Δημήτριος Τσούλης
Καθηγητής Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

ISBN 978-960-456-445-3

Reference Systems and Time
Coordinates, reference systems and reference frames for the description of the geometrical shape and time variations of the dynamic Earth system.

D. Tsoulis, 2016
The Aristotle University of Thessaloniki

Φωτοστοιχειοθεσία **Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ**
Εκτύπωση 18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Βιβλιοδεσία Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27, 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΛΙΑΝΙΚΗ-ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Χαριλάου Τρικούπη 22, 106 79 Αθήνα
Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Καλύτερα να δεχτούμε την πιο απλή εξήγηση,
έστω κι αν δεν είναι απλή, έστω κι αν δεν εξηγεί πολλά πράγματα.
(Samuel Beckett, Malone meurt, 1951)

Πρόλογος

Τα συστήματα αναφοράς, τα πλαίσια αναφοράς, οι συντεταγμένες και οι μετασχηματισμοί τους αποτελούν βασικά μαθηματικά εργαλεία υποδομής για τη μελέτη γεωμετρικών και δυναμικών φαινομένων που σχετίζονται με τη γη και τις διεργασίες της. Ο ορισμός δικτύων προκειμένου να οριστεί ένα γεωμετρικό πλαίσιο αναφοράς για μετρήσεις που λαμβάνουν χώρα στη γήινη επιφάνεια, αλλά κυρίως η συλλογή και επεξεργασία δεδομένων που λαμβάνονται από διαφορετικά όργανα παρατήρησης σε διαφορετικά σημεία του τρισδιάστατου χώρου απαιτούν την ύπαρξη μιας κοινής αναφοράς, ενός μαθηματικού υποβάθρου στο οποίο θα αναφέρονται όλα τα δεδομένα και όπου θα μπορούν να υποβληθούν σε μία κοινή ανάλυση και ερμηνεία.

Ο τεράστιος όγκος γεω-δεδομένων που παράγεται από τη σύγχρονη δορυφορική εποχή και τις παγκόσμιες ψηφιακές βάσεις δεδομένων ορίζει μία νέα πραγματικότητα για την παρατήρηση, μοντελοποίηση και ερμηνεία μεγεθών όπως ο προσδιορισμός θέσης σημείων, η μελέτη μικρομετακινήσεων και παραμορφώσεων, η περιστροφή της γης, το πεδίο βαρύτητας. Ταυτόχρονα, η αλματώδης πρόοδος της τεχνολογίας και τα επίπεδα ακρίβειας και διακριτικής ικανότητας των σύγχρονων μετρητικών συστημάτων επιτρέπουν την ποσοτικοποίηση θεωρητικών ποσοτήτων, όπως για παράδειγμα εκείνων που εκφράζουν την επίδραση της θεωρίας της σχετικότητας στις πρωτογενείς παρατηρήσεις θέσεων, μηκών και χρόνου. Η σύγχρονη τεχνολογία επιτρέπει ακόμα την υλοποίηση καινοτόμων τεχνικών μέτρησης, με χαρακτηριστική περίπτωση τη χρήση ατομικών ρολογιών υψηλής ακρίβειας για τον προσδιορισμό ισοδυναμικών επιφανειών, υψομέτρων και υψομετρικών διαφορών.

Στη νέα αυτή πραγματικότητα που έχει δημιουργηθεί, η ανάγκη για επεξεργασία βαθμωτών αλλά και διανυσματικών μεγεθών μεγάλου όγκου και παγκόσμιας κάλυψης αναδεικνύει ως αναγκαιότητα την κατανόηση τόσο του θεωρητικού υποβάθρου όσο και των αλγορίθμων ευέλικτης επεξεργασίας των διαθέσιμων δεδομένων. Στόχος του παρόντος συγγράμματος είναι να προσφέρει στην ελληνική βιβλιογραφία ένα εισαγωγικό κείμενο για το μαθηματικό πλαίσιο και το υπολογιστικό σκέλος της γνωστικής περιοχής που είναι γνωστή ως συστήματα αναφοράς και χρόνου. Το κείμενο απευθύνεται στο σύνολο της επιστημονικής και εκπαιδευτικής κοινότητας που είτε ενδιαφέρεται για το αντικείμενο είτε εργάζεται σε αυτό, κυρίως στους προπτυχιακούς, μεταπτυχιακούς φοιτητές και ερευνητές θετικών και εφαρμοσμένων επιστημών.

Μετά από ένα εισαγωγικό κεφάλαιο που σταχυολογεί τα σύγχρονα πεδία εφαρμογής των συστημάτων αναφοράς και χρόνου, το δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζει τις βασικές έννοιες των συντεταγμένων, των συστημάτων αναφοράς και των πλαισίων αναφοράς. Το κείμενο ανατρέχει στο έργο του René Descartes και παραθέτει τα βασικά εργαλεία της μαθηματικής προσέγγισης και σκέψης αυτού του σπουδαίου Γάλλου φιλόσοφου και μαθηματικού, που επιδίωξε να μετασχηματίσει τις αφηρημένες και δυσνόητες έννοιες της αναλυτικής γεωμετρίας σε ένα καινούργιο αναλυτικό και αριθμητικό πλαίσιο, το οποίο θα επέτρεπε στον *καθένα*, όπως ήταν τα δικά του λόγια, να ασχοληθεί με αυτές.

Το επόμενο κεφάλαιο παραθέτει τα κυριότερα συστήματα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων. Κυλινδρικές, σφαιρικές και ελλειψοειδείς συντεταγμένες συνθέτουν το μαθηματικό πλαίσιο περιγραφής πολύπλοκων γεωμετρικών και φυσικών μεγεθών. Παρουσιάζονται εκτός από τους αναλυτικούς μαθηματικούς ορισμούς των συντεταγμένων και αρκετές, χρήσιμες για τις διάφορες εφαρμογές, γεωμετρικές ερμηνείες επί μέρους θεωρητικών μεγεθών, όπως ο στοιχειώδης όγκος και η στοιχειώδης επιφάνεια, το εφαπτομενικό διάνυσμα στην καμπύλη συντεταγμένων, ο Ιακωβιανός και ο μετρικός πίνακας.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το τυπολόγιο του γενικού μετασχηματισμού δύο συστημάτων αναφοράς και οι επί μέρους εξειδικεύσεις του. Ο μετασχηματισμός ομοιότητας, όπως είναι γνωστός στη βιβλιογραφία, διατυπώνεται τόσο ως γενικό μαθηματικό σχήμα, όσο και αναλυτικά μέσω των διαφορετικών εξειδικευμένων υλοποιήσεών του. Το δεύτερο μέρος του κεφαλαίου περιλαμβάνει μία λεπτομερή παρουσίαση των τετραδικών αριθμών, η διατύπωση των οποίων επιτρέπει την παράκαμψη αριθμητικών απροσδιοριστιών ενώ ταυτόχρονα αυξάνει σημαντικά την ταχύτητα των υπολογισμών, πάντα σε σχέση με την περιγραφή στροφών μέσω γωνιών και πινάκων Euler.

Η έννοια των αδρανειακών συστημάτων αναφοράς παρουσιάζεται στο επόμενο κεφάλαιο. Η ανάγκη για ένα σύστημα αναφοράς που δεν μετέχει των κινήσεων της γης παραμένοντας έτσι αμετάβλητο στο χρόνο υπαγορεύεται από το γεγονός ότι όλα τα γεωμετρικά και φυσικά μεγέθη που αφορούν τη γη προσδιορίζονται με μετρήσεις που αναφέρονται σε ένα συνεχώς μεταβαλλόμενο πλαίσιο, αυτό της κινούμενης και μεταβαλλόμενης γης. Παρουσιάζεται ο ορισμός του διεθνούς ουράνιου συστήματος αναφοράς ICRS, ενός αδρανειακού συστήματος που ορίστηκε με βάση συγκεκριμένες προδιαγραφές και υιοθετήθηκε από τους διεθνείς επιστημονικούς φορείς προκειμένου να προσφέρει μία ενιαία σταθερή αναφορά στις γεωδαιτικές και αστρονομικές παρατηρήσεις και μεθόδους.

Το έκτο κεφάλαιο είναι αφοσιωμένο στα επίγεια συστήματα αναφοράς. Είτε τοποκεντρικά, με αφετηρία ένα σημείο στην επιφάνεια της γης, είτε γεωκεντρικά, με την αφετηρία τους τοποθετημένη στο κέντρο μάζας της γης, τα επίγεια συστήματα αναφοράς αποτελούν το συνδετικό κρίκο της θεωρίας των συντεταγμένων και των συστημάτων αναφοράς με τις πραγματικές μετρήσεις γεωμετρικών και φυσικών μεγεθών στο φυσικό περιβάλλον των μετρήσεων. Ο γεωμετρικός ορισμός τους συνδέεται με φυσικές παραμέτρους, όπως τη διεύθυνση της κατακορύφου ενός τόπου ή τον άξονα περιστροφής της γης. Παρουσιάζονται οι παράμετροι και τα στοιχεία του διεθνούς επίγειου συστήματος αναφοράς καθώς και της υλοποίησής του, του διεθνούς επίγειου πλαισίου αναφοράς ITRF. Τέλος, στο κεφάλαιο συμπεριλαμβάνονται τα στοιχεία που αφορούν την περιστροφή της γης, δηλαδή η κλόνιση, η μετάπτωση και η κίνηση του πόλου, και ο ρόλος τους στον ορισμό ενδιάμεσων σχεδόν αδρανειακών συστημάτων που ορίζονται ως βοηθητικά συστήματα αναφοράς κατά το μετασχηματισμό από ένα επίγειο στο ουράνειο αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Το τελευταίο κεφάλαιο πραγματεύεται την έννοια του χρόνου και την υλοποίησή της στις πρακτικές εφαρμογές μέσω των διαφορετικών συστημάτων χρόνου. Παρουσιάζονται τα διαφορετικά είδη χρόνου, τα εμπλεκόμενα μαθηματικά μοντέλα, οι υπεισερχόμενες σχετικιστικές διορθώσεις και οι ορισμοί των πιο σημαντικών συστημάτων χρόνου. Προβάλλεται μεταξύ άλλων ο ρόλος των ατομικών ρολογιών και του ατομικού χρόνου, ως μία εναλλακτική για τον προσδιορισμό παραδοσιακών γεωμετρικών μεγεθών, όπως υψόμετρα και υψομετρικές διαφορές, αξιοποιώντας τα επίπεδα ακρίβειας και σταθερότητας της μετρητικής συχνότητας που εξασφαλίζει στα ατομικά ρολόγια η σύγχρονη τεχνολογία.

