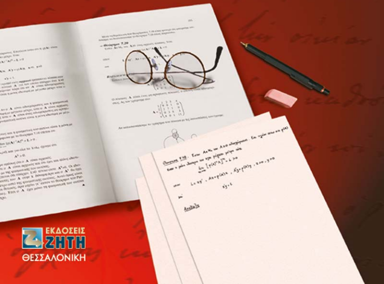
Π.-Χ. Γ. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Α.Π.Θ.

Γ. ΤΣΑΚΛΙΔΗΣ
ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Α.Π.Θ.

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΝΑΚΩΝ



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο υπογράφεται από τους συγγραφείς

ISBN 960-431-713-X

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72.222 (5 γραμ.) - Fax: 23920 72.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203.720, Fax 2310 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

www.ziti.gr

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η Θεωρία Πινάκων είναι από πολύ καιρό ένα βασικό εργαλείο για πολλές περιοχές των Μαθηματικών. Στο βιβλίο αυτό η επιλογή του υλικού έγινε με βάση τη χρησιμότητά του στις εφαρμογές σε άλλες μαθηματικές μεθοδολογίες, σε επιστήμες όπως Φυσική, Οικονομικά κ.λπ. και τέλος τη δύναμή του ως εργαλείο ερευνητικό.

Τη βάση του βιβλίου αποτέλεσαν τα μαθήματα που κάναμε στους φοιτητές του Μαθηματικού τμήματος του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Σε κάθε κεφάλαιο ο στόχος είναι να θεμελιωθεί από τον αναγνώστη ένας μικρός πυρήνας γνώσεων, ο οποίος όμως ευελπιστούμε να είναι επαρκής για παραπέρα μελέτη πάνω στο κάθε αντικείμενο. Το παρόν αποτελεί πραγματικά την πρώτη μας προσέγγιση στην όλη προσπάθεια.

Το βιβλίο ξεκινά με το πρώτο κεφάλαιο όπου δίνονται χρήσιμες έννοιες και αποτελέσματα, που συνήθως περιέχονται στα εισαγωγικά μαθήματα Γραμμικής Άλγεβρας. Τα περισσότερα δίνονται χωρίς αποδείξεις και η γραφή είναι σχεδόν παντού πυκνή. Όμως πιστεύουμε ότι μ' αυτόν τον τρόπο το βιβλίο αυτό θα έχει μια δική του αυτοτέλεια, θα ενοποιεί συμβολισμούς και ορολογία και θα διευκολύνει τον αναγνώστη να καλύπτει τα κενά των γνώσεων, που απαιτεί το μαθηματικό υπόβαθρο του παρόντος υλικού. Στην προσπάθεια αυτή θα θεωρήσουμε ότι είναι γνωστός ένας στοιχειώδης πυρήνας γνώσεων σχετικά με τους πίνακες. Ο αναγνώστης πρέπει να ξεκινήσει από αυτό το κεφάλαιο.

Τα υπόλοιπα κεφάλαια έχουν μια σχετική αυτοτέλεια. Έτσι, στη συνέχεια ο αναγνώστης μπορεί να σχηματίσει τους δικούς του διαδρόμους δουλειάς για να φθάσει στο σκοπό του. Για παράδειγμα, αν ο στόχος του αναγνώστη είναι η θεωρία των μη αρνητικών πινάκων τότε θα αρχίσει με το κεφάλαιο 1, μετά θα δουλέψει με το κεφάλαιο 4, τις norms πινάκων, και τέλος με το κεφάλαιο 7 όπου δίνονται οι μη αρνητικοί πίνακες.

Μερικά από τ' αποτελέσματα που παρουσιάζονται μπορούν να γενικευθούν και να ισχύουν για πίνακες με συντελεστές από άλλα σώματα εκτός του $\mathbb{C}$ ή σε κάποιες ευρύτερες αλγεβρικές περιοχές. Η επιλογή μας να περιοριστούμε στο σώμα των μιγαδικών αριθμών οφείλεται σε πολλούς λόγους, ένας από τους οποίους είναι ότι έτσι μπορούν να εφαρμοστούν οι γνωστές μέθοδοι της κλασσικής ανάλυσης.

Ο αναγνώστης που θέλει να επεκταθεί περισσότερο σε κάποια περιοχή του βιβλίου μπορεί να συμβουλευτεί τη βιβλιογραφία που δίνεται στο τέλος.

Η θεωρία πινάκων έχει μια δική της γοητεία που την έχει εξασκήσει μέσα στους αιώνες πάνω σε πολύ καλούς μαθηματικούς οι οποίοι δεν ξέφυγαν μια ζωή από την αγκαλιά της. Αν η προσπάθειά μας της πρώτης έκδοσης έχει καταφέρει να διατηρήσει ένα μέρος αυτής της ομορφιάς, τότε είμαστε στο σωστό δρόμο για την παρούσα δεύτερη έκδοση.

Ο κάθε ένας από τους συγγραφείς ευχαριστεί το άμεσο περιβάλλον του, για την ανοχή κατά τη διάρκεια του γραψίματος αυτού του υλικού.

Π.-Χ.Γ. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ *Γ. ΤΣΑΚΛΙΔΗΣ*

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

1.1. Εισαγωγή..13
1.2. Διάσταση και βάση...13
1.3. Πίνακες...15
1.4. Ορίζουσες...16
1.5. Βαθμός πίνακα..20
1.6. Αντίστροφος πίνακα..22
1.7. Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα...29
1.8. Ομοιότητα...37
1.9. Προβλήματα..48

Κεφάλαιο 2

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ
ΚΑΙ ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

2.1. Εισαγωγή..55
2.2. Πολυωνυμικοί πίνακες...55
2.3. Πράξεις με πολυωνυμικούς πίνακες..56
2.4. Ισοδυναμία πολυωνυμικών πινάκων...60
2.5. Πολυώνυμα - μηδενιστές.
Χαρακτηριστικό και ελάχιστο πολυώνυμο...65
2.6. Υπολογισμός του ελάχιστου πολυωνύμου...67
2.7. Αναλλοίωτα πολυώνυμα και στοιχειώδεις διαιρέτες..........................73
2.8. Η πρώτη φυσική κανονική μορφή...79
2.9. Η δεύτερη φυσική κανονική μορφή...80
2.10. Η Jordan κανονική μορφή...81
2.11. Υπολογισμός της Jordan κανονικής μορφής.....................................87
2.12. Υπολογισμός του πίνακα μετασχηματισμού......................................92
2.13. Η πραγματική Jordan κανονική μορφή...97
2.14. Εφαρμογές της Jordan κανονικής μορφής.......................................100

