

ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥ Γ. ΤΖΙΟΛΑ

Πολιτικού Μηχανικού

# ΣΙΔΗΡΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

Θεωρία - Μεθοδολογία - Εφαρμογές

## ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Η Θεωρία 2ης Τάξης  
Κρίσιμα φορτία  
Πλαστικότητα

## ΜΕΛΕΤΕΣ

Υπόστεγα - Πλαίσια  
Στέγες - Δοκοί  
Διατομές - ηλώσεις - συγκολλήσεις

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πιν. ΔΕΙΚΤΕΣ ΑΚΑΜΨΙΑΣ	Σελ. vii
Πιν. ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΩΝ	viii

### ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΣΙΔΗΡΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

A. ΚΡΙΣΙΜΟ ΦΟΡΤΙΟ ΚΑΤΑ EULER	1
Ευστάθεια φορέα κατά Euler	3
B. Η ΘΕΩΡΙΑ 2ης ΤΑΞΗΣ	
Διαφορικές εξισώσεις δοκού	5
Αμφιέρειστη δοκός φορτισμένη με μοναχικό φορτίο R και αξονικό P	7
Αμφιέρειστη δοκός με ομοιόμορφο φορτίο q και αξονικό P	8
Αμφιέρειστη δοκός με ροπές στα σημεία στήριξης και αξονική P	9
Γ. ΚΡΙΣΙΜΟ ΦΟΡΤΙΟ ΓΙΑ ΑΞΟΝΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ	11
Δ. ΚΡΙΣΙΜΑ ΦΟΡΤΙΑ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΑΛΛΩΝ ΥΠΕΡΣΤΑΤΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ 2ης ΤΑΞΗΣ	13
E. ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΑΠΛΟΥ ΚΙΝΗΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ	16
ΣΤ. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ 2ης ΤΑΞΗΣ	
Η τυχαία δοκός	19
Η αρθρωτή δοκός	20
Καταναγκασμοί	20
Z. Η ΓΕΝΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ (Παγιώσεις - Κινηματική αλυσίδα)	22
H. ΠΑΓΙΑ ΚΑΙ ΚΙΝΗΤΑ ΠΛΑΙΣΙΑ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ 2ης ΤΑΞΗΣ	
Πάγια και υπερπάγια πλαίσια	25
Κινητά πλαίσια	26
Οριζόντια κινητά πλαίσια	26
Κατακόρυφα κινητά πλαίσια	28
Μεθοδολογία επίλυσης πλαισιωτών φορέων	29
Θ. Η ΣΥΝΕΧΗΣ ΔΟΚΟΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ 2ης ΤΑΞΗΣ	31
I. ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΔΟΚΟΥ ΜΕ ΚΑΤΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΣΤΑΘΕΡΗ ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ	33

Κ. ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΤΕΜΝΟΥΣΑΣ ΔΥΝΑΜΗΣ ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΟΥ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ	35
Λ. ΚΡΙΣΙΜΑ ΦΟΡΤΙΑ ΜΕ ΤΗΝ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΜΕΘΟΔΟ TIMOSHENKO	38
Μ. ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΡΑΒΔΩΝ ΠΟΛΥΜΕΛΩΝ ΔΙΑΤΟΜΩΝ	42

### **ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ**

Α. ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ	50
Β. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΦΟΡΤΙΟΥ ΠΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	51

### **ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

<b>Ασκήσεις θεωρίας ευστάθειας</b> (Επίλυση φορέων - Δυναμικό - Κρίσιμα φορτία)	53–156
<b>Ασκήσεις θεωρίας πλαστικότητας</b>	157–170
<b>Ασκήσεις Στρεπτοκαμπτικού λυγισμού</b>	171–178
<b>Ασκήσεις Υπόστεγα - Στέγες - Πλαίσια - Συνεχείς Δοκοί</b> Υπολογισμός κατασκευαστικών στοιχείων (Διατομές - ηλώσεις - συγκολλήσεις - κόμβοι - στηρίξεις - συνδέσεις)	178–293

## ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΣΙΔΗΡΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

### A. Η ΕΥΣΤΑΘΗΣ ΚΑΙ ΑΣΤΑΘΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

1. Η κατάσταση της ισορροπίας που έχει σαν χαρακτηριστικό ότι μια τυχαία παραμόρφωση εξαφανίζεται όταν πάψει να ενεργεί το αίτιο που την προκαλεί ονομάζεται ευσταθής ισορροπία.