Θεσσαλονίκη, Φεβρουάριος 2016 Δημήτριος Τσούλης

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η μελέτη γεωμετρικών, φυσικών και δυναμικών μεγεθών του συνεχώς μεταβαλλόμενου συστήματος του πλανήτη μας έχει βρεθεί στο επίκεντρο της σύγχρονης τεχνολογίας. Κλασικές επίγειες τεχνικές παρατήρησης συμπληρώνονται και τις περισσότερες φορές αντικαθίστανται πλήρως από δορυφορικά δεδομένα και μεθοδολογίες που καλύπτουν με έναν ομοιόμορφο και συνεχή τρόπο το σύνολο της γης. Η αναπαράσταση του γήινου αναγλύφου σε διάφορες κλίμακες είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μιας γεωμετρική ποσότητας που αποτελεί ταυτόχρονα το βασικό υπόβαθρο για τη μεγάλη πλειοψηφία των μελετών που συνδέονται με το δυναμικό σύστημα γη. Οι παραδοσιακές τεχνικές δημιουργίας ψηφιακών μοντέλων εδάφους στηρίζονταν στη λήψη και ανάλυση αεροφωτογραφιών οι οποίες οδηγούσαν στην περιγραφή του αναγλύφου περιορισμένων τμημάτων της γήινης επιφάνειας. Αντίθετα, οι σύγχρονες δορυφορικές τεχνικές σάρωσης επιτρέπουν τη δημιουργία παγκόσμιων ψηφιακών μοντέλων εδάφους. Τα μοντέλα αυτά χαρακτηρίζονται από μία ενιαία ανάλυση και ακρίβεια οι οποίες είναι αρκετές τάξεις μεγέθους ανώτερες από τις αντίστοιχες των προγενέστερων τοπικών αεροφωτογραφικών μοντέλων.

Η μέτρηση φυσικών χαρακτηριστικών του γήινου συστήματος αποτελεί επίσης ένα σημαντικό ζητούμενο στη σύγχρονη έρευνα. Η γνώση για παράδειγμα των διακυμάνσεων στις τιμές της θερμοκρασίας, πίεσης ή περιεκτικότητας σε υδρατμούς της γήινης ατμόσφαιρας επιτρέπει, όταν αυτή αναφέρεται σε μεγάλες γεωγραφικές περιοχές ή είναι παγκόσμια, τη μελέτη, καταγραφή και πρόγνωση συγκεκριμένων κλιματικών φαινομένων και αλλαγών. Οι επίγειοι μετεωρολογικοί σταθμοί προσφέρουν πλούσια αρχεία τέτοιων δεδομένων που αναφέρονται όμως μόνο στις συγκεκριμένες γεωγραφικές τοποθεσίες. Για να διερευνηθεί η διακύμανση των ίδιων ποσοτήτων στο εσωτερικό της ατμόσφαιρας και για μεγαλύτερα υψόμετρα από την επιφάνεια της γης χρησιμοποιούταν στο παρελθόν ως μοναδική δυνατότητα άμεσης παρατήρησης η διάταξη του μετεωρολογικού μπαλονιού. Αφημένο ελεύθερα σε μία συγκεκριμένη τοποθεσία να ανέλθει προς τα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας το σύνολο των μετρητικών συσκευών στο εσωτερικό του μπαλονιού έστελνε μέσω ενός πομπού στο έδαφος συνεχείς μετρήσεις των αντίστοιχων φυσικών μεγεθών. Οι μετρήσεις αυτές ορίζουν κατακόρυφα προφίλ για παράδειγμα θερμοκρασίας ή ατμοσφαιρικής πίεσης για το συγκεκριμένο γεωγραφικό στίγμα.

Οι μετρήσεις των μετεωρολογικών μπαλονιών αν και εκφράζουν άμεσες παρατηρήσεις των αντίστοιχων μεγεθών δίνουν σημειακής διάστασης πληροφορίας, καθώς το προφίλ των ποσοτήτων που ορίζουν αναφέρεται σε ένα μοναδικό σημείο στην επιφάνεια της γης. Σύγχρονοι δορυφόροι μετρούν πλέον με τρόπο συνεχή ατμοσφαιρικά μεγέθη είτε με τη βοήθεια ειδικών αισθητήρων, όπως για παράδειγμα μετρητές ιόντων οι οποίοι μετρούν την περιεκτικότητα της ατμόσφαιρας σε φορτισμένα σωματίδια, είτε μέσω ειδικών τεχνικών παρατήρησης, όπως η τεχνική απόκρυψης σήματος GPS. Έτσι, καθώς οι σχετικές μετρήσεις αναφέρονται όχι σε μεμονωμένα σημεία αλλά στο σύνολο της εξελισσόμενης τροχιάς, προκύπτουν ξεχωριστά παγκόσμια πεδία τιμών για κάθε μία ατμοσφαιρική ποσότητα. Η μελέτη των διακυμάνσεων των παγκόσμιων κατανομών που δημιουργούνται από αυτές τις μετρήσεις οδηγούν σε σημαντικά συμπεράσματα που συνδέονται με ειδικότερα κλιματολογικά και περιβαλλοντικά ζητήματα.

Η μέτρηση της δύναμης της βαρύτητας αποτελεί τέλος ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα δυναμικού μεγέθους που είναι διεπιστημονικού ενδιαφέροντος και για το οποίο επίσης η δορυφορική εποχή έχει μεταβάλλει καθοριστικά τον τρόπο παρατήρησης και μελέτης του. Η παραδοσιακή επίγεια τεχνική παρατήρησης είναι γνωστή ως βαρυτημετρία. Ο βαθμός επιμήκυνσης ενός ελατηρίου η μία άκρη του οποίου είναι μόνιμα τοποθετημένη στην οροφή του οργάνου μέτρησης, γνωστού και ως βαρυτήμετρο, ενώ στην άλλη του άκρη είναι προσαρτημένη μία πειραματική μάζα, συνδέεται γραμμικά με τη δύναμη που προκαλεί τη συγκεκριμένη παραμόρφωση, η οποία στην περίπτωση του συστήματος ελατήριο-μάζα, όταν αυτό ισορροπήσει, είναι η δύναμη της βαρύτητας. Το μέτρο της δύναμης αυτής συνδέεται γραμμικά με την επιμήκυνση του ελατηρίου και τα φυσικά του χαρακτηριστικά ενώ ταυτόχρονα εμπερικλείει ως μέγεθος τον ακριβή τόπο της παρατήρησης και τη μεταβολή της δύναμης της βαρύτητας σε διαφορετικά σημεία επάνω στην επιφάνεια της γης. Το σύστημα ελατηρίου-μάζας θα επιμηκυνθεί λιγότερο στην κορυφή ενός βουνού από ότι στην επιφάνεια της θάλασσας και περισσότερο στους πόλους από ότι στον ισημερινό.

Η επίγεια βαρυτημετρία είναι μία κοπιαστική και πολυδάπανη διαδικασία. Απαιτεί σημαντικό χρόνο και ανθρώπινους πόρους στο πεδίο με βασικό της μειονέκτημα ότι ορίζει μία σημειακή τεχνική παρατήρησης η οποία μόνο μέσα από μακροχρόνιες μετρήσεις μπορεί να οδηγήσει σε έναν σχεδόν κανονικό κάνναβο δεδομένων για μία πεπερασμένη γεωγραφική περιοχή. Αυτή η δυσκολία καθιστά σε κάθε καινούρια καμπάνια μέτρησης βαρύτητας για μία περιοχή σχεδόν απαραίτητη την αξιοποίηση δεδομένων που έχουν παρατηρηθεί εκεί ή στην ευρύτερη περιοχή από προηγούμενες καμπάνιες. Με αυτόν όμως τον τρόπο οι μετρήσεις πραγματοποιούνται με διαφορετικά όργανα που έχουν διαφορετική συστηματική συμπεριφορά, ακόμη κι αν προέρχονται από την ίδια εταιρεία, ένα πρόβλημα που έτσι κι αλλιώς υφίσταται για μία οποιαδήποτε καμπάνια μέτρησης όπου χρησιμοποιούνται περισσότερα του ενός βαρυτήμετρα. Έτσι, η μοντελοποίηση των σφαλμάτων των μετρήσεων γίνεται μία ιδιαίτερα πολύπλοκη διαδικασία. Επιπλέον, οι μετρήσεις αναφέρονται σε διαφορετικές εποχές παρατήρησης, κάτι που για το μη στατικό μέγεθος της βαρύτητας αποτελεί ένα επιπρόσθετο και βασικό ζήτημα.

Δορυφορικές τεχνικές παρατήρησης που υλοποιήθηκαν τα τελευταία δεκαπέντε χρόνια εισήγαγαν εναλλακτικές μεθόδους *χαρτογράφησης* του γήινου πεδίου βαρύτητας. Εφαρμόζοντας τη θεωρία διακριτών δορυφορικών μεθοδολογιών, γνωστών από τη βιβλιογραφία, όπως η μέθοδος των διαδορυφορικών αποστάσεων και η δορυφορική βαθμιδομετρία, μία σειρά από δορυφορικές αποστολές αμερικάνικων και ευρωπαϊκών διαστημικών υπηρεσιών προσέφεραν διαδικασίες προσδιορισμού του γήινου πεδίου βαρύτητας με τελικό προϊόν τα αντίστοιχα μοντέλα του πεδίου βαρύτητας. Αναλύοντας τα αντίστοιχα δορυφορικά δεδομένα προκύπτουν διαφορετικές επιλύσεις του πεδίου βαρύτητας με τη μορφή ενός πεπερασμένου αριθμού σφαιρικών αρμονικών συντελεστών που είναι υπολογισμένοι μέχρι έναν μέγιστο βαθμό και τάξη και εκφράζουν τη συνάρτηση του γεωδυναμικού με τον τρόπο ενός σφαιρικού αρμονικού αναπτύγματος. Προκύπτουν με αυτόν τον τρόπο προσδιορισμοί του πεδίου βαρύτητας που είναι παγκόσμιοι και χαρακτηρίζονται από μία ενιαία ανάλυση και ακρίβεια σε όλη την έκταση της γήινης επιφάνειας. Αυτή η ανωτερότητα των δορυφορικών μεθόδων έναντι των επίγειων μετρήσεων βαρύτητας έχει δημιουργήσει μία μεγάλη ώθηση σε πολλούς επιστημονικούς και τεχνικούς τομείς από τον τρόπο διαχείρησης και επεξεργασίας ενός πολύ μεγάλου όγκου πρωτογενών δορυφορικών δεδομένων μέχρι τη βιομηχανική υλοποίηση τεχνικών μερών των δορυφόρων τα οποία πρέπει να πληρούν συγκεκριμένες θεωρητικές προδιαγραφές.

