθηση στην αυστηρότητα και ξανά πίσω, καταργώντας το διαχωρισμό των εννοιών σε «στοιχειώδεις» και «προχωρημένες». Πρέπει να περιέχουν και τη σύγχρονη κατάσταση των ιδεών και την ιστορική πορεία και τις αιτίες που τις γέννησαν.

Κάτι τέτοιο μπορεί να εκφράζει μια συνειδητή διδακτική και συγγραφική άποψη, το βέβαιο πάντως είναι ότι επιβάλλεται από την οργάνωση των σπουδών στην Ελλάδα −ισοπεδωμένο πτυχίο χωρίς διαβαθμίσεις− και συγχρόνως δημιουργεί δυσκολίες στην εφαρμογή και αμφιβολίες ως προς το αποτέλεσμά της.

Τα παραπάνω απαντούν στο ερώτημα για το επίπεδο παρουσίασης των θεμάτων σε τούτο το βιβλίο και εξηγούν τη συνεύρεση «στοιχειωδών» θεμάτων (αναλυτική παρουσίαση του προτασιακού λογισμού) με «προχωρημένες» τεχνικές και έννοιες (κεκορεσμένα μοντέλα, θεωρήματα μη πληρότητας, κατασκευάσιμα σύνολα κλπ.).

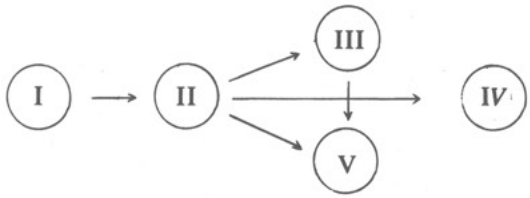
Καταβλήθηκε προσπάθεια για αυτοτέλεια του βιβλίου, δηλαδή να μην προϋποθέτει προηγούμενες γνώσεις, παρά σε ένα μόνο κεφάλαιο: της θεωρίας συνόλων όπου προυποτίθεται η γνώση διατακτικών αριθμών και πληθαρίθμων.

Τα δύο πρώτα κεφάλαια περιέχουν βασική Λογική, δηλαδή λογισμό των προτάσεων. Ίσως θεωρηθεί υπερβολική η έκτασή τους άλλα αυτό έγινε συνειδητά για την εμπέδωση της λειτουργίας των λογικών εννοιών.

Το τρίτο κεφάλαιο περιέχει βασική μοντελοθεωρία με μερικά ανοίγματα προς θέματα μη προπτυχιακού επιπέδου, όπως περιγραφές, υπεργινόμενα και κεκορεσμένες δομές.

Τα δύο επόμενα κεφάλαια, τέλος, εξειδικεύουν, κατά κάποιο τρόπο, την προηγούμενη βασική λογική σε δύο θεωρίες με μεγάλο σύγχρονο ενδιαφέρον, την αριθμητική του ***Peano*** και τη θεωρία συνόλων ***ZF***. Τα θεωρήματα μη πληρότητας που περιέχει το ένα από αυτά, αποτελούν βασική γνώση ενός μαθηματικού με καλή κατάρτιση και απ' αυτή την άποψη είναι «στοιχειώδης». Οι αποδείξεις τους, ωστόσο, δεν είναι στοιχειώδεις. Τα ίδια περίπου ισχύουν για τα θέματα του πέμπτου κεφαλαίου.

Η αλληλεξάρτηση των κεφαλαίων έχει ως εξής:



όπου το βέλος δείχνει την κατεύθυνση της εξάρτησης.

Τα κεφάλαια IV, V, συνεπώς, είναι ανεξάρτητα και μπορεί κάποιο απ' αυτά να παραλειφθεί από τη μελέτη χωρίς επίπτωση στο άλλο.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 1986

Α. ΤΖΟΥΒΑΡΑΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Λογική, γενικά, είναι η μελέτη του τρόπου που μια πρόταση συνεπάγεται από άλλες προτάσεις, δηλαδή των κανόνων ορθής συμπερασματολογίας.

