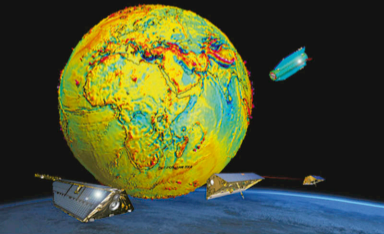


Δημήτριος Τσούλης

# Δορυφορική Γεωδαισία

Σύγχρονες διαστημικές εφαρμογές  
για την κατανόηση του δυναμικού συστήματος Γη



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Βασικές έννοιες και ορισμοί της θεωρίας δορυφορικών τροχιών</b>	<b>11</b>
2.1	Εισαγωγή . . . . .	11
2.2	Μη διαταρακτική δορυφορική τροχιά . . . . .	12
2.2.1	Η γεωμετρική μορφή της τροχιάς . . . . .	16
2.2.2	Αρχή διατήρησης της ενέργειας . . . . .	19
2.2.3	Εξίσωση του Kepler . . . . .	22
2.2.4	Ορισμός των Κεπλέρειων στοιχείων . . . . .	25
2.2.5	Υπολογισμός των Κεπλέρειων στοιχείων από τα διανύσματα θέσης και ταχύτητας . . . . .	29
2.2.6	Προσδιορισμός μη διαταρακτικών δορυφορικών τροχιών . . . . .	31
2.3	Διαταρακτική δορυφορική τροχιά . . . . .	39
2.3.1	Η θεωρία του Kaula . . . . .	45
2.3.2	Οι εξισώσεις του Hill . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Διαστημικός προσδιορισμός θέσης με τη χρήση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων</b>	<b>75</b>
3.1	Το δορυφορικό σύστημα παγκόσμιου προσδιορισμού θέσης GPS . . . . .	75
3.1.1	Μέτρηση ψευδοαποστάσεων . . . . .	82
3.1.2	Μέτρηση φάσεων . . . . .	84
3.1.3	Βελτιωμένο μοντέλο παρατήρησης . . . . .	87

3.2	Ολοκληρωμένα συστήματα GPS/INS . . . . .	95
3.2.1	Συστήματα αναφοράς και βασικοί μετασχηματισμοί . . . . .	96
3.2.2	Κατηγορίες συστημάτων GPS/INS . . . . .	104
3.3	Προσδιορισμός δορυφορικής απόστασης με τη χρήση παλμών Laser (SLR, LLR) . . . . .	112
3.3.1	Προσδιορισμός του πεδίου βαρύτητας από την ανάλυση δεδομένων SLR . . . . .	132
3.3.2	Προσδιορισμός σχετικιστικών παραμέτρων από την ανάλυση δεδομένων LLR . . . . .	155
<b>4</b>	<b>Η μέθοδος της μέτρησης διαδορυφορικών αποστάσεων</b>	<b>161</b>
4.1	Εισαγωγή . . . . .	161
4.2	Μαθηματικό μοντέλο . . . . .	170
4.2.1	Υβριδική προσέγγιση . . . . .	182
4.2.2	Χρήση συναρτήσεων τοπικού χαρακτήρα . . . . .	189
4.3	Η δορυφορική αποστολή CHAMP . . . . .	196
4.3.1	Τεχνικές βαθμονόμησης του επιταχυνσιόμετρου στον δορυφόρο CHAMP . . . . .	199
4.3.2	Η μέθοδος υστέρησης σήματος GPS . . . . .	237
4.4	Η δορυφορική αποστολή GRACE . . . . .	248
4.4.1	Χρονικά μεταβαλλόμενο πεδίο βαρύτητας . . . . .	251
<b>5</b>	<b>Διαστημική βαθμιδομετρία</b>	<b>279</b>
5.1	Εισαγωγή . . . . .	279
5.2	Το μαθηματικό μοντέλο παρατήρησης . . . . .	297
5.3	Μέθοδος ανάλυσης στο χώρο των αποστάσεων . . . . .	305
5.4	Μέθοδος ανάλυσης στο χώρο των συχνοτήτων . . . . .	311
5.5	Τοπικός προσδιορισμός μέσω της υβριδικής μεθόδου ανάλυσης . . . . .	315
5.6	Η δορυφορική αποστολή GOCE . . . . .	320

---

<b>6 Διαστημικές εφαρμογές συμβολομετρίας</b>	<b>325</b>
6.1 Συμβολομετρία πολύ μεγάλης βάσης (VLBI) . . . . .	325
6.2 Διαστημική συμβολομετρία Laser (LISA) . . . . .	344
6.3 Συμβολομετρία με radar (SAR/InSAR) . . . . .	363
<b>7 Δορυφορικά μοντέλα του πεδίου βαρύτητας</b>	<b>377</b>
7.1 Εισαγωγή . . . . .	377
7.2 Μοντέλα CHAMP, GRACE και GOCE . . . . .	389
7.3 Αξιολόγηση των μοντέλων στο ύψος της δορυφορικής τροχιάς . . . . .	398
7.3.1 Παλίρροιες του στερεού φλοιού και των ωκεανών . . . . .	411
7.3.2 Μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης της δορυφορικής τροχιάς .	418
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>429</b>
<b>Ευρετήριο</b>	<b>447</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Κεντρικό σημείο για την αξιοποίηση δορυφορικών δεδομένων σε μελέτες που έχουν να κάνουν με το γήινο πεδίο βαρύτητας και τις χρονικές μεταβολές του αποτελεί η σύνδεση μεταξύ γεωμετρίας και δυναμικών χαρακτηριστικών του πεδίου. Η άμεση παρατήρηση της θέσης δορυφόρων, που βρίσκονται σε τροχιά γύρω από τη γη σε σχέση με κάποιους επίγειους σταθμούς παρατήρησης ή σε σχέση με το ίδιο το γεωκεντρο, μπορεί να συνδεθεί με το ελκτικό πεδίο που καθορίζει τη μορφή της δορυφορικής τροχιάς. Απαραίτητη προϋπόθεση αποτελεί η γνώση αυτής της γεωμετρικής πληροφορίας με τη μορφή μιας χρονοσειράς, κάτι που επιτρέπει τον αριθμητικό υπολογισμό συγκεκριμένων παραγώγων μεγεθών, καθώς η διαδοχική παραγωγή των διανυσμάτων θέσης ως προς το χρόνο οδηγεί στον υπολογισμό ποσοτήτων, όπως η ταχύτητα και η επιτάχυνση του δορυφόρου.

Μία πρώτη πρακτική σύνδεση μεταξύ γεωμετρικών δεδομένων αναφορικά με κάποιον δορυφόρο και του Νευτώνειου πεδίου βαρύτητας πραγματοποιήθηκε στα τέλη της δεκαετίας του 1960 μέσα από μελέτες που είχαν ως αντικείμενο τη διερεύνηση του πεδίου βαρύτητας της σελήνης. Σε αυτές τις πρώιμες επιστημονικές διερευνήσεις διαστημικών δεδομένων αξιοποιήθηκαν οι πρώτες άμεσες παρατηρήσεις τεχνητών δορυφόρων από επίγειους σταθμούς ελέγχου με σκοπό την εξαγωγή πληροφορίας για τη δομή του σεληνιακού πεδίου βαρύτητας. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας τις παρατηρήσεις της θέσης των δορυφορικών σκαφών που ετίθεντο σε τροχιά γύρω από τη σελήνη στα πλαίσια των αποστολών Apollo σε σχέση με το σταθμό παρατήρησης στη γη, κατέστη δυνατό να υπολογιστεί η βαρυτική επιτάχυνση που ασκούσαν επάνω στους δορυφόρους εξαιτίας του ελκτικού πεδίου της σελήνης. Η ποσότητα αυτή ήταν ορισμένη κατά μήκος της διεύθυνσης μεταξύ επίγειου σταθμού παρατήρησης και δορυφόρου και ήταν δυνατό να προκύψει μετά από μία απλή παραγωγή των αρχικών διαθέσιμων δεδομένων, δηλαδή των γεωμετρικών αποστάσεων των δορυφόρων, που

βρίσκονταν σε τροχιά γύρω από τη σελήνη, όπως αυτές λαμβάνονταν από τον επίγειο σταθμό παρακολούθησης. Μία απλή γραφική παράσταση αυτής της πληροφορίας ανέδειξε ισχυρές ανωμαλίες του σεληνιακού πεδίου βαρύτητας, ιδιαίτερα επάνω από τις πεδινές περιοχές του σεληνιακού αναγλύφου, υπονοώντας την ύπαρξη μεγάλων διαταρακτικών κατανομών μάζας στο εσωτερικό του σεληνιακού φλοιού, με πυκνότητα διαφορετική από αυτήν που ήταν μέχρι τότε γνωστή για τη σελήνη από τις διαθέσιμες επιφανειακές δειγματοληπτικές μετρήσεις σεληνιακών πετρωμάτων.

