ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥ Γ. ΤΖΙΟΛΑ
Πολιτικού Μηχανικού

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΤΟΧΗΣ ΥΛΙΚΩΝ

ΚΑΙ

ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΜΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

Θεωρία - Μεθοδολογία
160 Λυμένες Ασκήσεις

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό εκδόθηκε με γνώμονα την κάλυψη των αναγκών των φοιτητών των Πολυτεχνικών Σχολών και την αντιμετώπιση μιας σειράς προβλημάτων Αντοχής Υλικών στην πράξη.

Η αναβάθμιση της ποιότητας του μαθήματος της Μηχανικής των Παραμορφωσίμων Σωμάτων και Αντοχής Υλικών στις περισσότερες Πολυτεχνικές Σχολές αλλά και οι αυξημένες απαιτήσεις Θεωρητικών και Τεχνικών γνώσεων στις σύγχρονες κατασκευές οδήγησε στην κάλυψη όλων των δυνατών περιπτώσεων για την προετοιμασία του μηχανικού στον υπολογισμό κατασκευών ή στοιχείων μηχανών.

Σε κάθε κεφάλαιο αναπτύσσονται συνοπτικά τα κυριότερα σημεία της θεωρίας με ιδιαίτερη προσοχή στις εξισώσεις των διάφορων μεγεθών και τις σχέσεις μεταξύ τους, ενώ ταυτόχρονα δίνεται και η ανάλογη μεθοδολογία εργασίας που ακολουθείται συνήθως στις εφαρμογές.

Στις ασκήσεις δίνονται με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη λεπτομέρεια και συνεχείς αναφορές στη σύνοψη της θεωρίας, εφαρμογές που να καλύπτουν όλο το εύρος των θεμάτων που θίγονται σε κάθε Κεφάλαιο.

Στο πρώτο Κεφάλαιο παρατίθενται τα βασικά στοιχεία στη θεωρία των τανυστών που χρησιμοποιούνται κατά κόρο στην ανάλυση της θεωρίας και στις θεωρητικές εφαρμογές όλων των κεφαλαίων καθώς επίσης και η αναλυτική παρουσίαση του Κέντρου Βάρους και των Ροπών Αδράνειας διατομών με ευρεία χρήση και σπουδαιότητα, στα Κεφάλαια Εκτο - Εβδομο - Ογδοο. Για το λόγο αυτό ο αναγνώστης θα πρέπει να δώσει ιδιαίτερη προσοχή στις αναφορές του Κεφαλαίου αυτού που μαζί με το Μαθηματικό του υπόβαθρο και τις γνώσεις του στα θέματα της Τεχνικής Μηχανικής Ι (κατ' άλλους Αρχές Στατικής) απαρτίζουν τους αναγκαίους όρους για την ενασχόλησή του με το αντικείμενο του βιβλίου.

Στα τέσσερα επόμενα Κεφάλαια (2ο-3ο-4ο και 5ο) εξετάζονται η παραμόρφωση, η τάση, η συμπεριφορά του ισότροπου και ορθότροπου σώματος γενικά, το απειροστό στοιχείο (στερεό ή επίπεδο) και οι σχέσεις όλων των μεγεθών που περιγράφουν την ισορροπία του σώματος στη θεωρία της ελαστικότητας σε καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες. Οι μέθοδοι λύσεις που ακολουθούν την σύνοψη της θεωρίας είναι μαθηματικοί και γραφικοί.

Το έκτο και έβδομο κεφάλαιο, αναφέρονται με εξαιρετική λεπτομέρεια (και στη θεωρία και στις εφαρμογές) στην ελαστική κάμψη και στρέψη ευθύγραμμων ή καμπύλων διατομών. Η πληθώρα των ασκήσεων καλύπτει όλες τις κατηγορίες που ανακύπτουν κατά την εξέταση του θεωρητικού μέρους των κεφαλαίων.

Στο όγδοο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι ενεργειακές μέθοδοι. Παρά το ανεξάντλητο του θέματος παρουσιάζονται σε έκταση οι κυριότερες ενεργειακές μέθοδοι με τα πιο αντιπροσωπευτικά παραδείγματα για τον υπολογισμό της ενέργειας ή της εύρεσης των μετακινήσεων των γραμμικών φορέων.

Σ'όλα τα κεφάλαια η σύνοψη της θεωρίας επεκτείνεται και στις εφαρμογές με την μορφή των θεωρητικών ασκήσεων για την επέκτασή της και την καλύτερη κατανόησή της.