Ο Αριστοτέλης σε μιά σειρά έργων του που είναι γνωστά με τον τίτλο «Όργανον», μελέτησε για πρώτη φορά τους τρόπους που οι άνθρωποι ξεκινώντας από ορισμένες υποθέσεις (προκείμενες) φτάνουν σε ορθά συμπεράσματα και βρήκε μερικά συλλογιστικά σχήματα που εκφράζουν λογικές νομοτέλειες. Όποιος ακολουθεί ένα τέτοιο σχήμα σκέφτεται «σωστά», φτάνει σε «αληθινό» συμπέρασμα. Πολύ γνωστό είναι το σχήμα:

«Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί.
Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος
Άρα ο Σωκράτης είναι θνητός»,

του οποίου η αλήθεια δεν εξαρτάται απ' το συγκεκριμένο υποκείμενο «Σωκράτης» ή το κατηγόρημα «θνητός» αλλά από τη δομή των προτάσεων που το αποτελούν. Γενικά, το σχήμα

«Κάθε Μ είναι Κ.
Τό Υ είναι Μ
Άρα το Υ είναι Κ».

είναι ένα υπόδειγμα ορθού συλλογισμού που βρίσκεται πολύ κοντά στον σύγχρονο κανόνα παραγωγής:

« Αν p τότε q.
p.
Άρα q ».

Ο Αριστοτέλης διατύπωσε επίσης ορισμένες αρχές, σαν είδος λογικών αξιωμάτων, όπως η *αρχή της ταυτότητας* –«κάθε πράγμα συμπίπτει με τον εαυτό του»– και η *αρχή της απόκλεισης του τρίτου ενδεχομένου* –«κάθε πράγμα ή έχει την ιδιότητα Α ή δεν την έχει· τρίτη δυνατότητα δεν υπάρχει»– που καθιστούν το έργο του ουσιαστική αφετηρία της σύγχρονης δίτιμης μαθηματικής λογικής.

Από που πηγάζουν αυτά τα σχήματα συλλογισμού και τα λογικά αξιώματα; Το μόνο που μπορεί να απαντήσει κανείς είναι ότι οι άνθρωποι τα χρησιμοποιούσαν από τότε που εμφανίστηκαν πάνω στη γη σαν όντα με συνείδηση, χωρίς βέβαια να τους τα έχει διδάξει κανείς. Αν ήταν «λανθασμένα» η ανθρωπότητα, συνολικά, θα αποτύχαινε στη δράση της –στο μέτρο που αυτή γίνεται με την καθοδήγηση της λογικής– και σύντομα θα τα εγκατέλειπε. Αυτό και μόνο, η μακραίωνη πετυχημένη χρήση τους, είναι το κριτήριο της «ορθότητάς» τους.

Μπορεί να πει κανείς ότι πρόκειται για αρχές που η ίδια η φυσική πραγματικότητα αποτύπωσε πάνω στην ανθρώπινη συνείδηση κατά το διάστημα χιλιετηρίδων, ότι η συνείδηση πλάστηκε κατ' εικόνα και ομοίωση του φυσικού περιβάλλοντος μέσα στο οποίο γεννήθηκε και αναπτύχθηκε.

Το αξίωμα π.χ. «κάθε πράγμα είναι ο εαυτός του» δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι το υπαγορεύει η μακροκοσμική πραγματικότητα, αυτή που γίνεται αντιληπτή με τις αισθήσεις. Σ' αυτή κυριαρχούν σχετικά ακίνητες και αναλλοίωτες παραστάσεις (βουνά, θάλασσα, ουρανός κλπ.) που δίνουν μια εικόνα μονιμότητας και ταυτότητας. Ένα βουνό είναι ο εαυτός του, δηλαδή δεν αλλάζει, για αιώνες.

Μέσα σε διαφορετικό περιβάλλον, με διαφορετικές κυρίαρχες εικόνες, τα λογικά αξιώματα σίγουρα θα ήταν διαφορετικά. Στα νεώτερα χρόνια γνωρίσαμε πραγματικότητες πέρα απ' τη μακροκοσμική, τους διάφορους μικρόκοσμους (μόρια, άτομα, σωματίδια) όπου κυριαρχεί η κίνηση. Και διαπιστώθηκε η ανεπάρκεια των αριστοτελικών αρχών για την κατανόησή τους. Φαινόμενα όπως η διπλή φύση των μικροσωματίων (σωματίδια και κύματα συγχρόνως), η περατότητα αλλά και απειρότητα του σύμπαντος, η αδιάκοπη αλλαγή των πραγμάτων και ταυτόχρονα η σχετική σταθερότητά τους ως προς τη συνείδηση (π.χ. ένας άνθρωπος απ' τη στιγμή της γέννησης ως το θάνατο είναι μια μεταβλητή ύπαρξη, μια συνεχής συνάρτηση του χρόνου, κι όμως παραμένει ο ίδιος ως προς τους άλλους), δεν χωράνε στα στενά πλαίσια της αριστοτελικής λογικής.

