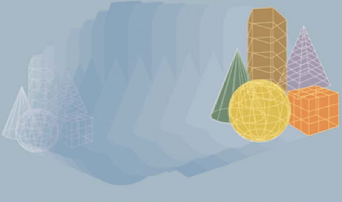
Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

ΓΙΑΝΝΗ ΘΩΜΑΪΔΗ

ΑΝΔΡΕΑ ΠΟΥΛΟΥ



ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή των συγγραφέων

Με τους συγγραφείς μπορείτε να επικοινωνήσετε:

Γιάννης Θωμαΐδης
Πεσόντων Ηρώων 1, 564 30, Σταυρούπολη, Θεσσαλονίκη, τηλ.: 662.605

Ανδρέας Πούλος
Οστρόβου 12, 544 53, Τούμπα, Θεσσαλονίκη, τηλ.: 904.876

ISBN 960-431-605-2

Ανατύπωση διορθωμένη, Οκτώβριος 2006

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 171 • Νέοι Επιβάτες Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 0392-72.222 (3 γραμ.) - Fax: 0392-72.229

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. (031) 203.720, Fax 211.305

www:ziti.gr • e-mail: ziti@hyper.gr

Αφιερώνεται στη μνήμη των δασκάλων μας

Θεόδωρου Καζαντζή (1937-1999)

και Ιωάννη Ιωαννίδη (1913-1976)

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Με το νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που εκπόνησε το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο και με την εφαρμογή του στα Ενιαία Λύκεια από το σχολικό έτος 1999 - 2000, εισάγονται σημαντικές καινοτομίες και δημιουργούνται προϋποθέσεις για την αναβάθμιση του μαθήματος. Στις καινοτομίες αυτές, συμπεριλαμβάνονται η αναθεώρηση ορισμένων βασικών σκοπών της διδασκαλίας, η καθιέρωση διαφορετικών βιβλίων για το μαθητή και τον καθηγητή, ο εμπλουτισμός της ύλης με δραστηριότητες και η έμφαση στη διδασκαλία των γεωμετρικών τόπων και των κατασκευών. Στα παραπάνω θα πρέπει να προστεθούν οι γενικότερες αλλαγές που αφορούν την αξιολόγηση των μαθητών, η ανάθεση σ' αυτούς συνθετικών δημιουργικών εργασιών, καθώς και η - μετά από πολλά χρόνια - εξέταση του μαθήματος σε πανελλήνια κλίμακα.

Με δεδομένη την υποβάθμιση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας κατά την τελευταία εικοσαετία, είναι φανερό ότι όλα τα προηγούμενα απαιτούν νέες, ευέλικτες και πολλαπλές διδακτικές πρωτοβουλίες. Η επαγγελματική κατάρτιση και η ικανότητα προσαρμογής των εκπαιδευτικών που θα διδάξουν το μάθημα στις νέες συνθήκες, αποτελούν τον πρωταρχικό παράγοντα επιτυχίας για την προσδοκώμενη αναβάθμιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο.

Στο πλαίσιο αυτό, πιστεύουμε ότι είναι απαραίτητη μια νέα αντίληψη για την έννοια του διδακτικού "βοηθήματος", η οποία θα υπερβαίνει την παραδοσιακή συλλογή γεωμετρικών ασκήσεων και την τυποποιημένη μεθοδολογία για την επίλυσή τους. Το βιβλίο αυτό γράφτηκε για να προβάλλει μια τέτοια αντίληψη και να αποτελέσει σαφή και συνεκτική διδακτική πρόταση, σύμφωνα με τις αρχές και το περιεχόμενο του νέου Αναλυτικού Προγράμματος.

Μετά από μια εκτενή εισαγωγή, στην οποία αναλύονται βασικά προβλήματα της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, τα επόμενα κεφάλαια του βιβλίου ακολουθούν τη δομή του Αναλυτικού Προγράμματος και περιλαμβάνουν τα εξής:

α) Επισκόπηση του περιεχομένου του αντίστοιχου κεφαλαίου του σχολικού βιβλίου.

β) Μελέτη ειδικών θεωρητικών ζητημάτων (επέκταση της ύλης του Αναλυτικού Προγράμματος και του σχολικού βιβλίου), όπως:

- Αποσαφήνιση εννοιών με ιδιαίτερο διδακτικό ενδιαφέρον.
- Γενικεύσεις και διαφορετικές αποδείξεις βασικών θεωρημάτων.
- Λεπτομερέστερη μελέτη των ιδιοτήτων των σχημάτων.

γ) Πρωτότυπα προβλήματα και θέματα για την οργάνωση ομαδικών δραστηριοτήτων.

δ) Μελέτη ασκήσεων και προβλημάτων που προσφέρονται για τη δημιουργία τράπεζας θεμάτων, όπως για παράδειγμα, χρησιμοποίηση ασκήσεων της κλασικής βιβλιογραφίας ως "γεννητριών" για την παραγωγή θεμάτων και ερωτήσεων, ομαδοποιήσεις σχημάτων και ασκήσεων με ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

ε) Ιστορικά προβλήματα και προβλήματα πρακτικών εφαρμογών.

στ) Αναπτύξεις θεμάτων για την ανάθεση συνθετικών δημιουργικών εργασιών στους μαθητές και παροχή της αντίστοιχης ειδικής βιβλιογραφίας.

ζ) Εκτενείς βιβλιογραφικές παραπομπές για βαθύτερη μελέτη των ζητημάτων που θίγονται σε κάθε κεφάλαιο.

Ο όρος "Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας" υποδηλώνει ένα ευρύ φάσμα θεμάτων, που αρχίζουν από τη βασική έρευνα των διαδικασιών μάθησης γεωμετρικών εννοιών και καταλήγουν στην οργάνωση και μεθοδολογία της διδασκαλίας της Γεωμετρίας. Όπως γίνεται φανερό από τα παραπάνω, στο βιβλίο αυτό εξετάζονται κατά προτεραιότητα ζητήματα της διδασκαλίας. Βασικός, όμως, οδηγός των συγγραφέων είναι τα ερευνητικά δεδομένα για τη μάθηση της Γεωμετρίας, τα οποία εξετάζονται στην εισαγωγή που ακολουθεί.

Τέλος, θεωρούμε αναγκαία την ακόλουθη διευκρίνηση: Οι παραπομπές στο "σχολικό βιβλίο", που γίνονται στα προηγούμενα και επόμενα, αναφέρονται πάντοτε στο βιβλίο "Ευκλείδεια Γεωμετρία Α′ και Β′ Λυκείου" της συγγραφικής ομάδας των Γ. Θωμαΐδη, Θ. Ξένου, Γ. Παντελίδη, Α. Πούλου & Γ. Στάμου, το οποίο προκρίθηκε στον πρόσφατο διαγωνισμό του Υπουργείου Παιδείας (1η έκδοση, Ο.Ε.Δ.Β. 1999). Η συγγραφική ομάδα κατέθεσε τις θέσεις της για τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα και τις προδιαγραφές του διαγωνισμού, στο βιβλίο του καθηγητή που συνοδεύει το παραπάνω σχολικό βιβλίο. Με το έργο μας "Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας" θεωρούμε ότι αξιοποιούμε αυτά τα δύο βιβλία, διευρύνουμε το γνωστικό και παιδαγωγικό ορίζοντα του αναγνώστη τους και συμβάλλουμε στην αναγέννηση του ενδιαφέροντος για έναν κλάδο της μαθηματικής μας παιδείας με μεγάλη ιστορική και διδακτική παράδοση.

Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2000

Οι συγγραφείς

Γιάννης Χ. Θωμαΐδης

Ανδρέας Ι. Πούλος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή

1. Γιατί διδάσκουμε την Ευκλείδεια Γεωμετρία; 11
2. Αντιλήψεις και αντιπαραθέσεις για τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας 13
3. Το βασικό πρόβλημα της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας 14
4. Ερευνητικά δεδομένα για την κατάσταση στην Ελλάδα 17
5. Οι προοπτικές του νέου Αναλυτικού Προγράμματος 23

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία

Επισκόπηση της ύλης του κεφαλαίου 27
Θέματα δραστηριοτήτων στην τάξη 27
Θέματα συνθετικών - δημιουργικών εργασιών 34
Βιβλιογραφία 1ου Κεφαλαίου 36

Κεφάλαιο 2

Τα βασικά γεωμετρικά σχήματα

Επισκόπηση της ύλης του Κεφαλαίου 37
Θεωρητικά Ζητήματα 38
Θέματα δραστηριοτήτων στην τάξη 40
Ασκήσεις και προβλήματα 52
Βιβλιογραφία 2ου Κεφαλαίου 56

Κεφάλαιο 3

Τρίγωνα

Επισκόπηση της ύλης του Κεφαλαίου 57
Θεωρητικά Ζητήματα 59
Ασκήσεις και προβλήματα 64
Ιστορικά προβλήματα και προβλήματα Εφαρμογών 79
Ανισοτικές σχέσεις και προβλήματα μεγίστων - ελαχίστων 79
Βιβλιογραφία 3ου Κεφαλαίου 86

Κεφάλαιο 4
Παράλληλες ευθείες

Επισκόπηση της ύλης του κεφαλαίου 89
Θεωρητικά ζητήματα 90
Θέματα δραστηριοτήτων στην τάξη 93
Ασκήσεις και Προβλήματα 95
Ιστορικά προβλήματα και προβλήματα εφαρμογών 110
Θέματα συνθετικών - δημιουργικών εργασιών 111
Βιβλιογραφία 4ου Κεφαλαίου 114

Κεφάλαιο 5
Τετράπλευρα

Επισκόπηση της ύλης του κεφαλαίου 117
Θεωρητικά Ζητήματα 118
Ιστορικά προβλήματα και προβλήματα εφαρμογών 142
Θέματα συνθετικών - δημιουργικών εργασιών 144
Βιβλιογραφία Κεφαλαίου 146

Κεφάλαιο 6
Σχήματα εγγεγραμμένα σε κύκλο

Επισκόπηση της ύλης του κεφαλαίου 147
Θεωρητικά Ζητήματα 148
Ασκήσεις και προβλήματα 154
Ιστορικά προβλήματα και προβλήματα εφαρμογών 180
Βιβλιογραφία 6ου Κεφαλαίου 183

Κεφάλαιο 7
Αναλογίες

Επισκόπηση της ύλης του κεφαλαίου 185
Θεωρητικά Ζητήματα 186
Ασκήσεις και προβλήματα 191
Ιστορικά προβλήματα και προβλήματα Εφαρμογών 208
Βιβλιογραφία 7ου Κεφαλαίου 209

Κεφάλαιο 8
Ομοιότητα

Επισκόπηση της ύλης του κεφαλαίου 211
Θεωρητικά ζητήματα 211

Ασκήσεις και προβλήματα ... 217
Ιστορικά προβλήματα και προβλήματα εφαρμογών ... 226
Θέματα συνθετικών - δημιουργικών εργασιών ... 229
Βιβλιογραφία 8ου Κεφαλαίου ... 232

Κεφάλαιο 9
Μετρικές σχέσεις

Επισκόπηση της ύλης του κεφαλαίου ... 233
Θεωρητικά ζητήματα ... 235
Θέματα δραστηριοτήτων στην τάξη ... 243
Ασκήσεις και προβλήματα ... 245
Ιστορικά προβλήματα και προβλήματα εφαρμογών ... 260
Θέματα συνθετικών - δημιουργικών εργασιών ... 262
Βιβλιογραφία 9ου Κεφαλαίου ... 267

Κεφάλαιο 10
Εμβαδά

Επισκόπηση της ύλης του κεφαλαίου ... 269
Θεωρητικά ζητήματα ... 271
Θέματα δραστηριοτήτων στην τάξη ... 282
Ασκήσεις και προβλήματα ... 283
Ιστορικά προβλήματα και προβλήματα εφαρμογών ... 316
Θέματα Συνθετικών - δημιουργικών εργασιών ... 323
Βιβλιογραφία 10ου Κεφαλαίου ... 331

Κεφάλαιο 11
Μέτρηση κύκλου

Επισκόπηση της ύλης του κεφαλαίου ... 333
Θεωρητικά ζητήματα ... 334
Θέματα δραστηριοτήτων στην τάξη ... 336
Ασκήσεις και προβλήματα ... 338
Ιστορικά προβλήματα και προβλήματα εφαρμογών ... 350
Θέματα συνθετικών - δημιουργικών εργασιών ... 360
Βιβλίογραφία 11ου κεφαλαίου ... 364

Εισαγωγή

1. Γιατί διδάσκουμε την Ευκλείδεια Γεωμετρία;

Το Νοέμβριο του 1959, στο σεμινάριο του Royaumont για τη μεταρρύθμιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών της Μέσης Εκπαίδευσης που είχε διοργανωθεί από τον Ο.Ο.Σ.Α., ο Γάλλος μαθηματικός Jean Dieudonné (1906 - 1992) είχε εκφράσει με τον πιο ακραίο τρόπο το πνεύμα εκείνης της μεταρρύθμισης, εκφωνώντας το περιβόητο σύνθημα "Να φύγει ο Ευκλείδης!". Με το σύνθημα αυτό ο Dieudonné επιχειρούσε ουσιαστικά να καταργήσει τη μεγάλη παράδοση που είχε εγκαινιάσει το 1792 ο συμπατριώτης του A. M. Legendre με το βιβλίο "Στοιχεία Γεωμετρίας", το οποίο εκσυγχρόνισε το κλασικό έργο του Ευκλείδη και συνέβαλε αποφασιστικά στη διάδοση της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας σε όλο τον κόσμο.

Είναι γνωστό ότι, η μεταρρύθμιση των "Νέων Μαθηματικών" κατάφερε τελικά να εκτοπίσει την Ευκλείδεια Γεωμετρία, ως αυτόνομο μάθημα, από τα αναλυτικά προγράμματα διδασκαλίας των Μαθηματικών στις περισσότερες χώρες του κόσμου, χωρίς όμως να προσφέρει κάποια ισότιμη εναλλακτική λύση. Σήμερα, 40 χρόνια μετά, ενώ βασικές επιλογές εκείνης της μεταρρύθμισης έχουν αποτύχει (π.χ. η έμφαση στη διδασκαλία των συνόλων και των αλγεβρικών δομών) και κάποιες άλλες επιβιώνουν (π.χ. η διδασκαλία της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων, του Διανυσματικού λογισμού, της Γραμμικής Άλγεβρας), η κατάσταση στο χώρο της Γεωμετρίας παραμένει, διεθνώς, θολή. Ίσως, η καλύτερη περιγραφή αυτής της κατάστασης συνοψίζεται στην ακόλουθη φράση του Άγγλου μαθηματικού και παιδαγωγού Douglas Quadling:

"Ο Ευκλείδης έχει φύγει, αλλά στο κενό που άφησε πίσω του επικρατεί χάος".

Ο Dieudonné είχε προσεγγίσει το ζήτημα της μεταρρύθμισης με καθαρά τεχνοκρατικό τρόπο, από τη σκοπιά των σύγχρονων Μαθηματικών, σύμφωνα με την οποία ο Ευκλείδειος χώρος δεν είναι παρά ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο. Κατά τον Dieudonné, όλη η παραδοσιακή ύλη για τα τρίγωνα, τα τετράπλευρα, τους κύκλους κ.λπ είναι άχρηστη για τις μελλοντικές σπουδές των νέων, αφού έχει τόση σχέση με αυτό που οι μαθηματικοί (καθαροί και εφαρμοσμένοι) κάνουν σήμερα όση έχουν και τα μαγικα τετράγωνα ή τα προβλήματα του σκακιού! ΄Ετσι, λοιπόν, ολόκληρη η Ευκλείδεια Γεωμετρία θα μπορούσε να διδαχτεί σε δύο ή τρείς ώρες - μία για την περιγραφή του αξιωματικού συστήματος, μία για τις χρήσιμες συνέπειες του και πιθανώς μια τρίτη για λίγες ενδιαφέρουσες ασκήσεις.

Στα προηγούμενα, και ιδιαίτερα στο ζήτημα της “χρησιμότητας” των σχολικών Μαθηματικών, θα μπορούσε κανείς να αντιπαραθέσει (και πράγματι αντιπαρατέθηκαν) πολλές διαφορετικές απόψεις. Εμείς θα παραθέσουμε απλώς ένα απόσπασμα από τις αυτοβιογραφικές σημειώσεις του Albert Einstein, το οποίο δείχνει μια άλλη, τελείως διαφορετική αντίληψη σχετικά με τη “χρησιμότητα” της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Γράφοντας για τα γεγονότα της παιδικής και εφηβικής του ζωής, που είχαν μεγάλη επίδραση στην μετέπειτα εξέλιξή του, ο Einstein σημειώνει:

> *Σε ηλικία 12 ετών δοκίμασα μια δεύτερη, τελείως διαφορετική έκπληξη: σ’ ένα μικρό βιβλίο Ευκλείδειας επίπεδης γεωμετρίας ... Εδώ υπήρχαν ισχυρισμοί, όπως για παράδειγμα ότι τα τρία ύψη ενός τριγώνου τέμνονται στο ίδιο σημείο, οι οποίοι - αν και καθόλου προφανείς - μπορούσαν ωστόσο να αποδειχτούν με τέτοια βεβαιότητα, ώστε να μη χωρεί η παραμικρή αμφιβολία. Αυτή η σαφήνεια και βεβαιότητα μου προξένησαν μιαν εντύπωση που δεν μπορεί να περιγραφεί. Το γεγονός ότι, τα αξιώματα έπρεπε να γίνουν δεκτά χωρίς απόδειξη δεν με ενόχλησε. Σε κάθε περίπτωση, μου αρκούσε πλήρως το γεγονός ότι, μπορούσα να στηρίζω τις αποδείξεις σε προτάσεις, η εγκυρότητα των οποίων ήταν για μένα αναμφισβήτητη.*[1]

Η περίπτωση του Einstein, του επιστήμονα που άλλαξε ριζικά τις αντιλήψεις μας και για τη γεωμετρική δομή του σύμπαντος, αποκαλύπτει τη σπουδαιότητα ορισμένων παιδαγωγικών σκοπών και τη συνάφεια τους με το ερώτημα που θέσαμε ως τίτλο αυτής της ενότητας: Καλλιέργεια και ανάπτυξη της συγκροτημένης σκέψης, μύηση στην επιστημονική μέθοδο μελέτης του κόσμου. Αυτοί οι σκοποί, παρόλη τη

---

1 Είναι χαρακτηριστικό ότι η εκτίμηση και το ενδιαφέρον του Einstein για τις παιδαγωγικές αρετές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας διατηρήθηκαν αμείωτα και εκδηλώθηκαν σε πολλές περιπτώσεις (ένα συγκεκριμένο παράδειγμα αυτού του ενδιαφέροντος δίνουμε στο 10ο Κεφάλαιο). Παράλληλα όμως, πρέπει να επισημάνουμε και την έλλειψη εμπιστοσύνης που είχε στη δυνατότητα του σχολείου να καλλιεργήσει αυτές τις αρετές.