Η ιδέα ότι μία ιδιαίτερα πυκνή *χαρτογράφηση* ενός βαρυτικού πεδίου μπορούσε να εξαχθεί από μία απλή ανάλυση διαφορικών μεταβολών γεωμετρικών δεδομένων δορυφορικών τροχιών (δηλαδή αποστάσεων και ρυθμών μεταβολής τους) μέσα από την παρακολούθηση ενός δορυφόρου σε τροχιά παρουσιάστηκε να διαθέτει μία δυναμική για πιθανή εφαρμογή της και για τη μελέτη του δικού μας πλανήτη. Εκείνη τη στιγμή γεννήθηκε η αρχή της μεθόδου μέτρησης διαδορυφορικών αποστάσεων (Satellite-to-Satellite Tracking, SST). Δύο δορυφόροι κινούνται κάτω από την επίδραση του γήινου βαρυτικού πεδίου διαγράφοντας παρόμοιες τροχιές σε σχετικά μικρό ύψος από τη γήινη επιφάνεια. Ο κάθε ένας δορυφόρος είναι εφοδιασμένος με μία πειραματική μάζα η οποία είναι τοποθετημένη στο εσωτερικό του κατά τέτοιον τρόπο ώστε να βρίσκεται συνεχώς σε συνθήκες ελεύθερης πτώσης. Ειδικές διατάξεις, για παράδειγμα μικροί προωθητήρες, ενεργοποιούνται τη στιγμή που μία μη βαρυτική επίδραση κάνει την εμφάνισή της (π.χ. ατμοσφαιρική τριβή, πίεση της ηλιακής ακτινοβολίας στην επιφάνεια του δορυφορικού σκάφους κ.λπ.) κατά τέτοιον τρόπο ώστε να ισοσταθμίζουν την όποια μη βαρυτική επίδραση που ασκείται στο δορυφόρο και να διασφαλίζουν με αυτόν τον τρόπο την επαναφορά της πειραματικής μάζας στην αρχική της κατάσταση. Η συγκεκριμένη διάταξη χαρακτηρίζεται ως *low-low SST*, ενώ η ανάλυση τροχιακών δεδομένων δορυφόρων που βρίσκονταν σε τροχιά γύρω από τη σελήνη, η οποία αναφέρθηκε προηγουμένως, υλοποιεί τη λεγόμενη *high-low SST* διάταξη, με τους δορυφόρους που διαγράφουν την τροχιά γύρω από τη σελήνη να αποτελούν τους χαμηλούς και την ίδια τη γη να υλοποιεί το δορυφόρο που κινείται σε υψηλή τροχιά γύρω από τη σελήνη.

Κύρια μετρητική διάταξη στην περίπτωση της μεθόδου μέτρησης διαδορυφορικών αποστάσεων χρησιμοποιώντας τη διάταξη *low-low SST* αποτελεί το σύστημα μέτρησης της διαδορυφορικής απόστασης. Με τη συνεχή εκπομπή ηλεκτρομαγνητικών παλμών είναι δυνατή η καταγραφή των μεταβολών της απόστασης που χωρίζει τους δύο δορυφόρους, ενώ παράλληλα καταγράφονται και οι μεταβολές των θέσεων των δύο πειραματικών μαζών, πληροφορία που εξυπηρετεί μία λεπτομερή μοντελοποίηση των προαναφερθεισών μη βαρυτικών επιδράσεων στη δορυφορική τροχιά. Η μέτρηση της

μεταβαλλόμενης απόστασης μεταξύ των δύο δορυφόρων σε ταχτά χρονικά διαστήματα ισοδυναμεί με την αριθμητική παρατήρηση του ρυθμού μεταβολής της απόστασης, δηλαδή της παραγώγου της ως προς το χρόνο, που είναι γνωστή και ως ταχύτητα της διεύθυνσης σύνδεσης των δύο δορυφόρων (*line-of-sight velocity*), όπου με τον όρο διεύθυνσης σύνδεσης εννοείται η διεύθυνση που ορίζεται στο χώρο από τη στιγμιαία θέση των δύο δορυφόρων σε κάποια χρονική στιγμή. Η παρατηρούμενη ποσότητα ή ισοδύναμα το μετρητικό σήμα στα πλαίσια ενός πειράματος SST είναι είτε η στιγμιαία ταχύτητα της διεύθυνσης σύνδεσης είτε ένας μέσος όρος της ποσότητας αυτής ορισμένος σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Η παράγωγος της ταχύτητας της διεύθυνσης σύνδεσης έχει διαστάσεις επιτάχυνσης και αντιπροσωπεύει, σε έναν βαθμό προσέγγισης, τις παραγώγους πρώτης τάξης του δυναμικού της βαρύτητας κατά μήκος της γραμμής σύνδεσης.

Ένα μαθηματικό μοντέλο που μπορεί να συνδέσει τις παρατηρούμενες ταχύτητες με το γήινο βαρυτικό πεδίο είναι αυτό που καθορίζεται από τις Νευτώνειες εξισώσεις κίνησης ενός σωματιδίου σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς. Οι εξισώσεις αυτές συσχετίζουν την επιτάχυνση του σωματιδίου στο περιστρεφόμενο σύστημα με την επιτάχυνσή του σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Καθώς η επιτάχυνση σε ένα αδρανειακό σύστημα εκφράζεται από την ποσότητα  $\nabla V$ , με  $V$  τη συνάρτηση του δυναμικού του βαρυτικού πεδίου, οι εξισώσεις κίνησης εμφανίζονται ως ένα κατάλληλο εργαλείο για το σκοπό της σύνδεσης των καθαρά γεωμετρικών μετρήσεων των διαδορυφορικών αποστάσεων και των χρονικών μεταβολών τους με το πεδίο βαρύτητας και οδηγούν στη διατύπωση απλών διαφορικών εξισώσεων, που ονομάζονται εξισώσεις μεταβολών (*variational equations*). Οι τελευταίες μπορούν να υπολογιστούν μέσα από τεχνικές αριθμητικής ολοκλήρωσης, δίνοντας ορισμένες από τις μερικές παραγώγους που εμφανίζονται στο γραμμικοποιημένο σύστημα εξισώσεων παρατήρησης του μοντέλου των διαδορυφορικών αποστάσεων, το οποίο εξαιτίας της πολυπλοκότητάς του δεν μπορεί να υπολογιστεί με αναλυτικά μέσα.

Μία βασική μαθηματική εξίσωση αναφοράς για την έκφραση της συνάρτησης του δυναμικού του γήινου βαρυτικού πεδίου<sup>1</sup> μπορεί να υπολογιστεί από την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης του Laplace στην περιοχή έξω από τις έλκουσες μάζες, όπου το

<sup>1</sup>Οι έννοιες βαρυτικό και ελκτικό πεδίο, παρόλο που τεχνικά υπονοούν δύο διαφορετικές ποσότητες οι οποίες διαφέρουν κατά την ποσότητα του φυγόκεντρου δυναμικού, στο συγκεκριμένο κείμενο θα χρησιμοποιούνται ως ισοδύναμες. Η ελευθερία στη χρήση της συγκεκριμένης ορολογίας πηγάζει από το γεγονός ότι στη μελέτη της κίνησης δορυφορικών τροχιών η περιστροφή της γης και συνεπώς και το φυγόκεντρο δυναμικό δεν υπεισέρχονται στη διαμόρφωση της τιμής του δυναμικού της βαρύτητας στο σημείο της τροχιάς, με άλλα λόγια η έννοια του γήινου βαρυτικού πεδίου ταυτίζεται με αυτή του ελκτικού πεδίου των γήινων μαζών, όταν το σημείο υπολογισμού αναφέρεται σε δορυφόρο που βρίσκεται σε τροχιά γύρω από τη γη.

δυναμικό είναι μία αρμονική συνάρτηση η οποία πληροί την εξίσωση  $\Delta V = 0$ . Μία λύση αυτής της εξίσωσης αποτελεί η γνωστή έκφραση του δυναμικού έλξης με τη μορφή ενός αναπτύγματος σε σειρά σφαιρικών αρμονικών

$$V(\theta, \lambda, r) = \frac{GM}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l (C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda) P_{lm}(\cos \theta) \quad (1.1)$$