Κεφάλαιο 3

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

3.1. Εισαγωγή..107

3.2. Πολυώνυμα παρεμβολής 109
3.3. Η συνάρτηση πίνακα 112
3.4. Οι συνιστώσες ενός πίνακα 116
3.5. Ακολουθίες και σειρές πινάκων 118
3.6. Σχέσεις μεταξύ συναρτήσεων πινάκων 123
3.7. Η χρήση μιγαδικών επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων 124
3.8 Εφαρμογές των συναρτήσεων πινάκων στα συστήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές 128

Κεφάλαιο 4

ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ - NORMS ΠΙΝΑΚΩΝ

4.1. Εισαγωγή 137
4.2. Εσωτερικό γινόμενο 137
4.3. Norm διανύσματος 142
4.4. Συνήθεις norms διανύσματος 143
4.5. Norm πίνακα 149
4.6. Συνήθεις norms πίνακα 153
4.7. Η φασματική ακτίνα 156
4.8. Διαγώνια κυρίαρχοι πίνακες 163
Προβλήματα 166

Κεφάλαιο 5

ΚΑΝΟΝΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ, Η ΠΟΛΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ Η ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΙΔΙΑΖΟΥΣΕΣ ΤΙΜΕΣ

5.1. Εισαγωγή 173
5.2. Κανονικοί πίνακες 173
5.3. Θετικά ημιορισμένοι και ορισμένοι πίνακες 181
5.4. Διγραμμικές μορφές 188
5.5. Τετραγωνικές μορφές 190
5.6. Ιδιότητες των τετραγωνικών μορφών 193
5.7. Η πολική ανάλυση 194
5.8. Η ανάλυση με τις ιδιάζουσες τιμές 200
5.9. Εφαρμογές της ανάλυσης με τις ιδιάζουσες τιμές 205
5.10. Η τριγωνική παραγοντοποίηση 206
5.11. Το θεώρημα της ορθομοναδιαίας τριγωνοποίησης (θεώρημα του Schur) 212

Κεφάλαιο 6

KRONECKER ΚΑΙ HADAMARD ΓΙΝΟΜΕΝΑ

6.1. Εισαγωγή 223
6.2. Το Kronecker γινόμενο πινάκων 223
6.3. Ο τελεστής Vec 237
6.4. Το Hadamard γινόμενο πινάκων 251
Προβλήματα 256

Κεφάλαιο 7

ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

7.1. Εισαγωγή 259
7.2. Δομή ενός μη αρνητικού πίνακα 259
7.3. Θεώρημα του Perron για θετικούς πίνακες 275
7.4 Το θεώρημα των Perron-Frobenius για μη αρνητικούς πίνακες 290
7.5 Αρχικοί πίνακες 299
Προβλήματα 316

Κεφάλαιο 8

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ

8.1. Εισαγωγή 325
8.2. Γενικευμένος αντίστροφος 325
8.3 Ο Moore-Penrose γενικευμένος αντίστροφος 329
8.4 Εφαρμογές των γενικευμένων αντιστρόφων. Η εξίσωση **AXB=C** 335
8.5 Συστήματα γραμμικών εξισώσεων 338
8.6 Εφαρμογές στη στατιστική 344
8.7 Η βέλτιστη προσεγγιστική λύση του συστήματος **Ax=g** 346
8.8 Ο γενικευμένος αντίστροφος ελαχίστων τετραγώνων 349

Βιβλιογραφία 359

Ευρετήριο όρων 363

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

$\mathbb{R}$	το σύνολο των πραγματικών αριθμών
$\mathbb{R}^n$	το σύνολο των πραγματικών n-άδων
$\mathbb{C}$	το σύνολο των μιγαδικών αριθμών
$\mathbb{C}^n$	το σύνολο των μιγαδικών n-άδων
F	τυχαίο σώμα (συνήθως το $\mathbb{C}$ ή το $\mathbb{R}$)
F^n	το σύνολο των n-άδων με στοιχεία από το F
$M_{m,n}(F)$	το σύνολο των $m\times n$ πινάκων με στοιχεία από το F
$M_{m,n}$	το σύνολο των $m\times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{C}$
M_n	το σύνολο των n-διάστατων τετραγωνικών πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{C}$
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$	πίνακες
$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots$	διανύσματα στήλες
$\mathbf{A}'$	ο ανάστροφος πίνακας του $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^*$	ο ανάστροφος συζυγής πίνακας του $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{-1}$	ο αντίστροφος πίνακας του $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^+$	ο Moore-Pensore γενικευμένος αντίστροφος του $\mathbf{A}$
$\mathrm{adj}\mathbf{A}$	ο συμπληρωματικός πίνακας του $\mathbf{A}$
$\det(\mathbf{A})$	η ορίζουσα του $\mathbf{A}$
$\mathbf{I}$	ο μοναδιαίος πίνακας ($\mathbf{I}\in M_n(F)$)
$\mathbf{0}$	ο μηδενικός πίνακας ($\mathbf{0}\in M_{m,n}(F)$)
$\binom{n}{k}$	ο διωνυμικός συντελεστής
$\mathrm{rank}(\mathbf{A})$	ο βαθμός του $\mathbf{A}$
$\varrho(\mathbf{A})$	η φασματική ακτίνα του $\mathbf{A}\in M_{m,n}(F)$
$\sigma(\mathbf{A})$	το φάσμα (το σύνολο των ιδιοτιμών) του $\mathbf{A}\in M_{m,n}(F)$
$\mathrm{tr}\mathbf{A}$	το ίχνος του $\mathbf{A}\in M_{m,n}(F)$
$\lVert\bullet\rVert_1$	η L_1 norm στον $\mathbb{C}^n$; η L_1 norm πίνακα στον M_n.
$\lVert\bullet\rVert_2$	η L_2 (ευκλείδεια) norm στον $\mathbb{C}^n$; η L_2 norm (του Frobenius) πίνακα στον M_n.
$\lVert\bullet\rVert_\infty$	η L_∞ (max) norm στον $\mathbb{C}^n$; η L_∞ διανυσματική norm στον M_n.
$\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$	τα διανύσματα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ είναι κάθετα
$\mathbf{J}_k(\lambda)$	το Jordan μπλοκ διάστασης k για την ιδιοτιμή λ
δ_{ij}	το σύμβολο Kronecker

1.1. *Εισαγωγή*

Στο κεφάλαιο αυτό θα δώσουμε χρήσιμες έννοιες και αποτελέσματα, που συνήθως περιέχονται στα εισαγωγικά μαθήματα Γραμμικής Άλγεβρας. Τα περισσότερα αποτελέσματα θα δοθούν με συντομία και χωρίς αποδείξεις. Όμως πιστεύουμε ότι μ' αυτόν τον τρόπο το βιβλίο αυτό θα έχει μια δική του αυτοτέλεια, θα ενοποιεί συμβολισμούς και ορολογία και θα διευκολύνει τον αναγνώστη να καλύπτει τα κενά των γνώσεων, που απαιτεί ο οπτικός ορίζοντας του παρόντος υλικού. Στην προσπάθεια αυτή θα θεωρήσουμε ότι είναι γνωστός ένας μικρός πυρήνας γνώσεων σχετικά με τους πίνακες.

