

Γιάννης Θωμαΐδης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

 ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2009

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

Επικοινωνία με το συγγραφέα: gthom@otenet.gr

ISBN978-960-456-181-0

© Copyright, 2009, Εκδόσεις ΖΗΤΗ, Πάννης Θωμαΐδης

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις του ελληνικού νόμου (Ν.2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής άδειας του εκδότη κατά οποιοδήποτε τρόπο ή μέσο αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή (ηλεκτρονική, μηχανική ή άλλη) και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

Φωτοστοιχειοθεσία

Εκτύπωση

Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ

18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας

Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19

Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr



www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:

Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη

Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:

Στόα του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) - 105 64 ΑΘΗΝΑ • Τηλ.-Fax: 210.3211.097

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:

Ασκληπιού 60 - Εξάρχεια 114 71, Αθήνα

Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

*Μερικοί μαθητές μαθαίνουν,
παρά τις προσπάθειες μας ...*

(Bernard Russell 1872-1970)

*Αφιερώνεται σ' εκείνα τα ταλαντούχα παιδιά,
που μέσα από τα γραπτά τους
στις Πανελλαδικές Εξετάσεις
παραδίδουν κάθε χρόνο μαθήματα
δημιουργικής μαθηματικής σκέψης ...*

(Κεφάλαιο I, § 1.4., σ. 38, Κεφάλαιο III, § 3.2., σ. 77,
Κεφάλαιο IV, § 4.3, σ. 103)

Αντί προλόγου

Το βιβλίο αυτό είναι προϊόν επεξεργασίας και σύνθεσης τεσσάρων εισηγήσεων γύρω από το θέμα “Μαθηματικά και Εξετάσεις” που έκανα την τελευταία πενταετία σε επιμορφωτικές ημερίδες καθηγητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Το υλικό των εισηγήσεων προέρχεται από την εμπειρία της πολύχρονης ενασχόλησής μου με τις Εξετάσεις και από τη μελέτη της ιστορίας του θεσμού, με οδηγό τα προβλήματα της διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών.

Από τη θέση αυτή επιθυμώ να εκφράσω θερμές ευχαριστίες προς όλους τους συναδέλφους που παρακολούθησαν τις εισηγήσεις. Οι ερωτήσεις, τα σχόλια, οι παρεμβάσεις, η κριτική, ακόμη και οι διαφωνίες, συνέβαλαν αποφασιστικά στη διαμόρφωση του τελικού κειμένου αλλά κυρίως με έπεισαν ότι όλο αυτό το υλικό άξιζε να γίνει ευρύτερα γνωστό.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στους εκλεκτούς συναδέλφους Δημήτριο Μπαρούτη και Αλέξανδρο Συγκελάκη που διάβασαν το τελικό κείμενο και έκαναν πολύ χρήσιμες παρατηρήσεις και υποδείξεις.

Γιάννης Χ. Θωμαΐδης
Θεσσαλονίκη
Ιούλιος 2009

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι Πανελλαδικές Εξετάσεις άλλοτε και τώρα	9
--	---

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

Η μαθηματική απόδειξη και η επίλυση προβλήματος ως θέματα Εξετάσεων	13
1.1. “Πρωτότυπα” θέματα Εξετάσεων με ψευδείς ή λανθασμένες υποθέσεις	13
1.2. Η ιστορία επαναλαμβάνεται 50 χρόνια αργότερα	18
1.3. Μαθηματικές αποδείξεις σε “βατά” θέματα Εξετάσεων	24
1.4. Η επίλυση προβλήματος ως θέμα Εξετάσεων	31
1.5. Μερικά πρώτα συμπεράσματα	39

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

Πόσο συμβατά είναι τα θέματα των Εξετάσεων με τους στόχους της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Λύκειο;	43
2.1. “Πρωτότυπα” θέματα Εξετάσεων που αναιρούν τις επίσημες οδηγίες για τους στόχους της διδασκαλίας και την αξιολόγηση των μαθητών	43
2.2. “Πρωτότυπα” θέματα Εξετάσεων που αποκαλύπτουν ανεπάρκειες της διδασκαλίας	48
2.3. Θέματα εξετάσεων και διδασκαλία των Μαθηματικών	58

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

Μεταβλητές και όρια στη διδασκαλία της Άλγεβρας και Ανάλυσης. Τι μαθαίνουν τελικά οι μαθητές;	63
3.1. Η διδασκαλία των εννοιών “μεταβλητή” και “παράμετρος”	63
3.2. Θέματα Εξετάσεων που αποκαλύπτουν παρανοήσεις βασικών εννοιών	72
3.3. Οι έννοιες της “μεταβλητής” και της “συνάρτησης” ως βασικές προαπαιτούμενες γνώσεις στη διδασκαλία της Ανάλυσης	80