όπου  $l$  και  $m$  εκφράζουν αντίστοιχα το βαθμό και την τάξη του αναπτύγματος,  $r$ ,  $\theta$  και  $\lambda$  είναι οι σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου υπολογισμού, δηλαδή του δορυφόρου,  $GM$  εκφράζει το γινόμενο της παγκόσμιας σταθεράς του Νεύτωνα με τη συνολική μάζα των γήινων διαταρακτικών μαζών,  $R$  είναι μία μέση τιμή ακτίνας μιας γης σε σφαιρική προσέγγιση και  $P_{lm}(\cos \theta)$  εκφράζουν τις γενικευμένες συναρτήσεις του Legendre, οι οποίες υπολογίζονται μέσα από απλές τριγωνομετρικές σχέσεις με όρισμα το σφαιρικό πλάτος  $\theta$ . Τέλος, οι παράμετροι  $C_{lm}$  και  $S_{lm}$  στην εξίσωση (1.1) εκφράζουν τον θεωρητικά άπειρο αριθμό αδιάστατων συντελεστών που περιγράφουν το δυναμικό έλξης των γήινων μαζών σε ένα σημείο που βρίσκεται εκτός του χώρου που καταλαμβάνουν οι μάζες μέσα από τη συγκεκριμένη προσέγγιση του αναπτύγματος της συνάρτησης του δυναμικού σε σειρά και ένας ολοκληρωμένος ορισμός τους θα μπορούσε να αποδοθεί με την περιγραφή *σφαιρικοί αρμονικοί συντελεστές της συνάρτησης του δυναμικού έλξης των γήινων μαζών*. Οι συντελεστές αυτοί αποτελούν τις βασικές άγνωστες παραμέτρους του πεδίου βαρύτητας. Ο προσδιορισμός τους ισοδυναμεί με τον προσδιορισμό του πραγματικού σχήματος της γης και του βαρυτικού πεδίου που προκαλούν οι μάζες στο εσωτερικό της. Ωστόσο, καθώς οι όποιες γεωμετρικές ή δυναμικές παρατηρήσεις που πραγματοποιούνται στο πλαίσιο μιας διαστημικής εφαρμογής είναι από τη φύση τους πεπερασμένες, ο προσδιορισμός του συνόλου των άπειρων συντελεστών  $C_{lm}$  και  $S_{lm}$  και κατά συνέπεια ο προσδιορισμός του πραγματικού σχήματος της γης και του βαρυτικού της πεδίου αποτελεί ένα πρόβλημα που ποτέ δεν θα μπορέσει να επιλυθεί κατά μία απόλυτη έννοια. Αντίθετα, η ανάλυση διαφορετικών διαστημικών δεδομένων, ακόμα και των ίδιων μεθοδολογιών παρατήρησης, οδηγεί πάντοτε σε μία διαφορετική επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος, με τους υπολογισμένους συντελεστές  $C_{lm}$  και  $S_{lm}$  να διαφέρουν την κάθε φορά τόσο αριθμητικά όσο και σε σχέση με το μέγιστο βαθμό και τάξη του αντίστοιχου αναπτύγματος που υλοποιούν.

Η εξίσωση (1.1) αποτελεί λοιπόν το κοινό θεωρητικό υπόβαθρο όλων των σύγχρονων διαστημικών αποστολών που έχουν ως αντικείμενο τη μελέτη του γήινου πεδίου βαρύτητας και των χρονικών μεταβολών του, ενώ ο κοινός πρακτικός στόχος των αποστολών αυτών σε ότι αφορά το πεδίο βαρύτητας είναι ο προσδιορισμός ενός μο-



ντέλου συντελεστών  $C_{lm}$  και  $S_{lm}$  μέχρι έναν μέγιστο βαθμό και τάξη. Η χωρική ανάλυση στην οποία αντιστοιχεί το κάθε μοντέλο<sup>2</sup> καθώς και η ακρίβειά του, καθορίζονται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της δορυφορικής τροχιάς και από το είδος της μεθοδολογίας που υλοποιείται από τη συγκεκριμένη διαστημική αποστολή. Για παράδειγμα, ενώ η χωρική διακριτική ικανότητα ενός μοντέλου σφαιρικών αρμονικών συντελεστών  $C_{lm}$  και  $S_{lm}$  μέχρι βαθμό και τάξη 50 (μία τυπική τιμή αναπτύγματος για βαρυτικά μοντέλα που έχουν προκύψει από την αποκλειστική ανάλυση δορυφορικών δεδομένων, πριν από την υλοποίηση των σημερινών αποστολών CHAMP, GRACE και GOCE) ισοδυναμεί με γεωγραφικά διαμερίσματα διαστάσεων περίπου 800 km × 800 km, η ακρίβεια ενός τέτοιου μοντέλου, καθώς και συνολική της φασματική συμπεριφορά εξαρτάται από πολλούς διαφορετικούς παράγοντες, ενώ χαρακτηρίζει μονοσήμαντα το κάθε μοντέλο. Παρόλο που η συγκεκριμένη αναφορά στο ζήτημα της σχέσης μέγιστου βαθμού ανάπτυξης και χωρικής ανάλυσης καταδεικνύει τον περιορισμό για εφαρμογές πρακτικού ενδιαφέροντος μοντέλων με χαμηλό  $l_{max}$ , εντούτοις δεν μειώνει το ενδιαφέρον για τη χρήση τέτοιων μοντέλων, για παράδειγμα στον υπολογισμό κάποιας βασικής συνιστώσας αναφοράς που να περιγράφει τα μεγάλα μήκη κύματος του παρατηρούμενου πεδίου βαρύτητας. Η επιτυγχανόμενη ανάλυση χαρακτηρίζει το σύνολο των παράγωγων μεγεθών του πεδίου που μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας τους συγκεκριμένους συντελεστές, όπως ανωμαλίες βαρύτητας ή υψόμετρα του γεωειδούς, ενώ οι υπολογισμοί μπορούν να πραγματοποιηθούν είτε επάνω στην επιφάνεια μιας γήινης σφαίρας είτε στην επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής, αφού συνεκτιμηθούν οι σχετικοί διορθωτικοί όροι.

Οι σφαιρικοί αρμονικοί συντελεστές  $C_{lm}$  και  $S_{lm}$  μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας πρωτογενή δεδομένα διαφορετικών δορυφορικών μεθόδων παρατήρησης. Γενικά πραγματοποιείται ο ακόλουθος διαχωρισμός μεταξύ βασικών μεθοδολογιών, που οδηγούν στον υπολογισμό ενός μοντέλου συντελεστών  $C_{lm}$  και  $S_{lm}$  για τη συνάρτηση του δυναμικού του βαρυτικού πεδίου, μετά από την ανάλυση των σχετικών δορυφορικών δεδομένων: (α) Ανάλυση δορυφορικών αποστάσεων από επίγειους σταθμούς παρατήρησης. Αντικείμενο της μεθόδου είναι η άμεση παρατήρηση και η καταγραφή της θέσης από το έδαφος ενός δορυφόρου σε τροχιά μετρώντας τις αποστάσεις του δορυφόρου από τον επίγειο σταθμό ελέγχου σε διακριτές χρονικές στιγμές. Από τεχνική άποψη ο υπολογισμός αυτών των αποστάσεων μπορεί να πραγματοποιηθεί με δύο διαφορετικές τεχνικές. Η πρώτη τεχνική υλοποιείται μέσω της εκπομπής από τον επίγειο σταθμό παρατήρησης ενός παλμού Laser μέσα από ένα ειδικό σύστη-

<sup>2</sup>Η διακριτική ικανότητα ενός μοντέλου σφαιρικών αρμονικών συντελεστών  $C_{lm}$  και  $S_{lm}$  στο χώρο των αποστάσεων εκφράζεται χονδρικά από την ποσότητα  $L/l_{max}$ , όπου  $L$  είναι η περίμετρος της γης σε μία σφαιρική προσέγγιση και  $l_{max}$  ο μέγιστος βαθμός του αναπτύγματος.

μα τηλεσκοπίου, με την προϋπόθεση ο δορυφόρος να υποστηρίζει τη συγκεκριμένη τεχνική παρατήρησης φέροντας ειδικούς οπτικούς ανακλαστήρες, που πρέπει να είναι τοποθετημένοι με τέτοιο τρόπο στην εξωτερική επιφάνεια του δορυφορικού σκάφους, ώστε να είναι ορατοί από τον επίγειο σταθμό (τεχνική Satellite Laser Ranging, SLR). Η δεύτερη τεχνική άμεσης μέτρησης των αποστάσεων του δορυφόρου από τον επίγειο σταθμό βασίζεται στη συλλογή δεδομένων ρυθμών μεταβολής της απόστασης επίγειου σταθμού-δορυφόρου χρησιμοποιώντας παρατηρήσεις Doppler, που προέρχονται από την εκπομπή ηλεκτρομαγνητικών παλμών από το δορυφόρο και εκφράζουν με τρόπο που είναι ανάλογος της ταχύτητας του δορυφόρου σε σχέση με το έδαφος, όπως αυτή ορίζεται επάνω στη διεύθυνση σύνδεσης επίγειου σταθμού-δορυφόρου (line-of-sight velocity), τη μεταβολή της συχνότητας του εκπεμπόμενου σήματος λόγω της σχετικής κίνησης του δορυφόρου σε σχέση με τη γη, ποσότητα που καταγράφεται στον επίγειο σταθμό ελέγχου. Η επεξεργασία δεδομένων SLR και Doppler, όπως αυτά έχουν συλλεχθεί για περισσότερο από τρεις δεκαετίες χρησιμοποιώντας πάνω από 30 δορυφόρους διαφορετικών τροχιακών χαρακτηριστικών, έχει οδηγήσει στον υπολογισμό μοντέλων, τα οποία καταγράφουν κατά κύριο λόγο τα μεγάλα μήκη κύματος του πεδίου βαρύτητας. Τα μοντέλα JGM2-S και GRIM4-S4 αποτελούν δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων προσδιορισμών, χαρακτηρίζονται ως δύο από τα πιο αξιόπιστα δορυφορικά μοντέλα του πεδίου βαρύτητας που έχουν προκύψει στα πλαίσια της συγκεκριμένης τεχνικής δορυφορικής παρατήρησης, προσφέρουν όμως μία χωρική διακριτική ικανότητα μόνον της τάξης των 600 km. (β) Ανάλυση δεδομένων διαδορυφορικών αποστάσεων. Πρόκειται για μία διάταξη δύο δορυφόρων, ενός σε χαμηλή (low) και ενός σε υψηλή (high) τροχιά, η οποία ως πρωτογενή δεδομένα αντιμετωπίζει τη γεωμετρική απόσταση των δύο δορυφόρων και τον τρόπο μεταβολής της κατά τη διάρκεια της εξέλιξης των τροχιών τους γύρω από τη γη. Η μέθοδος των διαδορυφορικών αποστάσεων με τις διαφορετικές διατάξεις υλοποίησης (high-low SST, low-low SST και συνδυασμοί τους) αποτελεί την αρχή λειτουργίας των διαστημικών αποστολών CHAMP και GRACE. (γ) Ανάλυση δεδομένων διαστημικής βαθμιδομετρίας. Στη συγκεκριμένη μεθοδολογία λαμβάνονται ως παρατηρήσεις δεδομένα δευτέρων παραγώγων του δυναμικού μέσω ειδικών διατάξεων πολλαπλών επιταχυνσιομέτρων, που συγκροτούν τα λεγόμενα βαθμιδομέτρα. Αποτελεί την αρχή λειτουργίας της επερχόμενης διαστημικής αποστολής GOCE της Ευρωπαϊκής Διαστημικής Υπηρεσίας (European Space Agency, ESA) και μπορεί να χρησιμοποιηθεί συνδυαστικά με την τεχνική high-low SST αξιοποιώντας κάποιο δορυφορικό σύστημα προσδιορισμού θέσης (π.χ. GPS). (δ) Συνδυασμένη επεξεργασία δορυφορικών δεδομένων (SLR, Doppler, δορυφορική αλτιμετρία, σύγχρονες διαστημικές αποστολές) με επίγειες βάσεις δεδομένων βαρύτητας, η οποία οδηγεί στον υπολογισμό των λεγόμενων μοντέλων