Το βασικό σκηνικό της Θεωρίας Πινάκων είναι ένας διανυσματικός χώρος και το σώμα από το οποίο παίρνουμε τους συντελεστές για την πράξη του πολλαπλασιασμού. Για τους δικούς μας σκοπούς ως σώματα θα χρησιμοποιηθούν το σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ και το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ με πράξεις τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

Δεδομένου ενός σώματος F, το σύνολο F^n των n-δων (n θετικός ακέραιος) με στοιχεία από το F είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο F με τις συνήθεις πράξεις στο F^n. Οι ειδικές περιπτώσεις των $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{C}^n$ είναι κατά κύριο λόγο οι διανυσματικοί χώροι αυτού του βιβλίου.

1.2. *Διάσταση και βάση*

Ένας *υποχώρος* U ενός διανυσματικού χώρου V είναι ένα μη κενό υποσύνολο του V το οποίο είναι κι αυτό ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο ίδιο σώμα. Τα διανύσματα του παρόντος θα είναι εν γένει n-δες. Το γεγονός αυτό δεν προσδιορίζει κατ' ανάγκη και τη διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγεται. Π.χ. ας θεωρήσουμε μη μηδενικά διανύσματα του R^3 (3-δες από τον χώρο των πραγματικών αριθμών). Αν αυτά ανήκουν όλα στο ίδιο επίπεδο χωρίς να είναι όλα παράλληλα μεταξύ τους, τότε ο διανυσματικός χώρος που παράγουν έχει διάσταση 2. Αν αυτά είναι παράλληλα μεταξύ τους, τότε η διάσταση είναι 1. Εν γένει η διάσταση ενός τέτοιου διανυσματικού χώρου είναι 3 και οι παραπάνω διανυσματικοί χώροι διαστάσεων 1 και 2 αποτελούν υποχώρους αυτού.

Στη γενική περίπτωση ισχύουν τα παρακάτω.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1

Τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_k$ ενός διανυσματικού χώρου V πάνω στο σώμα F ονομάζονται *γραμμικά ανεξάρτητα* εάν και μόνο εάν η σχέση

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+ \ldots +c_k\boldsymbol{\alpha}_k = \mathbf{0}, \quad c_1, c_2, \ldots, c_k \in F,$$

ισχύει μόνο όταν $c_1 = c_2 \ldots = c_k = 0$.

Αντίθετα, *γραμμικά εξαρτημένα* ονομάζονται αν η παραπάνω σχέση έχει λύση για τα $c_1, c_2, \ldots, c_k$ στην οποία ένα τουλάχιστον από τα c_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ δεν είναι μηδέν.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2

Ένας διανυσματικός χώρος V πάνω στο σώμα F έχει *διάσταση* k εάν ανήκει σ' αυτόν ένα τουλάχιστον σύνολο k διανυσμάτων τα οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητα και συγχρόνως δεν ανήκει σ' αυτόν οποιοδήποτε σύνολο $k+1$ γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3

Εάν ο διανυσματικός χώρος V πάνω στο σώμα F έχει διάσταση k, τότε ένα σύνολο $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_k$ γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του V ονομάζεται *βάση* του V.

Εάν ο διανυσματικός χώρος V πάνω στο σώμα F έχει διάσταση k και $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του V με $n<k$, τότε υπάρχουν επιπλέον διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}, \boldsymbol{\alpha}_{n+2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_k \in V$ τέτοια ώστε το σύνολο των διανυσμάτων $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_k$ να είναι μία βάση του V. Η επέκταση του συνόλου των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων σε βάση του V δεν είναι μοναδική.

Ο όρος βάση χρησιμοποιείται γιατί υπογραμμίζει το γεγονός ότι οποιοδήποτε στοιχείο $\mathbf{y}$ ενός διανυσματικού χώρου V, διάστασης k πάνω στο σώμα F, μπορεί να εκφραστεί σαν ένας γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης του V, δηλ.

$$\mathbf{y} = c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\ldots+c_k\boldsymbol{\alpha}_k ,$$

όπου $c_i \in F$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Ένα σύνολο από διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_k$ του διανυσματικού χώρου V πάνω στο σώμα F τα οποία αποτελούν μία βάση του χώρου V θα ονομάζεται *πλήρες σύνολο* του V.

Εάν $U \subset V$ όπου V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα F, τότε το *γραμμικό περίβλημα* του U, το οποίο συμβολίζουμε με span U, είναι το σύνολο

$$\text{span}(U) = \{c_1\boldsymbol{\upsilon}_1 + c_2\boldsymbol{\upsilon}_2 + \ldots + c_k\boldsymbol{\upsilon}_k : c_1, c_2, \ldots, c_k \in F,$$
$$\boldsymbol{\upsilon}_1, \boldsymbol{\upsilon}_2 \ldots, \ldots, \boldsymbol{\upsilon}_k \in U,\ k = 1, 2, \ldots\}.$$

Το σύνολο span (U) είναι πάντα ένας υποχώρος του V ακόμα και εάν ο U δεν είναι υποχώρος του V.

Ο διανυσματικός χώρος των n-δων με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{R}$ δηλ. ο $\mathbb{R}^n$, έχει διάσταση n. Αντίστοιχα ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{C}^n$ έχει διάσταση n, αντίστοιχα πάνω στο σώμα $\mathbb{C}$ αλλά έχει διάσταση 2n πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$.

Εάν U και V είναι δύο διανυσματικοί χώροι πάνω στο ίδιο σώμα F και εάν $f: U \to V$ είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση τέτοια ώστε

$$f(\alpha\mathbf{x}+b\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x})+bf(\mathbf{y}) \quad \text{για όλα τα } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U, \quad \alpha, b \in F,$$

τότε λέμε ότι η f είναι ένας *ισομορφισμός* και οι διανυσματικοί χώροι U και V είναι *ισόμορφοι*.

Δύο διανυσματικοί χώροι U και V πάνω στο σώμα F είναι ισόμορφοι εάν και μόνο εάν έχουν την ίδια διάσταση. Οποιοσδήποτε διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα F που έχει διάσταση n είναι ισόμορφος με τον F^n.

1.3. Πίνακες

Είναι γνωστό ότι πίνακας **A** είναι μία ορθογώνια διάταξη από στοιχεία α_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m)$ ενός σώματος F, δηλ.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}.$$

Λέμε ότι ο παραπάνω πίνακας είναι διάστασης $n\times m$, ή τύπου $n\times m$, δηλ. έχει n γραμμές και m στήλες.