Το Κεφάλαιο Ένατο μπορεί να χαρακτηριστεί σαν το κεφάλαιο των επαναλήψεων αφού δίνονται ασκήσεις όλων των κεφαλαίων που συνοδεύονται, οι περισσότερες, με υπόδειξη λύσης για την άσκηση του αναγνώστη. Συνιστάται έτσι στον αναγνώστη να λύσει τις ασκήσεις του κεφάλαιου αυτού σαν προσπάθεια εμπέδωσης και επανάληψης όλων των θεμάτων του βιβλίου πράγμα που θάταν καλό να γίνει και σε κάθε λυμένη άσκηση των προηγούμενων κεφαλαίων.

Σαν οδηγός στην σύνταξη αυτού του βιβλίου χρησιμοποιήθηκαν συχνά από τη βιβλιογραφία τα Νο 1,2,3 συγγράμματα όπως σημειώνονται στο τέλος του βιβλίου.

Φτάνοντας στο τέλος μιας πολύμηνης προσπάθειας αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω θερμά όλους εκείνους που με βοήθησαν στην πραγμάτωση αυτής της έκδοσης. Οι γνωστές δυσκολίες έκδοσης ενός βιβλίου μαθηματικού - τεχνικού χαρακτήρα δεν είναι εύκολο να υπερνικηθούν.

Θεωρώ λοιπόν υποχρέωσή μου να εκφράσω τις ιδιαίτερες ευχαριστίες στην Εύα Αλεξάνδρη που με ιδιαίτερη φροντίδα και αφάνταστη υπομονή δακτυλογράφησε και επιμελήθηκε το τόσο δύσκολο μαθηματικό κείμενο και είχε όλη τήν επιμέλεια της έκδοσης για να παίξει έτσι αποφασιστικό ρόλο στην εμφάνιση του βιβλίου.

Ακόμη θέλω να ευχαριστήσω τον Χημικό Μηχανικό και ερευνητή Λεύτέρη Τζιόλα για την πολύτιμη βοήθεια που μου πρόσφερε με την κριτική του παρέμβαση καθ'όλη την διάρκεια της συγγραφής του βιβλίου.

Αλέξανδρος Γ. Τζιόλας
Θεσσαλονίκη Μάρτης '86

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΤΑΝΥΣΤΕΣ - ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ - ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Α. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΑΝΥΣΤΩΝ

1. Το δέλτα του Kronecker έχει τα ίδια στοιχεία με τα στοιχεία του μοναδιαίου μητρώου:

$$[\,\delta_{ij}\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{I}$$

Ισχύει δηλ. ότι : $\delta_{ij}.A_i = A_j$ και $\delta_{ij}.A_{ik} = A_{jk}$.

2. Κάθε όρος - μονώνυμο ή απλό σύμβολο ενός μεγέθους - που εμφανίζει δύο φορές τόν ίδιο δείκτη δηλώνει το άθροισμα των τριών όρων πού προκύπτουν όταν δώσουμε στό διπλό δείκτη κατά σειρά τις τρεις τιμές 1,2 και 3. Ετσι ισχύουν οι ισότητες:

$$a_i b_i = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \ .$$

$$a_{ij} x_i x_j = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j = \Sigma(a_{i1} x_i x_1 + a_{i2} x_i x_2 + a_{i3} x_i x_3) = a_{11} x_1 x_1 + a_{21} x_2 x_1 + a_{31} x_3 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2 x_2 + a_{32} x_3 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3 x_3 .$$

3. Ενας αθροιστικός δείκτης μπορεί νά αντικατασταθεί μ'έναν οποιδήποτε άλλο, χωρίς να αλλοιωθεί η τιμή της έκφρασης:

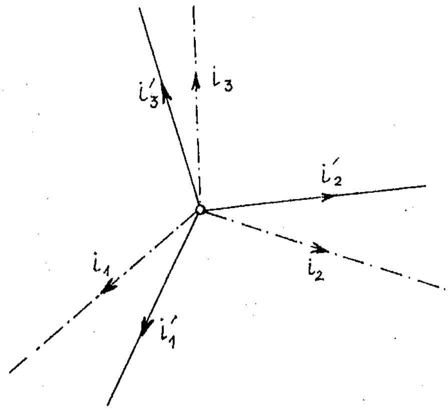
π.χ. ισχύει η ισότητα : $a_{ij} x_i x_j = a_{mn} x_m x_n$.

Η εμφάνιση του ίδιου δείκτη τρεις φορές στο ίδιο σύμβολο επιτρέπεται μόνο για τον χαρακτηρισμό ενός ορισμένου στοιχείου, ποτέ όμως δέν δηλώνει άθροιση.

