# ΙΣΤΟΡΙΑ & ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Επιμέλεια:
Γ. Θωμαΐδης, Ν. Καστάνης, Κ. Τζανάκης

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

*Γ. Θωμαΐδης:* Τ.Θ. 400 29, 564 04, Θεσσαλονίκη, gthom@otenet.gr

*Ν. Καστάνης:* Τμήμα Μαθηματικών, Σχολή Θετικών Επιστημών, Α.Π.Θ.
541 24, Θεσσαλονίκη, nioka@math.auth.gr

*Κ. Τζανάκης:* Παιδαγωγικό Τμήμα Δ.Ε., Πανεπιστήμιο Κρήτης
741 00, Ρέθυμνο, tzanakis@edc.uoc.gr

---

*"Στο εξώφυλλο εικονίζεται ο μαθηματικός - παιδαγωγός*
***Νικόλαος Σωτηράκης*** *(1898 - 1974)"*

---

ISBN 960-431-997-3



*Εκτύπωση* **Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ**
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 23920 72.222 (10 γραμ.) - Fax: 23920 72.229
*e-mail: info@ziti.gr*

*Βιβλιοπωλείο* ΕΚΔΟΣΕΙΣ **ΖΗΤΗ**
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 203.720, Fax 2310 211.305
*e-mail: sales@ziti.gr*

www.ziti.gr

# ΕΝΑΡΚΤΗΡΙΑ ΟΜΙΛΙΑ

Το Τμήμα μας έχει μια ιδιαίτερη ευαισθησία στην Ιστορία των Μαθηματικών. Αυτό φαίνεται με τα τρία σχετικά μαθήματα που περιλαμβάνονται στα προγράμματα σπουδών του, τα τελευταία 15 χρόνια. Επιβεβαιώνεται επίσης και από το γεγονός ότι είναι το ***μόνο*** Τμήμα Μαθηματικών στην Ελλάδα που ενδιαφέρθηκε και εξέδωσε την Ιστορία του.

Όσον αφορά τη Διημερίδα αυτή, που έχει να κάνει με τη σχέση της Ιστορίας των Μαθηματικών με την Μαθηματική Παιδεία, αξίζει να σημειωθεί ότι το Τμήμα μας έχει κάποιο προηγούμενο ιστορικό: το 1991 πραγματοποιήθηκε εδώ ένα συμπόσιο για τη *Διδακτική Αξιοποίηση της Ιστορίας των Επιστημών* και το 1997 μια συνάντηση εργασίας για τη *Συνύφανση της Ιστορίας των Μαθηματικών με τη Διδακτική τους*, που οργανώθηκαν και οι δύο συναντήσεις από την Ελληνική Εταιρεία Ιστορίας Επιστημών και Τεχνολογίας.

Μέσα στο ίδιο πλαίσιο προσήνειας και ενδιαφέροντος φιλοξενείται και η σημερινή συνάντηση, η οποία, όπως φαίνεται, εκτός από τον ευνοϊκό περιβάλλοντα χώρο έχει αξιοσημείωτες προδιαγραφές, όπως:

- Τη συνύπαρξη εισηγητών από το χώρο της Φιλοσοφίας, της Κλασικής Φιλολογίας, της Ιστορίας και της Διδακτικής των Μαθηματικών,
- Την πολύπλευρη προσέγγιση στην Αρχαία Ελληνική Ιστορία των Μαθηματικών και στην Ιστορία της Ελληνικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης του 19ου αιώνα, και
- Την ανάδειξη νέων διδακτικών διαστάσεων της Ιστορίας των Μαθηματικών.

Στις καινοτομίες του Διημέρου αυτού δεν πρέπει να παραβλεφθεί η ηλεκτρονική διάθεση, από ιστοσελίδα του Τμήματός μας, όλων (ή σχεδόν όλων) των εισηγήσεων, δύο μήνες πριν την εκδήλωση. Το γεγονός αυτό βοηθάει, χωρίς αμφιβολία, την ουσιαστική συμμετοχή και τη δυνατότητα κριτικής στάσης.