Συμβολίζουμε με $M_{n,m}(F)$ το σύνολο των $n\times m$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα F. Το σύνολο $M_{n,n}(F)$ το γράφουμε συντμημένα ως $M_n(F)$. Ειδικότερα, θα συμβολίζουμε με M_n το $M_{n,n}(\mathbb{C})$, όπου $\mathbb{C}$ το σώμα των μιγαδικών αριθμών.

Θεωρούμε γνωστούς τους ορισμούς των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού πινάκων και σημειώνουμε ότι

1) Αν $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{n,m}(F)$ και $\mathbf{C} \in M_{m,k}(F)$, τότε $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$.

2) Αν $\mathbf{A}\in M_{n,m}(F)$, $\mathbf{B}\in M_{m,k}(F)$ και $\mathbf{C}\in M_{k,r}(F)$, τότε $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$.
3) Αν $\mathbf{A}\in M_{n,m}(F)$, τότε υπάρχει ένας πίνακας $\mathbf{0}\in M_{n,1}(F)$ τέτοιος ώστε

$$\mathbf{A0} = \mathbf{0}.$$

Ο πίνακας $\mathbf{0}$ έχει όλα τα στοιχεία του μηδέν.

4) Αν $\mathbf{A}\in M_n(F)$ τότε το μοναδιαίο στοιχείο του πολλαπλασιασμού πάντα υπάρχει, το συμβολίζουμε με $\mathbf{I}$ και είναι ένας $n\times n$ της μορφής

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ο ορισμός επεκτείνεται κατά προφανή τρόπο και για μη πεπερασμένο n.

Εάν $\mathbf{B}\in M_{m,r}(F)$, $\mathbf{C}\in M_{m,k}(F)$, $\mathbf{D}\in M_{n,r}(F)$, $\mathbf{Q}\in M_{n,k}(F)$ και σχηματίσουμε τον πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c@{}l} \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{Q} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \}\ m \\ \}\ n \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\ }_{r} & \underbrace{\ }_{k} \end{array} & \end{array},$$

τότε είναι προφανές ότι $\mathbf{A}\in M_{m+n,\, r+k}(F)$. Οι πίνακες $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{Q}$ ονομάζονται *υποπίνακες* ή *μπλοκς* (blocks) του $\mathbf{A}$ και η παραπάνω γραφή του $\mathbf{A}$ αναφέρεται ως ένας *διαχωρισμός* του $\mathbf{A}$. Είναι φανερό ότι ο διαχωρισμός ενός πίνακα με μπλοκ πίνακες μπορεί να γίνει (εν γένει) με πολλούς τρόπους. Γραφικά αυτό μπορεί να παρασταθεί με διακεκομμένες γραμμές από την μία άκρη του πίνακα έως την άλλη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1

Έστω ο πίνακας

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 8 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Τότε ένας διαχωρισμός του $\mathbf{A}$ είναι ο εξής:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cccc:cc} 1 & 4 & 6 & 8 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ \hdashline 3 & 2 & 6 & 2 & 5 & 7 \\ \hdashline 4 & 1 & 5 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right).$$

Θέτοντας

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_{21} = (3 \;\; 2 \;\; 6 \;\; 2)$$

$$\mathbf{A}_{22} = (5 \;\; 7)\,, \qquad \mathbf{A}_{31} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \;\; \text{και} \;\; \mathbf{A}_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix},$$

ο πίνακας $\mathbf{A}$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} \end{pmatrix},$$

όπου $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$, $\mathbf{A}_{21}$, $\mathbf{A}_{22}$, $\mathbf{A}_{31}$ και $\mathbf{A}_{33}$ είναι τα μπλοκς του πίνακα $\mathbf{A}$.

Εάν $\mathbf{A} \in M_{m,\,n}(\mathbb{C})$, ονομάζουμε *ανάστροφό* του τον πίνακα $\mathbf{A}' \in M_{n,\,m}(\mathbb{C})$. ο οποίος έχει ως γραμμές τις αντίστοιχες στήλες του $\mathbf{A}$ και ως στήλες τις αντίστοιχες γραμμές του $\mathbf{A}$. Είναι φανερό ότι $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$.

Ο ανάστροφος πίνακας ενός μπλοκ πίνακα είναι ο ανάστροφος μπλοκ πίνακας των ανάστροφων μπλοκς, δηλ. αν

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix},$$

τότε

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \mathbf{A}'_{11} & \mathbf{A}'_{21} & \mathbf{A}'_{31} \\ \mathbf{A}'_{12} & \mathbf{A}'_{22} & \mathbf{A}'_{32} \end{pmatrix}.$$

Εάν $\mathbf{A} \in M_{m,\,n}(\mathbb{C})$, συμβολίζουμε με $\mathbf{A}^*$ τον ανάστροφο συζυγή του $\mathbf{A}$ και με $\overline{\mathbf{A}}$ τον συζυγή του $\mathbf{A}$.

Είναι γνωστό εν γένει ότι $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, δηλ. στην πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων δεν ισχύει εν γένει η αντιμεταθετικότητα. Επίσης, εφιστάται η προσοχή στα εξής:

i) Αν $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$ και $\mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$, τότε εν γένει

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 \neq \mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2,$$

διότι

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = (\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{B}+\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2+\mathbf{BA}+\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2.$$

Φυσικά και το ανάπτυγμα του Newton στον υπολογισμό του $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^n$ ισχύει μόνο αν οι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι αντιμεταθετικοί.

ii) Ένα άλλο αποτέλεσμα που δεν έχει ανάλογο στον πολλαπλασιασμό αριθμών, είναι το γεγονός ότι είναι δυνατό για $\mathbf{0} \neq \mathbf{A} \in M_{n,\, m}(\mathbb{C})$ και $\mathbf{0} \neq \mathbf{B} \in M_{m,\, k}(\mathbb{C})$ να ισχύει $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$. Συνέπεια αυτού του γεγονότος είναι ότι αν το γινόμενο δύο πινάκων είναι ο μηδενικός πίνακας, τότε δεν ισχύει κατ' ανάγκη ότι $\mathbf{A}=\mathbf{0}$ ή $\mathbf{B}=\mathbf{0}$. Αυτό μπορεί να δειχθεί με το παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επίσης, αν $\mathbf{A} \in M_n$ και $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ είναι δυνατόν να ισχύει $\mathbf{A}^2=\mathbf{0}$. Έτσι,

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

iii) Αν $\mathbf{A} \in M_n$, $\mathbf{x} \in M_{n,\, 1}(\mathbb{C})$ και

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0},$$

τότε πάλι δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\mathbf{A}=\mathbf{0}$ ή $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ ή και τα δύο. Έτσι,

$$\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Όμως αν $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ για κάθε $\mathbf{x} \in M_{n,\, 1}(\mathbb{C})$, τότε $\mathbf{A}=\mathbf{0}$. Επίσης αν $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ είναι μία βάση στον $M_{n,\, 1}$ και αν $\mathbf{Ax}_i=\mathbf{0}$ για $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε είναι $\mathbf{A}=\mathbf{0}$.