γενικότητά τους, συνδέονται άμεσα με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που άσκησαν καθοριστική επίδραση στον νεαρό Einstein:

- Σαφήνεια στην έκθεση
- Ολοκληρωτική απόδειξη κάθε υπόθεσης
- Απόλυτη συνάφεια σχημάτων και συλλογισμών
- Τάξη και ομορφιά.

Αν τα στοιχεία αυτά αποτελούν ουσιώδη συστατικά της μαθηματικής παιδείας, τότε παρέχουν κατά την άποψή μας μια αυτονόητη απάντηση στο ερώτημα "Γιατί διδάσκουμε την Ευκλείδεια Γεωμετρία;".

2. Αντιλήψεις και αντιπαραθέσεις για τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Οι ένθερμοι υποστηρικτές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας προβάλλουν την παιδαγωγική αξία της λογικής και διάφανης επιχειρηματολογίας των γεωμετρικών αποδείξεων, ενώ οι πολέμιοι της επικαλούνται την αναμφισβήτητη δυσκολία των περισσότερων μαθητών να κατανοήσουν τις γεωμετρικές έννοιες και τις πολύ χαμηλές επιδόσεις τους στην αντιμετώπιση σχετικών προβλημάτων. Ενδιάμεσα βρίσκονται συνήθως οι σκεπτικιστές, οι οποίοι επισημαίνουν τον περιορισμένο επιστημολογικά ρόλο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και την ανάγκη να ανανεωθεί η διδασκαλία των Μαθηματικών δίνοντας μεγαλύτερη έμφαση σε πιο σύγχρονους και "χρήσιμους" κλάδους (π.χ. Πιθανότητες και Στατιστική). Από την εποχή που ο Dieudonné κήρυξε τον πόλεμο κατά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, οι αντιλήψεις αυτές έγιναν αντικείμενο επεξεργασίας και αντιπαρατέθηκαν μεταξύ τους από σημαντικούς μαθηματικούς και παιδαγωγούς, ενώ οι σχετικές συζητήσεις συνεχίζονται με αμείωτη ένταση μέχρι σήμερα. Σε μια ειδική μελέτη της Διεθνούς Επιτροπής για τη Μαθηματική Εκπαίδευση (I.C.M.I.) έγινε απόπειρα σύνθεσης των διαφόρων τάσεων και διατυπώθηκαν οι εξής τρεις εναλλακτικές λύσεις για τη διδασκαλία του μαθήματος:

1η λύση: Απορρίπτουμε την ιδέα ότι η Γεωμετρία πρέπει ή μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο σχολείο ως ένα σύστημα γνώσεων (παραγωγικά οργανωμένο ή όχι), όπου οι έννοιες και τα γεγονότα πρέπει να γίνουν γνωστά απλά και μόνο επειδή ανήκουν στο σύστημα. Αντίθετα, η Γεωμετρία και ο χώρος θεωρούνται ως πηγές άντλησης εξαιρετικών θεμάτων για την οργάνωση πολλαπλών δραστηριοτήτων σε διαφορετικά επίπεδα. Οι "χρησιμοθηρικές" όψεις της Γεωμετρίας θα εξυπηρετηθούν με την παροχή αλγεβρικών μεθόδων.

2η λύση: Εξακολουθούμε να επιχειρούμε τη διδασκαλία ενός αξιωματικού ή ψευδο - αξιωματικού μαθήματος σχολικής Γεωμετρίας, το οποίο στηρίζεται είτε σε "τροποποίηση" των "Στοιχείων" του Ευκλείδη (για παράδειγμα, αξιωματική θεμελίωση τύπου Pogorelov) είτε, π.χ., στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς.

3η λύση: Για ορισμένες ομάδες μαθητών, τουλάχιστον, παρουσιάζουμε "νησίδες" Γεωμετρίας, δηλαδή "τοπικά" παραγωγικά συστήματα μέσα στο πλαίσιο του γενικού αναλυτικού προγράμματος. (Έτσι μπορούμε, για παράδειγμα, να έχουμε ενότητες για τις ιδιότητες των εγγεγραμμένων σε κύκλο γωνιών ή τη στοιχειώδη Προβολική Γεωμετρία).

Στην Ελλάδα, για προφανείς ιστορικούς και πολιτιστικούς λόγους, συνεχίζεται μια παράδοση που προσεγγίζει εγγύτατα τη δεύτερη από τις προηγούμενες εναλλακτικές λύσεις. Ακόμη και την περίοδο της μεταρρύθμισης των "Νέων Μαθηματικών", η διεθνής πίεση για εκσυγχρονισμό των σχολικών Μαθηματικών και εγκατάλειψη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αφομοιώθηκε στη χώρα μας μέσα από έναν ιδιότυπο συμβιβασμό: Από τη μια μεριά διατηρήθηκε όλη η παραδοσιακή σχολική ύλη, την οποία σε μεγάλο βαθμό συντηρούσαν οι εισαγωγικές εξετάσεις των Α.Ε.Ι. Από την άλλη, δόθηκε υπερβολική έμφαση στην αυστηρή αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας (πρβλ. το βιβλίο του Ι. Ιωαννίδη για τη Γ΄ Γυμνασίου που πρωτοεκδόθηκε το 1968) καθώς και με την εισαγωγή νέας ύλης πάνω στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς (το λεγόμενο "Συμπλήρωμα" της Γεωμετρίας). Στις αντιφατικές επιλογές εκείνης της περιόδου βρίσκονται, κατά την άποψή μας, οι ρίζες της μετέπειτα υποβάθμισης και παρακμής του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

3. Το βασικό πρόβλημα της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Στη σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών, τα θεμελιώδη επιστημολογικά χαρακτηριστικά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, όπως είναι η παραγωγική οργάνωση του περιεχομένου, η αποδεικτική διαδικασία και η έμφαση στις γεωμετρικές κατασκευές, αναφέρονται συνήθως ως "ανώτερα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης" και η μάθησή τους έχει γίνει αντικείμενο συστηματικής μελέτης και έρευνας. Ένα βασικό θεωρητικό μοντέλο, στο οποίο έχει στηριχθεί η διεξαγωγή μεγάλου αριθμού ερευνών σε διάφορες χώρες, αποτελούν τα λεγόμενα "επίπεδα van Hiele".[2] Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο, η μάθηση της Γεωμετρίας εξελίσσεται ιεραρχικά, περνώντας από πέντε διαδοχικά επίπεδα:

---

[2] Από το όνομα των Ολλανδών ερευνητών D. van Hiele-Geldof και P.M. van Hiele.

1ο επίπεδο: Εποπτικό

Οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίζουν τα διάφορα σχήματα με βάση την εμπειρία και την εποπτεία, δημιουργώντας σχετικά πρότυπα. Για παράδειγμα, αναγνωρίζουν ότι, ένα δεδομένο σχήμα είναι ορθογώνιο, επειδή "μοιάζει με πόρτα". Δεν προσδιορίζουν όμως, γεωμετρικές ιδιότητες ή άλλα χαρακτηριστικά γνωρίσματα αυτών των σχημάτων.

2ο επίπεδο: Περιγραφικό/Αναλυτικό

Οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίζουν και να χαρακτηρίζουν τα σχήματα μέσω των ιδιοτήτων τους. Για παράδειγμα, αναγνωρίζουν ότι, ένα δεδομένο σχήμα είναι ρόμβος, επειδή "έχει 4 ίσες πλευρές". Δεν προσδιορίζουν όμως σχέσεις ανάμεσα σε διαφορετικά σύνολα σχημάτων (π.χ., ότι "το τετράγωνο είναι ένας ρόμβος που έχει μια ορθή γωνία")

3ο επίπεδο: Αφηρημένο/Σχεσιακό

Οι μαθητές μπορούν να διατυπώνουν αφηρημένους ορισμούς, να διακρίνουν τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες μιας έννοιας, να ταξινομούν τα σχήματα μέσω μιας ιεραρχικής κατάταξης των ιδιοτήτων τους και να χρησιμοποιούν στοιχειώδη λογικά επιχειρήματα. Για παράδειγμα, μπορούν να συμπεράνουν ότι, κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος, επειδή "οι πλευρές ενός τετραγώνου είναι ίσες" και "ένα τετράπλευρο με όλες τις πλευρές ίσες είναι ρόμβος".

4ο επίπεδο: Τυπικό/Παραγωγικό

Οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίζουν τη διαφορά ανάμεσα σε μη οριζόμενες έννοιες, ορισμούς, αξιώματα και θεωρήματα, να κατανοούν και να παράγουν αποδείξεις θεωρημάτων στα πλαίσια ενός αξιωματικού συστήματος. Για παράδειγμα, μπορούν να αποδείξουν την πρόταση "κάθε εγγεγραμμένη γωνία σε κύκλο είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης" παράγοντας μια σειρά προτάσεων που αιτιολογούν λογικά το συμπέρασμα ως συνέπεια των δεδομένων.

5ο επίπεδο: Μεταμαθηματικό

Οι μαθητές κατανοούν τη σημασία και τη διαδικασία οικοδόμησης ενός αξιωματικού μαθηματικού συστήματος και τις σχέσεις ανάμεσα σε διαφορετικά συστήματα. Για παράδειγμα, αναγνωρίζουν ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν είναι παρά ένας από τους πολλούς δυνατούς τρόπους περιγραφής ενός αφηρημένου μαθηματικού σύμπαντος.

Είναι φανερό ότι η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας προϋποθέτει τα δύο πρώτα επίπεδα και έχει ως κύριο σκοπό την κατάκτηση των δύο επομένων επιπέδων (για το 5ο μάλλον δεν μπορεί να γίνεται λόγος στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση). Σε θεωρητικό επίπεδο, τόσο και η θεωρία των van Hiele, όσο και η γενικότερη θεωρία των σταδίων μάθησης του Piaget προβλέπουν ότι, η κατάκτηση αυτών των επιπέδων είναι μια επίπονη και ιεραρχικά εξελισσόμενη διαδικασία, που απαιτεί μακροχρόνια και προσεκτικά σχεδιασμένη διδασκαλία. Αυτές οι θεωρητικές προβλέψεις φαίνεται να επιβεβαιώνονται από πολλές εμπειρικές έρευνες που έχουν διεξαχθεί σε διάφορες χώρες και τα αποτελέσματά τους οδηγούν σε ένα βασικό συμπέρασμα: Η καθιερωμένη παραδοσιακή διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αδυνατεί να οδηγήσει τους μαθητές στην κατάκτηση των ανώτερων επιπέδων γεωμετρικής σκέψης.

Απο τα αποτελέσματα αυτών των ερευνών αξίζει ν' αναφέρουμε εδώ ένα εντυπωσιακό στατιστικό στοιχείο, που αποκαλύπτει τις διαστάσεις του προβλήματος: Σε μια έρευνα που έγινε στις Η.Π.Α. μεταξύ 1520 μαθητών που είχαν ολοκληρώσει ένα έτος διδασκαλίας της θεωρητικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας, διαπιστώθηκε ότι μόνο το 30% είχε φτάσει σε ένα επίπεδο που μπορεί να χαρακτηριστεί από 75% επιτυχία στην απόδειξη απλών γεωμετρικών προτάσεων (π.χ., ότι οι διαγώνιες ενός ορθογωνίου είναι ίσες). Το ποσοστό των μαθητών που είχαν 100% επιτυχία δεν ξεπέρασε το 3%!

Για τα αίτια αυτής της αποτυχίας φαίνεται να υπάρχει μια σχετική ομοφωνία ανάμεσα στους μαθηματικούς και παιδαγωγούς που έχουν ασχοληθεί με το θέμα. Σύμφωνα με τον Ολλανδό H. Freudenthal, η αποτυχία της διδασκαλίας της παραδοσιακής Ευκλείδειας Γεωμετρίας οφείλεται στο γεγονός ότι, ο παραγωγικός της χαρακτήρας δεν μπορεί να επινοηθεί εκ νέου από τον μαθητή, αλλά μόνο να επιβληθεί σ' αυτόν. Στο ίδιο μήκος κύματος, ο Άγγλος R. Skemp επισημαίνει ότι, η παραδοσιακή διδασκαλία δίνει μόνο το τελικό προϊόν της μαθηματικής ανακάλυψης και αποτυγχάνει να προκαλέσει στο μαθητή εκείνες τις διαδικασίες με τις οποίες γίνονται οι μαθηματικές ανακαλύψεις. Νεώτεροι ερευνητές, όπως ο Γάλλος N. Balacheff και ο Αμερικανός A. Schoenfeld επεκτείνουν αυτήν την ερμηνεία, υπογραμμίζοντας τη διάσταση ανάμεσα στη "θεωρητική" γνώση που επιχειρεί να μεταδόσει η παραδοσιακή διδασκαλία και την "πρακτική" στάση του μαθητή, ο οποίος δεν έχει τη λογική ωριμότητα για αποδείξεις ή τη συναίσθηση της αναγκαιότητας των αποδείξεων ιδιαίτερα, όταν αυτές εμφανίζονται να επικυρώνουν "προφανή" αποτελέσματα της παρατήρησης και της διαίσθησης. Το φαινόμενο της απλοϊκής-εμπειρικής προσέγγισης της μαθηματικής γνώσης έχει παρατηρηθεί, σε μεγάλη έκταση, και σε μεγαλύτερους σπουδαστές. Οι έρευνες του A. Schoenfeld με φοιτητές κολλεγίου που είχαν παρακολουθήσει στο Λύκειο μια ετήσια διδασκαλία μαθημάτων Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αποκάλυψαν την αδυναμία χρησιμοποίησης βασικών γεωμετρικών γνώσεων με συνεπή τρόπο. Οι φοιτητές μπορούσαν να δώσουν ικανοποιητικές αποδείξεις σε διάφορες γεωμετρικές προτάσεις, αλλά όταν αντιμετώπιζαν, αμέσως μετά, ένα πρόβλημα γεωμετρικής κατασκευής που στηρίζονταν στη χρήση των ίδιων ακριβώς προτάσεων, κατέφευγαν στην τακτική του "πρακτικού ατόμου": ΄Εκαναν υποθέσεις για τα ζητούμενα σχήματα με βάση την εμπειρία και τη διαίσθηση, χρησιμοποιούσαν τον κανόνα και τον διαβήτη καθοδηγούμενοι από το χέρι ή το μάτι. Σωστές λύσεις απορρίπτονταν, γιατί δεν φαίνονταν αρκετά ακριβείς, ενώ λαθεμένες λύσεις γίνονταν δεκτές, επειδή φαίνονταν καλές. Η διαδικασία μιας κατασκευής ήταν σωστή όχι, επειδή στηρίζονταν στο θεωρητικό οικοδόμημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά επειδή παρήγαγε ένα ακριβές σχήμα. Με άλλα λόγια, οι σπουδαστές ήταν ουσιαστικά καθηλωμένοι στο περιγραφικό - αναλυτικό 2ο επίπεδο van Hiele, ενώ σύμφωνα με την προηγηθείσα διδασκαλία θα έπρεπε να είχαν κατακτήσει το τυπικό - παραγωγικό 4ο επίπεδο. Ο Schoenfeld αποδίδει ευθέως αυτήν την κυριαρχία του εμπειρισμού στην καθιερωμένη διδασκαλία της Γεωμετρίας στις Η.Π.Α., η οποία καλλιεργεί την ικανότητα στο γράψιμο αποδείξεων και στην εκτέλεση κατασκευών με μοναδικό κριτήριο τις απαιτήσεις των εξετάσεων, παραμελώντας βασικές μαθηματικές, παιδαγωγικές, επιστημολογικές, ακόμη και ωφελιμιστικές συνιστώσες του μαθήματος. Μια τέτοια διδασκαλία οδήγησε τους μαθητές σε επιτυχία στις εξετάσεις της Γεωμετρίας, αλλά ταυτόχρονα και σε πλήρη αδυναμία να αντιληφθούν τη σύνδεση ανάμεσα σε μια μαθηματική θεωρία και τις εφαρμογές της στην πράξη.[3]

Κοινή πεποίθηση όλων αυτών των ερευνητών είναι ότι, για να κατανοηθούν οι παραγωγικές αποδείξεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας απαιτείται μια ισχυρή διαισθητική βάση, την οποία οι μαθητές θα αποκτήσουν μέσα από επαγωγικές, εμπειρικές ανακαλύψεις, τη διατύπωση και επαλήθευση υποθέσεων, τις γεωμετρικές κατασκευές και εφαρμογές. Έτσι, λοιπόν, η διδασκαλία της Γεωμετρίας δεν θα πρέπει να στηρίζεται σ' έναν τεχνητό διαχωρισμό ανάμεσα σε μια "Πρακτική Γεωμετρία" σχεδίασης και μετρήσεων και μια "Θεωρητική Γεωμετρία" αποδείξεων, αλλά να συνδυάζει μια ισορροπημένη ανάπτυξη των δύο αυτών όψεων του μαθήματος σ' όλο το φάσμα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η επινόηση διδακτικών μέσων και μεθόδων που θα επιτρέψουν την υλοποίηση αυτού του στόχου, φαίνεται ότι αποτελεί σήμερα το βασικό πρόβλημα της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

4. Ερευνητικά δεδομένα για την κατάσταση στην Ελλάδα

Όπως αναφέραμε στην πρώτη ενότητα αυτής της εισαγωγής, μετά το σπάσιμο της παράδοσης που επέφερε η μεταρρύθμιση των "Νέων Μαθηματικών" τη δεκαετία του 1960, δεν υπάρχει σήμερα διεθνώς κάποιο σταθερό μοντέλο διδασκαλίας της Γεωμετρίας. Αυτό σημαίνει ότι, τα αποτελέσματα των παραπάνω ερευνών δεν μπορούν να γενικευτούν άμεσα και θα πρέπει να συνοδεύονται από επιμέρους έρευνες

[3] Ένα από τα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών που χρησιμοποίησε ο Schoenfeld στις έρευνές του παραθέτουμε στην ενότητα "Ασκήσεις & Προβλήματα" του 3ου Κεφαλαίου.