Τέτοια φαινόμενα, μαζί με τα κοινωνικά και ιστορικά, που είναι ακόμα πιο πολύπλοκα αλλά δεν δημιουργούν κυρίαρχες παραστάσεις στις αισθήσεις και τη συνείδηση, χρειάζονται άλλη αντιμετώπιση· που όχι απλώς θα επιτρέπει περισσότερα «ενδεχόμενα» –όπως μια πλειονότιμη λογική– αλλά θα περιγράφει τα γεγονότα στη δυναμική τους εξέλιξη, τις αμοιβαίες τους αλληλεπιδράσεις.

Η αντιμετώπιση αυτή ονομάστηκε «διαλεκτική λογική» και είναι περισσότερο ένα ζητούμενο παρά κάποιο συγκεκριμένο σύστημα αρχών. Προσπάθειες για τυποποίηση αυτής της λογικής –δηλαδή αξιωματικοποίηση– έχουν γίνει, παρόλο που αρκετοί πιστεύουν πως κάτι τέτοιο αντιφάσκει στο ίδιο της το περιεχόμενο. Τυποποίηση, πάντως, δε σημαίνει καταστροφή της κίνησης. Αρκεί να σκεφτούμε ότι πλήθος δυναμικές φυσικές διαδικασίες περιγράφονται σήμερα με τυπικά μαθηματικά μοντέλα.

Στο χώρο, πάντως, των μαθηματικών αντικειμένων τις αριστοτελικές αρχές τις δεχόμαστε –κατά κανόνα– χωρίς επιφυλάξεις. Γιατί τα αντικείμενα αυτά είναι αφηρημένα και αδρανή. Δεν είναι συναρτήσεις του χρόνου. Οι αρχές, λοιπόν, αυτές συμμετέχουν στην οικοδόμηση κάθε μαθηματικής θεωρίας σα συστατικό στοιχείο που περνάει απαρατήρητο λόγω της μεγάλης εξοικείωσης που έχουμε μαζί του.

Σ' αυτή την ανεπεξέργαστη μορφή των αυτονόητων κανόνων, που δεν απαιτεί ιδιαίτερο φορμαλισμό ούτε ανοίγει προοπτικές εξέλιξης, η λογική παρέμεινε για είκοσι περίπου αιώνες. Η κατάσταση άλλαξε μόνον όταν με τον ***Leibnitz*** αρχικά και με τον ***Boole*** στα μέσα του προηγούμενου αιώνα άρχισε να συνδέεται με τα μαθηματικά και να δανείζεται μαθηματικές μεθόδους. Στα τέλη του ίδιου αιώνα οι ***Frege, Peano, Rusell, Whitehead*** επεξεργάστηκαν βαθειά τις σχέσεις μαθηματικών-λογικής στο φως της καινούργιας, τότε, θεωρίας συνόλων. Οι δρόμοι, τέλος, για τη σύγχρονη (μαθηματική) λογική ανοίχτηκαν στις πρώτες δεκαετίες του αιώνα μας με τη δουλειά των ***Hiblert, Gödel, Tarski, Skolem*** και άλλων.

Η μαθηματική (ή συμβολική) λογική, λοιπόν, είναι λογική που χρησιμοποιεί μαθηματικές μεθόδους. Σαν τέτοια δεν είναι πια εργαλείο για τα μαθηματικά αλλά είναι μέρος των μαθηματικών - μια δέσμη από αλληλοσχετιζόμενες μαθηματικές θεωρίες (θεωρία συνόλων, θεωρία μοντέλων, θεωρία αποδείξεων, θεωρία αναδρομής κλπ.) που σαν κοινό τους γνώρισμα έχουν τη χρήση πρωτοβάθμιων τυπικών γλωσσών και του σχετικού λογισμού των προτάσεων.