Κοινό ζητούμενο στις μετρήσεις όλων των παραπάνω κατηγοριών είναι η ανάγκη αναφοράς τους σε ένα κοινό μαθηματικό πλαίσιο. *Οι συντεταγμένες*, *τα συστήματα αναφοράς* και *τα πλαίσια αναφοράς* είναι εκείνα τα μαθηματικά εργαλεία που υλοποιούν τη μοναδική περιγραφή των συλλεχθέντων παρατηρήσεων ως αριθμητικά μεγέθη στο χώρο ενώ ταυτόχρονα επιτρέπουν την κοινή τους επεξεργασία με ομοειδή ή ακόμα και ετερογενή δεδομένα που έχουν ληφθεί σε διαφορετικές χρονικές στιγμές από διαφορετικούς αισθητήρες.

Οι συντεταγμένες προσφέρουν το βασικό μαθηματικό εργαλείο για την περιγραφή της θέσης στον τρισδιάστατο χώρο και τη μονοσήμαντη σύνδεση της μεμονωμένης παρατήρησης από τη μετρητική συσκευή στο συγκεκριμένο σημείο. Μέσω των συντεταγμένων πραγματοποιείται η θεμελιώδης σύνδεση των δεδομένων με έναν αριθμητικό τρόπο που επιτρέπει την καταγραφή τους και τη μετέπειτα επεξεργασία τους. Έτσι, οι συντεταγμένες ορίζουν το κοινό υπόβαθρο περιγραφής των παρατηρήσεων κάθε κατηγορίας τόσο των επίγειων όσο και των δορυφορικών.

Σε ότι αφορά τον πρακτικό τους υπολογισμό οι συντεταγμένες προκύπτουν με βάση συγκεκριμένες επιλογές για την αφετηρία και τον τρόπο ορισμού ενός συστήματος αξόνων στον τρισδιάστατο χώρο, αναφέρονται δηλαδή σε διακριτά και συγκεκριμένα συστήματα αναφοράς. Διαφορετικός τρόπος ορισμού της αφετηρίας και των αξόνων ενός συστήματος αναφοράς θα οδηγήσει για το ίδιο σημείο του τρισδιάστατου χώρου σε διαφορετικές αριθμητικές τιμές συντεταγμένων. Επειδή όμως ο σκοπός των συντεταγμένων είναι η μονοσήμαντη περιγραφή σημείων του χώρου, οι συντεταγμένες ως αριθμητικές ποσότητες συνδέονται άρρηκτα με το σύστημα αναφοράς στο οποίο έχουν υπολογιστεί. Είναι δηλαδή δυνατόν για το ίδιο σημείο να διαθέτουμε διαφορετικές τιμές συντεταγμένων, όπως αυτές προκύπτουν για τα αντίστοιχα συστήματα αναφοράς που έχουν οριστεί με διαφορετικό τρόπο. Ένα σύστημα αναφοράς μπορεί να αναφέρεται στο σύνολο της γης, να έχει δηλαδή αφετηρία ένα χαρακτηριστικό σημείο της γης, όπως για παράδειγμα το κέντρο των γήινων μαζών, και να συγκροτείται από άξονες που συνδέονται με φυσικά χαρακτηριστικά της γης, όπως ο άξονα περιστροφής της γης ή το ισημερινό επίπεδο. Στην περίπτωση αυτή μιλούμε για *παγκόσμια ή γεωκεντρικά συστήματα αναφοράς* που ορίζουν και τις αντίστοιχες συντεταγμένες. Ένα τέτοιο σύστημα αναφοράς προσφέρεται για την περιγραφή φαινομένων, μεγεθών και παρατηρήσεων με παγκόσμια κάλυψη, όπως η κίνηση ενός δορυφόρου και τα δεδομένα που αυτός καταγράφει, τα γεωμετρικά δεδομένα εναέριων αισθητήρων, δηλαδή ενός ελικοπτέρου, ενός αεροπλάνου ή ενός μη επανδρωμένου οχήματος, τα δεδομένα ενός παγκόσμιου ψηφιακού μοντέλου εδάφους κ.λπ.

Η ανάγκη περιγραφής μεγεθών και παρατηρήσεων που αναφέρονται σε τοπική ή περιφερειακή κλίμακα οδηγούν στον ορισμό *τοπικών συστημάτων αναφοράς* και των αντίστοιχων συντεταγμένων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιων συστημάτων είναι εκείνα στα οποία ο άξονας z ταυτίζεται με τη διεύθυνση της κατακορύφου του συγκεκριμένου τόπου, δηλαδή με τη διεύθυνση-φορέα του διανύσματος της βαρύτητας στο συγκεκριμένο σημείο η οποία από τη μία της πλευρά εκτείνεται στο εσωτερικό της γης *δείχνοντας προς τα κάτω* και από την άλλη πλευρά ορίζει προεκτεινόμενη *προς τα επάνω* το *ζενίθ* του τόπου αυτού. Έχοντας την παραπάνω σύνδεση με τη διεύθυνση της κατακορύφου το επίπεδο $< x\, y >$ ενός τέτοιου τοπικού συστήματος θα ταυτίζεται με το μοναδικό οριζόντιο επίπεδο που ορίζεται για τον συγκεκριμένο τόπο. Ένα σύστημα αναφοράς που έχει οριστεί με αυτόν τον τρόπο μπορεί έτσι να συνδεθεί με όργανα μέτρησης που συνδέονται κατασκευαστικά με τη διεύθυνση της κατακορύφου και να ορίσει τις αντίστοιχες συντεταγμένες, συσχετίζοντας τις απευθείας μετρήσεις του οργάνου με τα αντίστοιχα σημεία του τρισδιάστατου χώρου.

Τα παγκόσμια συστήματα αναφοράς αποτελούν θεωρητικά κατασκευάσματα τα οποία αναφέρονται σε έννοιες που δεν μπορούν να προσδιοριστούν άμεσα ή που μεταβάλλονται συνεχώς, όπως το κέντρο μάζας της γης ή ο άξονας περιστροφής της γης. Καθώς όμως η ύπαρξή τους είναι ιδιαίτερα κρίσιμη για τη μελέτη παγκόσμιων μεγεθών και φαινομένων δημιουργείται η ανάγκη *υλοποίησης* των συστημάτων αναφοράς στην πράξη. Μία τέτοια υλοποίηση ενός συγκεκριμένου συστήματος αναφοράς πραγματοποιείται μέσα από ένα παγκόσμιο δίκτυο σημείων με μόνιμη σήμανση, το οποίο ορίζει το αντίστοιχο *πλαίσιο αναφοράς*. Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται ένα πραγματικό δίκτυο σταθμών με γνωστές συντεταγμένες στο συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί αφενός για τη σύνδεση άλλων σημείων το χώρου με το ίδιο σύστημα αναφοράς αλλά κυρίως για τη μελέτη και παρακολούθηση των χρονικών μεταβολών τις οποίες υφίσταται το σύστημα αναφοράς με την πάροδο του χρόνου. Οι μεταβολές αυτές που συνδέονται με πραγματικά φυσικά αίτια, όπως η κίνηση των τεκτονικών πλακών και οι διακυμάνσεις στη διεύθυνση του άξονα περιστροφής και στο μέτρο της ταχύτητας περιστροφής της γης, μπορούν να καταγραφούν μέσα από τη συνεχή παρακολούθηση των σημείων του δικτύου και να ποσοτικοποιηθούν σε μεταβολές ή διορθώσεις των συντεταγμένων τους. Αυτές οι διορθώσεις μεταφέρονται έτσι στις διορθωμένες συντεταγμένες ενός οποιουδήποτε άλλου σημείου που επιθυμούμε να εκφράσουμε στο ίδιο σύστημα αναφοράς.

Κεφάλαιο 2

Συντεταγμένες, συστήματα αναφοράς και πλαίσια αναφοράς

Η ανακάλυψη στον 17ο αιώνα των καρτεσιανών συντεταγμένων από τον Γάλλο μαθηματικό και φιλόσοφο René Descartes (1596-1650), το όνομα του οποίου στα Λατινικά αναφέρεται ως Cartesius, αποτέλεσε μία επανάσταση στα μαθηματικά. Οι συντεταγμένες προσέφεραν ένα μαθηματικό εργαλείο το οποίο επέτρεψε για πρώτη φορά μία συστηματική σύνδεση μεταξύ αλγεβρικών εκφράσεων και Ευκλείδειας γεωμετρίας, ενώ ταυτόχρονα ποσοτικοποίησαν αριθμητικά γεωμετρικές έννοιες όπως η θέση σημείων και γεωμετρικών σχημάτων σε σχέση με άλλα σημεία και σχήματα που βρίσκονται σε έναν άξονα, στο επίπεδο ή στον τρισδιάστατο χώρο. Από τη στιγμή που μεμονωμένα σημεία μπορούσαν να περιγραφούν αριθμητικά, αυτό είχε ως συνέπεια την παραμετροποίηση αυτής της πληροφορίας μέσω τριών παραμέτρων x, y και z, έναν για κάθε μία διάσταση του τρισδιάστατου χώρου, οι οποίοι με τη σειρά τους μπορούσαν να περιγράφουν συναρτησιακά άλλα γεωμετρικά σχήματα.