Β. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΤΑΝΥΣΤΗ - ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΤΟΥΣ ΤΑΝΥΣΤΕΣ - Η ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΣΤΟΥΣ ΤΑΝΥΣΤΕΣ

1. Το αρχικό σύστημα συντεταγμένων καθορίζεται με τα τρία μοναδιαία και κάθετα μεταξύ-τους διανύσματα $\dot{I}_j$ $(j=1,2,3)$.
Η θέση ενός άλλου συστήματος αναφοράς με μοναδιαία διανύσματα $\dot{I}'_j$ δίνεται με τα στοιχεία του μητρώου των συνιμητόνων κατεύθυνσης :

$$\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} \cos(i_1', i_1) & \cos(i_1', i_2) & \cos(i_1', i_3) \\ \cos(i_2', i_1) & \cos(i_2', i_2) & \cos(i_2', i_3) \\ \cos(i_3', i_1) & \cos(i_3', i_2) & \cos(i_3', i_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$$



Τα στοιχεία R_{j1}, R_{j2}, R_{j3} του στίχου j σαν συνημίτονα κατεύθυνσης του μοναδιαίου διανύσματος $\dot{I}_j'$ είναι ίσα επίσης με τις προβολές του διανύσματος αυτού πάνω στους τρεις αξονες του αρχικού συστήματος αναφοράς.

Επόμενα, ισχύουν οι ισότητες:

$$i_1' = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 + R_{13}i_3$$
$$i_2' = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 + R_{23}i_3$$
$$i_3' = R_{31}i_1 + R_{32}i_2 + R_{33}i_3$$

που μπορούν να συμπτυχθούν : $i' = R_{jk}i_k$.

Αλλά αντίστροφα ισχύει καί η συνθήκη : $i_k = R_{jk}i_j'$

Ισχύουν ακόμη οι ισότητες : $R_{ik}R_{ij} = \delta_{kj}$, $R_{ki}R_{ji} = \delta_{ki}$ ή $\underset{\sim}{R} \cdot \underset{\sim}{R}^T = \underset{\sim}{I}$.

2. Γιά τανυστές πρώτης τάξης ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$\underset{\sim}{a}' = \underset{\sim}{R} \cdot \underset{\sim}{a} \qquad ή \qquad a_j' = R_{jk}a_k$$

απ'αυτόν προκύπτει και ο αντίστροφος μετασχηματισμός $a_j = R_{kj} \cdot a_k'$.

Ο νόμος μετασχηματισμού για τανυστές δεύτερης τάξης είναι:

$$\underset{\sim}{\alpha}' = \underset{\sim}{R} \cdot \underset{\sim}{\alpha} \cdot \underset{\sim}{R}^T \qquad ή \qquad a_{km}' = R_{ki}R_{mj}a_{ij} \; .$$

καί ο αντίστροφος μετασχηματισμός : $a_{km} = R_{ik}R_{jm}a_{ij}'$.

3. Το μεγαλύτερο προσόν των πράξεων μεταξύ των τανυστών είναι ότι οι μαθηματικοί τύποι πού τίς εκφράζουν διατηρούνται αναλλοίωτοι κατά την αλλαγή του συστήματος αναφοράς. Ετσι οι τανυστικές συνθήκες, οι οποίες συνδέουν τανυστές που έκπροσωπούν φυσικά μεγέθη, μπορούν νά θεωρηθούν σάν φυσικοί νόμοι, αφού αυτές οι συνθήκες είναι ανεξάρτητες από το σύστημα αναφοράς.

4. Ο συμμετρικός τανυστής Δεύτερης τάξης :

$$\underset{\sim}{A}^{\sigma}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Ο αντισυμμετρικός τανυστής Δεύτερης τάξης (ονομάζεται καί στροφέας) :

$$\underset{\sim}{A}^{\alpha}=\begin{bmatrix} 0 & -A_{21} & A_{13} \\ A_{21} & 0 & -A_{32} \\ -A_{31} & A_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

Γιά κάθε τανυστή δεύτερης τάξης ισχύει:

Τανυστής = Συμμετρικός + Στροφέας

ή $A_{ij}= A^{\sigma}_{ij} + A^{\alpha}_{ij}$, όπου $A^{\sigma}_{ij}=\frac{1}{2}(A_{ij}+A_{ji})$ καί $A^{\alpha}_{ij}=\frac{1}{2}(A_{ij}- A_{ji})$.

Επίσης : $\mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{A}^{\sigma}= \mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{A}$ καί $\mathrm{Tr}\underset{\sim}{A}^{\alpha} = 0$.

5. Γιά τις αναλλοίωτες τανυστή εξ ορισμού ισχύει:

$\mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{\alpha} = \mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{\alpha}'$ δηλ. $\alpha_{\kappa\kappa} = \alpha'_{\rho\rho}$

$\mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{\alpha}^2= \mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{\alpha}^{2\prime}$ " $\alpha_{im}\alpha_{mi} = \alpha'_{i\rho}\alpha'_{\rho i}$.