Εδώ φαίνεται να υπάρχει ένας φαύλος κύκλος: Οι μαθηματικές μέθοδοι προϋποθέτουν τη λογική, συνεπώς μελετούμε τη μαθηματική λογική με τη βοήθεια της λογικής; Η απάντηση είναι καταφατική –πως θα μπορούσε, άλλωστε να γίνει διαφορετικά– και δεν υπάρχει σ' αυτό τίποτα επιλήψιμο, αρκεί να μπορούμε κάθε φορά να κάνουμε σαφή διάκριση ανάμεσα στις λογικές έννοιες που μελετούμε και στις λογικές έννοιες που προϋποθέτουμε σαν εργαλείο μελέτης. Η διάκριση γίνεται ακριβώς με τη βοήθεια της «γλώσσας». Η γλώσσα της υπό μελέτη λογικής είναι ένα καθορισμένο σύνολο συμβόλων, ενώ η γλώσσα με την οποία περιγράφουμε την πρώτη, η *μεταγλώσσα* όπως λέγεται, είναι η κοινή ελληνική μαζί με κάποια, ίσως, σύμβολα σαφώς διάφορα από εκείνα της γλώσσας.

Η μελέτη των προτάσεων γίνεται σε δυο επίπεδα: Ένα στοιχειώδες, που φέρει το όνομα Προτασιακός Λογισμός (***Sentential*** ή ***Propositional Calculus***), όπου δεν μπαίνουμε στο εσωτερικό της πρότασης και απλώς τις συσχετίζουμε εξωτερικά, και ένα πλήρες επίπεδο, τον Κατηγορηματικό Λογισμό ***(Predicate Calculus)***, όπου οι προτάσεις είναι πιο πολύπλοκες, με μεγαλύτερη δυνατότητα έκφρασης και συμπερασματολογίας. Για παράδειγμα οι προτάσεις «υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί» και «υπάρχει πρώτος αριθμός μεγαλύτερος του 10^{10}» στον Πρ. Λογισμό είναι απλές και παρίστανται απλώς με δυο σύμβολα p, q αντίστοιχα. Αντίθετα στον Κατηγ. Λογισμό παίρνουν τη μορφή:

$$p: \quad (\forall x)\,(\exists y)\,(y > x \wedge \Pi(y))$$

$$q: \quad (\exists y)\,(y > 10^{10} \wedge \Pi(y))$$

πράγμα που κάνει δυνατό να συμπεράνουμε ότι αν η p είναι αληθής τότε και η q είναι αληθής.

Ολόκληρη η μαθηματική λογική, τέλος, διασχίζεται από μια αντίθεση: την αντίθεση ανάμεσα στις *σημασιολογικές* έννοιες και στις *συντακτικές* έννοιες.

Οι πρώτες είναι όσες έχουν σχέση με τη σημασία, δηλαδή την αλήθεια ή το ψεύδος των προτάσεων, όπως τιμή αλήθειας, μοντέλο, εκτίμηση κλπ. Οι δεύτερες σχετίζονται με τη σύνταξη (τη συμβολική γραφή) των προτάσεων, τον μηχανικό τρόπο παραγωγής τους από άλλες, και τέτοιες είναι κυρίως οι έννοιες απόδειξη, αξίωμα, κανόνας παραγωγής κλπ. Τις περισσότερες φορές σε μια σημασιολογική έννοια αντιστοιχεί μια συντακτική και αντίστροφα με αποτέλεσμα να υπάρχουν δυο συμπληρωματικοί τρόποι αντιμετώπισης των προβλημάτων. Ο πρώτος, με κυρίαρχη την σημασιολογική έννοια «μοντέλο», λέγεται θεωρία μοντέλων ***(model theory)*** και ο άλλος, με κυρίαρχη τη συντακτική έννοια «απόδειξη», λέγεται θεωρία αποδείξεων ***(proof theory)***. Μερικά από τα πιο καίρια αποτελέσματα της σύγχρονης λογικής, όπως τα θεωρήματα πληρότητας και μη πληρότητας του ***Gödel*** αφορούν ακριβώς τη σχέση σημασιολογικών και αντίστοιχων συντακτικών εννοιών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1: Γλώσσα του Προτασιακού Λογισμού

Αν ήθελε να ξεκινήσει κανείς από εκεί περίπου που σταμάτησε ο Αριστοτέλης, και είχε μαθηματική παιδεία, το πρώτο που θα σκέφτονταν θα ήταν να εισάγει σύμβολα και να μετατρέψει τα σχήματα συλλογισμών σε συνδυασμούς συμβόλων.