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV**Αποδείξεις θεωρημάτων στα Μαθηματικά της Γ' Λυκείου:**

Είναι άραγε απαραίτητες;	85
4.1. Ποιο είναι το σπουδαιότερο θεώρημα της Ανάλυσης;	86
4.2. Μια ιστορική αναδρομή στις προσπάθειες απόδειξης του θεωρήματος	89
4.3. Η διδασκαλία του θεωρήματος στη Γ' Λυκείου και ο ρόλος του στις Εξετάσεις ..	95
4.4. Μια εναλλακτική πρόταση για τη διδασκαλία της μαθηματικής απόδειξης	105
4.5. Εφαρμογή στο θεώρημα για τη συνάρτηση με μηδενιζόμενη παράγωγο σέ ένα διάστημα	111

Εισαγωγή

Οι Πανελλαδικές Εξετάσεις άλλοτε και τώρα

Τα θέματα των Πανελλαδικών Εξετάσεων στα Μαθηματικά, ιδιαίτερα στις περιπτώσεις εκείνες που εντοπίζονται ασάφειες, λάθη ή υπερβολική δυσκολία, συγκεντρώνουν δικαιολογημένα τα φώτα της δημοσιότητας και γίνονται αντικείμενο έντονης κατακραυγής και αντιπαράθεσης. Αυτή η αναταραχή όμως είναι επιφανειακή, συντηρείται για λίγες μόνο μέρες ή εβδομάδες και στη συνέχεια το ζήτημα υποβαθμίζεται, χωρίς να γίνει ποτέ αφορμή μιας συστηματικής μελέτης για τις συνέπειες που έχουν τα θέματα των Εξετάσεων στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών. Μια αναδρομή στην ιστορία του θεσμού των Εισαγωγικών Εξετάσεων για την τριτοβάθμια εκπαίδευση, δείχνει ότι το φαινόμενο αυτό επαναλαμβάνεται με σταθερό τρόπο εδώ και πολλές δεκαετίες.

Ο θεσμός των Εισαγωγικών Εξετάσεων καθιερώθηκε στην Ελλάδα το 1926 και ήδη μέσα σε μια δεκαετία είχε αποκτήσει όλα τα αρνητικά χαρακτηριστικά που τον συνοδεύουν μέχρι σήμερα. Το επόμενο απόσπασμα μιας διάλεξης που έδωσε ο Πέτρος Τόγκας στο Διδασκαλείον Μέσης Εκπαιδευσεως το 1936 είναι αποκαλυπτικό:

Τα ελαττώματα αυτά είναι βεβαίως σοβαρά. Μεταβάλουν τον χαρακτήρα και τον κυριώτερον σκοπόν της διδασκαλίας των Μαθηματικών, ο οποίος είναι **να μορφώσωμεν τον νουν των μαθητών, σύμφωνα με τας αρετάς και τας αρχάς που έχουν τα Μαθηματικά.**

Τα Μαθηματικά δεν δύνανται πλέον να θεωρηθούν ως το μάθημα της ευθυκρισίας, της τάξεως, αλλά ως μία **μηχανή**, όπως ανέφερον προηγουμένως.

Που πρέπει να αποδώσωμεν τα φαινόμενα αυτά;

Τα αίτια βεβαίως είναι πολλά. Μεταξύ αυτών αναφέρω το αναλυτικόν πρόγραμμα της ύλης των Μαθηματικών, την διάταξιν της ύλης αυτών, την διατύπωσιν αυτής εις τα διδακτικά βιβλία κλπ.

Άλλο αίτιον θεωρώ την ύπαρξιν των διαφόρων διαγωνισμών δια την εισαγωγήν των μαθητών εις τας ανωτάτας σχολάς του Κράτους.

Η ύπαρξις των διαγωνισμών, το περιεχόμενον των θεμάτων τα οποία δίδονται εις τους υποψηφίους, περιεχόμενον το οποίον δεν ελέγχει την κρίσιν, αλλά την απομνημόνευσιν επουσιωδών λεπτομερειών, η κατακραυγή των εφημερίδων και της κοινής γνώμης, η οποία επακολουθεί πάντοτε την έκδοσιν των αποτελεσμάτων, ότι οι μαθηταί μας δεν γνωρίζουν ορθογραφίαν, μαθηματικά, όλα αυτά έχουν απορροφήσει το μεγαλύτερον μέρος της προσοχής, όχι μόνον των μαθητών, αλλά και των καθηγητών.