1.4. Ορίζουσες

Αν $\mathbf{A} \in M_n$ θα συμβολίζουμε με $\det(\mathbf{A})$ την ορίζουσα του $\mathbf{A}$. Θα υποθέσουμε ότι ο αναγνώστης γνωρίζει τα στοιχειώδη που αφορούν την ορίζουσα ενός πίνακα και στην παράγραφο αυτή απλά θα συζητήσουμε κάποιες ιδιότητες και προτάσεις. Η ορίζουσα είναι αριθμός και περιέχει πολύ περιληπτικά κάποιες πληροφορίες για τον πίνακα.

Αν $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ είναι οι στήλες του πίνακα $\mathbf{A} \in M_n$, τότε ο $\mathbf{A}$ μπορεί να γραφεί ως μπλοκ πίνακας στη μορφή

$$\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)$$

και έτσι

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) .$$

Αν $\boldsymbol{\alpha}_1 = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2$ με $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, τότε

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= \det(c_1\mathbf{b}_1+c_2\mathbf{b}_2, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \\ &= \det(c_1\mathbf{b}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)+\det(c_2\mathbf{b}_2, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) .\end{aligned}$$

Θα συμβολίζουμε με $\det(\mathbf{A}_{ij})$ την ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τον $\mathbf{A}$ την i γραμμή και την j στήλη του. Έχουμε ότι

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_j (-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{ij}) .$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται *ανάπτυγμα της ορίζουσας **A** κατά την i-γραμμή*. Ο αριθμός $(-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{ij})$ ονομάζεται *συμπαράγοντας* (*cofactor*) του στοιχείου α_{ij}.

Είναι γνωστό (μπορεί να γίνει σαν άσκηση) ότι $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}')$ και κατά συνέπεια όλες οι ιδιότητες μιας ορίζουσας που αναφέρονται στις γραμμές του $\mathbf{A}$ μπορούν ισοδύναμα να διατυπωθούν για τις στήλες του. Επίσης, αν δύο γραμμές ενός πίνακα είναι ίδιες, τότε η ορίζουσα είναι ίση με το 0. Εάν $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$, τότε

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) \text{ και}$$

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}), \ \det(\mathbf{A}^2) = (\det(\mathbf{A}))^2 \text{ εάν } \mathbf{A} \in M_n .$$

Εάν αλλάξουμε δύο γραμμές (ή στήλες) ενός πίνακα, τότε αλλάζει το πρόσημο της ορίζουσας. Εάν $\mathbf{A} \in M_n$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε $\det(\lambda\mathbf{A}) = \lambda^n\det(\mathbf{A})$ καθώς και $\det(\overline{\mathbf{A}}) = \overline{(\det(\mathbf{A}))}$. Αν $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{C})$, τότε

$$\det(\mathbf{A})+\det(\mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}+\mathbf{B})$$

$$\det(\mathbf{A})-\det(\mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}-\mathbf{B}).$$

1.5. Βαθμός πίνακα

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4

Έστω $\mathbf{A} \in M_{m,n}(F)$. Ονομάζουμε *βαθμό* (ή *βαθμίδα*) του πίνακα $\mathbf{A}$ και συμβολίζουμε με $\mathrm{rank}(\mathbf{A})$ τον μεγαλύτερο αριθμό από γραμμικά ανεξάρτητες στήλες (γραμμές) του $\mathbf{A}$. Αν $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = k$, τότε υπάρχει ένας $k\times k$ υποπίνακας του $\mathbf{A}$ με μη μηδενική ορίζουσα και όλοι οι υποπίνακες του $\mathbf{A}$ με διάσταση μεγαλύτερη του k έχουν μηδενική ορίζουσα.

Αν $\mathbf{A}\in M_{m,\,n}(F)$, ορίζουμε ως *σύνολο τιμών* του $\mathbf{A}$ το σύνολο

$$\{\mathbf{y}\in F^m : \mathbf{y} = \mathbf{Ax} \text{ για κάποιο } \mathbf{x}\in F^n\}.$$

Ως *μηδενικός χώρος* του $\mathbf{A}$ ορίζεται το σύνολο

$$\{\mathbf{x}\in F^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}.$$

Είναι γνωστό ότι

$$\begin{aligned} n = {} & (\text{διάσταση του μηδενικού χώρου}) + \\ & + (\text{διάσταση του συνόλου (χώρου) των τιμών του } \mathbf{A}). \end{aligned}$$

Αν $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = k$, τότε η διάσταση του συνόλου (χώρου) τιμών του $\mathbf{A}$ είναι k.

Οι παρακάτω ανισότητες και ισότητες είναι βασικές όταν επιζητούμε να θεμελιώσουμε αποτελέσματα που αφορούν βαθμούς πινάκων:

α) Για κάθε $\mathbf{A}\in M_{m,\,n}(F)$ έχουμε $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) \le \min(m, n)$.

b) Εάν $\mathbf{A}\in M_{m,\,k}(F)$ και $\mathbf{B}\in M_{k,\,n}(F)$, τότε

$$\mathrm{rank}(\mathbf{A})+\mathrm{rank}(\mathbf{B})-k \le \mathrm{rank}(\mathbf{AB}) \le \min\{\mathrm{rank}(\mathbf{A}), \mathrm{rank}(\mathbf{B})\}.$$

c) Εάν $\mathbf{A}, \mathbf{B}\in M_{m,\,n}(F)$, τότε

$$\mathrm{rank}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \le \mathrm{rank}(\mathbf{A})+\mathrm{rank}(\mathbf{B}).$$

d) Εάν $\mathbf{A}\in M_{m,\,k}(F)$, $\mathbf{B}\in M_{k,\,\varrho}(F)$ και $\mathbf{C}\in M_{\varrho,\,n}(F)$, τότε

$$\mathrm{rank}(\mathbf{AB})+\mathrm{rank}(\mathbf{BC}) \le \mathrm{rank}(\mathbf{B})+\mathrm{rank}(\mathbf{ABC}).$$

e) Εάν $\mathbf{A}\in M_{m,\,n}(\mathbb{C})$, τότε

$$\mathrm{rank}(\mathbf{A}^*) = \mathrm{rank}(\mathbf{A}') = \mathrm{rank}(\bar{\mathbf{A}}) = \mathrm{rank}(\mathbf{A}).$$

f) Εάν $\mathbf{A}\in M_{m,\,n}(\mathbb{C})$, τότε

$$\mathrm{rank}(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \mathrm{rank}(\mathbf{A}).$$

Ένας πίνακας $\mathbf{A}\in M_n$ της μορφής

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_{kk} \end{pmatrix}$$

όπου $\mathbf{A}_{ii}\in M_{n_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$ και