Με αυτόν τον τρόπο διάφορα γεωμετρικά σχήματα μπορούσαν πλέον να περιγραφούν από αλγεβρικές εκφράσεις, που ήταν συναρτήσεις των x, y και z, και εξέφραζαν σημεία που πληρούσαν την ιδιότητα να ανήκουν στο συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα. Για παράδειγμα, η αλγεβρική εξίσωση $x^2 + y^2 = 9$ που περιγράφει την κλειστή καμπύλη της περιφέρειας ενός κύκλου με ακτίνα ίση με 3 προέρχεται από τον παραμετρικό ορισμό ενός συστήματος συντεταγμένων με αφετηρία το κέντρο του κύκλου και δύο κάθετους μεταξύ τους άξονες x και y που τέμνονται στο κέντρο αυτό και ανήκουν στο επίπεδο του κύκλου. Έτσι, ο συγκεκριμένος κύκλος εκφράζει το σύνολο των σημείων του συγκεκριμένου επιπέδου των οποίων οι συντεταγμένες x και y πληρούν την εξίσωση $x^2 + y^2 = 9$.

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες αποτελούν πλέον το θεμέλιο των σύγχρονων μαθηματικών με ιδιαίτερη έμφαση τους κλάδους της αναλυτικής και διαφορικής γεωμετρίας, της γραμμικής άλγεβρας, του λογισμού συναρτήσεων πολλών μεταβλητών και του διανυσματικού λογισμού. Χαρακτηριστικά παραδείγματα στα οποία οι συντεταγμένες προσφέρουν το εργαλείο για την αριθμητική τους επεξεργασία και την υπολογιστική τους απόδοση μέσα από έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή αποτελούν η έκφραση της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης μίας ή περισσότερων μεταβλητών, η περιγραφή βαθμωτών και διανυσματικών πεδίων θέσης ή η επεξεργασία γραμμικών συστημάτων. Ταυτόχρονα, καθώς εκφράζουν γεωμετρικά και συναρτησιακά μεγέθη με αριθμητικά μέσα, οι συντεταγμένες αποτελούν αναπόσπαστο εργαλείο για τις περισσότερες εφαρμοσμένες επιστήμες στις οποίες η γεωμετρία παίζει έναν κεντρικό ρόλο, όπως η φυσική, η αστρονομία, τα εφαρμοσμένα μαθηματικά και οι επιστήμες του μηχανικού. Προβλήματα υπολογιστικής γεωμετρίας, γραφικών σε ηλεκτρονικό υπολογιστή, τρισδιάστατων μοντέλων και επεξεργασίας δεδομένων διαφορετικών κατηγοριών που συνδέονται με γεωμετρική πληροφορία μπορούν να αντιμετωπιστούν μόνο μέσα από την εφαρμογή του εργαλείου των συντεταγμένων.

2.1 Η Γεωμετρία του René Descartes

Η βασική προσέγγιση που ακολούθησε ο René Descartes το 1637 στο έργο του *Des matieres de la Geometrie* είναι να μεταφέρει τους γνωστούς τελεστές της αριθμητικής, δηλαδή την πρόσθεση, την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, καθώς και τον συμβολισμό της άλγεβρας σε προβλήματα της γεωμετρίας. Όπως λοιπόν προσθέτονται ή αφαιρούνται δύο αριθμοί το κίνητρο του Descartes ήταν να διερευνήσει κατά πόσο είναι δυνατόν να εφαρμοστεί μία αντίστοιχη λογική στον χειρισμό και την αναπαράσταση γραμμών και ευθυγράμμων τμημάτων. Μία τέτοια προσέγγιση, σύμφωνα πάντοτε με τον Descartes, όχι μόνο θα προσέθετε γνώση στην κατανόηση και ερμηνεία των διάφορων γνωστών γεωμετρικών ποσοτήτων, αλλά θα τις έκανε προσιτές και κατανοητές ακόμα και από το μη μυημένο κοινό.

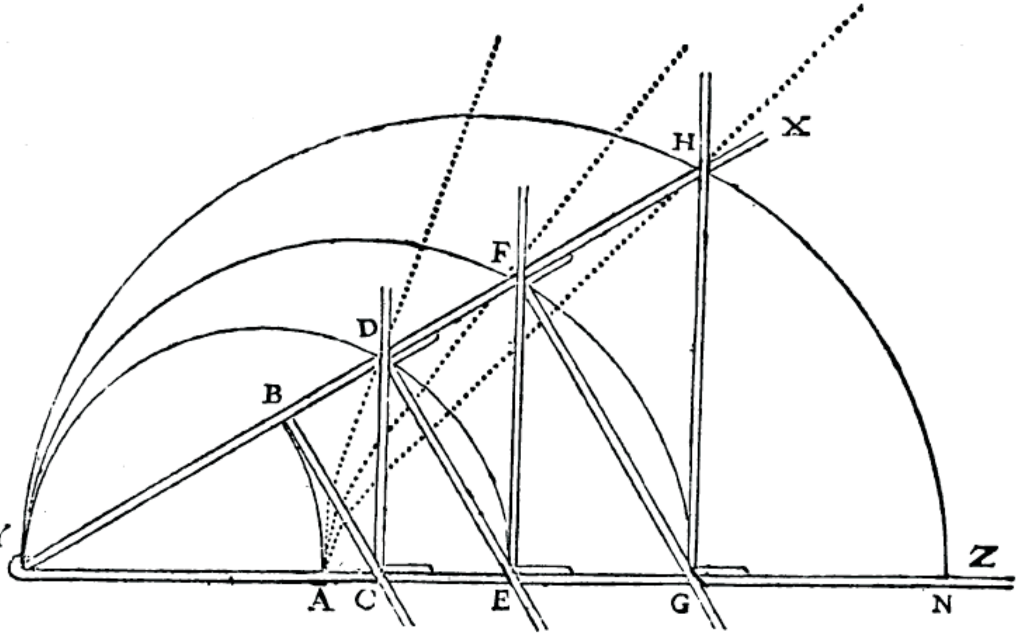
Η συλλογιστική με την οποία ο Descartes επιχειρεί και καταφέρνει να συνδέσει γεωμετρικά σχήματα με αριθμούς χρησιμοποιώντας τα υπολογιστικά μέσα της εποχής του είναι αξιοθαύμαστη. Στην προσπάθειά του να συνδέσει την περιγραφή μιας ζητούμενης γραμμής με απλές αριθμητικές πράξεις εισάγει την έννοια της *μοναδιαίας γραμμής* (*l' unité*), μιας στοιχειώδους δηλαδή γραμμικής ποσότητας που έχει την ιδιότητα να αναπαράγει τυχαίες άλλες γραμμές αρκεί να πολλαπλασιαστεί με τον κατάλληλο πραγματικό αριθμό. Ταυτόχρονα η αριθμητική πράξη της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης μεταξύ δύο αριθμών μεταφέρεται ως ένα ευθύ ανάλογο στις προσθέσεις και αφαιρέσεις μεταξύ γραμμών ενώ και η διαίρεση εμφανίζεται με τη μορφή της πολλαπλασιαστικής σχέσης που έχουν οι διαφορετικές γραμμές ως προς τη μοναδιαία γραμμή. Τέλος, η έννοια της μοναδιαίας γραμμής εμφανίζεται και στη δημιουργία αναλογιών μεταξύ διαφορετικών γραμμών και της μοναδιαίας γραμμής, κάτι που αντιστοιχεί στην εξαγωγή ρίζας ενός τυχαίου βαθμού της αντίστοιχης γραμμής.

Η εισαγωγή από τον Descartes της ιδέας μιας στοιχειώδους γραμμής με μήκος ίσο με τη μονάδα, η οποία χρησιμοποιείται ως η βασική ποσότητα για την αναπαραγωγή τυχαίων γραμμών, αποτέλεσε όχι μόνο το υπόβαθρο των συντεταγμένων και των συστημάτων αναφοράς όπως τα γνωρίζουμε σήμερα αλλά και ολόκληρων γνωστικών περιοχών που βασίστηκαν σε αυτές τις έννοιες και εμφανίστηκαν πολύ αργότερα, όπως του διανυσματικού λογισμού. Οι βασικοί τελεστές του διανυσματικού λογισμού, ο οποίος καθορίζει το μαθηματικό πλαίσιο μέσω του οποίου γίνεται ο χειρισμός και η επεξεργασία διανυσμάτων και διανυσματικών πεδίων, βασίζονται ακριβώς στον τρόπο που εισήγαγε ο Descartes για την αριθμητική περιγραφή γεωμετρικών μεγεθών. Η πρόσθεση και η αφαίρεση γραμμών εμφανίζεται στον διανυσματικό λογισμό στον γραφικό τρόπο ορισμού της πρόσθεσης και της αφαίρεσης μεταξύ δύο διανυσμάτων, ενώ ο ορισμός της μοναδιαίας γραμμής αποτελεί βασική ποσότητα στον διανυσματικό λογισμό όπου το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{e_a}$ συνδέεται με το οποιοδήποτε διάνυσμα $\mathbf{a}$ μέσω της σχέσης

$$\mathbf{e_a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \tag{2.1}$$

Πρόκειται δηλαδή για το διάνυσμα εκείνο που έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{a}$ και μέτρο ίσο με τη μονάδα. Ο πολλαπλασιασμός του $\mathbf{e_a}$ με το μέτρο του $\mathbf{a}$ εκφράζει το ίδιο το διάνυσμα $\mathbf{a}$, ορίζοντας με αυτόν τον τρόπο την υλοποίηση της ιδέας της μοναδιαίας γραμμής του Descartes στον διανυσματικό λογισμό.