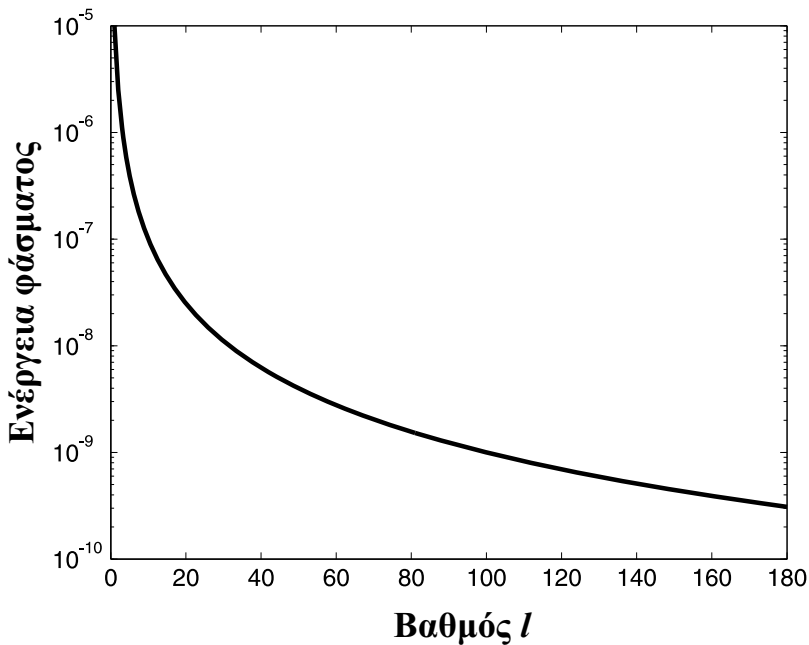
συνδυασμού. Σήμερα πάνω από τριάντα τέτοια μοντέλα συνδυασμού είναι διαθέσιμα, με τον αριθμό να αυξάνει συνεχώς εξαιτίας της πληθώρας νέων δεδομένων που προέρχονται από τις σύγχρονες διαστημικές αποστολές.

Ένας ανεξάρτητος τρόπος υπολογισμού των συντελεστών  $C_{lm}$  και  $S_{lm}$  προκύπτει επίσης από την ανάλυση παγκόσμιων ψηφιακών μοντέλων τοπογραφίας σε συνδυασμό με παγκόσμιες βάσεις δεδομένων για τη δομή και τη σύσταση του γήινου φλοιού με μία διαστρωμάτωση που φτάνει μέχρι τη συνοριακή επιφάνεια φλοιού-μανδύα. Η διαθεσιμότητα τέτοιων παγκόσμιων ψηφιακών μοντέλων, η ανάλυση των οποίων βελτιώνεται με ταχύ ρυθμό, εξαιτίας κυρίως σύγχρονων τηλεπισκοπικών δορυφόρων που επιτρέπουν την κατασκευή ψηφιακών μοντέλων τοπογραφίας με χωρική ανάλυση που φθάνει σε μερικές περιπτώσεις τα  $30 \text{ m} \times 30 \text{ m}$ , οδηγεί στον προσδιορισμό των λεγόμενων τοπογραφικών-ισοστατικών σφαιρικών αρμονικών συντελεστών του πεδίου βαρύτητας. Τα συγκεκριμένα μοντέλα καταγράφουν κυρίως τα μεσαία μήκη κύματος του φάσματος του βαρυτικού πεδίου και απαιτούν την εφαρμογή κάποιου μοντέλου ισοστασίας σύμφωνα με το οποίο περιγράφεται το ισοζύγιο μαζών μεταξύ φλοιού και μανδύα. Ταυτόχρονα, ο μέγιστος βαθμός ανάπτυξης τους περιορίζεται μόνον από τη διαθέσιμη ανάλυση των παγκόσμιων ψηφιακών μοντέλων εδάφους, κάτι που επιτρέπει τον υπολογισμό μοντέλων με ιδιαίτερα μεγάλο μέγιστο βαθμό ανάπτυξης. Σήμερα η αξιοποίηση της συγκεκριμένης τεχνικής ανάλυσης επιτρέπει την κατασκευή συνθετικών μοντέλων βαρύτητας με μέγιστο βαθμό ανάπτυξης  $l_{max} = 2160$ .

Η ποσοτική περιγραφή των συντελεστών ενός μοντέλου πραγματοποιείται συνήθως μέσα από τη γραφική αναπαράσταση του φάσματός του. Το φάσμα ενός μοντέλου σφαιρικών αρμονικών συντελεστών  $C_{lm}$  και  $S_{lm}$  χαρακτηρίζεται επίσης και ως *ενέργεια φάσματος* (*power spectrum*) ή *μεταβλητότητα βαθμού* (*degree variance*), ορίζεται για έναν συγκεκριμένο βαθμό  $l$  ως  $\sigma_l^2 = \sum_{m=0}^l (C_{lm}^2 + S_{lm}^2)$  και αποτελεί τη συνηθισμένη έκφραση ενός μοντέλου στο χώρο των συχνοτήτων. Ωστόσο η μεταβλητότητα βαθμού δεν περιέχει κάποια πληροφορία για την ακρίβεια του συγκεκριμένου μοντέλου. Γι' αυτό το σκοπό χρησιμοποιείται το λεγόμενο *σφάλμα μεταβλητότητας βαθμού*, ποσότητα η οποία υπολογίζεται από τη σχέση

$$\hat{\sigma}_l^2 = \sum_{m=0}^l (\hat{\sigma}_{C_{lm}}^2 + \hat{\sigma}_{S_{lm}}^2) \quad (1.2)$$

με  $\hat{\sigma}_{C_{lm}}$  και  $\hat{\sigma}_{S_{lm}}$  να εκφράζουν τις μεταβλητότητες των συντελεστών  $C_{lm}$  και  $S_{lm}$  αντίστοιχα. Οι ποσότητες  $\hat{\sigma}_{C_{lm}}$  και  $\hat{\sigma}_{S_{lm}}$  δηλώνουν τη συνολική ακρίβεια υπολογισμού των συντελεστών  $C_{lm}$  και  $S_{lm}$  εκφράζοντας τις μεταβλητότητες που προκύπτουν από



**Σχήμα 1.1:** Μέσο τετραγωνικό σφάλμα φάσματος υπολογισμένο σύμφωνα με τον κανόνα του Kaula (τετραγωνική ρίζα της σχέσης 1.3)

την εφαρμογή της ελαχιστοτετραγωνικής συνόρθωσης των παρατηρήσεων στο γραμμικοποιημένο σύστημα εξισώσεων παρατήρησης που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη μεθοδολογία υπολογισμού του υπό εξέταση μοντέλου (τεχνικές (α) - (δ) που αναφέρθηκαν προηγουμένως).