Εάν θελήσωμεν να συμβουλευσωμεν ένα μαθητήν να προσέξη, να συγκεντρώση περισσότερον τας προσπάθειάς του εις τα δεσπόζοντα σημεία μιας επιστήμης, θα μας απαντήσει:

«Δεν υπάρχουν εις την επιστήμην, δια τους μαθητάς, λεπτομέρειαι περισσότερον ενδιαφέρουσαι η μία της άλλης, ούτε δεσπόζοντες παράγοντες. Όσα αναγράφονται εις το πρόγραμμα, είναι πιθανόν να ζητηθούν κατά τας εξετάσεις και δια τούτο πρέπει να τα μάθωμεν οπωσδήποτε». Και πράγματι τα **μανθάνουν μηχανικώς**, αδιαφορούντες δια την μόρφωσιν του πνεύματος.

Αλλά το σπουδαιότερον και το αναμφισβήτητον αίτιον του παρατηρουμένου κακού, είναι το διδακτικόν σύστημα που επικράτει και επικρατεί μέχρι σήμερον εις τα Σχολεία μας.¹

Όπως βλέπουμε, οι προηγούμενες επισημάνσεις του Πέτρου Τόγκα συνδέουν άμεσα τις Εξετάσεις με ένα διαχρονικό πρόβλημα της διδασκαλίας των Μαθηματικών, τη διάσταση ανάμεσα στους μορφωτικούς σκοπούς του μαθήματος και το μηχανικό χαρακτήρα των γνώσεων που αποκτούν οι περισσότεροι μαθητές. Ένα άλλο διαχρονικό πρόβλημα της διδασκαλίας, που συνδέεται στενά με το προηγούμενο και εκδηλώνεται με ιδιαίτερη έμφαση στις Εξετάσεις, είναι τα πολύ μεγάλα ποσοστά αποτυχίας. Χαρακτηριστικό για το συγκεκριμένο ζήτημα είναι το επόμενο απόσπασμα μιας ανακοίνωσης της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας το 1935:

Τα αποτελέσματα των εισιτηρίων εξετάσεων εις το μάθημα των Μαθηματικών δια τας διαφόρους σχολάς μαρτυρούν πιστώσ οποία είναι πραγματικώς η κατάστασις. Η αποτυχία των εξετασθέντων φθάνει τα 80% εις μερικάς Σχολάς.

Αλλά δεν πρόκειται περί απλής αποτυχίας: πρόκειται περί απελπιστικού φαινομένου. Οι πλείστοι των εξετασθέντων έγγραφαν ασυναρτησίας, τας οποίας θεωρούμεν περιττόν να αναγράψωμεν. Η κατάστασις είναι απελπιστική. Οι υποψήφιοι δεν έχουν

¹ Βλέπε Π. Τόγκας “Τα Μαθηματικά εις την Μέσην Εκπαίδευσιν”. *Δελτίον Λειτουργιών Μέσης Εκπαίδευσως* (Αριθμός Φύλλου 10α, 1936, σ.302).

ασκηθή εις την λύσιν μαθηματικών προβλημάτων, μαθηματικών ασκήσεων, τας οποίας ζητούν οι εξετασταί κατά τας εισιτηρίου εξετάσεις.²

Όλα τα προηγούμενα οδηγούν σχεδόν αυτόματα στο εξής ερώτημα:

- ♦ Ποιος θα μπορούσε να υποστηρίξει ότι η κατάσταση σήμερα, ύστερα από 70 χρόνια αλληπάλληλων εκπαιδευτικών μεταρρυθμίσεων, είναι καλύτερη;