Η εισαγωγή των βασικών τελεστών της αριθμητικής στη διαχείρηση γραμμών και γεωμετρικών σχημάτων αποτέλεσε τον έναν άξονα του έργου του Descartes. Ο άλλος άξονας ήταν η εισαγωγή του αλγεβρικού συμβολισμού με τη βοήθεια του οποίου γραμμές και καμπύλες μπορούν να περιγραφούν με συμβολικό τρόπο. Με αυτόν τον τρόπο έγινε δυνατή η περιγραφή μίας γεωμετρικής ποσότητας τόσο αριθμητικά όσο και συμβολικά δηλαδή αφηρημένα με τη βοήθεια αλγεβρικών μέσων, ένας συνδυασμός που επέτρεψε μία συστηματική προσέγγιση της γεωμετρίας. Η αφαίρεση και η πρόσθεση δύο γραμμών, ο πολλαπλασιασμός μίας γραμμής με έναν πραγματικό αριθμό, η ύψωση του μήκους μιας γραμμής σε μία ακέραια δύναμη ή ισοδύναμα ο υπολογισμός μίας ρίζας για να οριστούν καινούριες γραμμές και να προκύψουν νέες γεωμετρικές ποσότητες απέκτησαν πλέον μαθηματική υπόσταση, επιτρέποντας τον αλ-



Σχήμα 2.1: *Το γεωμετρικό κατασκεύασμα XYZ του René Descartes (Descartes, 1637)*

γεβρικό χειρισμό και τον αριθμητικό υπολογισμό γνωστών γεωμετρικών προβλημάτων από περισσότερους χρήστες. Όσοι διέθεταν τις βασικές γνώσεις της αριθμητικής και της συμβολικής περιγραφής που αποτελεί το θεμέλιο της άλγεβρας ήταν σε θέση όχι μόνο να κατανοήσουν γεωμετρικές έννοιες που μέχρι τότε αφορούσαν ένα εξειδικευμένο ακροατήριο, αλλά και να κάνουν πρακτικούς αριθμητικούς υπολογισμούς σε συγκεκριμένα γεωμετρικά προβλήματα.

Κεντρικό βοήθημα στο έργο του Descartes αποτελεί το κατασκεύασμα XYZ που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.1. Χρησιμοποιώντας αυτή την κατασκευή ο Descartes συνδέει γραμμές και καμπύλες με μήκη και αριθμούς αποδεικνύοντας ότι γεωμετρικά σχήματα μπορούν να περιγραφούν με αλγεβρικά και αριθμητικά μέσα. Το γεωμετρικό κατασκεύασμα XYZ αποτελείται, όπως φαίνεται από το Σχήμα 2.1, από μία σειρά ορθογώνιων χαράκων που είναι τοποθετημένοι κατά μήκος ενός κοινού χάρακα YZ ο οποίος υλοποιεί την ευθεία AN, επάνω στην οποία ορίζονται άλλα ενδιάμεσα σημεία (C, E και G). Σε κάθε ένα από αυτά τα ενδιάμεσα σημεία τοποθετείται και από ένας ορθογώνιος χάρακας με την κορυφή της ορθής του γωνίας να ταυτίζεται με το αντίστοιχο σημείο της ευθείας AN, δηλαδή το C, το E και το G και τη μία κάθετή του πλευρά να ταυτίζεται με την ευθεία AN. Στο σημείο Y είναι συνδεδεμένος ένας δεύτερος χάρακας YX ο οποίος με ακριβώς ανάλογο τρόπο φέρει τοποθετημένους ορθογώνιους χάρακες με τη μία τους πλευρά να ταυτίζεται με την ευθεία YX. Οι συγκεκριμένοι χάρακες είναι τοποθετημένοι με τέτοιο τρόπο ώστε η κορυφή της ορθής τους γωνίας να ταυτίζεται με εκείνα τα σημεία στα οποία τέμνουν οι ορθογώνιοι χάρακες του άξονα YZ τον άξονα YX. Έτσι οι χάρακες της ευθείας YX είναι τοποθετημένοι στα σημεία B, D, F, H και ούτω καθεξής.

Στο σημείο Y που υλοποιεί την κοινή αφετηρία των δύο κανόνων YX και YZ όπως και στα σημεία B, D, F, H και C, E, G, που αποτελούν τα σημεία τομής των επί μέρους ορθογώνιων χαράκων που είναι τοποθετημένοι αντίστοιχα στους άξονες YX και YZ τοποθετούνται σύνδεσμοι οι οποίοι αφενός συγκρατούν τα επί μέρους στοιχεία της γεωμετρικής αυτής κατασκευής στις συγκεκριμένες θέσεις ταυτόχρονα όμως έχουν την ιδιότητα να επιτρέπουν την αυξομείωση της γωνίας XYZ. Μάλιστα κατά την αυξομείωση αυτή μεταβάλλεται συνεχώς και η θέση των ορθογώνιων χαράκων επάνω στους άξονες και κατά συνέπεια και η θέση των σημείων B, D, F, H, C, E και G επάνω σε αυτούς. Πιο συγκεκριμένα, όσο η γωνία XYZ αυξάνεται τόσο τα εν λόγω σημεία απομακρύνονται από το σημείο A, ενώ όσο η γωνία XYZ μικραίνει τόσο περισσότερο αυτά τα σημεία προσεγγίζουν το σημείο A του κανόνα YZ. Όταν η γωνία XYZ μηδενιστεί, δηλαδή όταν οι πλευρές YX και YZ ταυτιστούν μεταξύ τους, τότε και όλα τα σημεία B, D, F, H, C, E και G ταυτίζονται με το σημείο A.

Όσο η γωνία XYZ αυξάνεται τα σημεία αρχίζουν να απομακρύνονται από το A αλληλεπιδρώντας μεταξύ τους μέσω του συστήματος των συνδεδεμένων ορθογώνιων κανόνων . Έτσι, ο ορθογώνιος κανόνας BC ο οποίος είναι τοποθετημένος με ορθή γωνία ως προς τον άξονα XY στο σημείο B σπρώχνει τον κανόνα CD επάνω στον άξονα YZ προς το σημείο B μία κίνηση η οποία πραγματοποιείται πάντοτε σε ορθή γωνία σε σχέση με την ευθεία YZ. Την ίδια στιγμή και με έναν παρόμοιο τρόπο ο κανόνας CD σπρώχνει τον κανόνα DE κατά μήκος του άξονα YX και παράλληλα προς τον κανόνα BC, ο κανόνας DE μετακινεί τον κανονα EF, ο κανόνας EF σπρώχνει τον κανόνα FG, ο κανόνας FG μετακινεί τον κανόνα GH και ούτω καθεξής. Μπορεί λοιπόν να δημιουργηθεί με αυτόν τον τρόπο ένα σχήμα από θεωρητικά άπειρους ορθογώνιους κανόνες συνδεδεμένους μεταξύ τους, όπου ο κάθε ένας μετακινεί τον επόμενο και όπου οι μισοί κανόνες είναι διατεταγμένοι σε καθετότητα με τον άξονα YZ και οι άλλοι μισοί είναι κάθετοι στον άξονα YX.

Καθώς η γωνία XYZ αυξάνεται, οι διαδοχικές θέσεις του σημείου B στο επίπεδο της γωνίας XYZ περιγράφουν την καμπύλη AB, η οποία στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ένας κύκλος. Πράγματι, επειδή το κάθετο στέλεχος που είναι τοποθετημένο στο σημείο B δεν αλλάζει θέση σε σχέση με τον άξονα XY όσο μεταβάλλεται η γωνία XYZ, για τις πλευρές YA και YB θα ισχύει $YA = YB$ για κάθε θέση του σημείου B. Με άλλα λόγια όσο ο άξονας XY μεταβάλλει τη θέση του σε σχέση με τον άξονα YZ, αυξάνοντας την τιμή της γωνίας XYZ, το σημείο B διαγράφει την περιφέρεια ενός κύκλου με κέντρο το σημείο Y και ακτίνα $YA = YB$. Στο Σχήμα 2.1 εμφανίζονται και άλλοι χαρακτηριστικοί κύκλοι. Καθώς οι γωνίες που σχηματίζουν τα κινούμενα επάνω στον άξονα YX σημεία D, F και H σε σχέση με το σημείο Y και τα κινούμενα επάνω στον άξονα YZ σημεία E, G και N είναι πάντοτε ορθές, τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή για μία τυχαία θέση του άξονα YX σε σχέση με τον YZ, που ορίζει μία μη μηδενική τιμή της γωνίας XYZ, τα σημεία D, F και H θα ανήκουν στην περιφέρεια κύκλων που θα διέρχονται αντίστοιχα από τα σημεία (Y, E), (Y, G) και (Y, N). Από το θεώρημα του Θαλή προκύπτει ότι οι υποτείνουσες των ορθογώνιων τριγώνων στα σημεία D, F και H ταυτίζονται με τις διαμέτρους των αντίστοιχων κύκλων, οι οποίοι επομένως έχουν ακτίνες $(YE)/2$, $(YG)/2$ και $(YN)/2$ αντίστοιχα.

Οι παραπάνω περιφέρειες κύκλων αντιστοιχούν σε κάθε μία τυχαία θέση του άξονα YX σε σχέση με τον YZ ως το αποτέλεσμα των διαδοχικών μετακινήσεων των ορθογώνιων κανόνων της κατασκευής XYZ που περιγράφηκε προηγουμένως. Εκτός όμως από τους κύκλους αυτούς τα ίδια τα σημεία D, F και H διαγράφουν διαφορετικές καμπύλες από αυτές της περιφέρειας ενός κύκλου. Οι καμπύλες αυτές ανήκουν όλες στο επίπεδο των αξόνων YX και YZ και είναι πιο πολύπλοκες από την περιφέρεια ενός κύκλου. Ωστόσο, με τη βοήθεια της κατασκευής XYZ και της αλγεβρικής αναπαράστασης και επεξεργασίας των εμπλεκόμενων στοιχειωδών γεωμετρικών ποσοτήτων που εμφανίζονται στο Σχήμα 2.1 ο Descartes προσφέρει τα εργαλεία για την περιγραφή με αναλυτικό τρόπο τις εξισώσεις αυτών των καμπύλων. Μάλιστα ο ίδιος υπογραμμίζει ότι αν και οι εν λόγω καμπύλες είναι πιο πολύπλοκες από αυτές της περιφέρειας ενός κύκλου ωστόσο πρέπει να είναι εφικτή η αλγεβρική περιγραφή τους με έναν ανάλογο τρόπο.