Ήδη ο Αριστοτέλης είχε ξεκαθαρίσει τι εννοούσε λέγοντας «πρόταση». Στον προφορικό και γραπτό λόγο σχηματίζουμε με τις λέξεις και τους κανόνες του συντακτικού γλωσσικές οντότητες με αυτοτελές νόημα που λέγονται *φράσεις*. Οι φράσεις μπορεί να εκφράζουν ποικίλα πράγματα - ευχές, ερωτήσεις, διαπιστώσεις κλπ. Απ' τη σκοπιά της λογικής τα περισσότερα είδη φράσεων είναι αδιάφορα. Δεν ασχολείται π.χ. με φράσεις της μορφής «Τι καιρό άραγε θα κάνει αύριο;» ή «Σου εύχομαι χρόνια πολλά». Ασχολείται μόνο με φράσεις που αποφαίνονται για κάτι, δηλαδή που κάνουν διαπιστώσεις: «Αν πιάσω γυμνό το καλώδιο θα με χτυπήσει το ρεύμα». «Κάθε υλικό σώμα έχει βάρος». «2+3 = 6». Τις φράσεις αυτές τις λέμε *προτάσεις* και ασχολείται η λογική μαζί τους όχι επειδή την ενδιαφέρουν οι διαπιστώσεις τους, αλλά επειδή λόγω του χαρακτήρα τους δέχονται *τιμή αλήθειας*, δηλαδή μπορούν να χαρακτηριστούν αληθείς ή ψευδείς. (Ο Αριστοτέλης τις ονόμαζε «λόγο αποφαντικό»).

Ώστε προς αυτό το χώρο των αποφάνσεων πρέπει να στραφεί η προσπάθεια συμβολισμού κι όχι σ' ολόκληρο το χώρο της φυσικής μας γλώσσας. Αν, τώρα, για κάθε πρόταση που συναντούμε επιννοούμε κι ένα διαφορετικό σύμβολο, είναι φανερό ότι σε τίποτα δεν βελτιώνουμε την κατάσταση. Πρέπει να βρούμε ένα ελάχιστο σύνολο προτάσεων απ' τις οποίες συντίθενται οι υπόλοιπες καθώς και τους βασικούς τρόπους σύνθεσης.

Έτσι, παρατηρούμε ότι ορισμένες προτάσεις είναι ελάχιστες απ' την άποψη ότι δεν μπορούμε να τις διασπάσουμε σε απλούστερες υποπροτάσεις. Η πρόταση «κάθε υλικό σώμα έχει μάζα» είναι ελάχιστη, ενώ η πρόταση «αν πιάσω το καλώδιο θα με χτυπήσει το ρεύμα» αναλύε-

$\rightarrow$: λέγεται *συνεπαγωγή* και σημαίνει «αν - τότε»

$\leftrightarrow$: » *ισοδυναμία* » «αν και μόνον αν»

Οι σύνδεσμοι $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ λέγονται *διμελείς* ενώ ο $\urcorner$ *μονομελής*.

Κάθε πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων της L λέγεται *έκφραση*. Π.χ. $)p_1 \rightarrow (\; p_2 \; \wedge \; , \rightarrow p_{10} \; \vee \; \urcorner \;)$. Οι *προτάσεις της* L είναι ένα υποσύνολο των εκφράσεων που κατασκευάζεται με ορισμένους *κανόνες σχηματισμού*. Αυτοί δίνονται στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.2. i) Τα σύμβολα p_i , $i \in N$, *είναι προτάσεις.*

ii) Αν οι φ, ψ *είναι προτάσεις, τότε και οι εκφράσεις* $(\varphi) \wedge (\psi)$, $(\varphi) \vee (\psi)$, $(\varphi) \rightarrow (\psi)$, $(\varphi) \leftrightarrow (\psi)$ *είναι προτάσεις.*

iii) Αν η φ *είναι πρόταση, τότε και η έκφραση* $\urcorner (\varphi)$ *είναι πρόταση.*

iv) Δεν υπάρχουν άλλες προτάσεις πέρα απ' αυτές που δίνουν οι κανόνες σχηματισμού (i) – (iii). ▲

Θα συμβολίζουμε με P το σύνολο όλων των προτάσεων της L και με P_0 το σύνολο των ατόμων της L, δηλ. $P_0 = \{p_1 , p_2 , \ldots \}$.