Παρά τις αλληπάλληλες αλλαγές που έχει υποστεί ο θεσμός των Εξετάσεων, αλλαγές που αφορούν τόσο τον τρόπο διεξαγωγής όσο και την εξεταστέα ύλη των Μαθηματικών³, υπάρχουν επίσης ορισμένες διαχρονικές “σταθερές” οι οποίες επηρεάζουν αποφασιστικά το περιεχόμενο και τη διατύπωση των θεμάτων. Μια τέτοια “σταθερά” αποτελεί π.χ. η ανάγκη να δίνονται στους μαθητές “πρωτότυπα” θέματα, δηλαδή ασκήσεις ή προβλήματα που δεν είναι δημοσιευμένα στην τρέχουσα βιβλιογραφία των σχολικών Μαθηματικών. Η αγωνιώδης αναζήτηση τέτοιων θεμάτων έχει οδηγήσει πολλές φορές σε επιλογές που είναι τελείως αντίθετες με ορισμένες βασικές μαθηματικές ή διδακτικές αρχές, γεγονός που προκαλεί σημαντικές παρανοήσεις, δημιουργεί προβλήματα στη βαθμολόγηση των γραπτών και αποτυπώνεται με αρνητικό τρόπο στην επίδοση των μαθητών. Επιπλέον, με δεδομένη την ισχυρή επίδραση που ασκούν οι Εξετάσεις, τα θέματα αυτά έχουν γενικότερες παρενέργειες σε όλο το φάσμα της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Για τις επιπτώσεις αυτές όμως δεν γίνεται καμιά συζήτηση, αφού κύριο μέλημα όλων των θεσμικών οργάνων της εκπαίδευσης φαίνεται να είναι μόνο η “ομαλή” διεξαγωγή της γραφειοκρατικής πλευράς των Εξετάσεων, χωρίς να διαφαίνεται καμιά πρόθεση μελέτης των εντυπωσιακών στοιχείων που αποκαλύπτει κάθε χρόνο η βαθμολόγηση των γραπτών και εξαγωγής των αντίστοι-

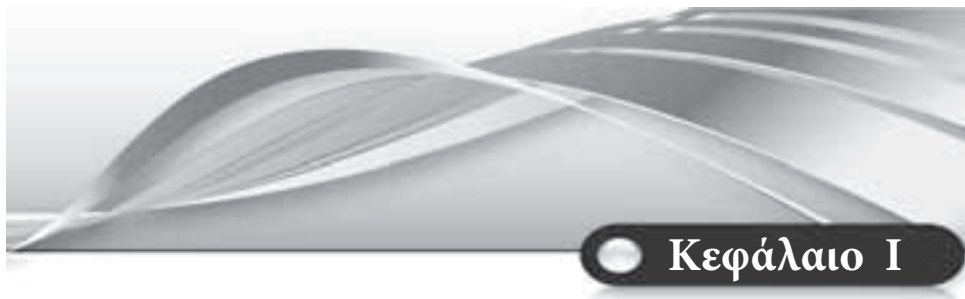
² Βλέπε το Παράρτημα του Δελτίου της Ε.Μ.Ε. (Αριθμός 39, 1935, σσ.594–595). Υπενθυμίζουμε ότι αντίστοιχα ποσοστά αποτυχίας ήταν συνηθισμένα στη διάρκεια της δεκαετίας του 1990 στις Εξετάσεις της 1^{ης} και 4^{ης} Δέσμης, παρά το γεγονός ότι πολλοί μαθητές εξετάζονταν στα Μαθηματικά για δεύτερη ή τρίτη φορά.

³ Η σημαντικότερη ίσως αλλαγή του θεσμού πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο της εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης του 1964, όταν η αποκλειστική αρμοδιότητα της διεξαγωγής των Εξετάσεων, που είχαν μέχρι τότε τα Α.Ε.Ι., μεταβιβάστηκε στο Υπουργείο Παιδείας. Η αλλαγή αυτή δεν ήταν άσχετη με ορισμένα ακραία φαινόμενα ασυδοσίας που είχαν εμφανιστεί τα προηγούμενα χρόνια στη θεματοδοσία των Μαθηματικών και σε άλλα ζητήματα διεξαγωγής των Εξετάσεων (βλέπε ενότητα 1.1. παρακάτω).

χων συμπερασμάτων.⁴

Στα τέσσερα κεφάλαια αυτού του βιβλίου εστιάζουμε την προσοχή μας σε ορισμένες από τις πολλές πτυχές του ζητήματος, όπως ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζεται η έννοια της μαθηματικής απόδειξης μέσα από τα θέματα των Εξετάσεων, η συνάφεια των επίσημων στόχων της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Λύκειο με τα θέματα των Εξετάσεων, οι παρανοήσεις βασικών εννοιών που αναδύονται μέσα από τα γραπτά των μαθητών, ο ρόλος της μαθηματικής θεωρίας στις Εξετάσεις. Θα αναλύσουμε ορισμένα παραδείγματα, τόσο από το απώτερο παρελθόν όπου κυρίαρχο στοιχείο αποτελούσε η επιδίωξη της “πρωτοτυπίας” των θεμάτων, όσο και από τα θέματα των τελευταίων ετών στα οποία γίνεται και μια προσπάθεια ύπαρξης “βατών” θεμάτων για τη διευκόλυνση των αδύνατων κυρίως μαθητών. Η ανάλυση αυτή θα δείξει τον προβληματικό χαρακτήρα πολλών θεμάτων, τις δυσκολίες και τις ανισότητες που δημιουργούνται στη βαθμολόγηση των γραπτών, αλλά και τις γενικότερες αρνητικές συνέπειες των Εξετάσεων στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Τέλος θα επιχειρήσουμε να αναδείξουμε, μέσα από τη μελέτη συγκεκριμένου παραδείγματος, τις αρχές μιας άλλης διδακτικής προσέγγισης η οποία θα μπορούσε να συμβάλλει σε μια διαφορετική σχέση Εξετάσεων και διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Λύκειο.