σε κάθε ειδική περίπτωση. Μια τέτοια περίπτωση αποτελεί και η Ελλάδα, η οποία είναι από τις ελάχιστες χώρες που εξακολουθούν σήμερα να διατηρούν ένα ανεξάρτητο μάθημα Ευκλείδειας Γεωμετρίας στις δύο πρώτες τάξεις του Λυκείου. Όμως, παρά το γεγονός ότι η διδασκαλία του μαθήματος έχει στη χώρα μας μια μεγάλη παράδοση, δεν έχουν γίνει αντίστοιχες έρευνες που να εξετάζουν την κατάκτηση των ανώτερων επιπέδων γεωμετρικής σκέψης από τους μαθητές του Ελληνικού Λυκείου. Τα τελευταία 20 χρόνια μάλιστα, φαίνεται να έχει εδραιωθεί η ιδέα ότι, το πρόβλημα της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ανάγεται στην αναζήτηση της "ιδανικής" αξιωματικής θεμελίωσης και του "ιδανικού" διδακτικού βιβλίου, με αποτέλεσμα οι σχετικές συζητήσεις να περιστρέφονται γύρω από ζητήματα "πολιτικής" της διδασκαλίας και όχι γύρω από τα προβλήματα μάθησης.

Τα ερευνητικά δεδομένα που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα θέτουν σε αμφισβήτηση ορισμένες εδραιωμένες αντιλήψεις για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας. Η τρέχουσα διδακτική πρακτική στηρίζεται στην υπόθεση ότι, οι μαθητές της Α′ Λυκείου είναι ώριμοι να κατανοήσουν την ανάπτυξη ενός μαθηματικού συστήματος, όπως η Ευκλείδεια Γεωμετρία. Θεωρεί αυτονόητη τη σύνδεση ανάμεσα στα γεωμετρικά αντικείμενα της παρατήρησης και τις θεωρητικές έννοιες του συστήματος: την κατανόηση του ρόλου των αξιωμάτων, τους ορισμούς των σχημάτων με βάση έναν ελάχιστο αριθμό χαρακτηριστικών ιδιοτήτων (στο πλαίσιο μιας ιεραρχικής ταξινόμισης), τη σκοπιμότητα για αυστηρές αποδείξεις. Εκείνο που φαίνεται να αναγνωρίζεται περισσότερο ως καθήκον της διδασκαλίας, είναι η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να παράγουν αποδείξεις, δηλαδή να κατασκευάζουν μία ακολουθία συλλογισμών που να οδηγεί με συνεπή τρόπο από ένα σύνολο δεδομένων σε κάποια συμπεράσματα. Με άλλα λόγια, η διδασκαλία θεωρεί δεδομένη την κατάκτηση των τριών πρώτων επιπέδων van Hiele και θέτει ως στόχο την κατάκτηση του 4ου επιπέδου. Παίρνοντας, όμως, υπόψη τα διεθνή ερευνητικά δεδομένα είναι εύλογο να θέσουμε το ερώτημα: Πόσο κοντά στην πραγματικότητα βρίσκονται αυτές οι "επίσημες" θέσεις για τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας;

Σε μια από τις ελάχιστες έρευνες που έχουν γίνει στη χώρα μας, καταγράφηκαν οι απαντήσεις 66 μαθητών της Β′ τάξης Λυκείου και 60 μαθητών της Α′ Λυκείου σε τρεις "κλασικές" ασκήσεις Γεωμετρίας. Παρά το γεγονός ότι, οι ασκήσεις αυτές δόθηκαν στη μορφή ανοικτών προβλημάτων, δηλαδή χωρίς να συνδέονται άμεσα και αποκλειστικά με την ύλη που είχαν διδαχτεί οι μαθητές, οι ερευνητές κατέληξαν σε ορισμένα ενδιαφέροντα συμπεράσματα:

α) Οι μαθητές αρκούνται στην οπτική αντίληψη (δηλαδή στηρίζονται στο σχήμα και όχι σε γεωμετρικές προτάσεις που συνδέονται με τα δεδομένα και ζητούμενα της άσκησης).

β) Οι δυνατότητες δράσης τους (μεθοδολογία) είναι σχετικά χαμηλές.

γ) Οι δυνατότητες σωστής διατύπωσης και επικύρωσης αφορούν μικρό σχετικά μέρος από το σύνολο των μαθητών.

δ) Οι μαθητές συγχέουν έννοιες κατάλληλες για άλλο τύπο προβλημάτων που δεν λειτουργούν στη συγκεκριμένη περίπτωση και τις χρησιμοποιούν απλά και μόνο για να δώσουν μία απάντηση. Πρόκειται για το γνωστό φαινόμενο της "παράλογης" μαθηματικής συμπεριφοράς ορισμένων μαθητών (όχι μόνο αδυνάτων!), που επιζητούν "απεγνωσμένα" μιαν απάντηση, αδιαφορώντας για το νόημα και τη συνέπεια αυτών που γράφουν.[4]

Για να αποκτήσουμε μια πληρέστερη εικόνα για τα αποτελέσματα ενός χρόνου διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, εξετάσαμε τα γραπτά των 130 μαθητών της Α′ τάξης του 1ου Λυκείου Ηλιούπολης Θεσσαλονίκης στις προαγωγικές εξετάσεις του Ιουνίου 1997. Η μελέτη των γραπτών επίσημων εξετάσεων αποτελεί μια συνήθη πρακτική στην έρευνα της Διδακτικής, ιδιαίτερα όταν στοχεύει στη διάγνωση λαθεμένων αντιλήψεων που έχουν μεγάλη διάδοση και αφορούν ευρύ φάσμα της σχολικής ύλης. Το βασικό μειονέκτημα είναι βέβαια ότι, τα ερωτήματα προς τους μαθητές δεν καθορίζονται από κάποια θεωρητική ανάλυση, αλλά δίνονται με βάση εσωτερικά κριτήρια της διδασκαλίας (π.χ. εκτιμήσεις και προσδοκίες των διδασκόντων). Θεωρήσαμε όμως ότι, τα γραπτά αυτά μας δίνουν μια αρκετά καλή εικόνα για το επίπεδο της θεωρητικής μαθηματικής σκέψης που αποκτούν οι μαθητές ύστερα από ένα χρόνο διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Τα θέματα των εξετάσεων

ΘΕΩΡΙΑ

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Να αποδείξετε ότι, κάθε παραλληλόγραμμο που έχει μία από τις παρακάτω ιδιότητες είναι ρόμβος:

(i) Οι διαγώνιες είναι κάθετες,

(ii) Μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφό του.

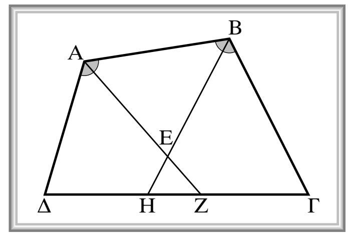
---

[4] Λεπτομέρειες για τα παραπάνω βλέπε στις εργασίες των Γαγάτση - Παπαδοπούλου - Σαρίκα - Τσαουλίδη και Γιωτοπούλου - Πατρώνη, που αναφέρονται στη βιβλιογραφία αυτής της Εισαγωγής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

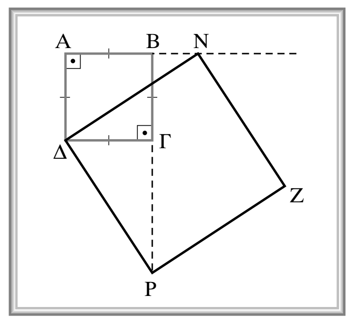
ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = 2\hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = 2\hat{\Delta}$, η διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει την ΔΓ στο Ζ και η διχοτόμος της $\hat{B}$ τέμνει την ΔΓ στο Η. Αν Ε είναι το σημείο τομής των ΑΖ, ΒΗ να αποδείξετε ότι, το τρίγωνο ΕΗΖ είναι ισόπλευρο.



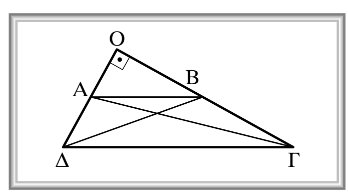
ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την ΑΒ προς το Β και στην προέκταση παίρνουμε τυχαίο σημείο Ν. Επίσης, προεκτείνουμε την ΒΓ και στην προέκταση παίρνουμε τμήμα ΓΡ=ΑΝ. Στη συνέχεια, με πλευρές τα ΔΝ, ΔΡ κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΔΝΖΡ. Να αποδείξετε ότι, το ΔΝΖΡ είναι τετράγωνο.



ΖΗΤΗΜΑ 3ο

Να σχεδιάσετε ένα τραπέζιο, στο οποίο οι μη παράλληλες πλευρές, όταν προεκταθούν, τέμνονται κάθετα και να αποδείξετε ότι, το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των βάσεών του.



(Οι μαθητές, με το προηγούμενο σύστημα προαγωγικών εξετάσεων, είχαν δυνατότητα επιλογής ενός θέματος θεωρίας και δύο ασκήσεων και χρόνο εξέτασης 2 ώρες. Τα σχήματα δεν είχαν δοθεί στους μαθητές).

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΕΠΙΔΟΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ (N=130)

ΘΕΩΡΙΑ

	ΑΣΧΟΛΗΘΗΚΑΝ	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
ΖΗΤΗΜΑ 1ο	27 (21%)	16 (59%)	11 (41%)
ΖΗΤΗΜΑ 2ο	99 (79%)	53 (54%)	46 (46%)
ΣΥΝΟΛΙΚΑ	126 (97%)	69 (55%)	57 (45%)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

	ΑΣΧΟΛΗΘΗΚΑΝ	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
ΖΗΤΗΜΑ 1ο	89 (68%)	18 (20%)	71 (80%)
ΖΗΤΗΜΑ 2ο	93 (72%)	15 (16%)	78 (84%)
ΖΗΤΗΜΑ 3ο	69 (53%)	39 (57%)	30 (43%)
ΣΥΝΟΛΙΚΑ	251 (97%)	72 (29%)	179 (71%)

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Στα θέματα της θεωρίας, που τέθηκαν αυτούσια μέσα από το επίσημο τότε σχολικό βιβλίο, τετραπλάσιοι μαθητές προτίμησαν το 2ο ζήτημα (Πυθαγόρειο θεώρημα), η απόδειξη του οποίου θεωρείται προφανώς ως ένα “επικίνδυνο” θέμα για τις εξετάσεις. Παρόλα αυτά, το ποσοστό επιτυχίας ήταν μεγαλύτερο στο 1ο ζήτημα (ικανές συνθήκες για είναι ρόμβος ένα παραλληλόγραμμο). Ο βασικός παράγων αποτυχίας στο 1ο ζήτημα είναι ότι, πολλοί μαθητές συγχέουν τις ικανές με τις αναγκαίες συνθήκες και αποδεικνύουν ακριβώς το αντίστροφο αυτού που ζητείται. Στο 2ο ζήτημα η αποτυχία οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι, πολλοί μαθητές αδυνατούν να αποδείξουν το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος. Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι, το 45% των μαθητών, σε επίσημες και προγραμματισμένες εξετάσεις, αδυνατεί να αναπαράγει με σωστό τρόπο τις αποδείξεις γεωμετρικών προτάσεων που αποτελούν τα 2/3 της διδαχθείσης ύλης του σχολικού βιβλίου. Το συμπέρασμα αυτό μας “προετοιμάζει” για τις επιδόσεις των μαθητών στις ασκήσεις, δηλαδή την ικανότητα τους να επινοούν και να διατυπώνουν δικές τους αποδείξεις. Ο προηγούμενος πίνακας δείχνει ότι, την ικανότητα αυτή έχει αποκτήσει, ύστερα από ένα χρόνο διδασκαλίας, το 29% των μαθητών της Α′ Λυκείου. Το ποσοστό είναι περίπου το ίδιο, με αυτό που έχουν καταγράψει οι έρευνες σε άλλες χώρες, αλλά κατά την άποψή μας είναι πολύ χαμηλό. Για να το εκτιμήσουμε καλύτερα, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι, στη διαμόρφωσή του συνέβαλε το ψηλό ποσοστό επιτυχίας (57%)

στο 3ο ζήτημα, που είναι μια ελαφρώς παραλλαγμένη άσκηση του σχολικού βιβλίου και τέθηκε, σύμφωνα με τους διδάσκοντες, για να υπάρχει και ένα “εύκολο” θέμα.

Στην 1η άσκηση, ο βασικός παράγων αποτυχίας είναι η σχεδίαση λαθεμένου σχήματος. Αντί για τυχαίο τετράπλευρο, οι περισσότεροι απο τους 71 μαθητές που ασχολήθηκαν μ’ αυτήν χωρίς να μπορέσουν να τη λύσουν, κατασκεύασαν τραπέζιο ή παραλληλόγραμμο και μάλιστα οι 27 (ποσοστό 35%) χρησιμοποίησαν ποικιλοτρόπως την παραλληλία των πλευρών για να “αποδείξουν” το ζητούμενο. Εδώ είναι φανερή η ισχυρή επίδραση πρωτογενών αντιλήψεων για την έννοια του τετραπλεύρου (ταύτισή του με τραπέζιο, ορθογώνιο κ.λ.π.), η οποία εισάγει στο πρόβλημα ανύπαρκτα δεδομένα. Το ζήτημα αυτό, που έχει μελετηθεί εκτενώς απο τους ερευνητές της Διδακτικής, είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως “φαινόμενο του προτύπου”. Στο πλαίσιο της θεωρητικής Γεωμετρίας, η εμφάνισή του αποκαλύπτει ότι, πολλοί μαθητές εξακολουθούν να στηρίζουν μια απόδειξη σε εμπειρικά δεδομένα και όχι σε λογική ανάλυση των υποθέσεων του προβλήματος.

Στην 2η άσκηση, ο βασικός παράγων αποτυχίας είναι η αδυναμία των μαθητών να χρησιμοποιήσουν με αποτελεσματικό τρόπο τα δεδομένα του προβλήματος. Από τους 78 μαθητές που ασχολήθηκαν με αυτήν, αλλά δεν μπόρεσαν να τη λύσουν, οι 58 (ποσοστό 74%) αγνόησαν το βασικό δεδομένο ΓΡ=ΑΝ που οδηγεί στο εντοπισμό ίσων τριγώνων. Είναι χαρακτηριστικό ότι, πολλοί από αυτούς αρκούνται σε μια απλή απαρίθμηση των ιδιοτήτων του παραλληλογράμμου ΔΝΖΡ, ενώ άλλοι “αποδεικνύουν” ότι είναι τετράγωνο επινοώντας ανύπαρκτες ιδιότητες (ισχυριζόμενοι, π.χ., ότι *όλες οι γωνίες που δημιουργούνται είναι ορθές, γιατί αφού έχουμε παράλληλες θα πρέπει να είναι κάθετες κάπου!*).

Στην 3η άσκηση, που συγκέντρωσε τριπλάσιο ποσοστό επιτυχίας απο τις άλλες, οι περισσότεροι μαθητές φαίνεται ότι, μπορούν να εφαρμόσουν το Πυθαγόρειο θεώρημα σε μια σειρά ορθογωνίων τριγώνων και να εκτελέσουν τους απαραίτητους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς που οδηγούν στη ζητούμενη σχέση. Σ’ αυτήν ακριβώς τη δυνατότητα να εκτελέσουν πράξεις, που βρίσκεται στον αντίποδα της συνθετικής ικανότητας που απαιτούν οι άλλες ασκήσεις, οφείλεται κατά την άποψή μας το σημαντικό ποσοστό επιτυχίας. Είναι όμως χαρακτηριστικό ότι, στην άσκηση αυτή εμφανίζεται ο μεγαλύτερος αριθμός γραπτών με την “παράλογη” μαθηματική συμπεριφορά που επισημάνθηκε παραπάνω. Περίπου οι μισοί από τους 30 μαθητές που ασχολήθηκαν με την άσκηση χωρίς να τη λύσουν, χρησιμοποίησαν το Πυθαγόρειο θεώρημα σε μη ορθογώνια τρίγωνα και στη συνέχεια έκαναν απίθανους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς για να καταλήξουν “πάση θυσία” στη ζητούμενη σχέση. Οι προηγούμενες παρατηρήσεις αναφέρονται στους βασικούς παράγοντες αποτυχίας που εμφανίζουν τη μεγαλύτερη συχνότητα και επηρέασαν τη βαθμολόγηση των γραπτών. Θα μπορούσαν ν’ αναφερθούν και άλλοι παράγοντες που διαπιστώθηκαν από την έρευνα και αφορούν εξίσου επιτυχόντες και αποτυχόντες, όπως είναι η πολύ κακή διατύπωση των γραπτών, τα χάσματα και λογικά κενά στην αλληλουχία των συλλογισμών. Αυτά όμως, δεν φαίνεται ότι λαμβάνονται πολύ σοβαρά υπόψη απο τους διδάσκοντες κατά τη βαθμολόγηση των γραπτών.