Αποτελεί συνηθισμένη πρακτική στη διεθνή βιβλιογραφία να υπολογίζεται για λόγους αξιολόγησης ή και απλής φασματικής αναπαράστασης ενός μοντέλου η τετραγωνική ρίζα της εξίσωσης (1.2), η οποία χαρακτηρίζεται ως μέσο τετραγωνικό σφάλμα φάσματος (*degree RMS spectrum*). Οι καμπύλες μέσου τετραγωνικού σφάλματος του φάσματος κάποιου μοντέλου μεταβάλλονται επίσης σε σχέση με το βαθμό του αναπτύγματος  $l$  και αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο για την αξιολόγηση της ποιότητας του μοντέλου. Μία βασική ανεξάρτητη πηγή πληροφόρησης, η οποία εξυπηρετεί ιδιαίτερα αυτήν τη διαδικασία φασματικής αξιολόγησης αποτελεί ο λεγόμενος κανόνας του Kaula. Πρόκειται για ένα εμπειρικό μοντέλο για το φάσμα του πραγματικού πεδίου βαρύτητας το οποίο ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο

$$\sigma_l^2 = \frac{1.6 \times 10^{-10}}{l^3} \quad (1.3)$$

Το εμπειρικό αυτό μοντέλο προέκυψε από μία διεξοδική στατιστική επεξεργασία πραγματικών δεδομένων βαρύτητας και παρουσιάζει μία εμπειρική εκτίμηση του τρόπου μεταβολής του βαρυτικού φάσματος. Ο κανόνας του Kaula υποστηρίζει με άλλα λόγια ότι για έναν συγκεκριμένο βαθμό  $l$ , ο τετραγωνικός μέσος όρος που υπολογίζεται από όλους τους σφαιρικούς αρμονικούς συντελεστές της συνάρτησης του δυναμικού του πεδίου βαρύτητας της γης για το σύνολο των διαθέσιμων τάξεων μειώνεται όσο ο βαθμός αυξάνεται και η μείωση αυτή πραγματοποιείται προσεγγιστικά σύμφωνα με τον κανόνα  $10^{-5}/l^2$ . Η εμπειρική διαπίστωση του Kaula εκφράζει το γεγονός ότι το πεδίο βαρύτητας καθορίζεται σε σημαντικότερο βαθμό από τα μεγάλα μήκη κύματος. Η ενέργεια των μικρών μηκών κύματος ή ισοδύναμα των μεγάλων συχνοτήτων του βαρυτικού φάσματος είναι πολύ μικρότερη σε σχέση με τα μεγάλα μήκη κύματος.

## Κεφάλαιο 2

# Βασικές έννοιες και ορισμοί της θεωρίας δορυφορικών τροχιών

### 2.1 Εισαγωγή

Σκοπός του κεφαλαίου είναι να παρουσιαστούν οι βασικοί ορισμοί που περιγράφουν την κίνηση ενός δορυφόρου που βρίσκεται σε τροχιά γύρω από τη γη. Η θεωρία των δορυφορικών τροχιών αποτελεί το βασικό υπόβαθρο των σύγχρονων διαστημικών αποστολών, τόσο στο προκαταρκτικό στάδιο της θεωρητικής προσομοίωσης και προετοιμασίας, όσο και κατά τη διάρκεια ζωής του συγκεκριμένου δορυφόρου. Η ακριβής και αδιάλειπτη γνώση της θέσης του δορυφόρου την κάθε χρονική στιγμή είναι η βασική πρωτογενής πληροφορία που είναι απαραίτητη για την αξιοποίηση των συλλεχθέντων δεδομένων του δορυφόρου ανεξάρτητα από τη φύση της εφαρμογής. Η γνώση της θέσης του δορυφόρου και άρα η μορφή της αντίστοιχης τροχιάς υλοποιείται μέσω μιας διαδικασίας παρακολούθησης του δορυφόρου, που διαφέρει ανάλογα με την υποστηριζόμενη τεχνολογία της κάθε αποστολής. Έτσι, η παρακολούθηση των πρώτων γεωδαιτικών δορυφόρων, όπως για παράδειγμα ο δορυφόρος LAGEOS I ο οποίος τέθηκε σε τροχιά το 1976 (βλ. επόμενο κεφάλαιο), μπορούσε να υλοποιηθεί μόνο μέσω απευθείας υπολογισμού της θέσης τους επάνω στην τροχιά με τη χρήση του συστήματος SLR. Όπως όμως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, το σύστημα SLR επιτρέπει την κάλυψη του δορυφόρου μόνον κατά μήκος επιλεγμένων τόξων τροχιάς και μάλιστα εκείνων που είναι ορατά από το συγκεκριμένο επίγειο σταθμό παρατήρησης. Η εισαγωγή του συστήματος GPS τις δύο τελευταίες δεκαετίες και η ενσωμάτωση της τεχνολογίας GPS στο βασικό εξοπλισμό των σύγχρονων διαστημικών αποστολών επιτρέπει μία σε πραγματικό χρόνο και χωρίς διακοπές καταγραφή της θέσης του δορυφόρου ως προς ένα κοινό παγκόσμιο σύστημα αναφοράς.

Μελετώντας την τροχιά τεχνητών δορυφόρων γύρω από τη γη, πρέπει να κάνουμε έναν πρώτο γενικό θεωρητικό διαχωρισμό. Σε μια πρώτη προσέγγιση, η κίνηση του δορυφόρου καθορίζεται και οφείλεται αποκλειστικά και μόνο στην ελκτική δύναμη που ασκείται στο δορυφόρο από το σύνολο των γήινων μαζών. Αυτή η απλουστευμένη προσέγγιση οδηγεί τελικά στο σύνολο των κανόνων ή νόμων του Kepler, όπως είναι ευρύτερα γνωστοί, τους οποίους διατύπωσε ο ίδιος τον 17ο αιώνα ακολουθώντας έναν καθαρά εμπειρικό τρόπο περιγραφής της κίνησης των πλανητών στο ηλιακό μας σύστημα. Η κίνηση όμως ενός τεχνητού δορυφόρου, ο οποίος βρίσκεται σε τροχιά γύρω από τη γη, δεν υφίσταται μόνον τη δύναμη έλξης των γήινων μαζών. Μία σειρά επιπλέον βαρυτικών αλλά και μη βαρυτικών δυνάμεων, οι περισσότερες των οποίων μεταβάλλονται με το χρόνο, ασκούνται στη μάζα του δορυφόρου επηρεάζοντας την κίνησή του. Για την όσο το δυνατόν πιστότερη περιγραφή μιας τέτοιας ιδιαίτερα πολύπλοκης όσο και απρόβλεπτης κίνησης, έχουν αναπτυχθεί στην πορεία της έρευνας στο χώρο της διαστημικής γεωδαισίας, ιδιαίτερα κατά τις τελευταίες δεκαετίες, πολύπλοκα μαθηματικά μοντέλα που επιχειρούν να συμπεριλάβουν κατά το δυνατόν περισσότερες διαταρακτικές επιδράσεις στην προσέγγιση της πραγματικής άγνωστης τροχιάς του δορυφόρου.

Ο παραπάνω διαχωρισμός θα ακολουθηθεί και στην εξέταση των βασικών εννοιών των δορυφορικών τροχιών που θα παρουσιάσουμε στα επόμενα. Στην αρχή θα εξετάσουμε την περίπτωση μιας *μη διαταρακτικής τροχιάς* για να καταλήξουμε στους γνωστούς νόμους του Kepler, καθώς και στο μαθηματικό τυπολόγιο σύμφωνα με το οποίο συνδέονται αμφίδρομα τα βασικά στοιχεία της τροχιάς με τα διανύσματα θέσης και ταχύτητας του δορυφόρου για μία δεδομένη χρονική στιγμή. Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν οι βασικοί θεωρητικοί άξονες της περιγραφής των *διαταρακτικών τροχιών* και θα εξεταστούν οι σημαντικότερες πηγές διαταρακτικών επιδράσεων στην κίνηση ενός τεχνητού δορυφόρου.

## 2.2 Μη διαταρακτική δορυφορική τροχιά

Εξετάζουμε την περίπτωση μιας μη διαταρακτικής τροχιάς, όπου η μοναδική δύναμη που ασκείται στο δορυφόρο είναι η δύναμη έλξης που προέρχεται από τις γήινες μάζες. Στην περίπτωση αυτή το σημείο εκκίνησης για την εξαγωγή της μαθηματικής εξίσωσης κίνησης του δορυφόρου αποτελεί ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}} \quad (2.1)$$

ο οποίος αναφερόμενος σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς συνδέει τη διανυσματική συνισταμένη  $\mathbf{F}$  όλων των ελκτικών δυνάμεων που ασκούνται στο δορυφόρο συνολικής μάζας  $m$  με την επιτάχυνση του δορυφόρου  $\ddot{\mathbf{x}}$ . Στη σχέση (2.1) η παράμετρος  $\mathbf{x}$  εκφράζει το διάνυσμα θέσης του δορυφόρου ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς και οι δύο τελείες δηλώνουν παραγωγή 2ου βαθμού του συγκεκριμένου διανυσματικού μεγέθους ως προς το χρόνο.