⁴ Μοναδική ίσως εξαίρεση αποτελεί το συλλογικό έργο *Εισαγωγικές Εξετάσεις για την Τριτοβάθμια Εκπαίδευση. Κριτική Προσέγγιση των Θεμάτων (1961-2001)*, που εκδόθηκε το 2003 από το Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας (αφορά τα Αρχαία Ελληνικά, Έκθεση - Νέα Ελληνικά, Ιστορία, Μαθηματικά, Φυσική, Χημεία και Βιολογία). Επίσης, τα τελευταία χρόνια, έχουν δημοσιευθεί ορισμένες εργασίες οι οποίες επιχειρούν να προσεγγίσουν με κριτικό τρόπο τα θέματα των Πανελλαδικών Εξετάσεων στα Μαθηματικά και τις αντίστοιχες επιδόσεις των μαθητών.



Η μαθηματική απόδειξη και η επίλυση προβλήματος ως θέματα Εξετάσεων⁵

1.1. “Πρωτότυπα” θέματα Εξετάσεων με ψευδείς ή λανθασμένες υποθέσεις

Για να θεμελιώσουμε τον ισχυρισμό ότι ορισμένα ζητήματα που συνδέονται με τα θέματα των Εξετάσεων έχουν διαχρονικό χαρακτήρα, θα ξεκινήσουμε με ένα ιστορικό παράδειγμα και συγκεκριμένα το παρακάτω “πρωτότυπο” θέμα Τριγωνομετρίας που τέθηκε το 1947 στις Εισαγωγικές Εξετάσεις της (λεγόμενης τότε) Μαθηματικής Σχολής Αθηνών:

Εάν εις εν τρίγωνον ΑΒΓ είναι $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma = 1$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma = 2$, τότε να δειχθή ότι η ακτίς της περιγεγραμμένης περί το τρίγωνον περιφέρειας ισούται προς $R = \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}$, ένθα α, β, γ τα μήκη των πλευρών του τριγώνου.⁶

⁵ Το κύριο μέρος αυτού του κεφαλαίου παρουσιάστηκε για πρώτη φορά τον Ιανουάριο του 2004 στα Ιωάννινα, σε Ημερίδα που διοργάνωσαν η Σχολική Σύμβουλος Ε. Δημητριάδου και το Παράρτημα Ν. Ιωαννίνων της Ε.Μ.Ε. Το Νοέμβριο του ίδιου χρόνου παρουσιάστηκε σε Ημερίδα των Εκπαιδευτηρίων Φρυγανιάτη στη Θεσσαλονίκη, ενώ μια επεξεργασμένη μορφή των δύο εισηγήσεων δημοσιεύτηκε στο περιοδικό *Απολλώνιος* του παραρτήματος Ν. Ημαθίας της Ε.Μ.Ε. (τεύχος 4^ο, 2004, σσ.28–48).

⁶ Βλέπε Α. Πάλλα *Θέματα δοθέντα εις τας Εισαγωγικές Εξετάσεις των Ανωτάτων και Ανωτέρων Σχολών του Κράτους το έτος 1947, μετά των λύσεων αυτών* (σ.51). Πρόκειται για το “Ετήσιο Δελτίο

Η ζητούμενη απόδειξη μπορεί να γίνει χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία αν χρησιμοποιηθούν οι επόμενες σχέσεις, οι οποίες εκείνη την εποχή αποτελούσαν αναπόσπαστο τμήμα της σχολικής Τριγωνομετρίας:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R \quad (1)$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma = 4 \operatorname{csc} \frac{A}{2} \operatorname{csc} \frac{B}{2} \operatorname{csc} \frac{\Gamma}{2} \quad (2)$$

$$\operatorname{csc} A + \operatorname{csc} B + \operatorname{csc} \Gamma = 1 + 4\eta\mu \frac{A}{2} \eta\mu \frac{B}{2} \eta\mu \frac{\Gamma}{2} \quad (3)$$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις του προβλήματος, από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι είναι