Τα προηγούμενα αποτελέσματα μας επιτρέπουν να διατυπώσουμε ορισμένα συμπεράσματα για τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Α′ Λυκείου. Είναι φανερό ότι, για την πλειοψηφία των μαθητών (σε ποσοστό που υπερβαίνει το 70%), οι παραδοσιακές αρετές του μαθήματος, όπως είναι η σαφήνεια στην έκθεση, η ολοκληρωτική απόδειξη κάθε υπόθεσης, η απόλυτη συνάφεια σχημάτων και συλλογισμών, η τάξη και η ομορφιά, αποτελούν απρόσιτους στόχους. Για να διαμορφώσουμε, όμως, μια ακριβέστερη ερμηνευτική εικόνα, θα θεωρήσουμε τα προηγούμενα από την οπτική γωνία των επιπέδων van Hiele, τα οποία χρησιμοποιούμε εδώ ως θεωρητικό πλαίσιο αναφοράς για τη μάθηση της Γεωμετρίας.

Τα αποτελέσματα της προηγούμενης έρευνας επιβεβαιώνουν το συμπέρασμα, στο οποίο έχουν καταλήξει αντίστοιχες έρευνες σε άλλες χώρες: Η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών της Α′ Λυκείου, ύστερα από ένα χρόνο διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, δεν έχει ξεπεράσει ακόμη το περιγραφικό - αναλυτικό 2ο επίπεδο, ενώ σύμφωνα με τις απαιτήσεις του Αναλυτικού Προγράμματος και του διδακτικού βιβλίου θα έπρεπε να είχε κατακτήσει το τυπικό - παραγωγικό 4ο επίπεδο. Η έρευνά μας δείχνει με έμφαση την τεράστια δυσκολία που παρουσιάζει η απόκτηση απο τους μαθητές της ικανότητας να παράγουν δικές τους αποδείξεις, ικανότητα η οποία αποτελεί την ειδοποιό διαφορά αυτού του επιπέδου από τα προηγούμενα. Αυτή η δυσκολία είναι ιδιαίτερα φανερή στις συνθετικές αποδείξεις που χαρακτηρίζουν τις περισσότερες γεωμετρικές προτάσεις στην ύλη της Α′ Λυκείου, στις οποίες γίνεται περιορισμένη χρήση αλγεβρικών εργαλείων.

Το τελευταίο ζήτημα που θα εξετάσουμε, αφορά τις προοπτικές και τις δυνατότητες που δίνει το νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας για την αντιστροφή αυτού του αρνητικού κλίματος.

5. Οι προοπτικές του νέου Αναλυτικού Προγράμματος

Οι καινοτομίες που εισάγονται με το νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα για τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αφορούν κυρίως τα εξής σημεία:

Υποβαθμίζεται ο ρόλος της αξιωματικής θεμελίωσης και προβάλλεται ιδιαίτερα η έννοια της απόδειξης, με ιδιαίτερη έμφαση στην αναλυτικο - συνθετική μέθοδο, η οποία αναδεικνύει την ευρετική πορεία μιας απόδειξης.

Επαναφέρεται η διδασκαλία ενός βασικού πεδίου εφαρμογής των προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, όπως είναι τα προβλήματα γεωμετρικών τόπων και κατασκευών.

Εμπλουτίζεται η διδασκαλία με δραστηριότητες, δηλαδή η επίλυση προβλημάτων που υπερβαίνουν το επίπεδο των παραδοσιακών ασκήσεων και ενθαρρύνουν την ομαδική εργασία και έρευνα των μαθητών μέσα στην τάξη.

Στα προηγούμενα, θα πρέπει να συνυπολογιστούν η εισαγωγή του θεσμού των συνθετικών δημιουργικών εργασιών και η βαρύτητα που αποκτά η έννοια του "προβλήματος" με το νέο τρόπο εξέτασης των μαθητών του Λυκείου στα Μαθηματικά. Θεωρούμε ότι, όλα τα παραπάνω αποτελούν ένα ικανοποιητικό "θεσμικό" πλαίσιο για την ανάληψη των διδακτικών πρωτοβουλιών που είναι αναγκαίες, ώστε να αντιμετωπιστούν τα προβλήματα, τα οποία ανέδειξε η προηγούμενη ανάλυσή μας. Οι πρωτοβουλίες όμως αυτές, που θα απευθύνονται σε όλους τους μαθητές και όχι σε μια περιορισμένη "ελίτ", δεν μπορούν να υλοποιηθούν μέσα από ένα συνδυασμό υπέρογκης διδακτέας ύλης και ανεπαρκούς διδακτικού χρόνου που επιβάλλουν ένα φρενήρη ρυθμό διδασκαλίας (υπενθυμίζουμε ότι, πριν από το διαχωρισμό της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε Γυμνάσιο - Λύκειο, η Ευκλείδεια Γεωμετρία διδάσκονταν επί τέσσερα σχολικά έτη). Θα πρέπει, λοιπόν, να ασκείται μικρότερη πίεση σχετικά με την **ποσότητα** της ύλης που οφείλει να καλύψει η διδασκαλία και επιμείνουμε περισσότερο στη βελτίωση της **ποιότητας** της διδασκαλίας.

Στο πλαίσιο αυτό θα πρέπει καταρχήν, να εξετάσουμε τη δυνατότητα μιας συστηματικής, και κατά το δυνατόν ανεξάρτητης, διδασκαλίας της έννοιας της απόδειξης στα Μαθηματικά. Μέχρι, όμως, την καθιέρωση ενός ξεχωριστού κεφαλαίου στα σχολικά βιβλία που θα πραγματεύεται από πολλές όψεις την έννοια της απόδειξης, πρέπει να επινοήσουμε μεθόδους διδασκαλίας της αποδεικτικής μεθοδολογίας, ιδιαίτερα στην Ευκλείδεια Γεωμετρία που αποτελεί ένα προνομιακό χώρο άσκησης σ' αυτήν τη μεθοδολογία. Στα επόμενα κεφάλαια του βιβλίου γίνονται συγκεκριμένες προτάσεις προς αυτήν την κατεύθυνση.

Η άλλη μεγάλη πρόκληση του αναλυτικού προγράμματος, η διδασκαλία των γεωμετρικών τόπων και κατασκευών και η κατανόηση της αναλυτικο - συνθετικής μεθόδου, απαιτούν επίσης την επινόηση νέων μεθόδων διδασκαλίας. Είναι φανερό ότι οι παραδοσιακές ταξινομήσεις και η μεθοδολογία επίλυσης των σχετικών προβλημάτων δεν εξυπηρετούν τις σημερινές απαιτήσεις της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Η ανάγκη να θεωρηθούν τα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών ως ένας χώρος εφαρμογής των γεωμετρικής θεωρίας, μας οδηγεί να θεωρήσουμε τη διδασκαλία τους ως ένα τμήμα των διαδικασιών "επίλυσης προβλήματος", ακόμη και να επιχειρήσουμε προεκτάσεις στην Άλγεβρα, όπου η αναλυτικο - συνθετική μέθοδος χρησιμοποιείται εμμέσως πλην σαφώς στην επίλυση προβλημάτων με τη βοήθεια εξισώσεων. Με τέτοια προοπτική αντιμετωπίζουμε τα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών αυτού του βιβλίου.

Τέλος, η εισαγωγή των δραστηριοτήτων και του θεσμού των συνθετικών-δημιουργικών αποτελεί μια άλλη σημαντική καινοτομία, η οποία μπορεί να εξελιχθεί σε βασικό παράγοντα μάθησης, αν τηρηθούν ορισμένες προϋποθέσεις. Αυτές είναι:

- Να κατανοηθεί η μεγάλη χρησιμότητα της οργάνωσης δραστηριοτήτων ή της ανάθεσης συνθετικών δημιουργικών εργασιών για την ανάπτυξη του ερευνητικού ενδιαφέροντος και της θετικής στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά.

- Να αποδεσμευθεί χρόνος από το διδακτικό ωράριο των καθηγητών, ανάλογος με τις δραστηριότητες που οργανώνουν και τον αριθμό των συνθετικών δημιουργικών εργασιών που καθοδηγούν.
- Να ελαφρυνθεί η κατ' οίκον εργασία των μαθητών που εκπονούν συνθετικές δημιουργικές εργασίες.
- Να εξασφαλιστεί η ύπαρξη στα σχολεία της αναγκαίας υλικοτεχνικής υποδομής, ιδιαίτερα της βιβλιογραφικής υποστήριξης των καθηγητών και των μαθητών.
- Να συμπεριλάβουν τα προγράμματα επιμόρφωσης των καθηγητών το ζήτημα της οργάνωσης δραστηριοτήτων και της καθοδήγησης και εκπόνησης συνθετικών δημιουργικών εργασιών.

Ειδικά για την Ευκλείδεια Γεωμετρία, το ανεξάντλητο απόθεμα προβλημάτων, το πλήθος των εφαρμογών και η μακραίωνη ιστορική της εξέλιξη παρέχουν μια πλούσια θεματογραφία δραστηριοτήτων και συνθετικών δημιουργικών εργασιών που μπορούν να καλλιεργήσουν την ερευνητική στάση των μαθητών και να συμβάλλουν στην καλύτερη κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών και μεθόδων. Για την εκπόνηση συνθετικών - δημιουργικών εργασιών θα πρέπει δίνονται στους μαθητές (ιδιαίτερα της Α΄ Λυκείου) επαρκή χρονικά περιθώρια, ώστε η συλλογή και η επεξεργασία του υλικού να βαδίζει παράλληλα με την ωριμότητα που αποκτούν από τη βαθμιαία μελέτη των θεωρητικών Μαθηματικών. Τα προηγούμενα ζητήματα γίνονται επίσης, αντικείμενο συστηματικής διαπραγμάτευσης στα επόμενα κεφάλαια ευτού του βιβλίου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ

Γαγάτσης, Α., Παπαδοπούλου, Π. Σαρίκα, Μ. & Τσαουλίδης, Α. Με αφορμή τρεις κλασικές ασκήσεις Γεωμετρίας από το Γαλλικό πρόγραμμα μέσης εκπαίδευσης. *Διάσταση* 3-4, σσ.4-18 (1993)

Γιωτοπούλου, Ο. & Πατρώνης, Τ. Ανάλυση μερικών συμπεριφορών στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης με επίκεντρο τις απαντήσεις των μαθητών στις προαγωγικές εξετάσεις και στα τεστ αξιολόγησης. *Πρακτικά 10ου Πανελλήνιου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας*. Αθήνα: Ε.Μ.Ε. (1993)

Θωμαΐδης, Γ. Οι συντεταγμένες της σχολικής Γεωμετρίας στην Ελλάδα (1960-1990). *Σύγχρονη Εκπαίδευση* τεύχος 61, σσ.27- 38 (1991)

Θωμαΐδης, Γ. Η διδασκαλία της Θεωρητικής Γεωμετρίας στην Ελλάδα και το νέο αναλυτικό πρόγραμμα από τη σκοπιά της Διδακτικής των Μαθηματικών. *Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών* τεύχος 1, σσ.72-92 (1996)

Θωμαΐδης, Γ. Μερικές όψεις της αποτυχίας στην κατανόηση βασικών εννοιών της Ευκλείδειας Θεωρητικής Γεωμετρίας. Περιέχεται στο Μ. Κούρκουλος *κ.ά.* [επιμ], *Πρακτικά της1ης Διημερίδας Διδακτικής των Μαθηματικών (10 & 11 Απριλίου 1998)*. Ρέθυμνο: Παιδαγωγικό Τμήμα Δ.Ε., Πανεπιστήμιο Κρήτης (1998)

Thom, R. "Μοντέρνα" Μαθηματικά: Ένα εκπαιδευτικό και φιλοσοφικό λάθος. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, τεύχος 21, σσ.15-33 (1981)

ΥΠ.Ε.Π.Θ. Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Γυμνασίου και Ενιαίου Λυκείου. *Εφημερίς της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας.* Τεύχος Δεύτερο. Αρ. Φύλλου 1342 (1999)

Balacheff, N. The Benefits and Limits of Social Interaction: The Case of Mathematical Proof. Περιέχεται στο A. Bishop et al [eds], *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*. Dordrecht: Kluwer (1991)

Budden, F. & Wormell, C. *Mathematics through Geometry.* Oxford: Pergamon Press (1964)

Clements, D. & Battista, M. Geometry and Spatial Reasoning. Περιέχεται στο D. Grouws [ed], *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan & Reston, Va: N.C.T.M (1992)

Einstein, A. Autobiographical notes. Περιέχεται στο P.A.Schilpp [ed], *Albert Einstein: Philosopher-Scientist,* Vol.1. LaSalle Illinois: Open Court Classics (1949)

Fischbein, E. & Kedem, I. Proof and certitude in the development of mathematical thinking. Περιέχεται στο A. Vermandel [ed], *Proceedings of the 6th International Conference for the Psychology of Mathematical Education*. Antwerp: Universitaire Instelling Antwerpen (1982)

Hershkowitz, R. *et al*. Ψυχολογικές όψεις της μάθησης της Γεωμετρίας. *Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών* 1, σσ.93-135 (1996)

Freudenthal, H. Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics* 3, σσ.413-435 (1971)

International Commission on Mathematical Instruction (I.C.M.I.). *School Mathematics in the 1990s.* Cambridge: Cambridge University Press (1986)

Kapadia, R. Bring Back Geometry. *The Mathematical Intelligencer* 7(2), σσ.53-54 & 65 (1985)

Menger, K. The Geometry Relevant to Modern Education. Περιέχεται στο K. Menger [ed], *Selected Papers in Logic and Foundations, Didactics, Economics* . Dordrecht: Reidel (1979)

Organization for Economic Cooperation and Development (O.E.E.C.). *New Thinking in School Mathematics*. Paris (1961)

Quadling, D. Algebra, Analysis, Geometry. Περιέχεται στο R. Morris [ed], *Studies in Mathematics education*, vol 4. Paris: Unesco (1985)

Patronis, A. & Thomaidis, Y. On the Arithmetization of School Geometry in the Setting of Modern Axiomatics. *Science & Education* 6(3), σσ.273-290 (1997)

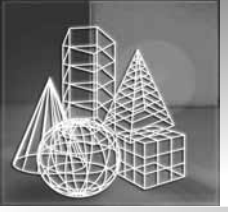
Schoenfeld, A. On Having and Using Geometric Knowledge. Περιέχεται στο J. Hiebert [ed], *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum (1986)

Senk, S. How Well Do Students Write Geometry Proofs? *Mathematics Teacher* 74(6), σσ.448-456. (1985)

Skemp, R. *The Psychology of Learning Mathematics*. Harmondsworth: Penguin (1971)

Zeitler, H. Axiomatics of Geometry in School and in Science. *For the Learning of Mathematics* 10 (2), σσ. 17-24 (1990)

1 Κεφάλαιο



Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΥΛΗΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

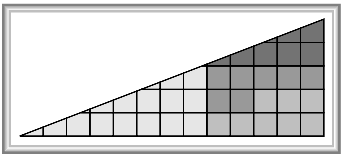
Ο σκοπός αυτού του εισαγωγικού κεφαλαίου είναι να αποκτήσουν οι μαθητές μια πρώτη αντίληψη για τη διαφορά ανάμεσα στην Πρακτική και στη Θεωρητική Γεωμετρία και να γνωρίσουν τα βασικά στάδια της ιστορικής εξέλιξης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Το περιεχόμενο του κεφαλαίου προσφέρεται για ομαδικές δραστηριότητες και συζητήσεις μέσα στην τάξη πάνω στα συγκεκριμένα ζητήματα, αλλά και για την ανάθεση στους μαθητές συνθετικών - δημιουργικών εργασιών. Δίνουμε παρακάτω ορισμένα θέματα δραστηριοτήτων και συνθετικών - δημιουργικών εργασιών που συνδέονται με την ύλη του 1ου κεφαλαίου μαζί με σύντομη ανάλυση και σχετική βιβλιογραφία. Για την καθοδήγηση αυτών των εργασιών θα είναι ιδιαίτερα χρήσιμη η συνεργασία των μαθηματικών με καθηγητές άλλων ειδικοτήτων, όπως π.χ. φιλόλογους - ιστορικούς, τεχνολόγους κ.λπ.

ΘΕΜΑΤΑ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

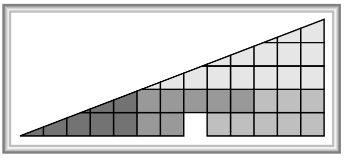
1. Παρατήρηση γεωμετρικών σχημάτων και λογικά συμπεράσματα

Ένας τρόπος για να γίνει κατανοητή η διαφορά ανάμεσα στην Πρακτική Γεωμετρία (που χρησιμοποιεί την παρατήρηση των σχημάτων και τις μετρήσεις) και τη Θεωρητική Γεωμετρία (που χρησιμοποιεί γενικές προτάσεις και λογικές αποδείξεις) είναι να δείξουμε στους μαθητές ορισμένα παράδοξα στα οποία οδηγεί η παρατήρηση των σχημάτων, όταν δεν συνοδεύεται από τον έλεγχο των ιδιοτήτων τους με τη βοήθεια γενικών και λογικά έγκυρων προτάσεων. Ένας άλλος τρόπος είναι να δείξουμε τα λαθεμένα συμπεράσματα, στα οποία μπορεί κάποιος να καταλήξει, όταν διατυπώνει γενικές προτάσεις με βάση την παρατήρηση ειδικών περιπτώσεων ενός σχήματος. Δίνουμε παρακάτω μερικά παραδείγματα τέτοιων παράδοξων και λαθεμένων συμπερασμάτων, τα οποία ο διδάσκων μπορεί να χρησιμοποιήσει για την οργάνωση δραστηριοτήτων στα εισαγωγικά μαθήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Στη διάρκεια αυτών των δραστηριοτήτων δίνεται επίσης η ευκαιρία να καλλιεργηθεί στην τάξη ένα κλίμα ομαδικής εργασίας και ανταλλαγής ιδεών, μια μικρογραφία επιστημονικής κοινότητας που επιδιώκει την επίλυση ενός προβλήματος. Οι μαθητές της τάξης χωρίζονται σε μικρές ομάδες 3-4 ατόμων (π.χ., ανά δύο θρανία) και στη συνέχεια κάθε ομάδα προσπαθεί να διαπιστώσει πρώτα που οφείλεται το παράδοξο και αν είναι δυνατό να το εξηγήσει με βάση τις γνώσεις που έχουν οι μαθητές από το Γυμνάσιο.