Γ. ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ

1. Γενικά οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους σώματος είναι:

$X_k=\frac{\int x dw}{W}$, $Y_k=\frac{\int y dw}{W}$, $Z_k=\frac{\int z dw}{W}$ (W= Βάρος Σώματος)

2. Για ομοιογενή σώματα όπου $dW=\gamma\cdot dV$ καί $W=\gamma\cdot V$ έχουμε:

$X_k= \frac{\int x dV}{V}$, $Y_k=\frac{\int y dV}{V}$, $Z_k=\frac{\int z dV}{V}$

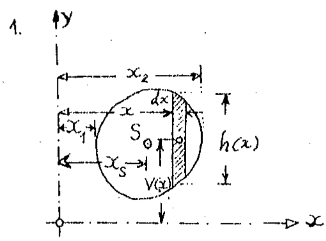
3. Γιά ομοιογενή επιφανειακά μορφώματα σταθερού πάχους είναι:

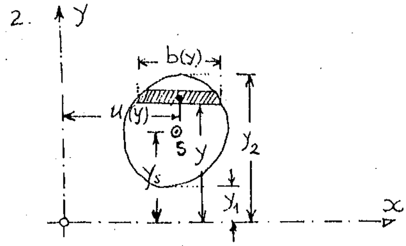
$X_k= \frac{\int x dA}{A}$, $Y_k=\frac{\int y dA}{A}$ $Z_k=\frac{\int z dA}{A}$

σ'αυτή τήν περίπτωση, προκύπτει δηλαδή ότι ο προσδιορισμός των συντεταγμένων του Κ.Β επιπέδου επιφανείας ανάγεται στόν υπολογισμό αφ'ενός του εμβαδού της επιφανείας, αφ'ετέρου των στατικών ροπών αυτής πρός δύο αυθαίρετα εκλεγμένους άξονες.

Ετσι <u>τό μεν εμβαδόν</u> υπολογίζεται βάσει ενός των τύπων

$$A = \int_{x_1}^{x_2} h(x)\,dx \quad , \qquad A = \int_{y_1}^{y_2} b(y)\cdot dy$$

1.


2.


<u>Οι δε στατικές ροπές</u> υπολογίζονται βάσει των τύπων

$$S_y = \int_{x_1}^{x_2} x h(x) dx \quad , \quad S_x = \int_{y_1}^{y_2} y b(y) dy$$

4. Για γραμμικά μορφώματα:

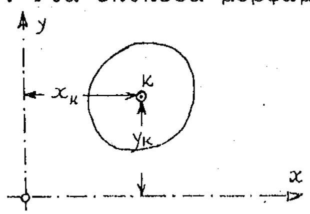
$$X_k = \frac{\int x ds}{S} \qquad Y_k = \frac{\int y ds}{S} \qquad Z_k = \frac{\int z ds}{S}$$

Αν η Στατική ροπή στοιχειώδους τμήματος V ισούται μέ : $x \cdot V$, η Στατική Ροπή του σώματος προ το επίπεδο ΥΖ είναι:

$$S_{yz} = \int x dV = X_k \cdot V$$

Οι στατικές ροπές μηδενίζονται για επίπεδα που περνούν από τό Κ.Β. και αντίστροφα. Ετσι επίπεδα ορθής ή πλάγιας συμμετρίας περνούν από τό Κ.Β. Επίσης <u>αν υπάρχει άξονας σύμμετρίας θά περνά από τό Κ.Β.</u>

5. Για επίπεδα μορφώματα:



$$X_k = \frac{1}{A} \int x dA = \frac{S_Y}{A}$$

$$Y_k = \frac{1}{A} \int y dA = \frac{S_x}{A}$$

όπου $S_x = y_k A$, $S_y = X_k A$

Αντιπροσωπευτικά παραδείγματα εύρεσης Κ.Β. διατομών δίνονται στο κεφάλαιο "ΚΑΜΨΗ" .

Δ. ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

1. Οι Ροπές Αδρανείας ως προς τους αξονες ΥΖ είναι πάντα θετικές καί ισούνται μέ: $J_z = \int_A y^2 dA$

$$J_y = \int_A z^2 dA$$

Η έκφραση $J_{yz} = \int_A yz dA$ ονομάζεται ροπή εκτροπής

καί η $J_p = \int_A r^2 dA = J_x + J_y$: πολική ροπή αδράνειας

2. Το μητρώο του τανυστή αδράνειας ως προς τους αξονες Y,Z για τυχαία διατομή είναι:

$$\underset{\sim}{I} = \begin{bmatrix} I_{yy} & I_{yz} & 0 \\ I_{zy} & I_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Για τον τανυστή $\underset{\sim}{I}$ που είναι δεύτερης τάξης, ισχύει ο μετασχηματισμός $\underset{\sim}{I}' = \underset{\sim}{R}\cdot\underset{\sim}{I}\cdot\underset{\sim}{R}^T$ για στροφή του συστήματος συντεταγμένων κατά φ. Η γωνία $\hat{\varphi}$ προσημαίνεται πάντα σαν θετική για στροφή με φορά διαγραφής από τον Y προς τόν Z. Αλλιώς, είναι αρνητική. Τό μητρώο μετασχηματισμού στο επίπεδο YZ θα είναι :

$$\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Τα αντίστοιχα μεγέθη για σύστημα αξόνων ξ,η στραμμένο κατά $\hat{\varphi}$, συνδέονται με τα προηγούμενα με τις σχέσεις :

$$J_\xi = \frac{1}{2}(J_y+J_z)+\frac{1}{2}(J_y-J_z)\ \cos 2\varphi - J_{yz}\sin 2\varphi$$

$$J_\eta = \frac{1}{2}(J_y+J_z)-\frac{1}{2}(J_y-J_z)\ \cos 2\varphi - J_{yz}\sin 2\varphi$$

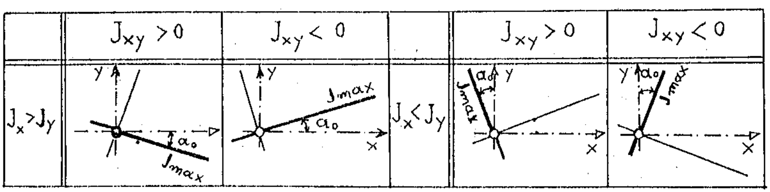
$$J_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(J_y-J_z)\ \sin 2\varphi + J_{yz}\ \cos 2\varphi$$

<u>Για γωνία $\hat{\varphi}$</u> η οποία προκύπτει από τη σχέση $\tan 2\varphi = -\dfrac{2J_{yz}}{J_y-J_z}$, <u>η ροπή εκτροπής μηδενίζεται και οι ροπές αδρανείας παίρνουν ακραίες τιμές:</u>

$$J_1 = J_{max} = \frac{1}{2}\ (J_y+J_z) + \frac{1}{2}\sqrt{(J_y-J_z)^2+4J_{yz}^2}$$

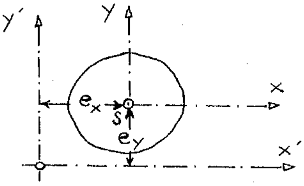
$$J_2 = J_{min} = \frac{1}{2}\ (J_y+J_z) - \frac{1}{2}\sqrt{(J_y-J_z)^2+4J_{yz}^2}$$

Οι J_1,J_2 ονομάζεται κύριες ροπές αδρανείας και οι αντίστοιχοι αξονες αδρανείας. Για τόν καθορισμό της θέσης του πρώτου κύριου αξονα, ισχύει ότι: Ο κύριος άξονας (1) σχηματίζει γωνία μικρότερη των 45° με τον αξονα Z αν $J_z > J_y$ ή με τον αξονα y αν $J_y > J_z$. Σχηματικά εφαρμόζεται ο πίνακας:



3. Αν υπάρχει άξων συμμετρίας, είναι καί κύριος άξονας. Αν το σύστημα αξόνων είναι κεντροβαρικό S(y*,z*) οι τιμές J_{z*}, J_{y*} ελαχιστοποιούνται σε σχέση με οποιοδήποτε σύστημα παραλλήλων αξόνων OYZ.

4. Με την χρήση του θεωρήματος Steiner παίρνουμε:



$$I'_{yy} = I_{yy} + e_y^2 \cdot A$$
$$I'_{zz} = I_{zz} + e_z^2 \cdot A$$
$$I'_{zy} = I_{zy} + e_y \cdot e_z \cdot A$$

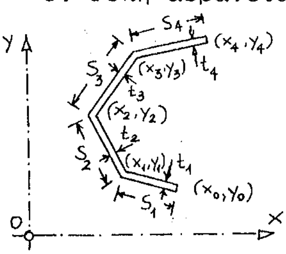
Ισχύει επίσης: $I_{yy} = \frac{1}{2}\,(I_1+I_2) + \frac{1}{2}(I_1-I_2)\,\cos 2\varphi$

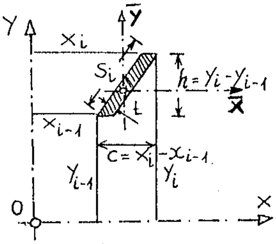
$I_{zz} = \frac{1}{2}\,(I_1+I_2) - \frac{1}{2}(I_1-I_2)\,\cos 2\varphi$