$$4 \operatorname{csc} \frac{A}{2} \operatorname{csc} \frac{B}{2} \operatorname{csc} \frac{\Gamma}{2} = 1 \quad \text{και} \quad 4\eta\mu \frac{A}{2} \eta\mu \frac{B}{2} \eta\mu \frac{\Gamma}{2} = 1.$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις τελευταίες και λαμβάνοντας υπόψη ότι ισχύει $2\eta\mu \frac{\alpha}{2} \operatorname{csc} \frac{\alpha}{2} = \eta\mu \alpha$, βρίσκουμε την ισότητα

$$2\eta\mu A \eta\mu B \eta\mu \Gamma = 1 \quad (4)$$

Από την (1) έχουμε επίσης ότι $\alpha = 2R\eta\mu A$, $\beta = 2R\eta\mu B$ και $\gamma = 2R\eta\mu \Gamma$. Από τις τελευταίες, με πολλαπλασιασμό κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψη την (4), βρίσκουμε ότι είναι

$$\alpha\beta\gamma = 4R^3. \quad (5)$$

Επίσης, με πρόσθεση κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψη την πρώτη υπόθεση του προβλήματος, βρίσκουμε ότι είναι

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R, \quad \text{δηλαδή} \quad (\alpha + \beta + \gamma)^2 = 4R^2. \quad (6)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (5) και (6) καταλήγουμε στη ζητούμενη ισότητα. ▲

Ο παρατηρητικός αναγνώστης θα έχει αρχίζει ίσως να υποψιάζεται ότι κάτι δεν πάει καλά με το συγκεκριμένο τρίγωνο. Π.χ. από τις ισότητες (5) και (6) προκύ-

Θεμάτων” το οποίο ο Πάλλας εξέδιδε ανελλιπώς από το 1947 μέχρι το θάνατό του το 1981. Η σειρά αυτή, που περιείχε τις λύσεις και σχολιασμό των θεμάτων αποτελεί μια πολύτιμη πηγή για την ιστορία του θεσμού των Εισαγωγικών Εξετάσεων στην Ελλάδα.

ππει σχεδόν αμέσως, με τη βοήθεια τύπων του εμβαδού, ότι οι ακτίνες του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου είναι ίσες! Η υποψία αυτή γίνεται βεβαιότητα αν λάβουμε υπόψη ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ανισότητα:

$$1 < \text{συν}A + \text{συν}B + \text{συν}Γ \leq \frac{3}{2} \quad (7)$$

Δηλαδή δεν υπάρχει τρίγωνο που ικανοποιεί την ισότητα $\text{συν}A + \text{συν}B + \text{συν}Γ = 2$, η οποία δίνεται ως υπόθεση. Η προηγούμενη και φαινομενικά έγκυρη απόδειξη της ζητούμενης ισότητας εκτελείται πάνω σε ανύπαρκτα μαθηματικά αντικείμενα! Στη γλώσσα της μαθηματικής λογικής πρόκειται για την απόδειξη μιας συνεπαγωγής με ψευδή υπόθεση, δηλαδή μια εξ ορισμού αληθή πρόταση.⁷

Το προηγούμενο θέμα προκάλεσε στις αρχές του 1948 μια διαμάχη ανάμεσα στον Θεόδωρο Βαρόπουλο, καθηγητή στη Μαθηματική Σχολή του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, και τον Αριστείδη Πάλλα, ιδιοκτήτη μεγάλου φροντιστηρίου της Αθήνας και μέλους (μετέπειτα Γενικού Γραμματέα και Προέδρου) του διοικητικού συμβουλίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Επικαλούμενος την ανισότητα (7), ο Βαρόπουλος άσκησε αρχικά κριτική κατά της επιλογής του συγκεκριμένου θέματος με άρθρο του που δημοσιεύτηκε στο περιοδικό “Αιών του Ατόμου”. Στην κριτική αυτή απάντησε ο Πάλλας με ένα κείμενο που δημοσιεύτηκε στο “Παράρτημα του Δελτίου της Ε.Μ.Ε.” (τον πρόδρομο του σημερινού “Ευκλείδη”). Το βασικό επιχείρημα του Πάλλα ήταν το εξής:

Νομίζομεν ότι ο κ. Βαρόπουλος δεν έχει δίκαιον, διότι εις το πρόβλημα υπάρχει ένα εάν και συνεπώς ουδεμίαν σημασίαν έχουν τα μετέπειτα δεδομένα. Εάν το εάν τούτο δεν ευσταθή δια το τυχόν τρίγωνον τότε δεν θα ευσταθή και το εξαγόμενον, εκτός εάν η μη ευσταθούσα σχέσις ουδαμού εμφανίζεται εις την συνέχειαν των συλλογισμών, ότε ουδεμίαν έχει επίδρασιν επί του εξαγομένου.⁸