1ο Παράδειγμα



Στην πρώτη από τις διπλανές εικόνες παρατηρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, η επιφάνεια του οποίου έχει διαιρεθεί σε τέσσερα άλλα σχήματα: δύο μικρότερα ορθογώνια τρίγωνα και δύο επιφάνειες σχήματος L, οι οποίες αποτελούν μαζί ένα ορθογώνιο.



Αν μετατοπίσουμε τις τέσσερις αυτές επιφάνειες που σχηματίζουν το μεγάλο ορθογώνιο τρίγωνο και τις τοποθετήσουμε όπως στη δεύτερη εικόνα, τότε παρατηρούμε ότι, δημιουργείται το ίδιο ακριβώς ορθογώνιο τρίγωνο, αλλά με μια “τρύπα” στην επιφάνεια του.

Δηλαδή εμφανίζεται το ίδιο ορθογώνιο τρίγωνο να έχει δύο διαφορετικά εμβαδά!

Πώς μπορεί να εξηγηθεί αυτό το παράδοξο φαινόμενο;

Αν επιχειρήσουμε μια λογική εξήγηση του φαινομένου, θα διαπιστώσουμε ότι, δεν υπάρχει τίποτε το παράδοξο και ότι όλα οφείλονται σε μια ψευδαίσθηση που δημιουργεί το σχήμα. Οι τέσσερις μικρότερες επιφάνειες έχουν φυσικά και στις δύο περιπτώσεις το ίδιο εμβαδό, αλλά σε καμμιά από αυτές δεν σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο!

Συγκεκριμένα, το μεγαλύτερο από τα δύο μικρά ορθογώνια τρίγωνα έχει εμβαδό $\frac{8\cdot 3}{2} = 12$, το μικρότερο έχει εμβαδό $\frac{5\cdot 2}{2} = 5$, ενώ το ορθογώνιο που σχηματίζουν οι δύο επιφάνειες σχήματος L έχει στην πρώτη περίπτωση εμβαδό $5\cdot 3 = 15$ και στη δεύτερη περίπτωση (μαζί με την "τρύπα") εμβαδό $8\cdot 2 = 16$. Άρα το συνολικό εμβαδό είναι στην πρώτη περίπτωση $E_1 = 32$ και στη δεύτερη περίπτωση $E_2 = 33$. Από την άλλη μεριά, το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές 13 και 5, το οποίο υποτίθεται ότι σχηματίζουν, είναι $E = \frac{13\cdot 5}{2} = 32{,}5$.

Αν αντί για τους τύπους των εμβαδών χρησιμοποιήσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα, διαπιστώνουμε ότι το μεγαλύτερο από τα δύο μικρά ορθογώνια τρίγωνα έχει υποτείνουσα

$$\sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73} \simeq 8{,}544$$

και το μικρότερο

$$\sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} \simeq 5{,}385,$$

ενώ το ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 13 και 5 έχει υποτείνουσα

$$\sqrt{13^2 + 5^2} = \sqrt{193} \simeq 13{,}892.$$

Παρατηρούμε ότι είναι

$$8{,}544 + 5{,}385 = 13{,}929 > 13{,}892,$$

δηλαδή οι υποτείνουσες των δύο μικρών ορθογωνίων τριγώνων δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία με την υποτείνουσα του μεγάλου τριγώνου, όπως παραπλανητικά φαίνεται στα προηγούμενα σχήματα (επειδή η διαφορά τους είναι ανεπαίσθητη). ▲

Στο προηγούμενο παράδειγμα η χρησιμοποίηση **άμεσων** μεθόδων ελέγχου, όπως είναι η μέτρηση των διαστάσεων του σχήματος με τη βοήθεια του τετραγωνισμένου χαρτιού ή γεωμετρικών οργάνων δεν μας διαφωτίζει, επειδή οι ατέλειες του σχήματος είναι πολύ μικρές και δεν γίνονται αντιληπτές μέσα στα όρια ακρίβειας αυτών των μεθόδων. Αντίθετα, η χρήση **έμμεσων** μεθόδων (όπως οι γενικοί τύποι εμβαδού ή το Πυθαγόρειο θεώρημα) που είναι αποτελέσματα της θεωρητικής μελέτης των σχημάτων, δηλαδή προκύπτουν με αυστηρά λογικές διαδικασίες από ορισμένες βασικές αρχές (τα αξιώματα), μας επιτρέπουν να διαπιστώσουμε αμέσως και χωρίς αμφιβολία την ερμηνεία αυτού του "παράδοξου".

Το δεύτερο παράδειγμα σχετικής δραστηριότητας προτείνουμε να χρησιμοποιηθεί μετά τη διδασκαλία των κριτηρίων ισότητας των τριγώνων. Ο στόχος είναι να αντιληφθούν οι μαθητές ότι, η ελλιπής εξέταση ενός σχήματος μπορεί να οδηγήσει ακόμη και σε "αποδείξεις" προτάσεων που δεν ισχύουν γενικά.

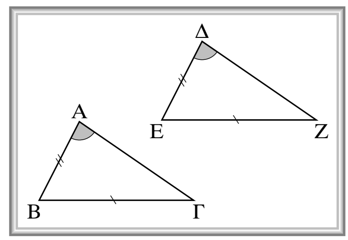
2ο Παράδειγμα

Σύμφωνα με το πρώτο κριτήριο ισότητας των τριγώνων, αν δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με δύο πλευρές ενός άλλου τριγώνου και οι περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες είναι ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Το ερώτημα που προβάλλει φυσιολογικά είναι το εξής:

Τι συμβαίνει όταν οι ίσες γωνίες δεν είναι περιεχόμενες, αλλά βρίσκονται απέναντι από το ένα ζεύγος των ίσων πλευρών;

Αυτό το ερώτημα μπορούμε να το θέσουμε στην τάξη και να ξεκινήσουμε ταυτόχρονα μια διαδικασία απόδειξης, παρόμοια με αυτήν που χρησιμοποιήθηκε κατά την απόδειξη του πρώτου κριτηρίου ισότητας των τριγώνων.



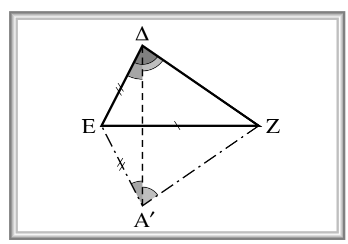
Θεωρούμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ που έχουν

$$AB = \Delta E, \quad B\Gamma = EZ \quad \text{και} \quad \hat{A} = \hat{\Delta}.$$

Μετατοπίζουμε το $AB\Gamma$ και το τοποθετούμε έτσι ώστε, η πλευρά $B\Gamma$ να συμπέσει με την EZ και η κορυφή A να βρεθεί στην θέση A'. Τότε θα είναι

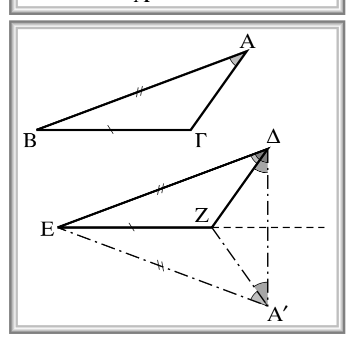
$$A'E = AB = \Delta E,$$

δηλαδή το τρίγωνο $E\Delta A'$ θα είναι ισοσκελές και άρα $E\hat{\Delta}A' = E\hat{A}'\Delta$. Επειδή από υπόθεση είναι $\hat{A} = \hat{\Delta}$, συμπεραίνουμε ότι θα είναι και $Z\hat{\Delta}A' = Z\hat{A}'\Delta$, δηλαδή το τρίγωνο $Z\Delta A'$ είναι επίσης ισοσκελές. Άρα $Z\Delta = ZA'$ και επομένως τα τρίγωνα $A'EZ$ και ΔEZ είναι ίσα, επειδή έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες. Άρα και $AB\Gamma = \Delta EZ$.



Είναι φανερό ότι την ίδια ακριβώς απόδειξη μπορούμε να επαναλάβουμε και στην περίπτωση που η ευθεία $\Delta A'$ τέμνει το τμήμα EZ σε εξωτερικό του σημείο (βλ. το διπλανό σχήμα).

Το ερώτημα που πρέπει να θέσει τώρα ο διδάσκων είναι το εξής:

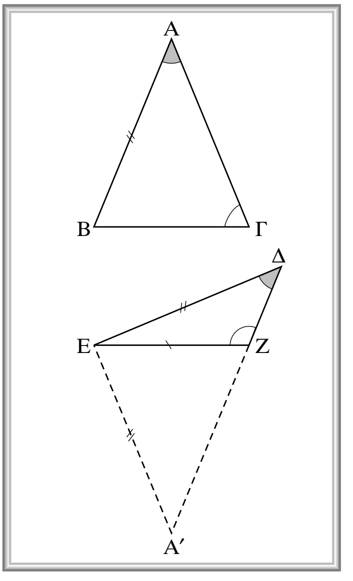


Μπορούμε, σύμφωνα με τα παραπάνω, να ισχυριστούμε ότι έχουμε εξαντλήσει όλες τις δυνατές περιπτώσεις του σχήματος και ότι έχουμε αποδείξει το επόμενο, νέο κριτήριο ισότητας τριγώνων;

Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες μία προς μία δύο πλευρές καθώς και τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από το ένα ζεύγος των ίσων πλευρών, τότε τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα.

Από διδακτική άποψη, παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον ο τρόπος με τον οποίο θα αντιδράσουν οι μαθητές σ' ένα τέτοιο ερώτημα.

Ο επιθυμητός στόχος είναι βέβαια να ανακαλύψουν μόνοι τους ότι, υπάρχει και μια τρίτη περίπτωση του σχήματος, στην οποία δεν εφαρμόζονται οι προηγούμενοι συλλογισμοί. Με άλλα λόγια, να καταρρίψουν τον προηγούμενο ισχυρισμό με την επινόηση ενός **αντιπαραδείγματος**.



Μια τέτοια περίπτωση εμφανίζεται στο διπλανό σχήμα, στο οποίο τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν πάλι

$$\mathrm{AB}=\Delta\mathrm{E},\ \mathrm{B}\Gamma=\mathrm{EZ}\ \text{ και }\ \hat{\mathrm{A}}=\hat{\Delta},$$

αλλά αν εφαρμόσουμε τώρα τους ίδιους συλλογισμούς παρατηρούμε ότι η ευθεία ΔΑ′ διέρχεται από το άκρο Ζ του τμήματος ΕΖ και είναι $\mathrm{Z}\Delta \neq \mathrm{ZA}'$. Όπως είναι φανερό, αυτό συμβαίνει, επειδή στη συγκεκριμένη περίπτωση οι γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{Z}}$ που βρίσκονται απέναντι από το άλλο ζεύγος ίσων πλευρών των δύο τριγώνων είναι παραπληρωματικές. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ δεν είναι ίσα μεταξύ τους, άρα το προηγούμενο κριτήριο δεν ισχύει γενικά.

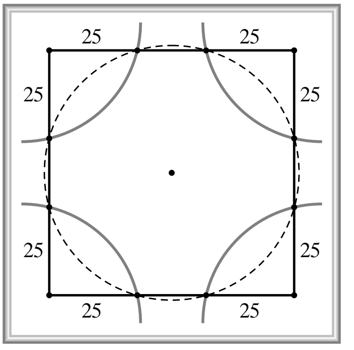
Παίρνοντας, λοιπόν, υπόψη όλα τα παραπάνω, μπορούμε τώρα να ισχυριστούμε ότι το προηγούμενο “κριτήριο ισότητας” δεν ισχύει γενικά, αλλά μόνο με μια βασική προϋπόθεση, η οποία μας οδηγεί στην επόμενη διατύπωση:

Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες μία προς μία δύο πλευρές καθώς και τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από το ένα ζεύγος των ίσων πλευρών, τότε τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα με την προϋπόθεση ότι οι γωνίες που βρίσκονται από το άλλο ζεύγος των ίσων πλευρών δεν είναι παραπληρωματικές (εκτός βέβαια της περίπτωσης που είναι και οι δύο ορθές).

2. Η οπτική αναγνώριση ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων

Στην προηγούμενη ενότητα δόθηκαν παραδείγματα λαθεμένων συμπερασμάτων, στα οποία είναι δυνατόν να μας οδηγήσει η απλοϊκή ή ελλιπής παρατήρηση των σχημάτων. Αυτό δεν πρέπει βέβαια να μας οδηγήσει στην υποτίμηση της παρατήρησης ως βασικής **μεθόδου ανακάλυψης** των ιδιοτήτων των σχημάτων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα για την αξία της παρατήρησης αποτελεί το ερώτημα (δ) του προβλήματος που τέθηκε στις προαγωγικές εξετάσεις Γεωμετρίας της Β′ Λυκείου τον Ιούνιο του 1999.

Στις τέσσερις κορυφές του τετραγώνου του διπλανού σχήματος (πλευράς $40\sqrt{2}$ m) είναι τοποθετημένοι περιστρεφόμενοι μηχανισμοί ποτίσματος που έχουν τη δυνατότητα να ποτίζουν κυκλικές περιοχές ακτίνας 25 m. Στο κέντρο του τετραγώνου τοποθετείται ένας πέμπτος μηχανισμός. Ποια είναι η ακτίνα της μικρότερης κυκλικής περιοχής που πρέπει να ποτίζει ο κεντρικός μηχανισμός έτσι, ώστε καμιά περιοχή του κήπου να μη μένει απότιστη, όταν λειτουργούν και οι πέντε μηχανισμοί ταυτόχρονα;



Είναι χαρακτηριστικό ότι, πολλοί μαθητές, παρασυρόμενοι εν μέρει από τα πρόχειρα σχήματα που είχαν σχεδιάσει, αλλά κυρίως από έλλειψη παρατηρητικότητας, θεώρησαν ως λύση του προβλήματος τον εγγεγραμμένο κύκλο του τετραγώνου και όχι τον κύκλο που διέρχεται από τα σημεία, στα οποία τα τεταρτοκύκλια τέμνουν τις πλευρές του τετραγώνου.

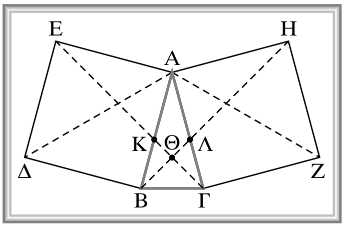
Σχόλιο: Λεπτομερής μελέτη του συγκεκριμένου προβλήματος γίνεται στο 11ο κεφάλαιο του βιβλίου.

Με τη δραστηριότητα που προτείνουμε στη συνέχεια επιχειρούμε να δώσουμε μια συγκεκριμένη μορφή στη μέθοδο παρατήρησης των σχημάτων και ένα χαρακτήρα πρότασης για τη διδασκαλία επίλυσης γεωμετρικών ασκήσεων και προβλημάτων.

Η συστηματική και μεθοδευμένη εξοικείωση των μαθητών με την οπτική αναγνώριση ιδιοτήτων των σχημάτων διευκολύνει σημαντικά τη μετάβασή τους από το εποπτικό - περιγραφικό στάδιο γεωμετρικής σκέψης (1ο και 2ο επίπεδο van Hiele) στο αφηρημένο - παραγωγικό στάδιο (3ο και 4ο επίπεδο van Hiele). Οι ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών τονίζουν την παιδαγωγική αξία αυτής της δραστηριότητας και προωθούν προγράμματα βελτίωσης της ικανότητας των μαθητών.

Θα δώσουμε ένα σχετικό παράδειγμα, χρησιμοποιώντας ως αφετηρία ένα πολύ γνωστό σχήμα (ειδική περίπτωση του σχήματος Vecten), το οποίο παράγει μια σειρά επίσης γνωστών ασκήσεων:

Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, με $ΑΒ = ΑΓ$ και τα τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΖΗ, τα οποία δεν έχουν άλλα κοινά σημεία με το ΑΒΓ εκτός από τα σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ. Με βάση το διπλανό σχήμα ζητάμε από τους μαθητές να εντοπίσουν και να διατυπώσουν όλες τις ιδιότητες (κυρίως ισότητες) των επιμέρους σχημάτων που υπάρχουν ή μπορούν να δημιουργηθούν στο σχήμα αυτό (ευθύγραμμα τμήματα, γωνίες, τρίγωνα, τετράπλευρα).



Δίνουμε έναν ενδεικτικό κατάλογο τέτοιων ιδιοτήτων:

• Ισότητα τριγώνων

1) Τα τρίγωνα ΑΕΓ, ΑΗΒ είναι ίσα
2) Τα τρίγωνα ΑΕΚ, ΑΗΛ είναι ίσα
3) Τα τρίγωνα ΒΚΘ, ΓΛΘ είναι ίσα

• Ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων

4) Τα τμήματα ΕΓ και ΒΗ είναι ίσα
5) Τα τμήματα ΕΚ και ΗΛ είναι ίσα

• Σχέσεις γωνιών

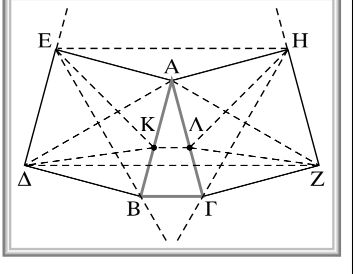
6) Οι γωνίες $\text{Ε}\hat{\text{Α}}\text{Η}$, $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Γ}$ είναι παραπληρωματικές
7) Οι γωνίες $\text{Ε}\hat{\text{Α}}\text{Η}$, $\Delta\hat{\text{Α}}\text{Ζ}$ έχουν άθροισμα 270^o
8) Οι γωνίες $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\Theta$ και $\text{Α}\hat{\text{Η}}\Theta$ είναι ίσες
9) Οι γωνίες $\text{Α}\hat{\text{Κ}}\Theta$ και $\text{Α}\hat{\Lambda}\Theta$ είναι ίσες

• Ισοσκελή τρίγωνα

10) Το τρίγωνο ΔΑΖ είναι ισοσκελές
11) Το τρίγωνο ΕΘΗ είναι ισοσκελές
12) Το τρίγωνο ΒΘΓ είναι ισοσκελές
13) Τα τμήματα ΕΒ, ΗΓ αν προεκταθούν σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο
14) Τα τμήματα ΔΕ, ΖΗ αν προεκταθούν σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο
15) Τα τμήματα ΔΚ, ΖΛ αν προεκταθούν σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο

• Ισοσκελή τραπέζια

16) Το ΒΚΛΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο
17) Το ΔΒΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο
18) Το ΔΚΛΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο
19) Το ΕΒΓΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο
20) Το ΚΛΗΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο



• Ισότητα τετραπλεύρων

21) Τα τετράπλευρα ΕΔΒΚ, ΓΛΗΖ είναι ίσα

Σχόλιο: Λεπτομερής μελέτη του σχήματος Vecten γίνεται στα κεφάλαια 5, 6, 9 και 10 του βιβλίου.