$I_{yz} = \frac{1}{2}\,(I_1-I_2)\,\sin 2\varphi$

Ακόμη : $I_{yy} + I_{zz} = I_1 + I_2 =$ σταθερό $(Tr\underset{\sim}{I}=ct)$

5. Ροπή αδρανείας γραμμικού μορφώματος:





$$J_{\bar{z}i} = \frac{tS_i}{12} h^2$$
$$J_{\bar{y}i} = \frac{tS_i}{12} c^2$$
$$J_{\bar{z}\bar{y}i} = \frac{tS_i}{12} ch$$

ΑΣΚΗΣΗ

Αν $\underset{\sim}{A}$ είναι τανυστής δεύτερης τάξης στό σύστημα $\{X_i\}$ καί $\underset{\sim}{A}'$ η έκφραση-του στό $\{X'_i\}$ νά δειχθεί ότι : $(\underset{\sim}{A}^T)' = (\underset{\sim}{A}')^T$ καί ότι $(\underset{\sim}{A}^{-1})' = (\underset{\sim}{A}')^{-1}$.

ΛΥΣΗ

α). Από τό νόμο μετασχηματισμού τανυστή δεύτερης τάξης γιά αρχικό τανυστή (A^T) παίρνουμε: $(A^T)' = R\cdot(A^T)\cdot R^T$ (1)

Ισχύει όμως : $A' = R\cdot A\cdot R^T \rightarrow (A')^T = (R\cdot A\cdot R^T)^T \rightarrow$

$(A')^T = (R^T)\cdot A^T\cdot R^T = R\cdot A^T\cdot R^T \overset{(1)}{=} (A^T)'$ ό.εδ.

β). Μέ αρχικό τάνυστή τόν A^{-1} από τό νόμο μετασχηματισμού όμοια παίρνουμε : $(A^{-1})' = R\cdot A^{-1}\cdot R^T$ (2)

Επίσης ισχύει : $A' = R\cdot A\cdot R^T \rightarrow (A')^{-1} = (R\cdot A\cdot R^T)^{-1} \rightarrow$

$\rightarrow (A')^{-1} = (R^T)\cdot A^{-1}\cdot R^{-1} = R\cdot A^{-1}\cdot R^T \overset{(2)}{=} (A^{-1})'$ ό.εδ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

Α. Ο ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

1. Οταν οι συνιστώσες u_i της μετατόπισης $\vec{u}$ είναι μικρές σέ σχέση με τίς γραμμικές διαστάσεις του σώματος τότε όλες οι εξισώσεις της ελαστικότητας γραμμοποιούνται ως προς τα u_i (γραμμική ελαστικότητα ή θεωρία πρώτης τάξης) παραλείπονται δηλαδή όροι μή γραμμικοί ως πρός τα u_i καί τις παραγώγους τους.
Σ'αυτή τήν περίπτωση ο τανυστής παραμόρφωσης (ή τροπής) έχει τήν μορφή: $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)=\varepsilon_{ji}$

καί είναι συμμετρικός τανυστής δεύτερης τάξης· ισχύει δηλαδή γιά τόν μετασχηματισμό : $\underset{\sim}{\varepsilon}' = \underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{\varepsilon}\,\underset{\sim}{R}^T$

2. Γενικά ο τανυστής παραμόρφωσης μπορεί νά γραφεί:

$$\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \gamma_{xy/2} & \gamma_{zx/2}\\ \gamma_{yx/2} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz/2}\\ \gamma_{zx/2} & \gamma_{zy/2} & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix}$$

σύμφωνα με τον οποίο:

** ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz} είναι οι επιμηκύνσεις κατά τις διευθύνσεις αντιστοίχως x,y,z καί

** ε_{yz} ε_{zx} ε_{zz} είναι το μισό της μεταβολής της γωνίας που υπέστησαν οι κάθετοι μεταξύ-τους,άξονες συντεταγμένων.

3. Αναλυτικότερα για τις συνιστώσες της <u>απειροστής</u> παραμόρφωσης ισχύουν οι τύποι:

$$\varepsilon_{11}=\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad 2\varepsilon_{yz}=\gamma_{yz}=\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{22}=\varepsilon_{yy}=\frac{\partial u_y}{\partial y} \qquad 2\varepsilon_{zx}=\gamma_{zx}=\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}$$