Ο Claude Rabuel (1669-1728) είναι ένας άλλος διάσημος Γάλλος μαθηματικός που δίδαξε στη Λυών και ασχολήθηκε εκτεταμένα με το έργο του Descartes. Στα σχόλιά του στη γεωμετρία του Descartes (Commentaires sur la Geometrie de Descartes) ο Rabuel σχολιάζει με λεπτομέρεια το έργο του Descartes. Σε ένα ογκώδες κείμενο που δημοσιεύθηκε μετά το θάνατό του στα 1730, ο Rabuel εξετάζει αναλυτικά όλες της πτυχές της γεωμετρία του Descartes διερευνώντας και αποδεικνύοντας με αλγεβρικά μέσα τις επί μέρους προτάσεις, εικασίες και παραδείγματα που αναφέρονται από τον Descartes. Έτσι, ο Rabuel απέδειξε την ακριβή αλγεβρική μορφή των εξισώσεων που περιγράφουν τις καμπύλες που διαγράφουν τα σημεία D, F και H στο επίπεδο των αξόνων YX και YZ. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι εισάγεται η παραμετροποίηση $YA = YB = r$, $YC = x$, $CD = y$ και $YD = z$. Τότε η έκφραση του συνημιτόνου της γωνίας $\widehat{Y} = \widehat{XYZ}$ στο ορθογώνιο τρίγωνο YBC θα δίνεται από τη σχέση

$$\cos \widehat{Y} = \frac{YB}{YC} = \frac{r}{x} \tag{2.2}$$

Η ίδια γωνία μπορεί όμως να περιγραφεί και από το ορθογώνιο τρίγωνο YCD. Θα ισχύει

$$\cos \widehat{Y} = \frac{YC}{YD} = \frac{x}{z} \tag{2.3}$$

Εξισώνοντας τα δεξιά μέλη των δύο τελευταίων σχέσεων παίρνουμε

$$\frac{r}{x} = \frac{x}{z} \Longrightarrow z = \frac{x^2}{r} \tag{2.4}$$

Επίσης, στο ορθογώνιο τρίγωνο YCD ισχύει σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα

$$z^2 = x^2 + y^2 \tag{2.5}$$

Συνδυάζοντας τη (2.4) με τη (2.5) θα έχουμε

$$\left(\frac{x^2}{r}\right)^2 = x^2 + y^2 \tag{2.6}$$

από όπου παίρνουμε τελικά για την εξίσωση της καμπύλης AD που διαγράφει το σημείο D επάνω στο επίπεδο της γεωμετρικής κατασκευής XYZ όσο ο κανόνας XY απομακρύνεται από τον YZ

$$x^4 = r^2 \left(x^2 + y^2\right) \tag{2.7}$$

Για τη μελέτη της καμπύλης AF που διαγράφει το σημείο F επάνω στο επίπεδο της γεωμετρικής κατασκευής XYZ όσο αυξάνεται η γωνία $\widehat{XYZ}$ μπορεί να ακολουθηθεί η παραμετροποίηση $YA = YB = r$, $YE = x$, $EF = y$ και $YF = z$. Τότε θα έχουμε στα τρίγωνα YDE και YFE τις ακόλουθες αντίστοιχες σχέσεις για το συνημίτονο της γωνίας $\widehat{Y}$

$$\cos \widehat{Y} = \frac{YD}{YE} = \frac{YD}{x} \tag{2.8}$$

και

$$\cos \widehat{Y} = \frac{YE}{YF} = \frac{x}{z} \tag{2.9}$$

Κεφάλαιο 6

Επίγεια Συστήματα Αναφοράς

Ένα επίγειο σύστημα αναφοράς (Terrestrial Reference System, TRS) είναι ένα χωρικό σύστημα αναφοράς που περιστρέφεται μαζί με τη γη κατά τη διάρκεια της ημερήσιας κίνησής της στο διάστημα. Πρόκειται επομένως για ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς, το οποίο ακολουθεί τη δυναμική κίνηση της γης. Σε ένα τέτοιο σύστημα οι θέσεις σημείων που είναι προσκολλημένα στη γήινη επιφάνεια έχουν συντεταγμένες που επηρεάζονται από γεωφυσικές μεταβολές, όπως παλίρροιες ή τεκτονικές κινήσεις, και τα συγκεκριμένα φυσικά φαινόμενα καταγράφονται ως μικρές μεταβολές στις αριθμητικές τιμές των συντεταγμένων. Το γεωμετρικό μοντέλο ενός TRS περιλαμβάνει μία αφετηρία O και μία ορθογώνια βάση διανυσμάτων $\mathbf{E}$ που είναι τοποθετημένη στο O και τα διανύσματα της οποίας έχουν όλα το ίδιο μέτρο. Η τριάδα των μοναδιαίων διανυσμάτων που ανήκουν στις διευθύνσεις των αντίστοιχων διανυσμάτων βάσης εκφράζει τον προσανατολισμό του TRS ενώ το μέτρο των διανυσμάτων της βάσης $\mathbf{E}$, το οποίο στη γενική περίπτωση είναι διαφορετικό της μονάδας, ορίζει την κλίμακα του TRS

$$\lambda = |\mathbf{E}_i| \tag{6.1}$$

με το i να μπορεί να παίρνει τιμές που αντιστοιχούν στους τρεις άξονες. Από τη στιγμή που τα διανύσματα της βάσης $\mathbf{E}$ έχουν όλα το ίδιο μέτρο η τιμή της κλίμακας λ θα είναι κοινή και για τους τρεις άξονες.

Η IERS έχει συμβατικά ορίσει ότι ένα σύστημα που φέρει τον χαρακτηρισμό TRS θα έχει την αφετηρία του τοποθετημένη στο γήινο βαρύκεντρο, το γεωμετρικό δηλαδή σημείο που αντιπροσωπεύει μαθηματικά το κέντρο μάζας του συνόλου των γήινων κατανομών, από τον φλοιό μέχρι και τον πυρήνα. Αυτό σημαίνει ότι ένα TRS αποτελεί ένα *γεωκεντρικό* σύστημα αναφοράς. Ένα τοποκεντρικό ή τοπικό σύστημα αναφοράς αντιθέτως έχει αφετηρία σε διακριτά σημεία επάνω στην επιφάνεια της γης και προσανατολισμό που προσαρμόζεται σε τοπικά χαρακτηριστικά του σημείου, όπως για παράδειγμα τη διεύθυνση της κατακορύφου ή τη διεύθυνση της καθέτου σε ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής, ποσότητες που εκφράζουν μέσω των αστρονομικών και των γεωδαιτικών συντεταγμένων αντίστοιχα την απόλυτη θέση του εξεταζόμενου σημείου επάνω στη γήινη επιφάνεια.

Ο προσανατολισμός ενός TRS επιλέγεται, επίσης στο πλαίσιο σχετικής σύμβασης της IERS, να είναι ‘ισημερινός’, κάτι που υπονοεί ότι ο τρίτος άξονας (Z) ταυτίζεται με τον άξονα περιστροφής της γης, διέρχεται δηλαδή από τον πόλο. μεση συνέπεια αυτής της επιλογής είναι το επίπεδο των άλλων δύο αξόνων θα ταυτίζεται με το επίπεδο του ισημερινού. Τέλος, η υιοθετούμενη μονάδα μέτρησης των μηκών είναι το μέτρο (SI).

Στο πλαίσιο των παραπάνω υποθέσεων και γεωμετρικών επιλογών ο γενικός μετασχηματισμός των καρτεσιανών συντεταγμένων $\mathbf{X}_1$ και $\mathbf{X}_2$ ενός σημείου του τρισδιάστατου χώρου σε δύο διαφορετικά επίγεια συστήματα αναφοράς TRS_1 και TRS_2 θα δίνεται από το γενικό μοντέλο του μετασχηματισμού ομοιότητας που εξετάσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{T}_{12} + \lambda_{12}\,\mathbf{R}_{12}\,\mathbf{X}_1 \tag{6.2}$$

όπου $\mathbf{T}_{12}$ το διάνυσμα μετάθεσης που συνδέει τις δύο αφετηρίες των συστημάτων TRS_1 και TRS_2 και $\mathbf{R}_{12}$ ο συνολικός πίνακας στροφής που περιγράφει τη γεωμετρική διαδικασία περιστροφής του πρώτου συστήματος μέσω της εφαρμογής στοιχειωδών στροφών γύρω από τους άξονές του, μέχρι τα ταυτιστούν γεωμετρικά οι ομόλογοι άξονες των δύο συστημάτων.

Η προτυποποίηση που ακολουθεί η IERS για τον πρακτικό αριθμητικό υπολογισμό του συγκεκριμένου μετασχηματισμού προβλέπει τρεις παραμέτρους για την περιγραφή των τριών συνιστωσών του διανύσματος μετάθεσης $T1$, $T2$, $T3$, έναν συντελεστή κλίμακας D και τρεις γωνίες στροφής $R1$, $R2$, $R3$. Επίσης, καθώς τα μη αδρανειακά συστήματα TRS_1 και TRS_2 μετέχουν στην περιστροφική κίνηση της γης και μάλιστα εξαιτίας του χωρικού τους διαχωρισμού *επηρεάζονται με διαφορετικό τρόπο από αυτήν* εκτός από τις παραπάνω επτά παραμέτρους, συμμετοχή στο μαθηματικό μοντέλο περιγραφής του τυπικού επταπαραμετρικού μετασχηματισμού ομοιότητας έχουν και οι μερικές παράγωγοι ως προς τον χρόνο $\dot{T}1$, $\dot{T}2$, $\dot{T}3$, $\dot{D}$, $\dot{R}1$, $\dot{R}2$, $\dot{R}3$.

Ο μετασχηματισμός ενός διανύσματος συντεταγμένων $\mathbf{X}_1$, που είναι εκφρασμένες στο σύστημα TRS_1, στο σύστημα TRS_2 δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 + \mathbf{T}_{12} + \big(\lambda_{12} - 1\big)\mathbf{X}_1 + \big(\mathbf{R}_{12} - \mathbf{I}_3\big) \tag{6.3}$$

όπου $\mathbf{I}_3$ ο $3{\times}3$ μοναδιαίος πίνακας. Τυπικές τιμές των μεταβολών θέσης της αφετηρίας μεταξύ δύο συστημάτων TRS (συνιστώσες του διανύσματος μετάθεσης $\mathbf{T}_{12}$) είναι της τάξης των μερικών εκατοντάδων μέτρων, μέγεθος που ποσοτικοποιεί την εκτίμηση της έννοιας του κέντρου μάζας της γης μεταξύ των διαφορετικών υλοποιήσεων TRS συστημάτων, ενώ διαφορές στον προσανατολισμό και την κλίμακα είναι της τάξης του 10^{-5}.