Ο Βαρόπουλος ανταπάντησε με μια δηκτική επιστολή προς τον Πάλλα που δημοσιεύτηκε επίσης στο “Παράρτημα του Δελτίου της Ε.Μ.Ε.”, και στην οποία σημείωνε μεταξύ άλλων τα εξής:

⁷ Παρά το γεγονός αυτό, η προηγούμενη άσκηση “επιβίωσε” στην Ελληνική βιβλιογραφία των στοιχειωδών Μαθηματικών και υπήρξε ο “γεννήτορας” μερικών ακόμη “παθολογικών” ασκήσεων. Η προϊστορία και η εξέλιξη της συγκεκριμένης άσκησης είναι πολύ διαφωτιστικές για την ερμηνεία του φαινομένου της “ασκησιολογίας” που αναπτύσσεται γύρω από το θεσμό των Εξετάσεων και ταλανίζει τη μαθηματική εκπαίδευση, αλλά η παρουσίασή τους αποτελεί αντικείμενο μιας άλλης εργασίας.

⁸ Βλέπε Παράρτημα του Δελτίου της Ε.Μ.Ε. (Αριθμός 12, 1948, σ.361).

Ο σχηματισμός προβλημάτων, οίον το αναφερόμενον, γίνεται αν ο κατασκευάζων ταύτα έχει δύο προσόντα:

- α) θέλει να παραπέσει
- β) έχει το προσόν της αγνοίας.

Πολλάκις δε δια να καλύψη το δεύτερον ισχυρίζεται ότι χρησιμοποιεί το πρώτον.⁹

Η επίκληση της “άγνοιας”, σχετικά με την ανισοτική σχέση (7) που αφορά το άθροισμα των συνημιτόνων των γωνιών ενός τριγώνου, δεν αποτελεί πειστική ερμηνεία για την επιλογή του συγκεκριμένου θέματος από τους καθηγητές της Μαθηματικής Σχολής Αθηνών. Θεωρούμε πιο πιθανό ότι η επιλογή αυτή ήταν σκόπιμη, με δεδομένη την ανάγκη ύπαρξης “πρωτότυπων” θεμάτων που δε θα μπορούσαν να “προβλέψουν” οι δραστηριοποιούμενοι (με ιδιαίτερα έντονο και ανταγωνιστικό τρόπο) στο χώρο της φροντιστηριακής εκπαίδευσης.¹⁰

Πράγματι, ποιος μπορεί να “προβλέψει” ως θέμα Εισαγωγικών Εξετάσεων στα Μαθηματικά μια άσκηση με ψευδή υπόθεση; Αν, επαναλαμβάνουμε, αποκλειστεί η περίπτωση της “άγνοιας”, τότε η επιλογή αυτή αποτελεί σαφή ένδειξη ότι ζητήματα που συνδέονται με την “εικόνα” του θεσμού προς την κοινωνία (π.χ. το υψηλό “κύρος” των Εξετάσεων ή το “αδιάβλητο” της επιλογής των θεμάτων, τα οποία ενισχύονται όταν τα θέματα είναι “πρωτότυπα”) μπορεί να θέσουν στο περιθώριο βασικά κριτήρια μαθηματικής εγκυρότητας. Στο χώρο της μαθηματικής έρευνας είναι μάλλον αδιανόητο να προτείνει κάποιος προς λύση ένα πρόβλημα, όταν γνωρίζει ότι οι υποθέσεις του είναι ψευδείς.

Το θέμα της Τριγωνομετρίας του έτους 1947 δεν υπήρξε ένα μεμονωμένο γεγονός. Η αναζήτηση “πρωτότυπων” θεμάτων είχε ως αποτέλεσμα να δίνονται συχνά εξεζητημένα ή και λανθασμένα θέματα που ήταν απρόσιτα για το σύνολο των υποψηφίων. Μια συρροή τέτοιων θεμάτων εμφανίστηκε το 1962, γεγονός που