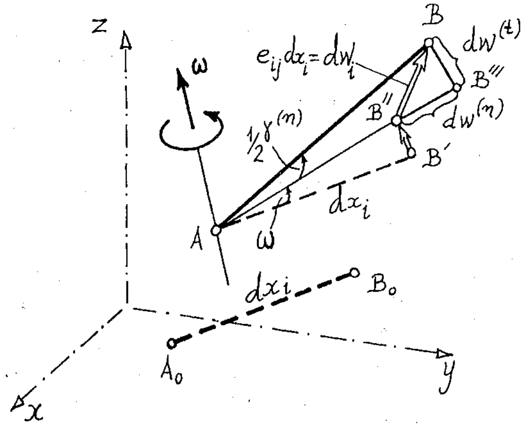
$$\varepsilon_{33}=\varepsilon_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad 2\varepsilon_{xy}=\gamma_{xy}=\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}$$

Οι σχέσεις ισχύουν κι'αν μετονομάσουμε τά x,y,z σέ αριθμητικούς δείκτες 1,2,3 αντίστοιχα για τις πράξεις των μητρώων.

4. Ο τανυστής στροφής πού είναι αντισυμμετρικός καί έχει απειροστές συνιστώσες απεικονίζει μαθηματικά τήν <u>καθαρή</u> περιστροφή της απειροστής περιοχής.

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = -\omega_{ji}$$

5. Μετά απ'αυτά για μια απειροστή παραμόρφωση στό χώρο για το ευθύγραμμο τμήμα A_oB_o ισχύει η εξής επαλληλία μετακινήσεων:



- παράλληλη μεταθεση κατά u(AB´)
- περιστροφή ω (AB")
- επιμίκυνση $\varepsilon^{(n)}$ (AB"') στην αρχική διεύθυνση του $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$
- διάτμηση (B"'B) κάθετη στην επιμήκυνση που επιτρέπει το τμήμα από τήν αρχική διεύθυνση η_i με ολική γωνία $\gamma^{(n)}/2$ καταλαμβάνοντας τελικά την θέση AB.

B. ΕΠΙΠΕΔΗ ΑΠΕΙΡΟΣΤΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ

1. Κατά κύριο λόγο ασχολούμαστε με παραμορφώσεις στο επίπεδο. Γι'αυτές ισχύουν όλοι οι παραπάνω τύποι με τίς συνθήκες :

$$u_z = 0\ ,\quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0\ ,\quad \omega_{xz} = \omega_{yz} = 0$$

Ουσιαστικά η επίπεδη απειροστή παραμόρφωση είναι ειδίκευση της παραμόρφωσης του χώρου.

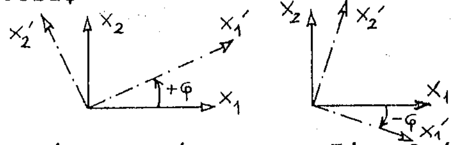
2. Ο μετασχηματισμός του τανυστή $\underset{\sim}{\varepsilon}$ στο επίπεδο και για γωνία στροφής των αξόνων φ δίνει :

$$\varepsilon'_{xx} = \begin{cases} \varepsilon_{xx}\cos^2\varphi + \varepsilon_{yy}\sin^2\varphi + \varepsilon_{xy}\sin 2\partial \quad = \\ \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy})\cos 2\varphi + \varepsilon_{xy}\sin 2\varphi \end{cases}$$

$$\varepsilon'_{yy} = \begin{cases} \varepsilon'_{xx}\sin^2\varphi + \varepsilon_{yy}\cos^2\varphi - \varepsilon_{xy}\sin 2\partial \\ \frac{1}{2}(\varepsilon_x+\varepsilon_y) - \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})\cos 2\varphi - \varepsilon_{xy}\sin 2\varphi \end{cases}$$

$$\varepsilon'_{xy}=\varepsilon'_{yx}=\begin{cases}\frac{1}{2}(\varepsilon_{yy}-\varepsilon_{11})\sin 2\partial+\varepsilon_{xy}\cos 2\partial\\ -\frac{1}{2}(\varepsilon_{yy}-\varepsilon_{11})\sin 2\varphi+\varepsilon_{xy}\cos 2\varphi\end{cases}$$

Η γωνία φ τίθεται στους τύπους με το πρόσημό-της :



3. Ο τανυστής της επίπεδης παραμόρφωσης έχει τις εξής ιδιότητες:

α. Υπάρχει ζεύγος κύριων αξόνων για τους οποίους έχουμε μηδενική διατμητική παραμόρφωση $\varepsilon_{xy}=0$

Για στροφή φ_0 των αξόνων τέτοια ώστε: $\tan 2\varphi_0=\dfrac{\varepsilon_{xy}}{2(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})}$

Οι τιμές των <u>καθαρών επιμηκύνσεων</u> είναι τότε:

$$\varepsilon_{1,2}=\left(\frac{\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}}{2}\right)^2+\varepsilon_{xy}^2}$$