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

καλείται *μπλοκ διαγώνιος* πίνακας. Ο $\mathbf{A}$ συμβολίζεται και ως

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{11} \oplus \mathbf{A}_{22} \oplus \ldots \oplus \mathbf{A}_{kk} = \oplus \sum_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{ii}$$

και καλείται *ευθύ άθροισμα* των πινάκων $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{22}, \ldots, \mathbf{A}_{kk}$. Επίσης, ένας άλλος συμβολισμός χρήσιμος για λόγους συντομίας είναι

$$\mathbf{A} = \mathrm{diag}\{\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{22}, \ldots, \mathbf{A}_{kk}\}.$$

Ισχύει

$$\mathrm{rank}\left(\oplus \sum_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{ii}\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{rank}(\mathbf{A}_{ii}).$$

Ακόμη,

$$\det\left(\oplus \sum_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{ii}\right) = \prod_{i=1}^{k} \det(\mathbf{A}_{ii}).$$

Ένας πίνακας $\mathbf{A} \in M_n$ της μορφής

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \ldots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & \ldots & \mathbf{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{A}_{kk} \end{pmatrix}$$

όπου $\mathbf{A}_{ii} \in M_{n_i}$ για $i = 1, 2, \ldots, k$ και

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

ονομάζεται *μπλοκ άνω τριγωνικός*. Με ανάλογο τρόπο ορίζονται και ο *μπλοκ κάτω τριγωνικός* καθώς και οι *άνω και κάτω τριγωνικοί* (όταν κάθε μπλοκ έχει μόνο ένα στοιχείο).

Για το βαθμό ενός άνω ή κάτω μπλοκ τριγωνικού πίνακα ισχύει

$$\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{rank}(\mathbf{A}_{ii})$$

και

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{k} \det(\mathbf{A}_{ii}).$$

1.6. Αντίστροφος πίνακα

Ένα εύλογο ερώτημα είναι αν στο χώρο των πινάκων υπάρχει το μοναδιαίο στοιχείο. Το γενικότερο ερώτημα με άλλα λόγια είναι αν δεδομένου του **A** υπάρχει πίνακας **B** τέτοιος ώστε το γινόμενό του με τον **A** να δίνει τον μοναδιαίο πίνακα. Υπάρχουν πολλές απαντήσεις στο πρόβλημα αυτό που θα τις παρουσιάσουμε μέσα από κάποια παραδείγματα.

α) Υπάρχει ο *αντίστροφος* του **A**, συμβολίζεται με $\mathbf{A}^{-1}$, είναι μοναδικός και ισχύει

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

b) Για έναν πίνακα **A** υπάρχει άπειρος αριθμός πινάκων **B**, έτσι ώστε

$$\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Στην περίπτωση αυτή ο κάθε πίνακας **B** είναι γνωστός ως *από αριστερά αντίστροφος* του **A**.
Εάν

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

τότε μπορούμε να πάρουμε

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Εάν $\mathbf{A} \in M_{m,\,n}(\mathbb{C})$, τότε ο **A** είναι δυνατό να έχει από αριστερά αντιστρόφους όταν $m \geq n$.

c) Για τον πίνακα **A** υπάρχει άπειρος αριθμός πινάκων **B**, έτσι ώστε

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I}.$$

Στην περίπτωση αυτή οι πίνακες **B** είναι γνωστοί ως *από δεξιά αντίστροφοι.*
Εάν $\mathbf{A} \in M_{m,\,n}(\mathbb{C})$, τότε ο **A** είναι δυνατό να έχει από δεξιά αντιστρόφους όταν $m \leq n$.

d) Υπάρχουν πίνακες **A** για τους οποίους δεν υπάρχουν ούτε από αριστερά ούτε από δεξιά αντίστροφοι.

Η περίπτωση α) είναι δυνατό να συμβαίνει μόνο αν ο **A** είναι τετραγωγικός. Σ' αυτήν την περίπτωση και ο $\mathbf{A}^{-1}$ είναι τετραγωνικός και φυσικά της ίδιας διάστασης. Αντίθετα, μη-τετραγωνικοί πίνακες είναι δυνατό να έχουν αριστερούς ή δεξιούς αντίστροφους, ποτέ όμως αντίστροφο. Οι μη-τετραγωνικοί πίνακες έχουν όλοι *γενικευμένο αντίστροφο* τον οποίο θα ορίσουμε στο κεφάλαιο 8.

Ο αντίστροφος ενός πίνακα $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n$ ορίζεται να είναι ο πίνακας $\mathbf{A}^{-1}$ που δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\,\mathrm{adj}\mathbf{A},$$

όπου $\mathrm{adj}\mathbf{A}$ (adjoint) είναι ο πίνακας που σχηματίζεται από τον $\mathbf{A}$ αν στη θέση του στοιχείου (i, j) θέσουμε τον συμπαράγοντα (cofactor) του στοιχείου (j, i), δηλ. το $(-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{ji})$.

Από την παραπάνω σχέση γίνεται φανερό ότι η ύπαρξη του αντιστρόφου, όπως ορίστηκε για έναν τετραγωνικό πίνακα, είναι στενά συνδεδεμένη με τη συνθήκη η ορίζουσα $\det(\mathbf{A})$ να είναι διάφορη του μηδενός. Ένας πίνακας $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n$ που έχει ορίζουσα 0 καλείται *ιδιάζων*, διαφορετικά καλείται *ομαλός* ή *μη ιδιάζων*. Για να είναι ο $\mathbf{A}$ μη ιδιάζων και να υπάρχει ο $\mathbf{A}^{-1}$ θα πρέπει ισοδύναμα να ισχύει $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = n$ ή οι γραμμές (στήλες) του $\mathbf{A}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, ή η διάσταση του συνόλου (χώρου) τιμών του $\mathbf{A}$ να είναι n, ή η διάσταση του μηδενικού χώρου του $\mathbf{A}$ να είναι 0.

Για τον αντίστροφο ενός πίνακα δείξτε ως άσκηση τις παρακάτω ιδιότητες:

1) Η ορίζουσα του αντίστροφου είναι το αντίστροφο της ορίζουσας του πίνακα, δηλ.:
   Εάν $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n$ και $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, τότε
   $$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} .$$

2) Ο αντίστροφος του αντιστρόφου ενός πίνακα είναι ο ίδιος ο πίνακας, δηλ.:
   Εάν $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n$, τότε
   $$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}.$$

3) Εάν $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n$, τότε $\det(\mathbf{A}^{-1}) \neq 0$.