Παρατηρήσεις. 1) Ο ορισμός 1.2. αφορά αντικείμενα της γλώσσας L, άρα είναι διατυπωμένος στη *μεταγλώσσα*. Οι σύνδεσμοι που περιλάβαμε στη γλώσσα είναι φυσικό να χρησιμοποιούνται και στη μεταγλώσσα, συνεπώς πρέπει, όπως ειπώθηκε στην εισαγωγή να διακρίνουμε αυτές τις δυο χρήσεις με σαφήνεια. Λόγου χάρη τον σύνδεσμο «και» που στη γλώσσα παραστήσαμε με το σύμβολο $\wedge$, στη μεταγλώσσα θα γράφουμε απλώς «και», ή με κάποιο άλλο τρόπο της φυσικής γλώσσας που υποκαθιστά το «και». (Π.χ. στο *(ii)* του ορισμού 1.2 γράφουμε: «τα $(\varphi) \vee (\psi)$, ... είναι προτάσεις», εννοώντας «τα $(\varphi) \wedge (\psi)$ *και* $(\varphi) \vee (\psi)$ *και* ... *είναι προτάσεις»). Το ίδιο θα γίνεται με όλους τους συνδέσμους εκτός απ' τους συνδέσμους «αν -τότε», «αν και μόνον αν» που για οικονομία στη διατύπωση θα παρίστανται αρκετές φορές στη μεταγλώσσα με τα σύμβολα* $\Rightarrow$ και $\Leftrightarrow$ αντίστοιχα. Έτσι, λόγου χάρη είναι τελείως σαφές το νόημα της έκφρασης:

$$(\varphi \in P \text{ και } \psi \in P) \Rightarrow \big((\varphi) \rightarrow (\psi) \in P\big) \text{ και } \big((\varphi) \wedge (\psi) \in P\big).$$

2) Οι παρενθέσεις χρησιμεύουν απλώς για την τήρηση της προτεραιότητας κατά την εφαρμογή των συνδέσμων[1]. Π.χ. οι προτάσεις

---

1) Προτεραιότητα εδώ σημαίνει προτεραιότητα στην κατασκευή και όχι στην ανάγνωση των προτάσεων. Η κατασκευή γίνεται από μέσα προς τα έξω ενώ η ανάγνωση απ' έξω προς τα μέσα.

$((p_1) \to (p_2)) \wedge (p_3)$ και $(p_1) \to ((p_2) \wedge (p_3))$ περιέχουν τα ίδια άτομα και τους ίδιους συνδέσμους στην ίδια διάταξη, αλλά διαφέρουν στη σειρά εφαρμογής των συνδέσμων. Μπορούμε να καθορίσουμε την προτεραιότητα με τους εξής απλούς κανόνες:

α) Ο $\neg$ έχει προτεραιότητα έναντι όλων των άλλων.

β) Οι $\to$, $\to$ έχουν προτεραιότητα έναντι των $\wedge$, $\vee$

γ) Οι $\to$, $\to$ και $\wedge$, $\vee$ έχουν ίση προτεραιότητα μεταξύ τους.

Έτσι, συμφωνούμε να γράφουμε:

p_i	αντί	(p_i)
$\neg \varphi \vee \psi$	»	$(\neg \varphi) \vee \psi$
$\varphi \to \psi \wedge \sigma$	»	$\varphi \to (\psi \wedge \sigma)$ κλπ.

3) Τα σύμβολα $\varphi, \psi, \ldots$ που χρησιμοποιούμε για να συμβολίσουμε προτάσεις τυχούσες *δεν* είναι σύμβολα της L , φυσικά, αλλά της μεταγλώσσας και λέγονται *προτασιακές μεταβλητές*. Προτασιακές μεταβλητές $p, q, \ldots$ θα χρησιμοποιούμε και για τα άτομα, αντί να γράφουμε p_1 , p_9 κλπ.