Οργανώνοντας μια δραστηριότητα οπτικής αναγνώρισης ιδιοτήτων των σχημάτων, στην αρχή δεν ζητούμε από τους μαθητές να αποδείξουν κάτι, αλλά να αναγνωρίσουν τα πιθανά ίσα ευθύγραμμα τμήματα, τις ίσες γωνίες, τα ίσα τρίγωνα, τα ίσα τετράπλευρα κ.λ.π. Οι μαθητές αρχίζουν να μελετούν το σχήμα που δόθηκε και είναι βέβαια ελεύθεροι να προσθέσουν σ' αυτό όποιες γραμμές θέλουν, προκειμένου να ανακαλύψουν μια νέα ιδιότητα. Η δραστηριότητα αυτή είναι εξαιρετικά επωφελής για την εξοικείωση με την ιδέα της "**βοηθητικής γραμμής**" που παίζει βασικό ρόλο στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων.

Αφού ολοκληρωθεί αυτή η φάση, οι εκπρόσωποι των ομάδων παραδίδουν στον καθηγητή ένα χαρτί με τις ιδιότητες που έχουν προσδιορίσει και τις παρουσιάζουν στον πίνακα. Είναι φανερό ότι, όσο λιγότερο προφανής είναι μια ιδιότητα, τόσο περισσότερο τίθεται το ζήτημα της αιτιολόγησης. Ο διδάσκων μπορεί να χρησιμοποιήσει αυτό το γεγονός, για να προκαλέσει σχετικές διαμάχες και συζητήσεις μεταξύ των μαθητών και να προωθήσει έτσι το βασικό διδακτικό στόχο, που δεν είναι άλλος από την ανάδειξη της έννοιας της απόδειξης. Φυσικά με τις ασύνδετες γεωμετρικές γνώσεις των μαθητών από το Γυμνάσιο δεν είναι είναι δυνατό να δοθούν πλήρεις αποδείξεις όλων των ιδιοτήτων που μπορούν να εντοπιστούν στο προηγούμενο σχήμα. Το γεγονός αυτό κάνει φανερή την ανάγκη συστηματοποίησης των γεωμετρικών γνώσεων και εισάγει τους μαθητές στο νόημα και στο αντικείμενο της Θεωρητικής Γεωμετρίας.

ΘΕΜΑΤΑ ΣΥΝΘΕΤΙΚΩΝ - ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΩΝ ΕΡΓΑΣΙΩΝ

1. Μια καταγραφή πρακτικών ζητημάτων που απαιτούν τη χρήση γεωμετρικών εννοιών και μεθόδων.

Σε μια τέτοια εργασία οι μαθητές μπορούν, για παράδειγμα, να καταγράψουν, να απεικονίσουν και να κάνουν μια σύντομη παρουσίαση θεμάτων που σχετίζονται με τα εξής ζητήματα:

- Μέτρηση εμβαδών και όγκων
  (π.χ. προσεγγιστικοί τύποι για τη μέτρηση εμβαδών και όγκων, όπως ο κανόνας εμβαδομέτρησης μιας τετράπλευρης έκτασης από τον Αιγυπτιακό πάπυρο του Rhind, η μέθοδος ογκομέτρησης βυτίων του Kepler κλπ.).
- Η χρήση των τροχών
  (π.χ. ο ρόλος του αριθμού π για την κατασκευή ενός τροχού με δεδομένη διάμετρο, η λειτουργία του χιλιομετρητή (κοντέρ) των αυτοκινήτων).
- Αρχιτεκτονική - Διακόσμηση
  (π.χ. κατασκευή πυραμίδων και γεφυρών, η χρησιμοποίηση της χρυσής τομής στις καλλιτεχνικές κατασκευές, τα είδη πολυγώνων πλακιδίων που χρησιμοποιούνται για την πλακόστρωση ενός δαπέδου).

2. Το κοινωνικό - πολιτιστικό περιβάλλον της Αρχαίας Ελλάδας και η ανάπτυξη της Θεωρητικής Γεωμετρίας

Σε μια τέτοια εργασία οι μαθητές μπορούν να συγκεντρώσουν στοιχεία και να αναπτύξουν με συντομία τα εξής ζητήματα:

- Η κοινωνική και πολιτική οργάνωση των ανατολικών λαών (π.χ. Αιγύπτιοι, Βαβυλώνιοι) και οι μαθηματικές τους γνώσεις.
- Η κοινωνική και πολιτική οργάνωση των Αρχαίων Ελλήνων και η ανάπτυξη της Φιλοσοφίας και των Μαθηματικών.

Στη συνέχεια μπορούν να κάνουν συγκρίσεις και να υποστηρίξουν με επιχειρήματα τους λόγους για τους οποίους η Γεωμετρία αναπτύχθηκε ως αποδεικτική επιστήμη στην Αρχαία Ελλάδα.

Σχόλιο: Συνθετική - δημιουργική εργασία με θέμα "Τα Μαθηματικά στην Αρχαία Ελλάδα" προτείνεται επίσης στο πλαίσιο του μαθήματος της Ιστορίας [βλ. σχετικά: Αξιολόγηση των μαθητών της Α΄ Λυκείου στην Ιστορία. Η Πολιτισμική Προσφορά του Ελληνισμού. Από την Αρχαιότητα ως την Αναγέννηση, σσ.130-131. Αθήνα: Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας (1998)]. Όπως γίνεται φανερό, το συγκεκριμένο ζήτημα παρέχει μια πρώτης τάξεως ευκαιρία για συνεργασία μαθηματικών και φιλολόγων στην καθοδήγηση συνθετικών - δημιουργικών εργασιών. Άλλα παραδείγματα για διεπιστημονική συνεργασία αυτού του είδους στο σχολείο θα δώσουμε σε επόμενα κεφάλαια του βιβλίου.

3. Επιστήμονες, προβλήματα και ιδρύματα που συνέβαλαν στη δημιουργία και εξέλιξη της Θεωρητικής Γεωμετρίας κατά την αρχαιότητα.

Στην εργασία αυτή οι μαθητές μπορούν να συγκεντρώσουν και να παρουσιάσουν στοιχεία για τα εξής ζητήματα:

- Οι πρώτοι φιλόσοφοι - μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδας και το έργο τους (Θαλής, Πυθαγόρας).
- Μαθηματικά προβλήματα που συνέβαλαν στην εξέλιξη της Θεωρητικής Γεωμετρίας. (Η ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών, το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, της τριχοτόμησης τυχαίας γωνίας και του διπλασιασμού του κύβου, η μελέτη των κωνικών τομών).
- Η έρευνα των Μαθηματικών στην Ακαδημία της Αθήνας (Ο Πλάτων και οι μαθητές του: Μέναιχμος, Εύδοξος, Θεαίτητος κ.α.).
- Τα Μαθηματικά και η Βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας (Ευκλείδης, Απολλώνιος, Αρχιμήδης, Ερατοσθένης).

4. Η έννοια της απόδειξης στα Μαθηματικά

Στην εργασία αυτή, που έχει έναν επιστημολογικό και μεθοδολογικό προσανατολισμό, οι μαθητές μπορούν να εξετάσουν τα παρακάτω ζητήματα:

- Το πείραμα και η επαγωγική μέθοδος των Φυσικών επιστημών.
- Η ευρετική διαδικασία και η παραγωγική μέθοδος των Μαθηματικών.
- Σύγκριση των δύο μεθόδων
- Παραδείγματα "αποδείξεων" και αποδείξεων στα Μαθηματικά (π.χ. η "απόδειξη" του κανόνα "μείον επί μείον κάνει συν" στο βιβλίο Μαθηματικών της Β′ Γυμνασίου και η απόδειξή του στο βιβλίο Άλγεβρας της Α′ Λυκείου)
- Μέθοδοι απόδειξης στα Μαθηματικά

Για την προετοιμασία και καθοδήγηση των παραπάνω συνθετικών - δημιουργικών εργασιών συστήνουμε την βιβλιογραφία που ακολουθεί.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Αρχαία Ελληνική Τεχνολογία. Θεσσαλονίκη: Εταιρεία Μελέτης Αρχαίας Ελληνικής Τεχνολογίας (1997)

Ασημομύτης, Β. κ.α. *Η πολιτισμική προσφορά του ελληνισμού από την Αρχαιότητα ως την Αναγέννηση.* Α΄Ενιαίου Λυκείου. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β. (1998)

Ιστορία του Ελληνικού Έθνους, τόμος Γ_2. Αθήναι: Εκδοτική Αθηνών (1972)

Ιστορία του Ελληνικού Έθνους, τόμος Ε′. Αθήναι: Εκδοτική Αθηνών (1974)

Λάζος, Χ. *Μηχανική και Τεχνολογία στην Αρχαία Ελλάδα.* Αθήνα: Αίολος (1993)

Λάζος, Χ. *Ναυτική Τεχνολογία στην Αρχαία Ελλάδα.* Αθήνα: Αίολος (1996)

Λάζος, Χ. *Τηλεπικοινωνίες των Αρχαίων Ελλήνων*. Αθήνα: Αίολος (1997)

Μαρουσάκης, Π. Κάλυψη επιπέδου με κανονικά πολύγωνα. *Ευκλείδης* τόμος ΣΤ (6), σσ.10-11 (1973)

Σπανδάγος, Β. κ.α. *Οι Μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδας.* Αθήνα: Αίθρα (1994)

Σπανδάγος, Β. *Τα Μαθηματικά των Αρχαίων Ελλήνων*. Αθήναι: Αίθρα (2000)

Τσιμπουράκης, Δ. *Η Γεωμετρία και οι εργάτες της στην Αρχαία Ελλάδα.* Αθήνα (1985)

Boyer, C. & Merzbach, U. *Η Ιστορία των Μαθηματικών* (μετάφραση Β. Κουσουλάκου) Αθήνα: Εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικού (1997)

Davis, P.J. & Hersh, R. *Η Μαθηματική Εμπειρία* (μετάφραση Γ. Αναστασιάδης). Αθήνα: Τροχαλία (χ.χ.)

Eves, H. *Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών. Έως το 1650* (μετάφραση Μ. Κωνσταντινίδης & Ν. Λιλής). Αθήνα: Τροχαλία (1989)

Kline, M. *Τα Μαθηματικά στο Δυτικό Πολιτισμό*. Τόμος Α′ (μετάφραση Σ. Μαρκέτος). Εκδόσεις Κώδικας (χ.χ.)

Loria, G. *Ιστορία των Μαθηματικών.* Τόμος 1ος (μετάφραση Μ. Κωβαίος). Αθήναι: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία - Εκδόσεις Παπαζήση (1971)

Struik, D. *Συνοπτική ιστορία των Μαθηματικών* (μετάφραση Α. Φερεντίνου-Νικολακοπούλου). Αθήνα: Ι. Ζαχαρόπουλος (1982)

2 Κεφάλαιο

Τα βασικά γεωμετρικά σχήματα

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΥΛΗΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Από το δεύτερο κεφάλαιο του βιβλίου αρχίζει, σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα, η συστηματική ανάπτυξη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με τους ορισμούς των βασικών εννοιών και τις αποδείξεις ορισμένων απλών ιδιοτήτων τους. Οι βασικές έννοιες με τις οποίες θα ασχοληθούμε στο κεφάλαιο αυτό είναι:

- Το ευθύγραμμο τμήμα
- Η γωνία
- Ο κύκλος
- Το πολύγωνο

Με αυτές συνδέεται ένα μεγάλο πλήθος άλλων, παράγωγων εννοιών, ενώ διατυπώνονται οι πρώτες αποδείξεις. Συγκεκριμένα στο σχολικό βιβλίο αποδεικνύονται οι εξής προτάσεις (θεωρήματα ή πορίσματα):

- Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.
- Δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους σχηματίζουν 4 ορθές γωνίες.
- Οι διχοτόμοι δύο κατακορυφήν γωνιών είναι αντικείμενες ημιευθείες.
- Δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες και αντιστρόφως.
- Οι διχοτόμοι δύο εφεξής παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.
- Σε δοθέντα κύκλο ίσες επίκεντρες γωνίες βαίνουν σε ίσα τόξα και αντιστρόφως.
- Σε ίσους κύκλους, ίσες επίκεντρες γωνίες βαίνουν σε ίσα τόξα.
- Κάθε τόξο έχει ένα μόνο μέσο.

Επίσης λύνονται τρία προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών:

- Κατασκευή ευθύγραμμου τμήματος ίσο με δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα.
- Κατασκευή γωνίας ίσης προς δοθείσα γωνία.
- Κατασκευή τόξου ίσου προς δοθέν τόξο.

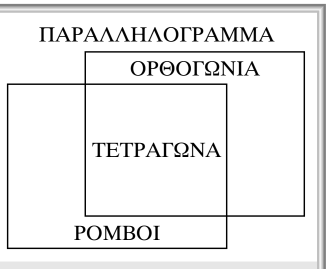
Τέλος, ζητείται ως δραστηριότητα η ανακάλυψη και απόδειξη του τύπου που παρέχει το πλήθος των διαγωνίων ενός κυρτού πολυγώνου.

Το βασικό πρόβλημα της διδασκαλίας σ' αυτό το κεφάλαιο είναι η κατανόηση των ορισμών και της ανάγκης των αποδείξεων, καθώς και η εξοικείωση των μαθητών με ορισμένες αποδεικτικές τεχνικές που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια. Τα ζητήματα αυτά έχουν μεγάλη σημασία για την κατανόηση από τους μαθητές των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και για το λόγο αυτό προτείνεται η διδασκαλία τους μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων. Πριν παρουσιάσουμε παραδείγματα τέτοιων δραστηριοτήτων, αναπτύσσουμε ένα θεωρητικό ζήτημα που αναδεικνύει τη μεγάλη σημασία της ορθής διατύπωσης των μαθηματικών ορισμών.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ

Μια πρώτη ταξινόμηση των τετραπλεύρων

Ένα ζήτημα πρωταρχικής σημασίας για τη διδασκαλία και μάθηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η κατανόηση του ρόλου των **ορισμών** των γεωμετρικών σχημάτων. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην Εισαγωγή, οι μαθητές δυσκολεύονται ιδιαίτερα να κατανοήσουν τους ορισμούς που χρησιμοποιούμε στο πλαίσιο μιας ιεραρχικής ταξινόμησης (π.χ. παραλληλόγραμμο → ορθογώνιο → ρόμβος → τετράγωνο). Σε μια τέτοια ταξινόμηση δημιουργείται μια σχέση εγκλεισμού ανάμεσα σε διάφορα σύνολα γεωμετρικών σχημάτων με ορισμούς που χρησιμοποιούν όλο και περισσότερα χαρακτηριστικά γνωρίσματα των σχημάτων, καθώς μεταβαίνουμε από ένα ευρύτερο σύνολο σε ένα υποσύνολό του.



Ιεραρχική Ταξινόμηση

Η δυσκολία κατανόησης συνδέεται κυρίως με το γεγονός ότι στο πλαίσιο μιας **ιεραρχικής ταξινόμησης** θα πρέπει να χρησιμοποιείται σε κάθε ορισμό ένας ελάχιστος αριθμός χαρακτηριστικών γνωρισμάτων του σχήματος. Π.χ. ορίζουμε το παραλληλόγραμμο ως ένα τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, επειδή μας αρκεί η παραλληλία των απέναντι πλευρών για να αποδείξουμε όλες τις άλλες ιδιότητες του σχήματος, αλλά και επειδή η προσθήκη στον ορισμό επιπλέον χαρακτηριστικών μπορεί να οδηγήσει σε μια διαφορετική ταξινόμηση.

Αν π.χ. ορίσουμε ως παραλληλόγραμμο το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και όχι όλες τις γωνίες ή τις πλευρές του ίσες, τότε δεν διαπράττουμε κάποιο μαθηματικό λάθος, απλώς οδηγούμαστε σε μια διαφορετική ταξινόμηση, μη ιεραρχική, που διαχωρίζει τα παραλληλόγραμμα από τα ορθογώνια, τους ρόμβους και τα τετράγωνα (**διαχωριστική ταξινόμηση**). Στο 5ο κεφάλαιο του βιβλίου, στο οποίο θα μελετήσουμε λεπτομερέστερα την ταξινόμηση των παραλληλογράμμων θα εξετάσουμε και τους λόγους που προτιμούμε την ιεραρχική από την διαχωριστική ταξινόμηση.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟ-ΓΡΑΜΜΑ	ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ
	ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ
	ΡΟΜΒΟΙ

Διαχωριστική Ταξινόμηση

Αντίθετα προς την απαίτηση χρησιμοποίησης του ελάχιστου αριθμού χαρακτηριστικών γνωρισμάτων, οι περισσότεροι μαθητές έχουν την τάση να ορίζουν ένα σχήμα με απαρίθμηση μη αναγκαίων χαρακτηριστικών (π.χ. παραλληλόγραμμο είναι ένα τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και ίσες). Από μαθηματική άποψη αυτός ο ορισμός δεν είναι λανθασμένος, είναι όμως αντιοικονομικός. Η τάση αυτή των μαθητών δεν είναι άσχετη με το πολύ συνηθισμένο φαινόμενο να σχεδιάζουν ως τυχαίο εκπρόσωπο ενός σχήματος μια ειδική περίπτωσή του (π.χ. σχεδιάζουν ως τυχαίο τρίγωνο ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ως τυχαίο τετράπλευρο ένα τετράγωνο). Το φαινόμενο αυτό, που έχει παρατηρηθεί επανειλημμένα στις έρευνες της Διδακτικής είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως "**φαινόμενο του προτύπου**".