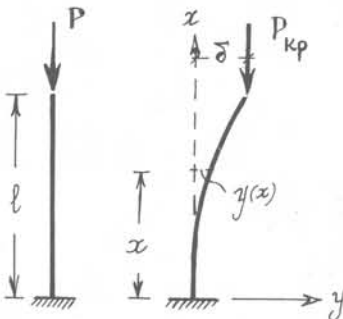
2. Σ'ενα ιδεατό πρόβλημα, με απόλυτα ευθυγράμμο άξονα, που δέχεται αξονικό φορτίο  $P$ , εφαρμοσμένο τελείως κεντρικά :

- όταν το φορτίο  $P$  είναι αρκετά μικρό, η ράβδος υφίσταται μόνο αξονική θλίψη και ο άξονας-της παραμένει ευθύγραμμος.

- όταν το φορτίο  $P$  αυξηθεί ως την τιμή  $P = P_{\text{κρισ}}$  (φορτίο Euler) και όταν μιά οριζόντια δύναμη προκαλέσει μικρή μετακίνηση του άκρου κατά  $\delta$ , τότε η παραμόρφωση του άξονα της ράβδου ΔΕΝ εξαφανίζεται αν πάψει να ενεργεί η αιτία που την προκάλεσε (ο άξονας της ράβδου θα παραμείνει παραμορφωμένος). Αν δε  $P > P_{\text{κρισ}}$  η παραμόρφωση θα συνεχιστεί μέχρι κατάρρευσης. Η ισορροπία αυτή ονομάζεται ασταθής.

### B. ΤΟ ΚΡΙΣΙΜΟ ΦΟΡΤΙΟ ΚΑΤΑ EULER

1. Το  $P_{\text{κρισ}}$  υπολογίζεται από την εξίσωση της ελαστικής γραμμής με την βοήθεια των οριακών συνθηκών:



Ροπή κατά μήκος του άξονα:

$$M(x) = -P \cdot (\delta - y)$$

Από την εξίσωση της ελαστικής γραμμής:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = P \cdot (\delta - y)$$

Εισάγουμε τον συμβολισμό :  $k^2 = \frac{P}{EI}$

Προκύπτει έτσι η διαφορική εξίσωση :  $\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = k^2 \delta$

αυτή έχει την γενική λύση :  $y = A \cdot \cos kx + B \cdot \sin kx + \delta$

Οι οριακές συνθήκες δίνουν :

$$\text{για } x=0 \rightarrow y=0 \text{ \& } \frac{dy}{dx} = 0, \quad y = \delta(1 - \cos kx)$$

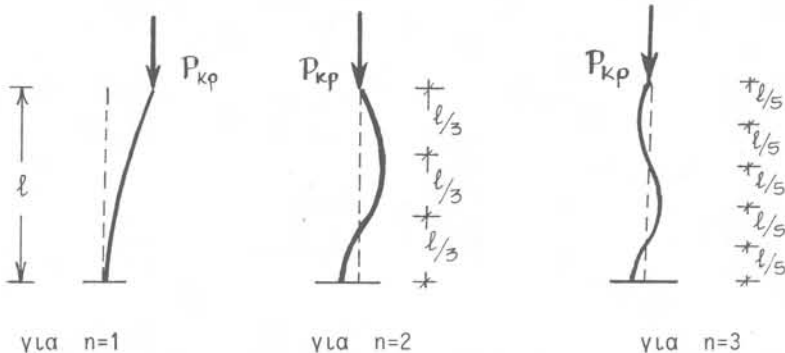
$$\text{για } x=l \rightarrow y=\delta \quad \text{όταν} \quad \delta \cos kl = 0 \quad \text{η οποία για } P = P_{\text{κρ}}$$

δηλ.  $\delta \neq 0$ , για να έχει λύση πρέπει και αρκεί  $\cos kl = 0$  \*οι λύσεις-της είναι άπειρες :  $kl = (2n-1) \frac{\pi}{2}$  (  $n=1,2,3,\dots$  )

Πρακτική σημασία έχει η μικρότερη τιμή\*

$$\text{για } n = 1, \quad kl = l \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{τότε} \quad P_{\text{κρ}} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

2. Για κάθε τιμή του  $n$ , η ελαστική γραμμή θα έχει τη μορφή:



Στην εξίσωση  $y = \delta(1 - \cos kx)$

το  $kx$  μεταβάλλεται

$$\text{από } 0 \div \frac{\pi}{2}$$

το  $kx$  μεταβάλλεται

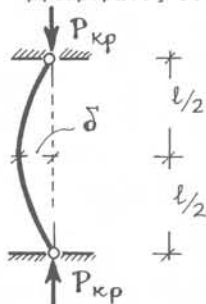
$$\text{από } 0 \div 3 \frac{\pi}{2}$$

το  $kx$  μεταβάλλεται

$$\text{από } 0 \div 5 \frac{\pi}{2}$$

3. Για άλλες συνθήκες στήριξης εύκολα προκύπτει με βάση τη μορφή λυγισμού του προβόλου:

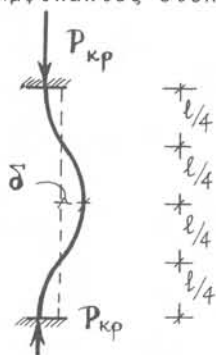
α. Αμφιαρθρωτός στύλος : (θεμελιώδης λυγισμός)



$$P_{\text{κρισ}} = \frac{\pi^2 EI}{4\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Ο άξονας του στύλου αποτελείται από δύο τμήματα ίδια μ'αυτά του προηγούμενου προβόλου.

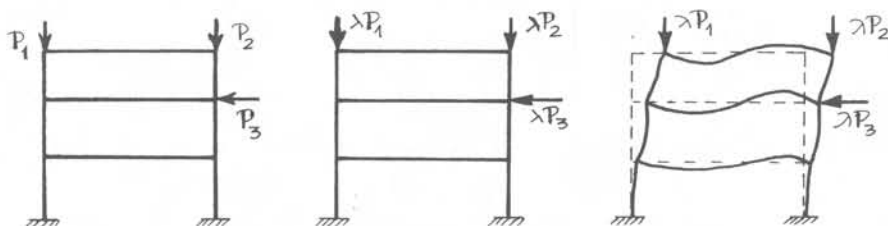
β. Αμφίπακτος στύλος:



$$P_{\text{κρισ}} = \frac{\pi^2 EI}{4\left(\frac{l}{4}\right)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

Ο άξονας είναι το 4-πλάσιο του ελεύθερου προβόλου.

### ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΦΟΡΕΑ ΚΑΤΑ EULER



1. Κρίσιμη φόρτιση  $\lambda_{\text{κρισ}} P$  είναι η φόρτιση κατά την οποία η θέση ισορροπίας του φορέα δεν είναι μονοσήμαντα καθορισμένη και η μετάβαση από τη μία θέση ισορροπίας στην άλλη γίνεται ΧΩΡΙΣ οποιαδήποτε μεταβολή των εξωτερικών φορτίων.

Η συνθήκη ισορροπίας του φορέα συμβολίζεται:

$$\underline{P} = \underline{K} \cdot \underline{d}$$

όπου  $\underline{P}$  είναι η φόρτιση και  $\underline{d}$  η μετατόπιση.

Το μητρώο  $\underline{K}$  εξαρτάται από τη γεωμετρία του φορέα και τις αξονικές δυνάμεις  $\lambda P_j$ .

2. Μία μεταβολή  $\delta \underline{P}$  της φόρτισης προκαλεί τη μεταβολή  $\delta \underline{d}$  των μετατοπίσεων και η σχέση γίνεται:

$$\delta \underline{P} = \underline{k}(\lambda) \delta \underline{d}$$

Η κρίσιμη φόρτιση προκύπτει για  $\delta \underline{P} = 0 \rightarrow \delta \underline{d} \neq 0$

Για να έχει η εξίσωση  $\underline{k}(\lambda_{\text{κρ}}) \delta \underline{d} = 0$  λύση (με  $\delta \underline{d} \neq 0$ ) πρέπει να μηδενίζεται η ορίζουσα

$$|\underline{k}(\lambda_{\text{κρ}})| = 0$$

3. Οι λύσεις της εξίσωσης αντιστοιχούν σε διάφορες μορφές παραμόρφωσης του φορέα κατά τη στιγμή της κατάρρευσης.