β. Εχει δύο αναλλοίωτες

$$I_1=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}=\varepsilon_1+\varepsilon_2 \qquad \text{και} \qquad I_2=\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}=\varepsilon_1\varepsilon_2$$

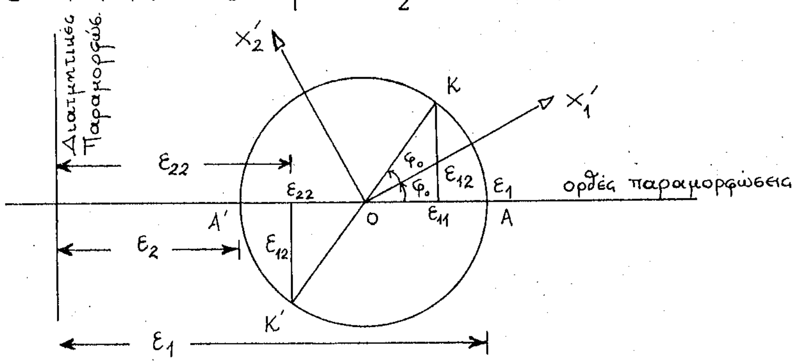
Η πρώτη παριστάνει την <u>ανηγμένη αύξηση του εμβαδού</u> του επίπεδου απειροστού στοιχείου.

Επίσης ορίζεται η ανηγμένη διόγκωση : $\theta=\dfrac{\delta(dV)}{dV}=\dfrac{dV-dV_0}{dV_0}=\mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{\varepsilon}$

Γ. ΟΙ ΚΥΚΛΟΙ ΤΟΥ MOHR

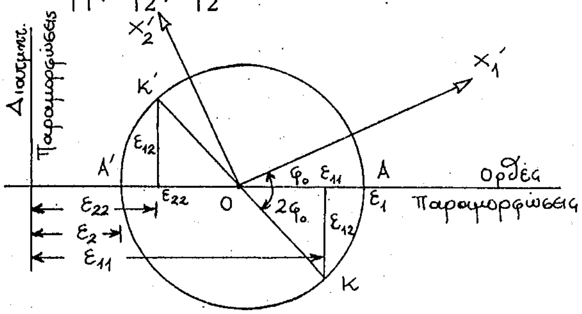
Οι κύκλοι του Mohr αποτελούν τις γραφικές λύσεις στα προβλήματα <u>των παραμορφώσεων καί των τάσεων</u> . Τα προβλήματα αυτά χωρίζονται σε τρείς κατηγορίες:

1. Με γνωστές τις τιμές των $\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{12}$ ζητείται να βρεθούν οι κύριες παραμορφώσεις ε_1 καί ε_2 καί η γωνία στροφής.



Στόν αξονα των ορθών παραμορφώσεων αντιστοιχούμε τις τιμές ε_{11}, ε_{22}. Στήν κατεύθυνση του αξονα των Διατμητικών παραμορφώσεων και στήν τετμημένη της ε_{11} παίρνουμε την ε_{12} ενώ στην τετμημένη της ε_{22} καί αντιθετικά από πριν παίρνουμε ξανά τμήμα ε_{12}. Τα ακραία σημεία των δύο αυτών κάθετων τμημάτων ορίζουν την διάμετρο του κύκλου του Mohr του οποίου η τομή με τον αξονα των ορθών παραμορφώσεων δίνει τις τιμές: ε_1,ε_2. Για την κατεύθυνση και τον ορισμό των κύριων αξόνων, στρέφουμε το σύστημα (x_1,x_2) αριστερόστροφα κατά γωνία φ_o που είναι η διχοτόμος της γωνίας (ΑÔΚ).

2. Με γνωστές τις τιμές των ε_1,ε_2 καί την γωνία στροφής για την οποία προκύπτουν οι κύριες παραμορφώσεις ζητούνται οι τιμές των ε_{11},ε_{12},ε_{12} .



Αντιχούμε τις τιμές ε1, ε_2. Γράφουμε έτσι τον κύκλο με διάμετρο που διέρχεται απ'τις παραπάνω τιμές. Σχηματίζουμε την διπλάσια της διατομής γωνία φ_o. Παίρνουμε έτσι τις τιμές ε_{22},ε_{11},ε_{12} και το σύστημα (x_1,x_2) στο οποίο αυτές αντιστοιχούν, που οπως φαίνεται λαμβάνεται με αριστερή στροφή κατά φ_o.

3. Με γνωστές κάποιες τιμές των ε_{11},ε_{22},ε_{12} καί τήν γωνία στροφής θ ζητούνται νέες τιμές ε_{11}',ε_{22}',ε_{12}' σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων, που θα προκύψει με στροφή ίση με την δοσμένη γωνία από το υπάρχον σύστημα συντεταγμένων.