Οι ποσότητες που εμπλέκονται στη σχέση (6.3) είναι στη γενική περίπτωση συναρτήσεις του χρόνου. Παραγωγίζοντας τη συγκεκριμένη σχέση ως προς τον χρόνο μας δίνει

$$\dot{\mathbf{X}}_2 = \dot{\mathbf{X}}_1 + \dot{\mathbf{T}}_{12} + \dot{D}\,\mathbf{X}_1 + D\,\dot{\mathbf{X}}_1 + \dot{\mathbf{R}}\,\mathbf{X}_1 + \mathbf{R}\,\dot{\mathbf{X}}_1 \tag{6.4}$$

όπου $D = \big(\lambda_{12} - 1\big)$ και $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{12} - \mathbf{I}_3$. Οι δύο ποσότητες D και $\mathbf{R}$ εκφράζουν μεταβολές της τάξης του 10^{-5} ενώ ο ρυθμός μεταβολής των συντεταγμένων $\dot{\mathbf{X}}$ είναι περίπου ίσος με 10 εκατοστά το χρόνο, επομένως οι όροι $D\,\dot{\mathbf{X}}$ και $\mathbf{R}\,\dot{\mathbf{X}}$ οι οποίοι αριθμητικά εκφράζουν μεγέθη της τάξης των 0.1 mm ανά 100 χρόνια μπορούν να απαληφθούν. Έτσι, η εξίσωση (6.4) μπορεί να γραφεί με τον ακόλουθο απλουστευτικό τρόπο χωρίς αυτή η μετατροπή να έχει ουσιαστική αριθμητική συνεισφορά στις συντεταγμένες

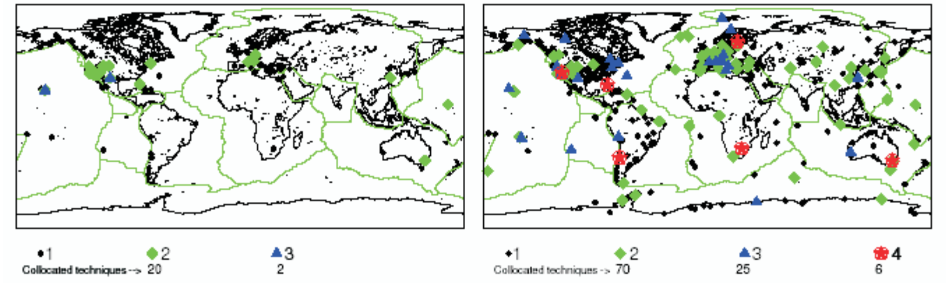
$$\dot{\mathbf{X}}_2 = \dot{\mathbf{X}}_1 + \dot{\mathbf{T}}_{12} + \dot{D}\,\mathbf{X}_1 + \dot{\mathbf{R}}\,\mathbf{X}_1 \tag{6.5}$$

Πρόκειται για τη βασική εξίσωση που χρησιμοποιείται για το διαχωρισμό μεταξύ ενός συστήματος TRS, το οποίο έχει οριστεί με βάση μία συγκεκριμένη θεωρητική διατύπωση, και ενός επίγειου πλαισίου αναφοράς TRF, στο οποίο έχουν πρόσβαση οι τελικοί χρήστες.

Ένα επίγειο πλαίσιο αναφοράς (Terrestrial Reference Frame, TRF) αποτελεί την υλοποίηση ενός TRS, μέσω της υλοποίησης της αφετηρίας, του προσανατολισμού, της κλίμακας και των χρονικών τους μεταβολών. Η υλοποίηση επιτυγχάνεται από ένα πλήθος φυσικών σημείων, για τα οποία έχουν υπολογιστεί με τη μέγιστη δυνατή ακρίβεια οι συντεταγμένες τους στο συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων που αποτελεί υλοποίηση του αντίστοιχου επίγειου συστήματος αναφοράς. Καθώς τα εν λόγω σημεία αποτελούν φυσικά και προσβάσιμα σημεία της γήινης επιφάνειας, δηλαδή της ορατής τοπογραφίας που εκφράζει το ανώτατο όριο του στρώματος του γήινου φλοιού, ένα TRF συχνά χαρακτηρίζεται και ως πλαίσιο αναφοράς φλοιού (crust-based TRF).

Το γενικό μοντέλο που συνδέει τη στιγμιαία θέση $\mathbf{X}(t)$ ενός σημείου στην επιφάνεια του γήινου φλοιού την εποχή t και μία κανονικοποιημένη θέση $\mathbf{X}_R(t)$ είναι το ακόλουθο

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_R(t) + \sum_i \Delta\mathbf{X}_i(t) \tag{6.6}$$



Σχήμα 6.1: *Επίγεια σημεία του δικτύου ITRF88 (αριστερά) και ITRF2000 (δεξιά) (McCarthy and Petit 2004)*

Ο λόγος της εισαγωγής μίας κανονικοποιημένης θέσης είναι για να απομακρυνθούν χρονικές μεταβολές υψηλών συχνοτήτων, κυρίως γεωφυσικής προέλευσης, χρησιμοποιώντας συμβατικές χωρικές διορθώσεις ή αναγωγές στις τιμές των συντεταγμένων $\Delta\mathbf{X}_i(t)$ προκειμένου να καταλήξουμε σε έναν προσδιορισμό θέσης που μεταβάλλεται πιο ομαλά σε σχέση με το χρόνο.

6.1 Το σύστημα ITRF

Η βασική υλοποίηση του ITRS παράγεται από την υπηρεσία IERS κάτω από το όνομα διεθνές επίγειο σύστημα αναφοράς (International Terrestrial Reference Frame, ITRF). Δώδεκα εκδόσεις του ITRF έχουν μέχρι τώρα δημοσιευθεί, η πρώτη το 1988 (ITRF88) και η τελευταία το 2008 (ITRF2008). Μέχρι τη λύση του 2000 (ITRF2000) παγκόσμιες επεξεργασίες δεδομένων από τέσσερις δορυφορικές τεχνικές (VLBI, SLR, GPS, DORIS) χρησιμοποιούταν ως δεδομένα εισόδου για την παραγωγή της αντίστοιχης επίλυσης ή καλύτερα υλοποίησης ITRF. Ξεκινώντας από την επίλυση ITRF2005 χρησιμοποιούνται πλέον χρονοσειρές θέσεων (συντεταγμένων) σταθμών και γήινων παραμέτρων προσανατολισμού ως στοιχεία εισόδου για την κατασκευή του ITRF. Η τωρινή προσέγγιση προβλέπει ένα μοντέλο συνδυασμού που βασίζεται στις εξισώσεις μετασχηματισμού (6.3) και (6.5). Η συνδυαστική μέθοδος αξιοποιεί τοπικές συσχετίσεις που υφίστανται σε σταθμούς όπου έχουν εφαρμοστεί παραπάνω από μία από τις γεωδαιτικές τεχνικές παρατήρησης (VLBI, SLR, GPS, DORIS). Αυτές οι συσχετίσεις υπεισέρχονται στη διαδικασία επεξεργασίας έχοντας το κατάλληλο βάρος.

Το μοντέλο του τρέχοντος πλαισίου ITRF είναι γραμμικό, κάνοντας χρήση της θέσης και της ταχύτητας του σταθμού σε κάποια εποχή αναφοράς t_o. Η θέση ενός σταθμού την εποχή t δίνεται με άλλα λόγια από τη σχέση

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_o(t) + \dot{\mathbf{X}}\,(t - t_o) \tag{6.7}$$

Κατά το παρελθόν (επιλύσεις ITRF88 και ITRF89) χρησιμοποιούταν σταθερές θέσεις ως μοντέλα ($\mathbf{X}_o$), με τη γραμμική κίνηση να εισάγεται ως τυπικές διορθώσεις που προκύπτουν από ένα μοντέλο τεκτονικής κίνησης των πλακών.

Ακολουθώντας την ίδια τεχνική με αυτή που οδήγησε στην έκδοση του ITRF2005, το πλαίσιο ITRF2008 αποτελεί μία βελτιωμένη έκδοση βασιζόμενο σε εκ νέου επεξεργασμένες λύσεις δεδομένων των δορυφορικών και διαστημικών τεχνικών VLBI, SLR, GPS, DORIS, καλύπτοντας 29, 26, 12.5 και 16 χρόνια παρατηρήσεων αντίστοιχα.

Το ITRF2008 συγκροτείται από 934 σταθμούς που είναι τοποθετημένοι σε 580 τοποθεσίες, με μία άνιση κατανομή μεταξύ του βόρειου (463 τοποθεσίες) και του νότιου ημισφαιρίου (117 τοποθεσίες). Υπάρχουν συνολικά 105 συσχετισμένες τοποθεσίες, δηλαδή τέτοιες που να υποστηρίζουν παραπάνω από μία από τις προαναφερθείσες διαστημικές τεχνικές παρατήρησης. 91 από αυτές τις τοποθεσίες παρουσιάζουν διαθέσιμα δεδομένα συσχέτισης για να αξιοποιηθούν στη συνδυαστική λύση του ITRF2008. Ο λόγος της απόκλισης αυτών των δύο αριθμών βρίσκεται στο γεγονός ότι σε αρκετές τοποθεσίες η διαθεσιμότητα της υποδομής για την υλοποίηση μιας συγκεκριμένης τεχνικής δεν σημαίνει απαραίτητα ότι τα σχετικά όργανα είναι σε κατάσταση σωστής λειτουργίας.