Εύχομαι όλα αυτά τα στοιχεία να συνδυαστούν δημιουργικά με τις προφορικές παρουσιάσεις και με τη ζωντανή συζήτηση στις συνεδριάσεις της εν λόγω συνάντησης. Καλή επιτυχία.

***Π. Μωυσιάδης***

*Πρόεδρος του Τμήματος Μαθηματικών Α.Π.Θ.*

# ΧΑΙΡΕΤΙΣΜΟΣ

Είναι ιδιαίτερη χαρά και τιμή για την Περιφερειακή Διεύθυνση Εκπαίδευσης να συνδιοργανώνει με το Τμήμα Μαθηματικών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης τη διημερίδα με θέμα: «*Η Ιστορία των μαθηματικών, της μαθηματικής εκπαίδευσης και οι διδακτικές τους προεκτάσεις*», ένα τμήμα με μεγάλη παράδοση κι εμπειρία στη διοργάνωση επιστημονικών συναντήσεων και παράλληλα πλούσιο ερευνητικό και συγγραφικό έργο στην ιστορία των μαθηματικών.

Η συνεργασία όλων των φορέων της εκπαίδευσης και του ανθρώπινου δυναμικού, που με συνέπεια, σοβαρότητα και αφοσίωση υπηρετούν την έρευνα ενός απαιτητικού αλλά άκρως ενδιαφέροντος γνωστικού και επιστημονικού πεδίου, όπως τα μαθηματικά, μόνο θετικά αποτελέσματα μπορεί να επιφέρει για την επιστήμη και την πρόοδο. Είναι καθήκον όλων να βρούμε τις κατάλληλες μεθόδους και τα νέα μέσα, ώστε να βοηθήσουμε μαθητές και νέους ανθρώπους κάθε εκπαιδευτικής βαθμίδας να κατανοήσουν και να εντρυφήσουν στο γοητευτικό κόσμο των μαθηματικών, ο οποίος δεν περιορίζεται στα πλαίσια ενός μαθήματος αλλά με το πνεύμα, την ουσία και τη φιλοσοφία του διαπερνά όλες τις εκφάνσεις της ανθρώπινης φύσης και δραστηριότητας.

Το μάθημα της Ιστορίας των μαθηματικών μπορεί να συμβάλει προς την κατεύθυνση αυτή, διότι αποδεικνύει τη στενή σχέση που τα μαθηματικά είχαν κι έχουν με όλους τους τομείς του επιστητού. Εξάλλου, οι κυριότεροι κλάδοι των μαθηματικών προέκυψαν από τις ανάγκες της ιστορικής πραγματικότητας και τη ζωής, όπως των εμπορικών υπολογισμών, της μέτρησης του εδάφους και της πρόβλεψης αστρονομικών γεγονότων. Αυτές οι τρεις ανάγκες σχετίζονται με την –υπό την ευρεία έννοια– υποδιαίρεση των μαθηματικών στη μελέτη της δομής, του χώρου και της μεταβολής.

Θα ήθελα να συγχαρώ όλους όσοι συνέβαλαν στο σχεδιασμό και την υλοποίηση της διημερίδας. Εύχομαι καλή επιτυχία στις εργασίες της και περιμένω, όπως και η υπόλοιπη εκπαιδευτική και επιστημονική κοινότητα, την ανακοίνωση των αποτελεσμάτων και συμπερασμάτων της.