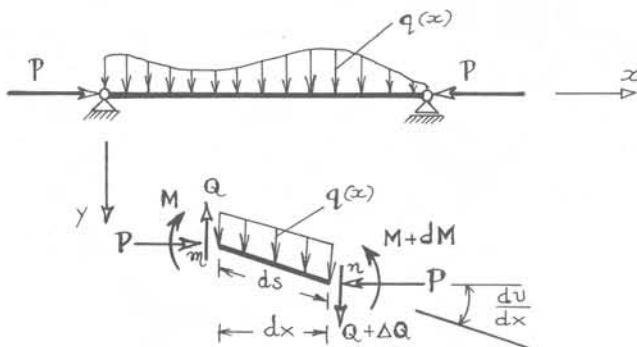
Στην πράξη ενδιαφέρον παρουσιάζει μόνο η μικρότερη τιμή του  $\lambda$ , που μηδενίζει την ορίζουσα.

Η λύση προκύπτει βασικά με δοκιμές. Οι δοκιμές αρχίζουν από μια σχετικά μικρή τιμή του  $\lambda$  και αυξάνουμε την τιμή του σταθερά, μέχρι να μηδενισθεί η ορίζουσα για πρώτη φορά.

## Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ 2ης ΤΑΞΗΣ

### A. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΟΚΟΥ

- A.1. Για την εύρεση των διαφορικών εξισώσεων δοκού με την θεωρία 2ης τάξης θα εξετάσουμε την ισορροπία του απειροστού στοιχείου μιας ευθύγραμμης δοκού με εγκάρσιο φορτίο  $q(x)$  και αξονικό  $P$ . Οι συνθήκες ισορροπίας λαμβάνονται ως προς τον παραμορφωμένο άξονα του φορέα.



Ισορροπία στον άξονα  $Y$  :

$$-Q + q(x)dx + Q + dQ = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dx} = -q(x) \quad (1)$$

Ροπές στο σημείο  $m$  :

$$-M + (M+dM) - q(x) \frac{dx}{2} - (Q+dQ)dx - P \frac{du}{dx} dx = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Q = \frac{dM}{dx} - P \frac{du}{dx} \quad (2)$$

Η εξίσωση της ελαστικής γραμμής:

$$EJ(x) \frac{d^2u}{dx^2} = -M$$

Οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν:



για ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗ ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ :

$$\frac{d}{dx} (EI(x) \frac{d^2u}{dx^2}) + P \frac{du}{dx} = -Q$$

$$\frac{d^2}{dx^2} (EI(x) \frac{d^2u}{dx^2}) + P \frac{d^2u}{dx^2} = +q(x)$$

για ΣΤΑΘΕΡΗ ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ :

$$EI \frac{d^3u}{dx^3} + P \frac{du}{dx} = -Q$$

$$EI \frac{d^4u}{dx^4} + P \frac{d^2u}{dx^2} = +q(x)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι οι διαφορικές εξισώσεις παραμόρφωσης της δοκού λόγω ΚΑΜΨΗΣ.

Για  $P=0$  οι εξισώσεις μεταπίπτουν στις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης.

A.2. Από τις (1) και (2) με ολοκλήρωση ως προς  $x$  προκύπτει η εξίσωση της ροπής για την δοκό κατά μήκος του άξονα  $x$ :

$$M = - \int_0^x \int_0^x q(x) dx dx \pm P \int_0^x \frac{du}{dx} dx = M^0 \pm Pu$$

όπου το  $+$  είναι για  $P$  θλιπτική

το  $-$  " για  $P$  εφελκυστική

και  $M^0$  είναι η ροπή της δοκού στη θεωρία 1ης τάξης.

A.3. Η θέση  $u$  της ελαστικής γραμμής προκύπτει σαν γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης 2ης τάξης :

$$\frac{d^2u}{dx^2} \pm k^2u + \varphi(x) = 0 \quad (3)$$

α) για θλιπτική  $P$  :

$$u = c_1 \cdot \cos kx + c_2 \cdot \sin kx - \frac{1}{k^2} \varphi(x) + \frac{1}{k^4} \cdot \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{1}{k^6} \cdot \frac{d^4 \varphi}{dx^4}$$

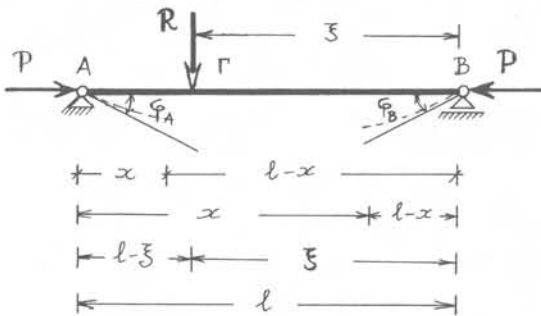
β) για εφελκυστική  $P$  :

$$u = c_1 \cdot \cosh kx + c_2 \cdot \sinh kx + \frac{1}{k^2} \varphi(x) + \frac{1}{k^4} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{1}{k^6} \frac{d^4 \varphi}{dx^4}$$

$$\text{όπου } k^2 = \frac{P}{EJ} \quad \text{και} \quad \varphi(x) = \frac{M^0}{EJ}$$

Οι σταθερές  $c_1$  και  $c_2$  προσδιορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες του φορέα.