4) Αν E είναι το σύνολο των εκφράσεων της L, *οι σύνδεσμοι* $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ μπορούν να θεωρηθούν *διμελείς πράξεις* μέσα στο E και ο σύνδεσμος $\neg$ *μονομελής πράξη*.

Αν $\square$ είναι τυχών διμελής σύνδεσμος (δηλ. $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$), ο $\square$ είναι μια πράξη $\square : E \times E \to E$, που στέλνει το ζεύγος των εκφράσεων $<\varepsilon, \delta>$ στην έκφραση $(\varepsilon) \square (\delta)$. Όμοια ο $\neg$ είναι η πράξη $\neg : E \to E$ που στέλνει την έκφραση ε στην έκφραση $\neg (\varepsilon)$.

Θεωρώντας τους συνδέσμους πράξεις, το σύνολο P είναι το *ελάχιστο, προφανώς, σύνολο που περιέχει το P_0 και είναι κλειστό ως προς τις πράξεις $\square$ και $\neg$*.

5) Ο ορισμός 1.2 δίνει έναν αλγόριθμο με τον οποίο μπορούμε να κρίνουμε (σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων) αν μια έκφραση είναι ή όχι πρόταση. Η διαδικασία του ελέγχου είναι η εξής: Δίνεται η έκφραση ε. Εξετάζουμε αν είναι της μορφής $\varepsilon = p_i$ ή $\varepsilon = (\varphi_1) \square (\varphi_2)$ ή $\varepsilon = \neg (\varphi)$. Αν όχι η ε δεν είναι πρόταση. Αν ναι στις δυο τελευταίες περιπτώσεις κάνουμε το ίδιο με τις φ_1 , φ_2 ή φ. ▲

Η τελευταία παρατήρηση προκύπτει απ' το γεγονός ότι ο ορισμός 1.2 είναι *επαγωγικός (inductive)*, δηλαδή γίνεται κατά βήματα και το κάθε βήμα στηρίζεται στα προηγούμενα. Ανάλογος είναι ο ορισμός των φυσικών αριθμών. Εκεί, όπως είναι γνωστό, έχουμε ένα πρώτο στοιχείο, το μηδέν, και μια πράξη διαδοχής $s(n) = n+1$ που στέλνει κάθε αριθμό στον επόμενό του. *Το N, τότε, ορίζεται σαν το ελάχιστο σύνολο που περιέχει το μηδέν και είναι κλειστό ως προς την πράξη s.*

Την αναλογία σχηματικά τη βλέπουμε ως εξής:

φυσικοί αριθμοί	*προτάσεις*
$0 \in N$	$p_1, p_2, \ldots \in P$
$n \in N \Rightarrow n+1 \in N$	$\varphi, \psi \in P \nearrow (\varphi) \square (\psi) \in P$ $\varphi, \psi \in P \searrow \neg(\varphi) \in P$

Στον ορισμό αυτό του N στηρίζονται οι *επαγωγικές αποδείξεις* και οι *επαγωγικοί ή αναδρομικοί ορισμοί* στα πλαίσια των φυσικών αριθμών. Ας θυμηθούμε με συντομία τι σημαίνουν αυτά για να τα μεταφέρουμε κατόπιν στην περιοχή των προτάσεων.

Επαγωγική Απόδειξη στο N: Πρόκειται για τη γνωστή μέθοδο της πλήρους επαγωγής. Αν για την πρόταση $A(n)$ ισχύουν:

i) $A(0)$ αληθής
ii) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$,

τότε η $A(n)$ είναι αληθής για κάθε φυσικό αριθμό.

Επαγωγικός ή Αναδρομικός ορισμός στο N: Το N παράγεται από το μηδέν και την πράξη s. Αν λοιπόν θέλουμε να ορίσουμε για κάθε n ένα αντικείμενο $f(n)$, δηλαδή μια συνάρτηση $f: N \to V$, όπου V τυχόν σύνολο, αρκεί:

i) να ορίσουμε την f στο 0 και
ii) να διαθέτουμε έναν κανόνα που να δίνει την τιμή της f στο $s(n)$ σαν συνάρτηση της τιμής της f στο n.