Τα προηγούμενα κάνουν φανερό ότι ο διδάσκων θα πρέπει να δώσει ιδιαίτερη προσοχή κατά τη διδασκαλία διαδοχικών ορισμών που οδηγούν στην ταξινόμηση μιας κατηγορίας σχημάτων. Στο 2ο κεφάλαιο έχουμε μια τέτοια περίπτωση στον ορισμό των εννοιών της τεθλασμένης (πολυγωνικής) γραμμής και του πολυγώνου.

Σύμφωνα με τον ορισμό του σχολικού βιβλίου, πολύγωνο ονομάζεται μια απλή και κλειστή τεθλασμένη (πολυγωνική) γραμμή. Επίσης, τα πολύγωνα που εξετάζονται στο βιβλίο είναι κυρτά. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι από τα διάφορα είδη πολυγώνων το βιβλίο πραγματεύεται μόνο μια ειδική κατηγορία, αυτά που είναι συγχρόνως απλά και κυρτά. Το ερώτημα λοιπόν που τίθεται είναι το εξής: Με ποιο τρόπο μπορούμε να ταξινομήσουμε τα **μη απλά**, τα **απλά**, τα **μη κυρτά** και τα **κυρτά πολύγωνα;**

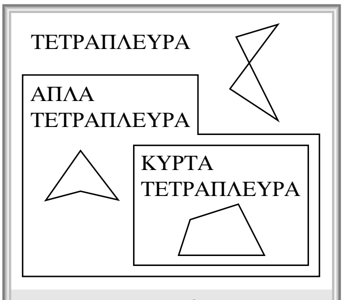
Για λόγους συντομίας και απλότητας θα εξετάσουμε το ζήτημα αυτό περιοριζόμενοι στα τετράπλευρα.

Μπορούμε να δημιουργήσουμε μια **ιεραρχική ταξινόμηση** δίνοντας τους εξής ορισμούς:

α) Ονομάζουμε τετράπλευρο μια κλειστή πολυγωνική γραμμή του επιπέδου με τέσσερις πλευρές.

β) Ονομάζουμε απλό τετράπλευρο ένα τετράπλευρο του οποίου οι πλευρές δεν τέμνονται σε κάποιο εσωτερικό τους σημείο.

γ) Ονομάζουμε κυρτό τετράπλευρο ένα απλό τετράπλευρο στο οποίο κάθε ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο οποιαδήποτε σημεία του ανήκει ολόκληρο στο αντίστοιχο χωρίο.



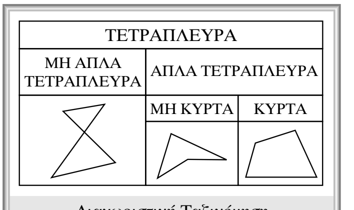
Ιεραρχική Ταξινόμηση

Αυτή η ταξινόμηση αποτελεί τη βάση για την ταξινόμηση των παραλληλογράμμων και των τραπεζίων μέσα στο σύνολο των κυρτών τετραπλεύρων, την οποία θα μελετήσουμε στο 5ο κεφάλαιο του βιβλίου.

Μπορούμε επίσης να δημιουργήσουμε μια **διαχωριστική ταξινόμηση** δίνοντας και τους εξής ορισμούς:

δ) Ονομάζουμε μη απλό ένα τετράπλευρο στο οποίο δύο πλευρές τέμνονται σε κάποιο εσωτερικό τους σημείο.

ε) Ονομάζουμε μη κυρτό ένα τετράπλευρο στο οποίο υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο σημεία του και δεν ανήκει ολόκληρο στο αντίστοιχο χωρίο.



Διαχωριστική Ταξινόμηση

Στα επόμενα κεφάλαια θα εξετάσουμε, κυρίως υπό μορφή ασκήσεων, ορισμένες ενδιαφέρουσες ιδιότητες των μη απλών ή μη κυρτών τετραπλεύρων που αναφέρονται στις γωνίες και στις διαγώνιές τους.

ΘΕΜΑΤΑ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

1. Η αναγκαιότητα και ο τρόπος διατύπωσης του ορισμού μιας μαθηματικής έννοιας

Για να κατανοήσουν οι μαθητές την ανάγκη προσεκτικής επιλογής και διατύπωσης των στοιχείων που συνθέτουν έναν ορισμό, είναι χρήσιμο να ξεκινήσουμε με τη συζήτηση ενός μη μαθηματικού παραδείγματος. Επιλέγουμε ένα θέμα προς συζήτηση στην τάξη, το οποίο δημιουργεί την ανάγκη διευκρίνησης μιας βασικής, αλλά συγκεχυμένης ιδέας.

Μια τέτοια περίπτωση αποτελεί η έννοια “αργοπορημένος μαθητής”, η οποία συχνά δημιουργεί διαμάχες και συγκρούσεις ανάμεσα σε μαθητές, καθηγητές και διεύθυνση ενός σχολείου. Μαθητές που δεν έγιναν δεκτοί από έναν καθηγητή, επειδή άργησαν να προσέλθουν στο μάθημα, διαμαρτύρονται ότι χρεώνονται άδικα μια απουσία, με βασικό επιχείρημα ότι άλλοι καθηγητές σε αντίστοιχες περιπτώσεις τους δέχονται. Το πρόβλημα είναι πολύ γνωστό και δεν χρειάζεται να επεκταθούμε περισσότερο. Εκείνο που μας ενδιαφέρει εδώ είναι ότι, η ασυμφωνία στην αντιμετώπισή του και οι διαμάχες που προκαλεί υποδηλώνουν, μεταξύ άλλων, και την έλλειψη ενός κοινά αποδεκτού ορισμού αυτής της έννοιας. Έτσι, λοιπόν, μπορούν να τεθούν προς συζήτηση τα εξής ερωτήματα:

- Πότε ένας μαθητής θεωρείται αργοπορημένος;
- Είναι δυνατόν κάθε καθηγητής να χρησιμοποιεί διαφορετικά κριτήρια;
- Είναι δυνατόν να συμφωνήσουμε σε έναν κοινά αποδεκτό ορισμό;

Η συζήτηση πάνω σ’ αυτά τα ερωτήματα θα φέρει στην επιφάνεια ορισμένες έννοιες και προτάσεις που συνδέονται στενά με την έννοια του “αργοπορημένου μαθητή”, όπως π.χ.:

“Η διάρκεια του μαθήματος είναι 45 λεπτά”

“Η διάρκεια του διαλείμματος είναι 10 λεπτά”

“Ώρα έναρξης του μαθήματος”

“Ώρα προσέλευσης των μαθητών”

“Ώρα προσέλευσης του καθηγητή”

“Η παρακολούθηση των μαθημάτων είναι υποχρεωτική”

“Η διεξαγωγή του μαθήματος προϋποθέτει ομαλό κλίμα στην τάξη”

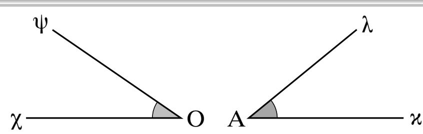
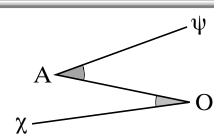
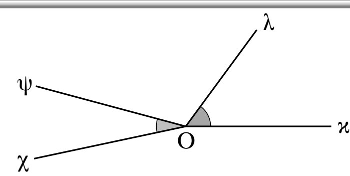
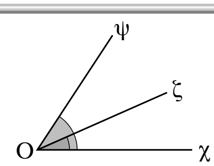
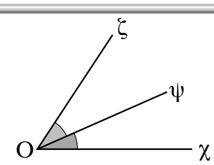
Προσπαθώντας, με βάση τα παραπάνω, να ορίσουμε την έννοια του “αργοπορημένου μαθητή”, μπορούμε να κάνουμε τις πρώτες νύξεις για μη οριζόμενες (πρωταρχικές) έννοιες και έννοιες που πρέπει να ορισθούν, για αναπόδεικτες προτάσεις (αξιώματα) και προτάσεις που χρειάζονται απόδειξη. Από τη στιγμή που θα συμφωνήσουμε σε κάποιον ορισμό (π.χ. “αργοπορημένος ονομάζεται ένας μαθητής που φτάνει στην τάξη όταν έχει κλείσει η πόρτα”), τότε θα δεχθούμε ότι κάποιες συνέπειες είναι αναπόφευκτες (π.χ., “όταν ένας μαθητής είναι αργοπορημένος, τότε δεν μπαίνει στην τάξη” ή “όταν ένας μαθητής είναι αργοπορημένος, τότε γίνεται δεκτός μόνο αν έχει σημείωμα από τον διευθυντή”). Πρέπει βέβαια να έχουμε υπόψη ότι, όλα τα παραπάνω αναφέρονται στις ανθρώπινες σχέσεις και την κοινωνική συμπεριφορά στο σχολείο και όχι στο απρόσωπο και αυστηρό πλαίσιο των θεωρητικών μαθηματικών εννοιών. Για το λόγο αυτό είναι αναγκαίο να συμπεριλάβουμε στη δραστηριότητα και ένα μαθηματικό παράδειγμα, όπως π.χ. το επόμενο:

Ορισμός των εφεξής γωνιών

Για να ορίσουμε την πρόσθεση των ευθυγράμμων τμημάτων χρησιμοποιήσαμε την έννοια “διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα” (τμήματα που έχουν ένα κοινό άκρο, αλλά δεν έχουν κοινό εσωτερικό σημείο). Για να ορίσουμε την πρόσθεση των γωνιών καταλαβαίνουμε ότι, χρειαζόμαστε μια αντίστοιχη έννοια που να προσδιορίζει τη “διαδοχικότητα” των γωνιών. Αφού γίνει, λοιπόν, φανερή η ανάγκη εισαγωγής της νέας έννοιας για την ανάπτυξη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, μπορούμε να θέσουμε ως δραστηριότητα στην τάξη το εξής ζήτημα:

Πώς πρέπει να ορίσουμε την έννοια “διαδοχικές γωνίες”;

Η δραστηριότητα μπορεί να εξελιχθεί σε μια απόπειρα “μεταφοράς” του αντίστοιχου ορισμού για τα ευθύγραμμα τμήματα ή σε μια ανάλυση των βασικών χαρακτηριστικών της νέας έννοιας, μέσα από την εξέταση των διαφόρων σχέσεων που υπάρχουν μεταξύ δύο γωνιών. Οι σχέσεις που μπορούν να καταγραφούν είναι οι εξής:

Γωνίες χωρίς κανένα κοινό στοιχείο.	
Γωνίες με κοινή πλευρά.	
Γωνίες με κοινή κορυφή.	
Γωνίες με κοινή κορυφή και κοινή πλευρά.	
Γωνίες με κοινή κορυφή, κοινή πλευρά και τις μη κοινές πλευρές εκατερωθεν της κοινής. (Εφεξής ή διαδοχικές γωνίες)	

Είναι προφανές ότι, η προηγούμενη διαδικασία ορισμού μιας μαθηματικής έννοιας είναι διδακτικά απαιτητική και χρονοβόρα. Βρίσκεται όμως ακριβώς στον αντίποδα της παραδοσιακής διδασκαλίας, που "βομβαρδίζει" τους μαθητές με ένα πλήθος εννοιών, χωρίς να δίνει καμμιά εξήγηση για την αναγκαιότητα εισαγωγής τους και την προέλευσή τους.

2. Πώς εργαζόμαστε για να λύσουμε ένα πρόβλημα και να κατασκευάσουμε μια απόδειξη

Η οργάνωση μιας δραστηριότητας στην τάξη προϋποθέτει την ύπαρξη ενός προβλήματος που θα δοθεί στους μαθητές χωρίς άμεσες διδακτικές προθέσεις. Δεν θα έχει δηλαδή στόχο την αξιολόγηση συγκεκριμένων γνώσεων ή την απόδειξη ενός ρητά διατυπωμένου θεωρήματος, αλλά την πρόκληση του ενδιαφέροντος των μαθητών και τη δημιουργία ενός κλίματος έρευνας και συνεργασίας για την ανακάλυψη της λύσης. Για το λόγο αυτό οι μαθητές ενθαρρύνονται, στο πλαίσιο μιας δραστηριότητας, να εργαστούν σε μικρές ομάδες, να δοκιμάσουν διάφορες μεθόδους επίλυσης του προβλήματος, να διατυπώσουν εικασίες και να υποστηρίξουν με επιχειρήματα τα αποτελέσματά τους. Η οργάνωση μιας δραστηριότητας στην τάξη έχει δύο βασικούς στόχους:

- Να φέρει σε επαφή τους μαθητές με την πραγματική διαδικασία παραγωγής της μαθηματικής γνώσης: την επίλυση προβλημάτων μέσα από τη διατύπωση εικασιών, την απόρριψη λαθεμένων επιλογών, την υιοθέτηση κοινά αποδεκτών λύσεων.
- Να δημιουργήσει ένα πρωτογενές υλικό, το οποίο θα αποτελέσει τη βάση για την εισαγωγή και "επισημοποίηση" από τον διδάσκοντα μιας νέας μαθηματικής έννοιας ή μεθόδου. Ποια θα είναι η νέα έννοια ή μέθοδος, εξαρτάται βέβαια από την επιλογή του προβλήματος που θα δοθεί στους μαθητές.

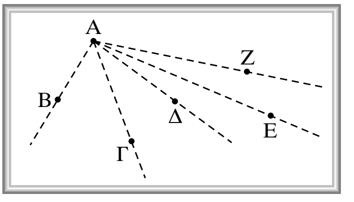
Είναι προφανές ότι, η οργάνωση και η διεξαγωγή μιας δραστηριότητας απαιτεί χρόνο προετοιμασίας καθώς και χρόνο διδασκαλίας. Για το λόγο αυτό οι δραστηριότητες που μπορούν να πραγματοποιηθούν στη διάρκεια μιας σχολικής χρονιάς **θα είναι περιορισμένες σε αριθμό και πρέπει να εξυπηρετούν βασικούς στόχους της διδασκαλίας.**

Στο δεύτερο κεφάλαιο του βιβλίου, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, βασικός στόχος της διδασκαλίας είναι η εξοικείωση των μαθητών με την έννοια της απόδειξης. Για το λόγο αυτό ενδείκνυται η οργάνωση μιας δραστηριότητας που θα οδηγήσει τους μαθητές στην ανακάλυψη μιας γενικής ιδιότητας ή σχέσης και στη διατύπωση αποδεικτικών συλλογισμών που θα κατοχυρώνουν την ισχύ της. Δίνουμε στη συνέχεια ένα παράδειγμα μιας τέτοιας δραστηριότητας.

Ως αφετηρία μπορεί να χρησιμοποιηθεί η επόμενη άσκηση:

> Θεωρούμε έξι σημεία του επιπέδου, τα οποία ανά τρία δεν είναι συνευθειακά. Πόσες ευθείες ορίζουν τα σημεία αυτά λαμβανόμενα ανά δύο;
>
> (Άσκηση 1 Α′ ομάδας των §§ 2.1. - 2.2. του σχολικού βιβλίου)

Από καθαρά μαθηματική σκοπιά, η λύση αυτού του προβλήματος δεν παρουσιάζει καμμιά ιδιαίτερη δυσκολία και μπορεί να προκύψει με τον ακόλουθο συνδυαστικό συλλογισμό:



Κάθε σημείο ορίζει, με τα πέντε υπόλοιπα, πέντε ευθείες. Άρα υπάρχουν 6.5 = 30 ευθείες. Επειδή, όμως, δύο σημεία ορίζουν μια μοναδική ευθεία, είναι προφανές ότι ο συνολικός αριθμός των διαφορετικών ευθειών που ορίζονται από τα έξι σημεία θα είναι $\frac{30}{2} = 15$.

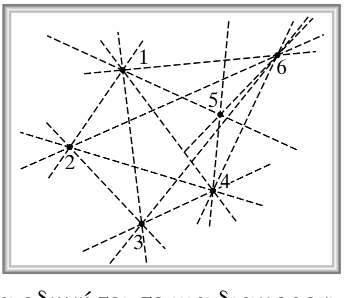
Ο ίδιος ακριβώς συλλογισμός εφαρμόζεται και στη γενική περίπτωση που έχουμε ν σε πλήθος σημεία, μη συνευθειακά ($\nu > 1$):

Κάθε σημείο ορίζει, με τα $\nu - 1$ υπόλοιπα, $\nu - 1$ ευθείες. Άρα υπάρχουν $\nu \cdot (\nu - 1)$ ευθείες. Επειδή, όμως, δύο σημεία ορίζουν μια μοναδική ευθεία, είναι προφανές ότι ο συνολικός αριθμός των διαφορετικών ευθειών που ορίζονται από τα ν σημεία θα είναι $\frac{\nu \cdot (\nu - 1)}{2}$.

Είναι βέβαια γνωστό ότι, οι μαθητές δεν αντιμετωπίζουν πάντοτε τα μαθηματικά προβλήματα με τον αναμενόμενο από το διδάσκοντα τρόπο, αλλά ακολουθούν διαφορετικούς δρόμους και φτάνουν πολλές φορές σε απροσδόκητες λύσεις. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, το πιθανότερο είναι ότι θα ξεκινήσουν με μια απαρίθμηση όλων των ευθειών, παρόμοια μ' αυτήν ακολουθεί:

Αν συμβολίσουμε με 1, 2, 3, 4, 5, 6 τα έξι σημεία και με το σύμβολο 12 την ευθεία που ορίζεται από τα σημεία 1 και 2, τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, οι διαφορετικές ευθείες που ορίζονται είναι οι εξής:

12, 13, 14, 15, 16
23, 24, 25, 26
34, 35, 36
45, 46
56



Με απλή απαρίθμηση βρίσκουμε ότι ορίζονται συνολικά 15 ευθείες.