4) Εάν $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n$, τότε
   $$(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'.$$

5) Εάν $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n$ και $\mathbf{A}=\mathbf{A}'$ (συμμετρικός), τότε
   $$(\mathbf{A}^{-1})' = \mathbf{A}^{-1}.$$

6) Εάν $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n$ και $\mathbf{B} \in \mathrm{M}_n$, τότε
   $$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

7) Εάν $\mathbf{A}\in M_n$ και

$$\mathbf{A} = \mathrm{diag}\{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}\},\ \ \alpha_{ii}\neq 0,\ \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

τότε

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathrm{diag}\{\alpha_{11}^{-1}, \alpha_{22}^{-1}, \ldots, \alpha_{nn}^{-1}\}.$$

Άμεση συνέπεια είναι ότι $\mathbf{I}^{-1}=\mathbf{I}$.

8) Εάν $\mathbf{A}\in M_n$, τότε

$$\mathbf{I}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+ \ldots +\mathbf{A}^{n-1} = (\mathbf{A}^n-\mathbf{I})(\mathbf{A}-\mathbf{I})^{-1}.$$

Η εύρεση του αντιστρόφου ενός πίνακα $\mathbf{A}\in M_n$ με βάση τον ορισμό, που απαιτεί την εύρεση ενός μεγάλου αριθμού από ορίζουσες, δεν είναι πρακτικός τρόπος. Πέραν αυτού εμφανίζονται αρκετά προβλήματα ευστάθειας στους υπολογισμούς, ειδικά αν η ορίζουσα έχει τιμή πολύ κοντά στο μηδέν. Τα συσσωρευμένα προβλήματα στρογγύλευσης δημιουργούν συχνά σοβαρή αλλοίωση στο τελικό αποτέλεσμα. Με οσοδήποτε μεγάλη ακρίβεια και αν δουλεύει κάποιος σε ένα ισχυρό υπολογιστή, βεβαιότητα γι' αυτού του είδους τις πράξεις μπορεί να έχει μόνο αν τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα είναι κυρίαρχα. Στην παράγραφο αυτή θ' αναπτύξουμε τον αλγόριθμο του Jordan για τη λύση ενός γραμμικού συστήματος m εξισώσεων με n αγνώστους όπου $m\leq n$. Ο ίδιος αλγόριθμος, όπως θα δούμε, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση του βαθμού ενός πίνακα $\mathbf{A}\in M_n(\mathbb{R})$ καθώς και του αντιστρόφου του. Ο αλγόριθμος του Jordan είναι ουσιαστικά ο ίδιος αλγόριθμος που χρησιμοποιείται στη μέθοδο Simplex στο γραμμικό προγραμματισμό.

Έστω ότι έχουμε να λύσουμε ένα σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους, $m\leq n$.

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+ \ldots +\alpha_{1n}x_n = b_1 \\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+ \ldots +\alpha_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{m1}x_1+\alpha_{m2}x_2+ \ldots +\alpha_{mn}x_n = b_n \end{array}$$

ή

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

όπου $\mathbf{A}\in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathbf{x}\in M_{n,1}(\mathbb{R})$ και $\mathbf{b}\in M_{m,1}(\mathbb{R})$.

Η κλασική μέθοδος λύσης του συστήματος αυτού θα ήταν με κατάλληλους πολλαπλασιασμούς και προσθαφαιρέσεις των εξισώσεών του να το φέρουμε στη μορφή

$$x_1+\gamma_{1,\, m+1}x_{m+1}+\ \dots\ +\gamma_{in}x_n = \gamma_{1,\, n+1}$$
$$x_2+\gamma_{2,\, m+1}x_{m+1}+\ \dots\ +\gamma_{2n}x_n = \gamma_{2,\, n+1}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_m+\gamma_{m,\, m+1}x_{m+1}+\ \dots\ +\gamma_{mn}x_n = \gamma_{m,\, n+1}$$

οπότε θα έχουμε βρει τις μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_m$ (όχι κατ' ανάγκη τις πρώτες m) συναρτήσει των υπολοίπων $x_{m+1}, \dots, x_n$.

Η διαδικασία αυτή με τη μορφή ενός αλγόριθμου μπορεί να περιγραφεί με τον παρακάτω τρόπο.

Αλγόριθμος

Βήμα 1

Γράφουμε ένα tableau με m γραμμές και n+1 στήλες

Τ.1

α_{11}	α_{12}	$\dots$	α_{1n}	b_1
α_{21}	α_{22}	$\dots$	α_{2n}	b_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
α_{m1}	α_{m2}	$\dots$	α_{mn}	b_m

Βήμα 2

Γράφουμε το tableau 2 σύμφωνα με με τους παρακάτω κανόνες:

α) Θεωρούμε ένα στοιχείο $\alpha_{rs}\neq 0$ που το λέμε *πιλότο*.

β) Γράφουμε την r γραμμή του Τ.2 διαιρώντας την r γραμμή του Τ.1 με α_{rs}.

γ) Γράφουμε την $i\neq r$ γραμμή του Τ.2 πολλαπλασιάζοντας κάθε στοιχείο της r γραμμής του Τ.2 με α_{is} και αφαιρώντας από το αντίστοιχο στοιχείο της i-γραμμής του Τ.1.

Δηλ. αν α'_{ij}, (i = 1, 2, …, m, j = 1, 2, …, n) και b'_j (j = 1, 2, …, m) είναι τα στοιχεία του Τ.2, τότε

$$\alpha'_{rs} = 1,\ \ \alpha'_{is} = 0 \quad i \neq r$$
$$\alpha'_{rj} = \frac{\alpha_{rj}}{\alpha_{rs}},\ \ b'_r = \frac{b_r}{\alpha_{rs}} \quad j \neq s$$
$$\alpha'_{ij} = \alpha_{ij}-\alpha_{is}\frac{\alpha_{rj}}{\alpha_{rs}} \quad i \neq r,\ \ j \neq s$$
$$b'_i = b_i-b_r\frac{\alpha_{is}}{\alpha_{rs}}$$

Βήμα 3, Βήμα 4, …, Βήμα m+1

Συνεχίζουμε όπως στο Βήμα 2 για m διαφορετικές γραμμές. Το tableau Τ.m+1 θα είναι της μορφής

T. m+1

1	0	…	0	$\gamma_{1,\, m+1}$	…	$\gamma_{1,\, n}$	$\gamma_{1,\, n+1}$
0	1	…	0	$\gamma_{2,\, m+1}$	…	$\gamma_{2,\, m}$	$\gamma_{2,\, n+1}$
…	…	…	…	…	…	…	
0	0	…	1	$\gamma_{m,\, m+1}$	…	$\gamma_{m,\, n}$	$\gamma_{m,\, n+1}$

Από το τελευταίο tableau προκύπτει η ζητούμενη λύση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 12 \end{aligned}$$

Ακολουθώντας τον αλγόριθμο που μόλις περιγράψαμε έχουμε

T.1

1	2	–1	4
2	–4	6	12

T.2

0	4	–4	–2
1	–2	3	6

T.3

0	1	–1	$-\frac{1}{2}$
1	0	1	5

και επομένως η λύση του συστήματος είναι $x_1 = 5 - x_3$ και $x_2 = x_3 - \frac{1}{2}$. ▲