Το ITRF2008 καθορίζεται από τις ακόλουθες παραμέτρους:

- Η αφετηρία του πλαισίου ITRF2008 καθορίζεται με τέτοιον τρόπο, ώστε να υπάρχουν μηδενικές μεταθέσεις την εποχή 2005.0 και μηδενικοί ρυθμοί μεταβολής των αντίστοιχων μεταθέσεων σε σχέση με τη χρονοσειρά των δεδομένων SLR της διεθνούς υπηρεσίας μέτρησης αποστάσεων με Laser International Laser Ranging Service, ILRS.

- Η κλίμακα του ITRF2008 καθορίζεται με τέτοιον τρόπο ώστε να υπάρχει ένας μηδενικός συντελεστής κλίμακας κατά την εποχή 2005.0 και ένας μηδενικός ρυθμός μεταβολής της κλίμακας ως προς τη μέση κλίμακα και τον μέσο ρυθμό μεταβολής της κλίμακας που ορίζονται από τις χρονοσειρές των δεδομένων VLBI και SLR.

- Ο προσανατολισμός του πλαισίου ITRF2008 ορίζεται κατά τέτοιον τρόπο ώστε να παρατηρούνται μηδενικοί παράμετροι περιστροφής και την εποχή 2005.0 καθώς και μηδενικοί ρυθμοί μεταβολής των παραμέτρων περιστροφής μεταξύ των επιλύσεων ITRF2008 και ITRF2005. Αυτές οι συνθήκες εφαρμόζονται για ένα πλήθος 179 σταθμών αναφοράς σε 131 τοποθεσίες, συμπεριλαμβάνοντας 107 τοποθεσίες GPS, 27 τοποθεσίεςVLBI, 15 τοποθεσίες SLR και 12 τοποθεσίες DORIS.

6.2 Μετασχηματισμός μεταξύ του ITRS και του GCRS

Ο μαθηματικός μετασχηματισμός που συνδέει το διεθνές επίγειο σύστημα αναφοράς ITRS με το διεθνές ουράνιο σύστημα αναφοράς (International Celestial Reference System, ICRS), με το γεωκεντρικό ουράνιο σύστημα αναφοράς (Geocentric Celestial Reference System, GCRS), με το δεύτερο να ορίζεται ως ένα γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς οι συντεταγμένες του οποίου όταν μετασχηματιστούν στο βαρυκεντρικό ουράνιο σύστημα αναφοράς (Barycentric Celestial Reference System, BCRS), ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς με αφετηρία το βαρύκεντρο του ηλιακού μας συστήματος, δεν χαρακτηρίζονται από κάποια συνιστώσα περιστροφής, έτσι ώστε το σύστημα GCRS να θεωρείται μη περιστρεφόμενο σε σχέση με το BCRS, έχει τη μορφή

$$\big[\mathrm{GCRS}\big] = \mathbf{Q}(t)\,\mathbf{R}(t)\,\mathbf{W}(t)\,\big[\mathrm{ITRS}\big] \tag{6.8}$$

όπου $\mathbf{Q}(t)$, $\mathbf{R}(t)$ και $\mathbf{W}(t)$ είναι οι πίνακες στροφής που ορίζονται από την κίνηση του πόλου στο ουράνιο σύστημα αναφοράς, από την περιστροφή της γης γύρω από τον άξονά της που διέρχεται από τον πόλο και από την κίνηση του πόλου αντίστοιχα. Κάθε ένας από αυτούς τους πίνακες περιγράφει μία διακριτή σειρά από στοιχειώδης στροφές γύρω από τους επί μέρους άξονες του συστήματος αναφοράς.

Ο πίνακας $\mathbf{W}(t)$ που περιέχει την πληροφορία που αφορά την κίνηση του πόλου περιγράφεται ως μία σειρά στοιχειωδών στροφών

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{R}_z(-s')\,\mathbf{R}_y(x_P)\,\mathbf{R}_x(y_P) \tag{6.9}$$

όπου x_P και y_P είναι οι συντεταγμένες του ουράνιου ενδιάμεσου πόλου (Celestial Intermediate Pole, CIP), ένας ενδιάμεσος γεωκεντρικός πόλος κατά τον μετασχηματισμό από το GCRS στο ITRS για τον οποίο ισχύει ότι ο άξονας περιστροφής της γης ταυτίζεται με τον τρίτο άξονα του εν λόγω ενδιάμεσου συστήματος, ο οποίος διέρχεται από το CIP. Ο ορισμός του CIP γίνεται για να διαχωριστεί η επίδραση της κλόνισης από την επίδραση της κίνησης του πόλου κατά τον μετασχηματισμό από το GCRS στο ITRS. Τέλος, s' περιγράφει τη θέση της επίγειας ενδιάμεσης αφετηρίας (Terrestrial Intermediate Origin, TIO), του μη περιστρεφόμενου σημείου που ορίζει την αφετηρία μέτρησης των μηκών στο ITRS, επάνω στον ισημερινό επίπεδο που ορίζεται από το ενδιάμεσο σύστημα του CIP. Το TIO περιγράφει τη λεγόμενη μη περιστρεφόμενη αφετηρία, ένα σημείο δηλαδή που έχει μηδενική συνισταμένη κίνησης επάνω στο επίπεδο του ισημερινού.

Η έκφραση για τον υπολογισμό του s' ως μία συνάρτηση των x_P και y_P είναι

$$s' = \frac{1}{2} \int_{t_o}^{t} \left(x_P \, \dot{y}_P - \dot{x}_P \, y_P \right) dt \tag{6.10}$$

Ο επόμενος μετασχηματισμός στροφής στη σχέση (6.8) αφορά την ενδιάμεση ουράνια αφετηρία CIO (Celestial Intermediate Origin). Πρόκειται για την αφετηρία μέτρησης των μηκών στον ενδιάμεσο ισημερινό του ουράνιου ενδιάμεσου συστήματος αναφοράς (Celestial Intermediate Reference System, CIRS). Το CIRS είναι ένα γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς το οποίο συνδέεται με το GCRS μέσω μίας χρονικά εξαρτώμενης περιστροφής με γωνιακά ορίσματα την κλόνιση και τη μετάπτωση του άξονα περιστροφής της γης. Το CIRS ορίζεται από το CIO που αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη ημερομηνία και από το αντίστοιχο ενδιάμεσο ισημερινό επίπεδο.

Ο πίνακας $\mathbf{R}(t)$ στη σχέση (6.8) εκφράζει το μετασχηματισμό στροφής που πρέπει να εφαρμοστεί στο σύστημα CIO προκειμένου να ληφθεί υπόψη η περιστροφή της γης γύρω από τον άξονα περιστροφής του CIP. Εκφράζει δηλαδή τη σχέση μεταξύ TIRS και CIRS, όπου TIRS είναι το επίγειο ενδιάμεσο σύστημα αναφοράς (Terrestrial Intermediate Reference System), ένα γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς που ορίζεται από το ενδιάμεσο ισημερινό επίπεδο του CIP και από το TIO. Το TIRS επομένως συνδέεται με το ITRS μέσω της κίνησης του πόλου και του s' και με το CIRS μέσω της περιστροφής της γης. Η απλή σχέση που συνδέει τα συστήματα TIRS και CIRS είναι

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(-\mathrm{ERA}) \tag{6.11}$$

όπου ERA η γωνία περιστροφής της γης, που σχηματίζεται μεταξύ του CIO και του TIO την ημερομηνία t επάνω στον ισημερινό του CIP, προσφέροντας μία αυστηρή διατύπωση για την αστρική περιστροφή της γης.

Τέλος, ο πίνακας $\mathbf{Q}(t)$ στη σχέση (6.8) εκφράζει το μετασχηματισμό στροφής που πρέπει να εφαρμοστεί στο σύστημα CIO προκειμένου να ληφθεί υπόψη η κίνηση του CIP στο σύστημα GCRS. Εκφράζει με άλλα λόγια τη σύνδεση μεταξύ CIRS και

GCRS και ορίζεται ως εξής

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{R}_z(-E)\,\mathbf{R}_y(-d)\,\mathbf{R}_z(E)\,\mathbf{R}_z(s) \tag{6.12}$$

όπου E και d είναι οι ποσότητες για τις οποίες οι συντεταγμένες του CIP στο GCRS θα δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} X &= \sin d\,\cos E \\ Y &= \sin d\,\sin E \\ Z &= \cos d \end{aligned} \tag{6.13}$$

Η ποσότητα s ορίζει τη θέση του CIO επάνω στον ισημερινό του CIP η οποία αντιστοιχεί στην αρχή της μη περιστροφής στο σύστημα GCRS, όταν το CIP κινείται σε σχέση με το GCRS μεταξύ της εποχής αναφοράς και την ημερομηνίας t λόγω κλόνισης και μετάπτωσης. Η έκφρασή του είναι συνάρτηση των συντεταγμένων X και Y

$$s(t) = -\int_{t_o}^{t} \frac{X(t)\,\dot{Y}(t) - Y(t)\,\dot{X}(t)}{1+Z(t)}\,dt - \big(\sigma_o\,N_o - \Sigma_o\,N_o\big) \tag{6.14}$$

με σ_o και Σ_o να περιγράφουν τις θέσεις του CIO την ημερομηνία J2000 και της αφετηρίας του άξονα Q στο σύστημα GCRS αντίστοιχα. Ισοδύναμα η τελευταία σχέση μπορεί να επαναδιατυπωθεί με ισοδυναμία αριθμητική μικρότερη του 1 μas για ένα χρονικό διάστημα 100 ετών ως εξής

$$s(t) = -\frac{1}{2}\Big(X(t)\,Y(t) - X(t_o)\,Y(t_o)\Big) + \int_{t_o}^{t} \dot{X}(t)\,Y(t)\,dt - \big(\sigma_o\,N_o - \Sigma_o\,N_o\big) \tag{6.15}$$

Ο πίνακας $\mathbf{Q}(t)$ μπορεί να γραφεί με τον ακόλουθο ισοδύναμο τρόπο συναρτήσει των συντεταγμένων X και Y

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} 1 - a\,X^2 & -a\,X\,Y & X \\ -a\,X\,Y & 1 - a\,Y^2 & Y \\ -X & -Y & 1 - a\,(X^2+Y^2) \end{bmatrix} \mathbf{R}_z(s) \tag{6.16}$$