Σύμφωνα με το νόμο της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα για την ελκτική δύναμη που ασκεί ένα σώμα συνολικής μάζας  $M$  (στην περίπτωση μας η γη) σε ένα σώμα μάζας  $m$  (στην περίπτωση μας ο δορυφόρος) θα ισχύει η σχέση

$$\mathbf{F} = -GMm \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_E}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_E|^3} \quad (2.2)$$

όπου  $G$  η παγκόσμια σταθερά του Νεύτωνα, ενώ  $\mathbf{x}_E$  και  $\mathbf{x}$  εκφράζουν τα διανύσματα θέσης των μαζών  $M$  και  $m$  αντίστοιχα ως προς το κοινό αδρανειακό σύστημα αναφοράς, όταν αυτές αντιμετωπιστούν για τις ανάγκες της παρούσας προσέγγισης ως σημειακές μάζες. Εισάγοντας την τελευταία έκφραση στη (2.1) λαμβάνουμε για την εξίσωση κίνησης της μάζας  $m$  τη σχέση

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -GMm \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_E}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_E|^3} \quad (2.3)$$

Κατ' αντιστοιχία λαμβάνουμε για την εξίσωση κίνησης της μάζας  $M$  λόγω της βαρυτικής έλξης που ασκείται από τη μάζα  $m$  την ακόλουθη έκφραση

$$M\ddot{\mathbf{x}}_E = -GMm \frac{\mathbf{x}_E - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_E - \mathbf{x}|^3} \quad (2.4)$$

Εάν μεταθέσουμε την αφηρηρία του αδρανειακού συστήματος στο γεωμετρικό σημείο που είναι τοποθετημένη η μάζα  $M$ , τότε το διάνυσμα θέσης  $\mathbf{r}$  της μάζας  $m$  στο νέο σύστημα θα δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_E \quad (2.5)$$

Παραγωγίζοντας διαδοχικά και συνολικά δύο φορές ως προς το χρόνο και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.3) και (2.4) λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση για την



εξίσωση της σχετικής κίνησης της μάζας  $m$  ως προς το κέντρο της μάζας  $M$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{x}} - \ddot{\mathbf{x}}_E = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3} - Gm \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -G(M + m) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (2.6)$$

Για έναν τεχνητό δορυφόρο που βρίσκεται σε τροχιά γύρω από τη γη μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνολική του μάζα  $m$  ως μία αμελητέα ποσότητα σε σχέση με το σύνολο των ελκτικών γήινων μαζών  $M$  και να καταλήξουμε στη μη διαταρακτική έκφραση της εξίσωσης κίνησης ενός δορυφόρου

$$\ddot{\mathbf{r}} = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (2.7)$$

όπου  $\mathbf{r}$  εκφράζει το διάνυσμα θέσης του δορυφόρου σε σχέση με το γεώκεντρο και  $M$  δηλώνει τη συνισταμένη των γήινων διαταρακτικών μαζών.

Ο υπολογισμός αριθμητικών τιμών για τις σταθερές  $G$  και  $M$  αποτελεί αντικείμενο ξεχωριστής έρευνας. Χρησιμοποιώντας βαθμιδομετρικές μετρήσεις της αμοιβαίας ελκτικής δύναμης που αναπτύσσεται μεταξύ δύο απολύτως γνωστών μαζών μπορεί κανείς να καταλήξει σε έναν εργαστηριακό προσδιορισμό της ποσότητας  $G$ . Η διάταξη του ζυγού στρέψης που χρησιμοποιείται για το σκοπό αυτό συνδέεται ωστόσο με μία σειρά ανεπιθύμητων εξωτερικών επιδράσεων και σφαλμάτων τα οποία, σε συνδυασμό με το ιδιαίτερα ασθενές σήμα που εξ ορισμού χαρακτηρίζει το ελκτικό πεδίο επιτρέπουν έναν αριθμητικό προσδιορισμό του  $G$  που συνοδεύεται από μία περιορισμένης τάξης ακρίβεια και δίνεται από μία σχέση της μορφής

$$G = (6.67259 \pm 0.00085) \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \quad (2.8)$$

Ανεξάρτητα από τον τρόπο υπολογισμού της σταθεράς  $G$  είναι δυνατόν να υπολογιστεί η αριθμητική τιμή του γινομένου  $GM$  της παγκόσμιας σταθερά με το σύνολο των γήινων μαζών, από την απευθείας ανάλυση δεδομένων δορυφορικών αποστάσεων από επίγειους σταθμούς ελέγχου στα πλαίσια της τεχνικής SLR. Οι σχετικές επεξεργασίες οδηγούν σε εκφράσεις της μορφής

$$GM = 398600.4405 \pm 0.001 \text{kg}^3 \text{s}^{-2} \quad (2.9)$$

από όπου μπορεί κανείς να εξάγει μία προσεγγιστική τιμή για την ποσότητα  $M$ , στην προκειμένη περίπτωση

$$M = 5.974 \cdot 10^{24} \text{kg} \quad (2.10)$$

Η εξίσωση κίνησης (2.7) αποτελεί μία διανυσματική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, για μία μονοσήμαντη λύση της οποίας απαιτείται ο προσδιορισμός έξι (6) σταθερών ολοκληρώσεως. Οι πιο συνηθισμένες εκφράσεις των σταθερών αυτών είναι δύο: Είτε η πληροφορία του διανύσματος θέσης  $\mathbf{r}(t_o) = \mathbf{r}_o$  και του διανύσματος ταχύτητας  $\dot{\mathbf{r}}(t_o) = \mathbf{v}(t_o) = \mathbf{v}_o$  του δορυφόρου για μία δεδομένη χρονική στιγμή  $t_o^1$ , είτε η γνώση των έξι (6) Κεπλέρειων στοιχείων της τροχιάς (ένας λεπτομερής ορισμός των οποίων θα δοθεί στη συνέχεια):

$a$  → Ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης

$e$  → Η αριθμητική εκκεντρότητα της έλλειψης

$i$  → Η κλίση του τροχιακού επιπέδου σε σχέση με το ισημερινό επίπεδο

$\Omega$  → Το μήκος του συνδέσμου αναβιβασμού

$\omega$  → Το όρισμα του περιγείου

$t_P$  → Ο χρόνος διέλευσης από το περίγειο<sup>2</sup>

Όπως θα δούμε στη συνέχεια οι δύο αυτές ομάδες σταθερών συνδέονται αμφίδρομα μεταξύ τους μέσω συγκεκριμένων κλειστών αναλυτικών εκφράσεων, κάτι που επιτρέπει για το πρόβλημα προσδιορισμού της τροχιάς και τη γεωμετρική της αναπαράσταση τη γνώση μόνο μίας ομάδας παραμέτρων (είτε δηλαδή τα έξι Κεπλέρεια στοιχεία είτε τη θέση και την ταχύτητα του δορυφόρου σε μία δεδομένη χρονική στιγμή).

Η κίνηση ενός τεχνητού δορυφόρου ο οποίος διαγράφει μια ελλειπτική τροχιά γύρω από τη γη αποτελεί στα πλαίσια της ουράνιας μηχανικής το τελικό αποτέλεσμα του λεγόμενου προβλήματος των δύο σωμάτων. Το γεγονός ότι η ελκτική δύναμη που αναπτύσσεται από το σύνολο των γήινων μαζών στο δορυφόρο έχει φορά που δείχνει πάντοτε προς το γεωκέντρο έχει ως άμεση συνέπεια, η διαγραφόμενη τροχιά να ανήκει σε ένα επίπεδο που δεν μεταβάλλεται με το χρόνο, με την προϋπόθεση να μην ασκούνται άλλες δυνάμεις στο δορυφόρο. Αυτό το τροχιακό επίπεδο είναι καθορισμένο, έχει συγκεκριμένο προσανατολισμό σε σχέση με τον αδρανειακό χώρο και ο δορυφόρος δεν μπορεί να το εγκαταλείψει, καθώς η διεύθυνση της ελκτικής δύναμης ταυτίζεται με αυτήν του διανύσματος θέσης έχοντας απλώς αντίθετη φορά, μην επιτρέποντας με αυτόν τον τρόπο τη δυνατότητα ανάπτυξης επιπρόσθετων επιταχύνσεων στην κάθετη

<sup>1</sup>Η γνώση των δύο διανυσμάτων θέσης και ταχύτητας ισοδυναμεί με τη γνώση έξι συνολικά παραμέτρων, που καθορίζουν μονοσήμαντα το μέτρο, τη διεύθυνση και τη θέση των δύο συγκεκριμένων διανυσμάτων στο χώρο σε σχέση με το κοινό αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

<sup>2</sup>Συχνά αντί του χρόνου αυτού χρησιμοποιείται η λεγόμενη μέση ανωμαλία  $M_o$  κατά τη χρονική στιγμή  $t_o$ .

προς το τροχιακό επίπεδο διεύθυνση.

Για τη μαθηματική επίδειξη αυτού του γεγονότος σχηματίζουμε το εξωτερικό γινόμενο της σχέσης (2.7) με το διάνυσμα θέσης  $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = 0 \quad (2.11)$$

Το δεξιό μέλος αυτής της εξίσωσης ισούται με το μηδέν, καθώς το εξωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος με τον εαυτό του είναι εξ ορισμού ίσο με το μηδέν. Στην αριστερή πλευρά της σχέσης (2.11) μπορεί επιπλέον να προστεθεί η ποσότητα  $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}$ , χωρίς να αλλοιωθεί το αποτέλεσμα, αφού το εξαγόμενο του εξωτερικού γινομένου ενός οποιοδήποτε διανύσματος με τον εαυτό του είναι το μηδενικό διάνυσμα. Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \quad (2.12)$$