Τα προηγούμενα διατυπώνονται, αυστηρά, ως εξής:
Αν V είναι τυχόν σύνολο, $a \in V$ και $G: V \to V$ τυχούσα συνάρτηση, τότε υπάρχει (μοναδική) συνάρτηση $f: N \to V$ τέτοια ώστε $f(0) = a$ και $f(s(n)) = G(f(n))$.

Παράδειγμα. Έστω V το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων με παράγωγο οποιασδήποτε τάξης και $G: V \to V$ η απεικόνιση που στέλνει κάθε συνάρτηση h στην παραγωγό της h'. Τότε για κάθε h ορίζουμε τη n-οστή παράγωγο (δηλ. τη συνάρτηση $f(n) = h^{(n)}$) ως εξής:

$$f(0) = h^{(0)} = h \text{ και } f(n+1) = G(f(n)) = G(h^{(n)}) = h^{(n+1)}. \quad \blacktriangle$$

Με την αναλογία στο N και στο P που περιγράψαμε πιο πριν, μπορούμε να μεταφέρουμε τις αρχές αυτές (πρόκειται για απλά θεωρήματα που αποδεικνύονται) στο P.

Θεώρημα 1.3. (Αρχή της επαγωγικής απόδειξης στο P)

Έστω $A(\varphi)$ μια ιδιότητα της μεταγλώσσας που αφορά προτάσεις της L. Αν

i) $A(p_i)$ *ισχύει για κάθε* $i = 1, 2, \ldots$

ii) $A(\varphi)$ *και* $A(\psi) \Rightarrow A(\varphi \,\square\, \psi)$

iii) $A(\varphi) \Rightarrow A(\urcorner \varphi)$,

τότε η $A(\varphi)$ *ισχύει για κάθε* $\varphi \in P$.

Απόδ. Έστω Σ το σύνολο των προτάσεων που ικανοποιούν την A, δηλ. $\Sigma = \{\varphi : A(\varphi)\}$. Αφού ισχύουν τα *(i)* - *(iii)* έπεται ότι το Σ περιέχει τα p_i και είναι κλειστό ως προς $\square$ και $\urcorner$. Αφού το P είναι εξ ορισμού το ελάχιστο σύνολο μ' αυτές τις ιδιότητες, θα πρέπει $P \subsetneq \Sigma$ και, συνεπώς, $\varphi \in P \Rightarrow A(\varphi)$. ▲

Θεώρημα 1.4. (Αρχή του Επαγωγικού ορισμού στο P)

Έστω V τυχόν σύνολο και $f : P_0 \rightarrow V$ τυχούσα απεικόνιση. Αν για κάθε διμελή σύνδεσμο $\square$ καθώς και για τον σύνδεσμο $\urcorner$ υπάρχουν απεικονίσεις $G_\square : V \times V \rightarrow V$, $G_\urcorner : V \rightarrow V$ αντίστοιχα, τότε υπάρχει (μοναδική) συνάρτηση $\bar{f} : P \rightarrow V$ τέτοια ώστε:

α) $\bar{f}(p_i) = f(p_i)$ *για κάθε* $p_i \in P_0$

β) $\bar{f}(\varphi \,\square\, \psi) = G_\square(\bar{f}(\varphi), \bar{f}(\psi))$

γ) $\bar{f}(\urcorner \varphi) = G_\urcorner(\bar{f}(\varphi))$.

Απόδ. Αφού οι $G_\square$, $G_\urcorner$ είναι συναρτήσεις, προφανώς κάθε σχέση g που ικανοποιεί τις συνθήκες α) - γ) είναι συνάρτηση. Έστω $dom(g)$ το πεδίο ορισμού μιάς τέτοιας συνάρτησης. Από τις α) - γ) προκύπτει ότι

$$P_0 \subsetneq dom(g), \quad \varphi, \psi \in dom(g) \Rightarrow \varphi \,\square\, \psi \in dom(g)$$

και $$\varphi \in dom(g) \Rightarrow \urcorner \varphi \in dom(g).$$

Από το 1.3 έπεται ότι $P \subsetneq dom(g)$. Άρα κάθε συνάρτηση που πληροί τις