Στον tableau T.1 αν παραλείψουμε την τελευταία στήλη έχουμε τον πίνακα **A**. Επίσης, αν $\text{rank}(\mathbf{A}) = k < m$ τότε το T. k+1 θα έχει όλα τα στοιχεία που μπορούν να ληφθούν σαν πιλότος ίσα με μηδέν. Αλλιώς θα μπορούσαμε να εκφράσουμε k+1 γραμμές σαν γραμμικές συναρτήσεις των υπολοίπων, οπότε $\text{rank}(\mathbf{A}) > k$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3

Να βρεθεί ο βαθμός του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -4 & 2 \\ 4 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ακολουθώντας τον αλγόριθμο έχουμε

T.1

2	3	–5
1	–4	2
4	–5	–1

T.2

$\frac{9}{2}$	–7	0
$\frac{1}{2}$	–2	1
$\frac{9}{2}$	–7	0

T.3

0	0	0
$-\frac{11}{14}$	0	1
$-\frac{9}{14}$	1	0

Είναι rank($\mathbf{A}$) = 2, γιατί πήραμε για πιλότο από τις γραμμές 2 και 3 και απομένει η γραμμή 1 που έχει όλα τα στοιχεία ισα με μηδέν.

Αν $\mathbf{A}\in M_m(\mathbb{R})$ και rank($\mathbf{A}$) = m, τότε υπάρχει ο $\mathbf{A}^{-1}$ και μπορούμε να τον βρούμε με τον αλγόριθμο που περιγράψαμε.

Θεωρούμε το σύστημα

$$\mathbf{Ax}+\mathbf{y} = \mathbf{0},$$

όπου $\mathbf{x}\in M_{m,\,1}(\mathbb{R})$ και $\mathbf{y}\in M_{m,\,1}(\mathbb{R})$. Η λύση του συστήματος αυτού είναι προφανώς

$$\mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}.$$

Άρα, αρκεί χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο που περιγράψαμε να λύσουμε το σύστημα

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_m)\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \hdashline \mathbf{y}\end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Ακολουθώντας τα βήματα του αλγόριθμου το πρώτο tableau θα είναι

$\mathbf{A}$	$\mathbf{I}_m$

και το τελευταίο, προφανώς,

$\mathbf{I}_m$	$\mathbf{A}^{-1}$

Φυσικά οι πιλότοι θα πρέπει να επιλεγούν από τις πρώτες m στήλες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4

Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 8 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ακολουθώντας τα βήματα του αλγόριθμου έχουμε

Τ.1

4	-1	2	1	0	0
8	2	1	0	1	0
1	1	-1	0	0	1

Τ.2

1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0
0	4	-3	-2	1	0
0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	1

Τ.3

1	0	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	0
0	1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
0	0	$-\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{16}$	1

Τ.4

1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$
0	1	0	-1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$
0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$	$-\frac{16}{9}$

Έτσι,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -3 & 2 & -4 \\ -2 & \frac{5}{3} & -\frac{16}{3} \end{pmatrix}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.1

Επειδή σε κάθε tableau εμφανίζονται m μοναδιαία διανύσματα στήλες μπορούμε να τα παραλείψουμε. Αν α_{rs} είναι ο πιλότος, τότε θέτουμε στη θέση της s στήλης, που γίνεται μοναδιαίο διάνυσμα, την r στήλη του $\mathbf{I}_m$ που παύει να είναι το μοναδιαίο διάνυσμα. Έτσι, στο προηγούμενο παράδειγμα τα tableaux θα είναι

T. 1

4	-1	2
8	2	1
1	1	-1

T. 2

$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
-2	4	-3
$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{2}$

T. 3

$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$
$\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{16}$	$-\frac{9}{16}$

T. 4.

$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$
-1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$
$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$	$-\frac{16}{9}$

1.7. Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Ένα από τα πλέον χρήσιμα εργαλεία στη θεωρία πινάκων είναι το σύνολο των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων ενός πίνακα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5

Εάν $\mathbf{A}\in M_n$ και $\mathbf{x}\in \mathbb{C}^n$, θεωρούμε την εξίσωση

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

όπου $\lambda\in\mathbb{C}$. Εάν ένα $\lambda\in\mathbb{C}$ (ή $\lambda\in\mathbb{R}$) και ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x}$ ικανοποιούν αυτήν την εξίσωση, τότε το λ ονομάζεται *ιδιοτιμή* του $\mathbf{A}$ και το $\mathbf{x}$ ονομάζεται (*δεξιό* ή από *δεξιά*) *ιδιοδιάνυσμα* του $\mathbf{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Δηλ. αν

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

τότε το λ είναι μία ιδιοτιμή του $\mathbf{A}$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x}$ εάν

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\dots+\alpha_{1n}x_n=\lambda x_1 \\ &\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\dots+\alpha_{2n}x_n=\lambda x_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\dots+\alpha_{nn}x_n=\lambda x_n \end{aligned} \tag{1.1}$$

Εάν θεωρήσουμε ότι $\mathbf{y}^*\mathbf{A}=\lambda\mathbf{y}^*$, $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$, το $\mathbf{y}$ καλείται *αριστερό* (ή από *αριστερά*) *ιδιοδιάνυσμα* του $\mathbf{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Το σύνολο όλων των $\lambda\in\mathbb{C}$ που είναι ιδιοτιμές του $\mathbf{A}$ ονομάζεται *φάσμα* του $\mathbf{A}$ και συμβολίζεται με $\sigma(\mathbf{A})$.

Η *φασματική ακτίνα* του $\mathbf{A}$ είναι ο μη αρνητικός πραγματικός αριθμός $\varrho(\mathbf{A})$ τέτοιος ώστε

$$\varrho(\mathbf{A})=\max\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(\mathbf{A})\}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.5

Έστω $\mathbf{A}$ ο πίνακας

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του $\mathbf{A}$ είναι

$$\lambda_1=12.398, \quad \lambda_2=6.085, \quad \lambda_3=0.51,$$

οπότε $\sigma(\mathbf{A})=\{12.398, 6.085, 0.51\}$ και προφανώς $\varrho(\mathbf{A})=12.398$.

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{A}$ γράφουμε το σύστημα (1.1) στη μορφή

$$\begin{aligned} &(\alpha_{11}-\lambda)x_1+\alpha_{12}x_2+\dots+\alpha_{1n}x_n=0 \\ &\alpha_{21}x_1+(\alpha_{22}-\lambda)x_2+\dots+\alpha_{2n}x_n=0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\dots+(\alpha_{nn}-\lambda)x_{nn}=0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Αυτό είναι ένα σύστημα n γραμμικών ομογενών εξισώσεων με n αγνώ-