Ο τρόπος αυτός μπορεί επίσης να γενικευτεί και να οδηγήσει σε μια διαφορετική λύση του προβλήματος. Αν έχουμε ν σημεία και τα συμβολίσουμε με τους αριθμούς 1, 2, 3, ..., ν-1, ν, τότε οι διαφορετικές ευθείες που δημιουργούνται είναι:

$$\begin{array}{r} 12, 13, 14, 15, ..., 1\nu \\ 23, 24, 25, ..., 2\nu \\ 34, 35, ..., 3\nu \\ 45, ..., 4\nu \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\nu-1)\nu \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι στην πρώτη γραμμή έχουμε $\nu-1$ ευθείες, στη δεύτερη $\nu-2$ ευθείες, στην τρίτη $\nu-3$ ευθείες, κ.ο.κ., ενώ στην τελευταία γραμμή έχουμε 1 ευθεία. Άρα το συνολικό πλήθος των ευθειών είναι

$$(\nu-1) + (\nu-2) + (\nu-3) + ... + 3 + 2 + 1$$

Αυτό το άθροισμα μπορεί να υπολογιστεί με το γνωστό τέχνασμα που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό του αθροίσματος των διαδοχικών όρων μιας αριθμητικής προόδου. Το συμβολίζουμε με Σ και προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο ισότητες

$$\begin{array}{llllllllllllll} \Sigma = & (\nu-1) & + & (\nu-2) & + & (\nu-3) & + & ... & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \Sigma = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & ... & + & (\nu-3) & + & (\nu-2) & + & (\nu-1) \end{array}$$

Από την πρόσθεση αυτή παίρνουμε

$$2\Sigma = \nu + \nu + \nu + ... + \nu + \nu + \nu$$

και επειδή το ν εμφανίζεται $\nu-1$ φορές, έχουμε

$$2\Sigma = (\nu-1)\nu, \text{ δηλαδή } \Sigma = \frac{(\nu-1)\nu}{2}.$$

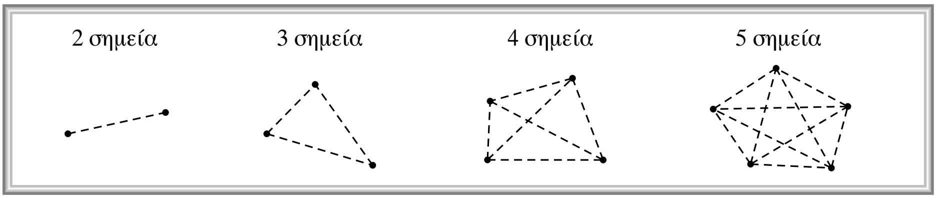
Η οργάνωση μιας δραστηριότητας με βάση το προηγούμενο πρόβλημα δεν στοχεύει φυσικά στην άμεση παρουσίαση της λύσης μέσω μιας “επίδειξης γνώσεων” εκ μέρους του διδάσκοντα ή ενός ικανού μαθητή, αλλά να δώσει τη δυνατότητα σε όσο το δυνατό μεγαλύτερο αριθμό μαθητών να πειραματιστούν με διάφορες μεθόδους και να φτάσουν στη λύση. Βασικός, αν και έμμεσος, διδακτικός στόχος είναι η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να μεταβαίνουν από μια ειδική περίπτωση στη γενική περίπτωση και να διατυπώνουν αποδεικτικούς συλλογισμούς που επιβεβαιώνουν τα αποτελέσματα εμπειρικών αναζητήσεων. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, για να έχουν οι αναζητήσεις αυτές κάποιο ουσιαστικό ενδιαφέρον και διάρκεια, είναι σκόπιμο να δοθεί ένας μεγαλύτερος αριθμός σημείων, π.χ. 10.

Ο ρόλος του διδάσκοντα στο πλαίσιο της δραστηριότητας είναι η παρακολούθηση της εργασίας των μαθητών, η παρέμβαση και η ενθάρρυνση με κατάλληλες υποδείξεις, οι οποίες όμως σε καμμιά περίπτωση δεν πρέπει να αποκαλύπτουν τη λύση του προβλήματος. Παρεμβάσεις αυτού του είδους μπορούν να είναι οι εξής:

- Διατύπωση του προβλήματος σε μια άλλη, ισοδύναμη μορφή που μπορεί να διεγείρει περισσότερο το ενδιαφέρον των μαθητών:

  Σε μια γιορτή συναντιούνται 10 άτομα και ο καθένας ανταλλάσει μια χειραψία με τους υπόλοιπους. Ποιος είναι ο συνολικός αριθμός χειραψιών που έγιναν;

- Η υπόδειξη κατασκευής ενός αριθμητικού πίνακα με βάση απλούστερες ειδικές περιπτώσεις του προβλήματος:



Σημεία	1	2	3	4	5	6	7	...
Ευθείες	0	1	3	6	10	15	21	...

- Η υπόδειξη αναζήτησης κάποιας “κανονικότητας” στο σχηματισμό των αριθμών του παραπάνω πίνακα. Παρατηρώντας, π.χ., ότι σε κάθε στήλη του πίνακα το πλήθος των ευθειών ισούται με το άθροισμα των αριθμών της προηγούμενης στήλης καταλήγουμε στον εξής “κανόνα”:

Πλήθος σημείων	Πλήθος ευθειών
2	1
3	$1 + 2 = 3$
4	$1 + 2 + 3 = 6$
5	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$
6	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
7	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$
8	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$
9	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$
10	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$

Η παρατήρηση αυτή οδηγεί στην επόμενη εικασία:

Το πλήθος των ευθειών που ορίζεται από ένα δεδομένο πλήθος μη συνευθειακών σημείων ισούται με το άθροισμα των φυσικών αριθμών από το 1 μέχρι και το πλήθος των σημείων μείον ένα.

Η διατύπωση αυτής της εικασίας οδηγεί σε δυο βασικά ερωτήματα:

α) Είναι δυνατό να “προβλέψουμε” αυτό το άθροισμα (δηλαδή το πλήθος των ευθειών) για ένα δεδομένο πλήθος σημείων;

Η παρατήρηση των προηγούμενων αθροισμάτων μπορεί να οδηγήσει στην ανακάλυψη αναδρομικών σχέσεων ή κανόνων άμεσου υπολογισμού, όπως π.χ.:

- Το νέο άθροισμα ισούται κάθε φορά με το προηγούμενο άθροισμα συν το προηγούμενο πλήθος σημείων (π.χ. $45 = 36 + 9$).
- Το άθροισμα ισούται με το ημιγινόμενο του πλήθους των σημείων επί το πλήθος των σημείων μείον ένα $\left(\text{π.χ. } 45 = \dfrac{10 \cdot 9}{2}\right)$.

β) Το δεύτερο ερώτημα αφορά ένα κρίσιμο σημείο της δραστηριότητας, καθώς θέτει το ζήτημα μιας απόδειξης που επιβεβαιώνει με γενικό τρόπο τα προηγούμενα εμπειρικά αποτελέσματα:

Πώς μπορούμε να βεβαιωθούμε ότι οι παραπάνω προβλέψεις ισχύουν πάντοτε; (δηλαδή για οποιοδήποτε πλήθος σημείων;)
΄Ετσι φτάνουμε στην πιο ουσιαστική παρέμβαση του διδάσκοντα, που θέτει το πρόβλημα μέσα στο πραγματικό πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας:

- Γενίκευση του προβλήματος για ν σημεία και πρόκληση για διατύπωση αποδεικτικών συλλογισμών γενικού χαρακτήρα.

Θεωρούμε ν σημεία του επιπέδου, τα οποία ανά τρία δεν είναι συνευθειακά. Πόσες ευθείες ορίζουν τα σημεία αυτά λαμβανόμενα ανά δύο;

Διάφορες λύσεις είναι δυνατόν να δοθούν και να συζητηθούν:

- Ο συνδυαστικός συλλογισμός ή η μέθοδος της απαρίθμησης που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω και οδήγησαν στον τύπο $\dfrac{\nu \cdot (\nu - 1)}{2}$.
- Τα γεωμετρικά σχήματα που χρησιμοποιήθηκαν ως βοηθητικό μέσο για τη συμπλήρωση του προηγούμενου πίνακα δείχνουν ότι το πλήθος των ευθειών είναι ίσο με το πλήθος των πλευρών και των διαγωνίων ενός κυρτού ν-γώνου. Το πλήθος αυτό όμως είναι

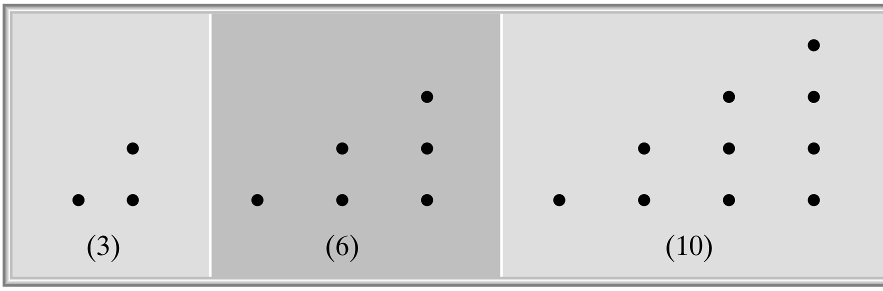
$$\nu + \frac{\nu \cdot (\nu - 3)}{2} = \frac{2\nu + \nu^2 - 3\nu}{2} = \frac{\nu \cdot (\nu - 1)}{2} .$$

(Υπενθυμίζουμε ότι ο υπολογισμός του πλήθους των διαγωνίων ενός κυρτού πολυγώνου αποτελεί αντικείμενο της δραστηριότητας 2.3. του σχολικού βιβλίου).

- Διάφοροι τρόποι υπολογισμού του αθροίσματος $1 + 2 + 3 + ... + \nu - 1$.

Αυτή η λύση μας εισάγει στο χώρο της Άλγεβρας και δίνει στο πρόβλημα πολλές ενδιαφέρουσες προεκτάσεις:

- Συσχέτιση με τους **τριγωνικούς αριθμούς** 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, ... που είναι τα μερικά αθροίσματα της ακολουθίας των φυσικών αριθμών.



- Αναφορά στο τρίγωνο Pascal

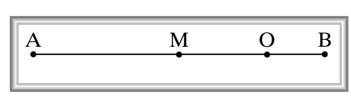
$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
&&&&&&&&&1&&&&&&&&&\\
&&&&&&&&1&&1&&&&&&&&\\
&&&&&&&1&&2&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&&\\
&&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&&\\
&&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&&\\
&&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&&\\
&1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1&\\
1&&9&&36&&84&&126&&126&&84&&36&&9&&1
\end{array}
$$

Μια από τις πολλές ιδιότητες αυτού του περίφημου αριθμητικού τριγώνου είναι ότι, η ακολουθία των τριγωνικών αριθμών εμφανίζεται στην 3η από πάνω διαγώνιο (αριστερά ή δεξιά).

3. Μέθοδοι απόδειξης

Ορισμένα απλά θέματα της ύλης του 2ου κεφαλαίου, που εκφράζουν κυρίως ποσοτικές σχέσεις ευθυγράμμων τμημάτων ή γωνιών, προσφέρονται για να διδάξουμε με συστηματικό τρόπο τις διάφορες τεχνικές απόδειξης που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια του μαθήματος. Παράδειγμα τέτοιου θέματος αποτελεί η ακόλουθη άσκηση:

> Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα AB και το μέσο του M. Αν O είναι ένα σημείο του ευθύγραμμου τμήματος MB, να δείξετε ότι
>
> $$OM = \frac{1}{2}(OA - OB).$$



(Άσκηση 6 Α΄ ομάδας των §§ 2.1.-2.2. του σχολικού βιβλίου)

Μια πρώτη μέθοδος απόδειξης αυτής της ισότητας είναι ο διαδοχικός μετασχηματισμός του ενός από τα δύο μέλη, με τρόπο που να οδηγεί τελικά στο άλλο μέλος.

Η διαδικασία αυτή είναι ειδική περίπτωση της μεθόδου που ονομάζεται **"άμεση απόδειξη"** και η οποία οδηγεί απ'ευθείας από τα δεδομένα στα ζητούμενα ενός προβλήματος.

1η Απόδειξη (άμεση απόδειξη από το πρώτο προς το δεύτερο μέλος)

Αναλύουμε το ΟΜ σε διαφορά άλλων τμημάτων προσπαθώντας να εμφανίσουμε κάποιο από τα τμήματα ΟΑ, ΟΒ που υπάρχουν στο δεύτερο μέλος:

$$\mathrm{OM} = \mathrm{OA} - \mathrm{AM} = \mathrm{OA} - \frac{\mathrm{AB}}{2} = \frac{2\cdot\mathrm{OA} - \mathrm{AB}}{2} =$$

$$= \frac{2\cdot\mathrm{OA} - (\mathrm{OA} + \mathrm{OB})}{2} = \frac{\mathrm{OA} - \mathrm{OB}}{2} .$$

▲

2η Απόδειξη (άμεση απόδειξη από το δεύτερο προς το πρώτο μέλος)

Αναλύουμε τα τμήματα ΟΑ, ΟΒ σε άθροισμα ή διαφορά άλλων τμημάτων προσπαθώντας να εμφανίσουμε το ΟΜ:

$$\frac{\mathrm{OA}-\mathrm{OB}}{2} = \frac{(\mathrm{OM}+\mathrm{MA})-(\mathrm{MB}-\mathrm{OM})}{2} = \frac{\mathrm{OM}+\mathrm{MA}-\mathrm{MB}+\mathrm{OM}}{2}$$

$$= \frac{2\cdot\mathrm{OM}}{2} \qquad (\text{επειδή } \mathrm{MA} = \mathrm{MB})$$

$$= \mathrm{OM}.$$

▲

Ένας άλλος τρόπος άμεσης απόδειξης είναι να χρησιμοποιήσουμε ισότητες που προκύπτουν από τα δεδομένα του προβλήματος και να δημιουργήσουμε τη ζητούμενη ισότητα .

3η Απόδειξη (άμεση απόδειξη με σύνθεση γνωστών ισοτήτων)

Χρησιμοποιούμε τις προφανείς ισότητες

$$\mathrm{OM} = \mathrm{OA} - \mathrm{AM} \quad \text{και} \quad \mathrm{OM} = \mathrm{MB} - \mathrm{OB}.$$

Αν προσθέσουμε τις ισότητες αυτές κατά μέλη παίρνουμε

$$2\cdot\mathrm{OM} = \mathrm{OA} - \mathrm{AM} + \mathrm{MB} - \mathrm{OB}.$$

Από την τελευταία, επειδή είναι $\mathrm{AM} = \mathrm{MB}$, προκύπτει ότι $2\cdot\mathrm{OM} = \mathrm{OA} - \mathrm{OB}$ και από αυτή παίρνουμε αμέσως τη ζητούμενη ισότητα. ▲

Μία άλλη μέθοδος απόδειξης της προηγούμενης πρότασης είναι να ακολουθήσουμε την αντίστροφη πορεία, από τα ζητούμενα προς τα δεδομένα. Η διαδικασία αυτή, η οποία ονομάζεται **"έμμεση απόδειξη"** μπορεί να πάρει διάφορες μορφές, μερικές από τις οποίες εκθέτουμε παρακάτω.

Ένας τρόπος είναι να θεωρήσουμε τη ζητούμενη ισότητα ως δεδομένη και να τη μετασχηματίσουμε (αναλύσουμε) σε μια γνωστή ισότητα. Αν η πορεία αυτή μπορεί να γίνει και αντίστροφα, τότε είναι φανερό ότι η γνωστή ισότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αφετηρία για να αποδείξουμε τη ζητούμενη με άμεσο (συνθετικό) τρόπο. Η χρήση αυτής της διαδικασίας στις γεωμετρικές αποδείξεις μπορεί να συμβάλει αποφασιστικά στην κατανόηση της αναλυτικο-συνθετικής μεθόδου, αλλά και της χρήσης των ισοδυναμιών στην Άλγεβρα (όπου οι δυσκολίες των μαθητών είναι, ως γνωστόν τεράστιες).

4η Απόδειξη (έμμεση απόδειξη με ανάλυση της ζητούμενης ισότητας σε ισοδύναμη γνωστή ισότητα)

Έστω ότι η ζητούμενη ισότητα αληθεύει. Τότε διαδοχικά ισχύουν οι ισότητες:

$$\mathrm{OM} = \frac{1}{2}(\mathrm{OA}-\mathrm{OB})$$

ή $$2\cdot\mathrm{OM} = \mathrm{OA} - \mathrm{OB}$$

ή $$\mathrm{OM} + \mathrm{OM} = \mathrm{OA} - \mathrm{OB}$$

ή $$\mathrm{OM} + \mathrm{OB} = \mathrm{OA} - \mathrm{OM}$$

ή $$\mathrm{MB} = \mathrm{MA}$$

Η τελευταία ισότητα είναι αληθής, επειδή το Μ είναι μέσο του ΑΒ καθώς και ισοδύναμη της αρχικής, επειδή όλη αυτή η πορεία μετασχηματισμού μπορεί να αντιστραφεί. Άρα και η ζητούμενη ισότητα είναι αληθής. ▲

Ένας άλλος τρόπος έμμεσης απόδειξης είναι να υποθέσουμε ότι, η ζητούμενη ισότητα δεν αληθεύει και να εξετάσουμε τις συνέπειες αυτής της υπόθεσης. Αν οι συνέπειες αυτές έρχονται σε αντίφαση με τα δεδομένα του προβλήματος ή άλλες γνωστές προτάσεις, τότε είναι φανερό ότι, η ζητούμενη ισότητα πρέπει να είναι αληθής. Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως **"απαγωγή σε άτοπο"**.

5η Απόδειξη (έμμεση απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο)

Υποθέτουμε ότι η ζητούμενη ισότητα δεν αληθεύει. Τότε προφανώς θα είναι

$$\mathrm{OM} > \frac{1}{2}(\mathrm{OA}-\mathrm{OB}) \quad \text{ή} \quad \mathrm{OM} < \frac{1}{2}(\mathrm{OA}-\mathrm{OB})$$

Από την πρώτη ανισότητα συνεπάγεται διαδοχικά ότι:

$$2\cdot\mathrm{OM} > \mathrm{OA} - \mathrm{OB}$$