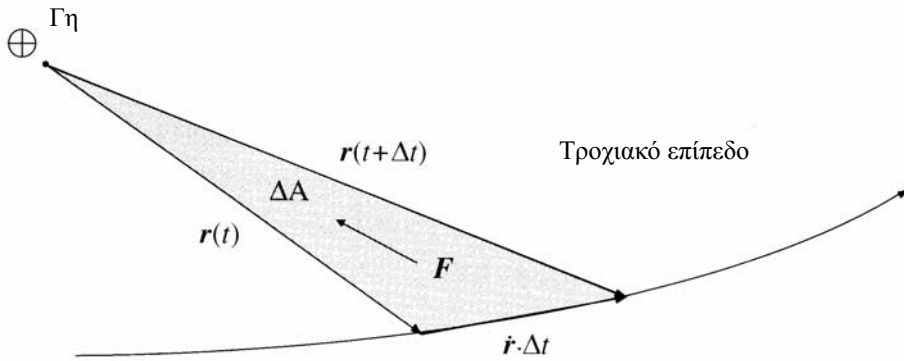
Από τη στιγμή που, σύμφωνα με τη σχέση (2.11), η παράγωγος ως προς το χρόνο της ποσότητας  $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$  ισούται με το μηδέν, θα πρέπει και η ίδια η ποσότητα να αποτελεί μία σταθερά, δηλαδή θα πρέπει να ισχύει

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h} \equiv \text{σταθ.} \quad (2.13)$$

Η γεωμετρική ερμηνεία του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων είναι ότι το διάνυσμα που εκφράζει το εξωτερικό γινόμενο είναι κάθετο στα δύο επί μέρους διανύσματα και συνεπώς κάθετο και στο επίπεδο που ορίζουν. Έτσι, η σχέση (2.13) εκφράζει με άλλα λόγια ότι τα διανύσματα θέσης και ταχύτητας του δορυφόρου  $\mathbf{r}$  και  $\dot{\mathbf{r}}$  αντίστοιχα είναι μονίμως κάθετα στο διάνυσμα  $\mathbf{h}$ , ενώ η διαγραφόμενη τροχιά είναι ορισμένη σε ένα μοναδικό και χρονικά αμετάβλητο επίπεδο. Το διάνυσμα  $\mathbf{h}$  περιγράφεται στη βιβλιογραφία ως η *στροφορμή ανά μονάδα μάζας* του κινούμενου δορυφόρου, η οποία συνδέεται με το διάνυσμα της στροφορμής  $\mathbf{l}$  μέσα από τη σχέση  $\mathbf{l} = m\mathbf{h}$ , με  $m$  τη συνολική μάζα του δορυφόρου.

## 2.2.1 Η γεωμετρική μορφή της τροχιάς

Κάποιες επιπλέον χαρακτηριστικές γεωμετρικές ιδιότητες της μη διαταρακτικής δορυφορικής τροχιάς μπορούν να προκύψουν, εάν πολλαπλασιαστούν οι δύο πλευρές της



**Σχήμα 2.1:** Το κεντρικό πεδίο δυνάμεων δεσμεύει τη δορυφορική κίνηση σε ένα μοναδικό τροχιακό επίπεδο

εξίσωσης (2.7) με το διάνυσμα  $\mathbf{h}$ , οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{h} \times \ddot{\mathbf{r}} &= -\frac{GM}{r^3} (\mathbf{h} \times \mathbf{r}) = -\frac{GM}{r^3} ((\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r}) \\ &= -\frac{GM}{r^3} (\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Λαμβάνοντας τώρα υπόψη ότι ισχύει

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{1}{r} \dot{\mathbf{r}} - \frac{\dot{r}}{r^2} \mathbf{r} = \frac{1}{r^3} (\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})) \quad (2.15)$$

η σχέση (2.14) γίνεται

$$\mathbf{h} \times \ddot{\mathbf{r}} = -GM \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (2.16)$$

Ολοκληρώνοντας και τις δύο πλευρές αυτής της εξίσωσης ως προς το χρόνο παίρνουμε

$$\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}} = -GM \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) - \mathbf{A} \quad (2.17)$$

όπου η ποσότητα  $\mathbf{A}$  εκφράζει τη σταθερά ολοκλήρωσης, χαρακτηρίζεται ως Λαπλασιανό διάνυσμα και προσδιορίζεται με βάση τα αρχικά διανύσματα θέσης και ταχύτητας του δορυφόρου.

Το διάνυσμα  $\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}}$  ανήκει στο τροχιακό επίπεδο, καθώς είναι κάθετο στο διάνυσμα  $\mathbf{h}$ , ενώ στο ίδιο επίπεδο είναι ορισμένο και το μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{r}/r$ . Συνεπώς στο

επίπεδο της τροχιάς θα ανήκει και το διάνυσμα  $\mathbf{A}$ . Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά τη σχέση (2.17) κατά μέλη με  $\mathbf{r}$  οδηγούμαστε στην έκφραση

$$(\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{r} = -GMr - \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} \quad (2.18)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} \quad (2.19)$$

για την απλοποίηση του αριστερού μέλους της (2.18) και εισάγοντας την έννοια της αληθούς ανωμαλίας  $\nu$  ως τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{r}$  (βλ. Σχήμα 2.2) καταλήγουμε στη σχέση

$$h^2 = GMr + Ar \cos \nu \quad (2.20)$$

Ορίζοντας τις βοηθητικές παραμέτρους  $p$  και  $e$  σύμφωνα με τις σχέσεις

$$p = \frac{h^2}{GM}, \quad e = \frac{A}{GM} \quad (2.21)$$

καταλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση κωνικής τομής

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu} \quad (2.22)$$

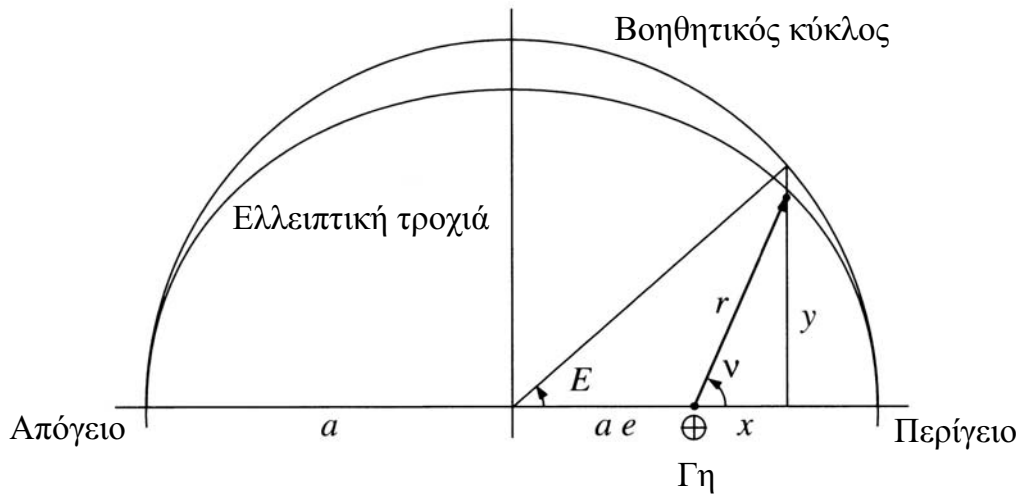
Η συγκεκριμένη εξίσωση καθορίζει τη θέση του δορυφόρου επάνω στην τροχιά που διαγράφεται στο συγκεκριμένο τροχιακό επίπεδο συσχετίζοντας τη γεωκεντρική απόσταση του δορυφόρου  $r$  με τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης του με τη διεύθυνση ανάφορας, όπως αυτή καθορίζεται από το διάνυσμα  $\mathbf{A}$ .

Όπως εύκολα προκύπτει από την εξίσωση (2.22) η απόσταση  $r$  μεταβάλλεται αριθμητικά μεταξύ μιας ελάχιστης τιμής

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + e} \quad (2.23)$$

η οποία προκύπτει για  $\nu = 0$  και μιας μέγιστης τιμής

$$r_{\max} = \begin{cases} \frac{p}{1 - e} & \text{για } 0 \leq e < 1 \\ \infty & \text{για } 1 \leq e \end{cases} \quad (2.24)$$



Σχήμα 2.2: Αληθής και εκκεντρική ανωμαλία

η οποία εξαρτάται άμεσα από την αριθμητική τιμή της παραμέτρου  $e$ . Τα αντίστοιχα σημεία επάνω στην τροχιά χαρακτηρίζονται ως περίγειο ( $r_{\min}$ ) και απόγειο ( $r_{\max}$ ). Η μέση τιμή της μέγιστης και της ελάχιστης απόστασης  $r$  ορίζει το μεγάλο ημιάξονα της έλλειψης  $a$  σύμφωνα με τη σχέση

$$a = \frac{1}{2}(r_{\min} + r_{\max}) = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{h^2}{GM(1 - e^2)} \quad (2.25)$$

Οι βοηθητικές παράμετροι  $p$  και  $e$  ονομάζονται *παράμετρος της κωνικής τομής* και *εκκεντρότητα* αντίστοιχα. Η παράμετρος  $p$  αποτελεί μία γεωμετρική σταθερά της κωνικής τομής και εκφράζει την απόσταση του δορυφόρου από το γεώκεντρο που ορίζεται σε εκείνο το σημείο της τροχιάς για το οποίο το ευθύγραμμο τμήμα  $r$  είναι κάθετο στη διεύθυνση που ορίζεται από το περίγειο και το απόγειο. Η εκκεντρότητα  $e$  από την άλλη αποτελεί μία αριθμητική έκφραση της απόκλισης του σχήματος της ελλειπτικής τροχιάς από εκείνο ενός τέλει κύκλου, ο οποίος διαγράφεται στην περίπτωση που  $e = 0$ .