⁹ Βλέπε *Παράρτημα του Δελτίου της Ε.Μ.Ε.* (Αριθμός 14, 1948, σ.425). Ενδεικτικό για το ήθος των προσώπων και της εποχής είναι το σχόλιο του παραλήπτη της επιστολής Α. Πάλλα, ο οποίος αμέσως μετά από το δηκτικό σχόλιο του Βαρόπουλου σημειώνει: “... την ανωτέρω επιστολήν έδωσα προς δημοσίευσιν εις το Παράρτημα του Δελτίου της Ε.Μ.Ε. κατά καθήκον ...”. Σε αντίθεση με το δημόσιο διάλογο Βαρόπουλου – Πάλλα, οι υπεύθυνοι της επιλογής των θεμάτων στη Μαθηματική Σχολή Αθηνών απέφυγαν να πάρουν οποιαδήποτε θέση. Κάθε παραλληλισμός και σύγκριση με τις αντιδράσεις προσώπων και φορέων στην περίπτωση του λανθασμένου θέματος 4(γ) των Εξετάσεων του 2003 στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης της Γ’ Λυκείου, επαφίεται στην κρίση του αναγνώστη...

¹⁰ Τεκμηρίωση αυτής της θέσης γίνεται στην εργασία μας που βρίσκεται σε εξέλιξη και αναφέρεται στην προηγούμενη υποσημείωση 7.

προκάλεσε μεγάλη αναταραχή και απασχόλησε για πολύ καιρό τον τύπο. Ανάμεσα στα θέματα αυτά ήταν και το επόμενο, που δόθηκε στις εισαγωγικές Εξετάσεις της περιζήτητης σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Ε.Μ.Π. (η έμφαση δική μας):

Αποδείξτε ότι δι ουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y με **ανίσους** απολύτους τιμές, ισχύει η σχέση

$$\frac{|x|}{|x+y|} + \frac{|y|}{|x-y|} + \frac{|x|}{|x|-|y|} - \frac{|y|}{||x|-|y||} \geq 2.$$

Ποία η αναγκαία και ικανή συνθήκη ίνα αληθεύει το σημείον της ισότητας;

Η διατύπωση με την οποία δόθηκε το πρόβλημα στους υποψηφίους είναι λανθασμένη και παραπλανητική επειδή, όπως εύκολα φαίνεται με αντιπαράδειγμα, η ανισότητα δεν ισχύει όταν είναι $|x| < |y|$ (π.χ. όταν $x=0$ και $y=1$). Θα λέγαμε, κατά το κοινώς λεγόμενο, ότι οι θεματοδότες “την πάτησαν” αλλά οι εξελίξεις που ακολούθησαν μας οδηγούν και πάλι στη λιγότερο πεζή ερμηνεία του “πρωτότυπου θέματος”.

Το θέμα αυτό και μερικά άλλα που ήταν εκτός της εξεταστέας ύλης, προκάλεσαν θύελλα αντιδράσεων, δημοσιεύματα των εφημερίδων και τελικά την παρέμβαση του Υπουργείου Παιδείας. Η Σύγκλητος του Ε.Μ.Π. προσπάθησε να απαντήσει στις επικρίσεις με την έκδοση ειδικής ανακοίνωσης, στην οποία ανέφερε για το προηγούμενο ζήτημα τα εξής:

Εις το πρώτον μέρος του ζητήματος δεν καθορίζεται η απαραίτητος δια την ισχύν της προτάσεως προϋπόθεσις $|x| > |y|$, ίνα εξετασθούν και διερευνηθούν αι δύο δυνατά περιπτώσεις $|x| < |y|$ ή $|x| > |y|$.

Η σύγκλητος προσπάθησε να δικαιολογήσει αυτήν την απαίτηση, που είναι προφανώς παράλογη αν λάβουμε υπόψη τη διατύπωση του θέματος (και ιδιαίτερα την προστακτική “αποδείξτε”), με το επιχειρήμα ότι:

Δια των διδομένων θεμάτων επιζητείται, μεταξύ των πολυαρίθμων υποψηφίων να ανευρεθούν εκείνοι οι οποίοι διαθέτουν μαθηματική και ταυτώ πρακτική σκέψιν και είναι επομένως επιδεκτικοί τεχνικής μορφώσεως ανωτάτης στάθμης. Τα διδόμενα θέματα δεν αποτελούν μόνον στοιχεία απολύτου κρίσεως της ωριμότητος των υποψηφίων αλλά και συγκρίσεως των. Μαθηματικώς δεν ευσταθεί να χαρακτηρίζονται ως εσφαλμένα ή ανεπίδεκτα λύσεως, ζητήματα τα οποία απαιτούν πρωτοτυπίαν σκέψεως και πρωτοβουλίαν. Το γεγονός τούτο φαίνεται ότι απαρέσκει εις τινας των ασκούντων το επάγγελμα του φροντιστού, εξ’ ου και τα δημοσιεύματά των.