## B. ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗ ΔΟΚΟΣ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΗ ΜΕ ΜΟΝΑΧΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ $R$ ΚΑΙ ΑΞΟΝΙΚΟ $P$



B.1. Με τη χρήση της διαφορικής εξίσωσης (3), τις συνθήκες στήριξης της δοκού και τις συνθήκες συνέχειας της ελαστικής γραμμής (βέλος, κλίση) στο  $\Gamma$  προκύπτει:

Βέλος κάμψης:

$$\text{Όταν } 0 \leq x \leq l-\xi : \quad u = \frac{R \cdot \sin k\xi}{Pk \cdot \sin kl} \cdot \sin kx - \frac{Q\xi}{P} \cdot \frac{x}{l}$$

$$\text{Όταν } l-\xi \leq x \leq l : \quad u = \frac{R \cdot \sin k(l-\xi)}{Pk \cdot \sin kl} \cdot \sin k(l-x) - \frac{R(l-\xi)}{P} \cdot \frac{l-x}{l}$$

Μέγιστο βέλος κάμψης :

$$u_{\max} = \frac{Rl^3}{48EJ} \cdot x(\varepsilon)$$

Ο όρος  $\frac{Rl^3}{48EJ}$  εκφράζει το βέλος κάμψης κατά τη θεωρία πρώτης τάξης.

Γωνίες στροφής :

Οι γωνίες στροφής σε τυχαία θέση δίνονται από τις πρώτες παραγώγους των κλάδων της ελαστικής γραμμής της δοκού.

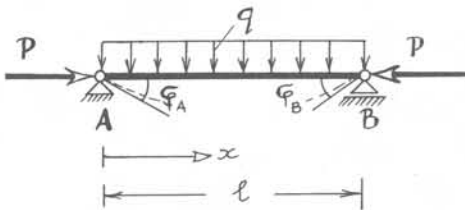
$$\begin{aligned} \text{Οι γωνίες στροφής στις} \\ \text{στηρίξεις A,B είναι :} \end{aligned} \quad \varphi_A = \varphi_B = \frac{Rl^2}{16EJ} \cdot \lambda(\varepsilon)$$

B.2. ΚΡΙΣΙΜΟ ΦΟΡΤΙΟ :  $P_{\text{κρ}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$  όταν  $\varepsilon = \pi = l \sqrt{\frac{P_{\text{κρ}}}{EJ}}$

B.3. Αν υπολογίσουμε την  $\frac{d^2 u}{dx^2}$  βρίσκουμε τη μέγιστη ροπή:

$$M_{\text{max}} = \frac{R \cdot l}{4} \cdot u(\varepsilon)$$

**Γ. ΑΜΦΙΠΡΕΙΣΤΗ ΔΟΚΟΣ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΦΟΡΤΙΟ q ΚΑΙ ΑΞΟΝΙΚΟ P**



1. Από τις συνοριακές συνθήκες και τη λύση της διαφορικής εξίσωσης προκύπτει:

Βέλος κάμψης :

$$u = \frac{ql^4}{EJ\varepsilon^4} \cdot \left[ \frac{\cos\left(\frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon \cdot \frac{x}{l}\right)}{\cos \frac{\varepsilon}{2}} - 1 \right] - \frac{ql^2}{2EJ\varepsilon^2} \cdot x(1-x)$$

Μέγιστο βέλος κάμψης :

$$u_{\max} = \frac{5q l^4}{384EJ} \cdot \eta(\varepsilon) \quad \text{όπου} \quad \eta(\varepsilon) = \frac{192 \left( \frac{2}{\cos \frac{\varepsilon}{2}} - 2 - \frac{\varepsilon^2}{4} \right)}{5 \cdot \varepsilon^4}$$

Ο όρος  $\frac{5q l^4}{384EJ}$  είναι η βύθιση στη θεωρία 1ης τάξης.