### 2.2.2 Αρχή διατήρησης της ενέργειας

Ήδη η εξίσωση (2.13) εκφράζει το δεύτερο νόμο του Kepler ή νόμο των επιφανειών, σύμφωνα με τον οποίο το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από την εστία της διαγραφόμενης δορυφορικής τροχιάς (γεώκεντρο) και το δορυφόρο διαγράφει ίσες επιφάνειες

νιες σε ίσους χρόνους. Πράγματι εάν θεωρήσουμε ένα τέτοιο στοιχειώδες χρονικό διάστημα  $\Delta t$  και θεωρήσουμε την κίνηση του δορυφόρου γραμμική γι' αυτό το διάστημα τότε η επιφάνεια που θα διαγραφεί μέσα στο χρόνο  $\Delta t$  από την επιβατική ακτίνα του διανύσματος θέσης του δορυφόρου επάνω στο τροχιακό επίπεδο θα δίνεται από τη σχέση

$$\Delta A = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \Delta t| = \frac{1}{2} |\mathbf{h}| \Delta t \quad (2.26)$$

Καθώς η ποσότητα  $\mathbf{h}$  (και κατά συνέπεια και η  $h = |\mathbf{h}|$ ) παραμένει σύμφωνα με την (2.13) σταθερή, η τελευταία σχέση επιβεβαιώνει την ισχύ του δεύτερου νόμου του Kepler.

Μία επιπλέον ιδιαίτερα χρήσιμη ιδιότητα της Κεπλέρειας κίνησης, μιας μη διαταρακτικής δηλαδή τροχιάς η οποία πληροί τους νόμους του Kepler, αφορά εκείνον το νόμο που συνδέει την ταχύτητα του δορυφόρου με την απόστασή του από το γεώκεντρο. Πρόκειται για την αρχή διατήρησης της ενέργειας, σύμφωνα με την οποία το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας του δορυφόρου θα πρέπει να διατηρείται σταθερό καθ' όλη τη διάρκεια εξέλιξης της δορυφορικής τροχιάς. Για να καταλήξουμε σε αυτήν την ιδιότητα υψώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης (2.17) στο τετράγωνο για να πάρουμε

$$\begin{aligned} (\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}})^2 &= (GM)^2 + 2GM \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}}{r} + A^2 = (GM)^2 (1 + 2e \cos \nu + e^2) \\ &= (GM)^2 (2(1 + e \cos \nu) - (1 - e^2)) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Καθώς τα διανύσματα  $\mathbf{h}$  και  $\dot{\mathbf{r}}$  είναι μεταξύ τους κάθετα, το αριστερό μέλος της σχέσης (2.27) ισούται με  $h^2 v^2$ , όπου χρησιμοποιούμε το συμβολισμό  $v = |\dot{\mathbf{r}}|$  για να δηλώσουμε την ταχύτητα του δορυφόρου. Αντικαθιστώντας την έκφραση  $1/a = GM(1 - e^2)/h^2$  για το αντίστροφο του μεγάλου ημιάξονα της έλλειψης και κάνοντας χρήση της γενικής εξίσωσης περιγραφής μιας κωνικής τομής (2.22) προκύπτει τελικά η σχέση

$$v^2 = GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (2.28)$$

η οποία αποτελεί την έκφραση του νόμου διατήρησης της ενέργειας, σύμφωνα με τον οποίο το άθροισμα της κινητικής

$$E_{κιν} = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2.29)$$

και της δυναμικής ενέργειας του δορυφόρου

$$E_{\delta\nu\nu} = -\frac{GmM}{r} \quad (2.30)$$

διατηρείται σταθερό κατά τη διάρκεια της δορυφορικής τροχιάς και ίσο με

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = -\frac{1}{2}\frac{GmM}{a} \quad (2.31)$$

Όπως φαίνεται από αυτήν την έκφραση, η συνολική ενέργεια εξαρτάται αποκλειστικά από το αντίστροφο του μεγάλου ημιάξονα και όχι από την εκκεντρότητα της τροχιάς. Η συνολική ενέργεια ενός δορυφόρου που βρίσκεται δεσμευμένος σε μία ελλειπτική τροχιά γύρω από τη γη είναι πάντοτε αρνητική, καθώς ο μεγάλος ημιάξονας  $a$  είναι στην περίπτωση αυτών των τροχιών πάντοτε μία θετική ποσότητα. Αντιθέτως παραβολικές ( $1/a = 0$ ) και υπερβολικές ( $1/a < 0$ ) τροχιές χαρακτηρίζονται αντίστοιχα από μία μηδενική ή θετική συνολική ενέργεια, κάτι που εκφράζει το γεγονός ότι στην περίπτωση τέτοιων τροχιών οι δορυφόροι δύνανται θεωρητικά να απομακρυνθούν σε μία απειροστή απόσταση από τη γη.

Για μία σφαιρική τροχιά ( $r = a$ ) η εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας οδηγεί για την ταχύτητα του δορυφόρου στην έκφραση

$$v_o = \sqrt{\frac{GM}{a}} \quad (2.32)$$

η οποία λαμβάνει την αριθμητική τιμή των 7.71 km/s για ένα ύψος τροχιάς της τάξης των 320 km αντιστοιχώντας σε μία περίοδο τροχιάς

$$T_o = \frac{2\pi a}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \quad (2.33)$$

ίσης με 91 λεπτά. Τέτοιοι στοιχειώδεις υπολογισμοί μπορούν να αξιοποιηθούν κατά τη διαδικασία οργάνωσης και προετοιμασίας ειδικών τροχιών δορυφόρων με ιδιαίτερο πεδίο εφαρμογών, όπως για παράδειγμα οι γεωστατικοί δορυφόροι. Η τροχιά των συγκεκριμένων δορυφόρων, οι οποίοι χρησιμοποιούνται ευρέως στις τηλεπικοινωνίες, χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι οι δορυφόροι δεν μεταβάλλουν τη θέση τους σε σχέση με τη γήινη επιφάνεια, με άλλα λόγια η περίοδος της τροχιάς τους σε συνδυασμό με το ύψος τους έχει επιλεγεί κατά τέτοιον τρόπο, ώστε ο δορυφόρος να βρίσκεται συνεχώς επάνω από το ίδιο σημείο της γήινης σφαίρας παρακολουθώντας



από το ύψος που βρίσκεται τη γη στην περιστροφική της κίνηση. Έτσι εάν ένας δορυφόρος τοποθετηθεί σε ύψος τροχιάς ίσο με 35786 km επάνω από τον ισημερινό και τεθεί σε τροχιά με μία ταχύτητα ίση με 3.07 km/s με φορά προς την ανατολή, τότε η περίοδος του συγκεκριμένου δορυφόρου θα ισούται με  $23^h56^m$  και ο δορυφόρος θα διαγράφει μία γεωστατική τροχιά. Το γεγονός ότι το ίχνος ενός γεωστατικού δορυφόρου εκφυλίζεται (θεωρητικά) σε ένα σημείο, βρίσκει σημαντική εφαρμογή στις τηλεπικοινωνίες εξασφαλίζοντας έναν συνεχή δίαυλο μεταφοράς δεδομένων μεταξύ διαφορετικών ηπείρων.

Για μία ελλειπτική τροχιά η ταχύτητα του δορυφόρου μεταβάλλεται μεταξύ μιας μέγιστης τιμής

$$v_{περ} = \sqrt{\frac{GM}{a}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad (2.34)$$

στο περίγειο και μιας ελάχιστης τιμής

$$v_{απ} = \sqrt{\frac{GM}{a}} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \quad (2.35)$$

στο απόγειο, εκφράσεις που προκύπτουν επίσης από την εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας.

### 2.2.3 Εξίσωση του Kepler

Η προηγούμενη συζήτηση ασχολήθηκε με τη γεωμετρική μορφή μιας δορυφορικής τροχιάς στο διάστημα. Με την προϋπόθεση της απουσίας άλλων επιδράσεων και εφαρμόζοντας το νόμο της βαρύτητας καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι η γεωμετρική μορφή της τροχιάς περιγράφεται από μία έλλειψη ή κάποια άλλη κωνική τομή. Ωστόσο στην προσέγγιση που ακολουθήσαμε δεν εξετάσαμε την εξάρτηση της δορυφορικής κίνησης σε σχέση με το χρόνο, με άλλα λόγια δηλαδή, παρόλο που καταλήξαμε στην εξίσωση μιας κωνικής τομής για τη συνολική μορφή της δορυφορικής τροχιάς, δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε τη θέση του δορυφόρου επάνω σε αυτή για μία δεδομένη χρονική στιγμή. Αυτή η πληροφορία δίνεται από τη λεγόμενη *εξίσωση του Kepler*, που πρόκειται να παρουσιάσουμε εδώ.

Βασική γεωμετρική ποσότητα που υπεισέρχεται στη διατύπωση της εξίσωσης του Kepler είναι η λεγόμενη *έκκεντρο ή εκκεντρική ανωμαλία*. Πρόκειται για τη γωνιακή ποσότητα  $E$ , η οποία ορίζεται στο Σχήμα 2.2. Εάν θεωρήσουμε το βοηθητικό κύκλο, ο οποίος ορίζεται για κάθε ελλειπτική τροχιά με τέτοιον τρόπο ώστε η ακτίνα του να ισούται με το μεγάλο ημιάξονα  $a$  και η περιφέρειά του να τέμνει το περίγειο, τότε