Γωνίες στροφής :

$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{q l^3}{24EJ} \cdot \chi(\varepsilon) \quad \text{όπου} \quad \chi(\varepsilon) = \frac{12\{2(1-\cos\varepsilon) - \varepsilon \cdot \sin\varepsilon\}}{\varepsilon^3 \cdot \sin\varepsilon}$$

2. ΚΡΙΣΙΜΟ ΦΟΡΤΙΟ :

$$P_{\text{κρ}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad \text{όταν} \quad \varepsilon = \pi$$

3. Ροπή κάμψης :

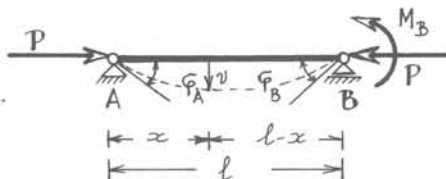
Σέ κάθε σημείο της δοκού η ροπή κάμψης υπολογίζεται από τόν τύπο

$$EJ(x) \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} = -M$$

$$\text{Η μέγιστη τιμή-της :} \quad M_{\max} = \frac{q l^2}{8} \cdot \lambda(\varepsilon) \quad \text{όπου} \quad \lambda(\varepsilon) = \frac{8}{\varepsilon^2} \left( \frac{1}{\cos \frac{\varepsilon}{2}} - 1 \right)$$

#### Δ. ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗ ΔΟΚΟΣ ΜΕ ΡΟΠΕΣ ΣΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΣΤΗΡΙΞΗΣ ΚΑΙ ΑΞΟΝΙΚΗ Ρ

α.



1. Βέλος κάμψης :

$$\text{Για θλιπτική } P : \quad u = \frac{M_B}{P} \left( \frac{\sin kx}{\sin \varepsilon} - \frac{x}{l} \right)$$

Για εφελκυστική  $P$  : 
$$u = \frac{M_B}{P} \left( -\frac{\sinh kx}{\sinh \epsilon} + \frac{x}{l} \right)$$

2. Γωνίες στροφής :

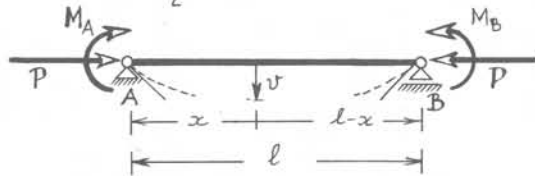
$$\varphi_A = \left( \frac{du}{dx} \right)_{x=0} = \frac{M_B \cdot l}{6EJ} \cdot (6\beta) \quad \text{όπου} \quad \beta = \frac{1}{\epsilon^2} (\frac{\epsilon}{\sinh \epsilon} - 1)$$

$$\varphi_B = \left( \frac{du}{dx} \right)_{x=l} = \frac{M_B \cdot l}{3EJ} \cdot (3\alpha) \quad \text{όπου} \quad \alpha = \frac{\sinh \epsilon - \epsilon \cdot \cosh \epsilon}{\epsilon^2 \cdot \sinh \epsilon}$$

3. Ροπή κάμψης στο μέσο :

$$M_{\text{μέσον}} = \frac{M_B}{\cos \frac{\epsilon}{2}}$$

β.



1. Βέλος κάμψης :

$$u = \frac{M_B}{P} \left( \frac{\sinh kx}{\sinh kl} - \frac{x}{l} \right) + \frac{M_A}{P} \left( \frac{\sinh k(l-x)}{\sinh kl} - \frac{l-x}{l} \right)$$

2. Γωνίες στροφής :

$$\varphi_A = \frac{M_A \cdot l}{3EJ} (3\alpha) + \frac{M_B \cdot l}{6EJ} (6\beta)$$

$$\varphi_B = \frac{M_B \cdot l}{3EJ} (3\alpha) + \frac{M_A \cdot l}{6EJ} (6\beta)$$

όπου  $\alpha$  και  $\beta$  όπως σημειώθηκαν αμέσως παραπάνω.

3. Στην περίπτωση όπου  $M_A = M_B = M_0$

Στο μέσον της δοκού :

$$u_{\max} = \frac{M_0 \cdot l^2}{8EJ} \cdot \lambda(\epsilon) \quad \text{όπου} \quad \lambda(\epsilon) = \frac{8(1 - \cos \frac{\epsilon}{2})}{\epsilon^2 \cos \frac{\epsilon}{2}}$$

και

$$M_{\max} = \frac{M_0}{\cos \frac{\epsilon}{2}}$$