*Δρ.* ***Γ. Καρατάσιος***

*Περιφερειακός Διευθυντής Εκπαίδευσης*
*Κεντρικής Μακεδονίας*

# ΧΑΙΡΕΤΙΣΜΟΣ

Πριν από αρκετά χρόνια, τον Αύγουστο του 1991, ξανά σε αυτόν εδώ τον χώρο, είχε διοργανωθεί μια αντίστοιχη συνάντηση με θέμα την «*Διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Επιστημών*», στα πλαίσια της *Ελληνικής Εταιρείας Ιστορίας των Επιστημών και της Τεχνολογίας*, με βασικό διοργανωτή και πάλι τον Ν. Καστάνη. Αν και το ενδιαφέρον μου για το θέμα ανάγεται σε ακόμα παλιότερη εποχή, ήταν η πρώτη φορά που συμμετείχα – τουλάχιστον στην Ελλάδα – σε επιστημονική συνάντηση με αυτή την θεματολογία. Τότε ακόμα, η διεθνής ομάδα *International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics* (*HPM* Group), που τελεί υπό την αιγίδα της *International Commission on Mathematical Instruction* (*ICMI*), αν και αριθμούσε αρκετά χρόνια ζωής, δεν είχε επεκταθεί τόσο όσο σήμερα, ούτε οι δραστηριότητες που γίνονται στα πλαίσια της ήταν ακόμα τόσο συστηματικά οργανωμένες. Στην Ελλάδα, πολύ λίγοι ήταν αυτοί που ήδη δραστηριοποιούνταν στον χώρο αυτό, μεταξύ αυτών και οι σημερινοί βασικοί διοργανωτές, ο Ν. Καστάνης κι ο Γ. Θωμαΐδης.

Έκτοτε πέρασαν 15 χρόνια σχεδόν, η ομάδα *HPM* επεκτάθηκε, διάφορες δραστηριότητες άρχισαν να παίρνουν συστηματικότερο χαρακτήρα και να βελτιώνονται (όπως το ανά τετραετία *Satellite Meeting* της ομάδας του αντιστοίχου συνεδρίου της *ICMI* (*ICME*), και το *HPM Newsletter* που έχει βελτιωθεί σημαντικά τα τελευταία 5 χρόνια και διακινείται πια και μέσω του διαδικτύου), νέες δραστηριότητες εμφανίστηκαν (όπως το θερινό Ευρωπαϊκό πανεπιστήμιο *European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education*, ο συλλογικός τόμος *History in Mathematics Education: The ICMI Study* που εκδόθηκε το 2000 ως μια ICMI Study με επιμελητές τον αείμνηστο J. Fauvel και τον J. van Maanen καταγράφοντας την διεθνή εμπειρία στον χώρο και ανοίγοντας νέες κατευθύνσεις για περαιτέρω έρευνα, καθώς επίσης και η δημιουργία διαδικτυακού τόπου της ομάδας). Γενικότερα, η ομάδα διευρύνθηκε γεωγραφικά, οι δραστηριότητές της απέκτησαν μεγαλύτερο βάθος και συστηματικότητα, έτσι ώστε, να αποτελεί πια μαζί με την ομάδα *PME* (*Psychology in Mathematics Education*) τις δύο βασικότερες διεθνείς ομάδες μελέτης που τελούν υπό την αιγίδα της *ICMI*.

Η τωρινή μας συνάντηση είναι η τρίτη κατά σειρά στον ελληνικό χώρο με παρόμοια θεματολογία, μαζί με την προαναφερθείσα το 1991 και την συνάντηση το 1997 εδώ πάλι, που κατέγραψε την ελληνική εμπειρία κατά την προετοιμασία της *ICMI Study* που εκδόθηκε τρία χρόνια αργότερα.

Ελπίζω ότι και η τωρινή μας συνάντηση θα είναι εξ ίσου γόνιμη με τις προηγούμενες, θέτοντας τα θεμέλια για μια συστηματικότερη συνεργασία των ενδιαφερομένων πάνω στις διδακτικά αξιοποιήσιμες όψεις της ιστορίας των μαθηματικών και της μαθηματικής εκπαίδευσης και τους τρόπους με τους οποίους μπορεί τούτο να γίνει στην καθημερινή πράξη σε όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες.

Ευχαριστώ ιδιαίτερα τον Ν. Καστάνη και τον Γ. Θωμαΐδη που είχαν την ιδέα να γίνει η συνάντηση αυτή και ανέλαβαν όλο το βάρος της διοργάνωσης, την Επιστημονική Επιτροπή που έκρινε και συνέβαλε στην βελτίωση των εργασιών που θα παρουσιαστούν, το Τμήμα Μαθηματικών του ΑΠΘ και την Περιφερειακή Διεύθυνση Α΄ βάθμιας & Β΄ βάθμιας Εκπαίδευσης Κ. Μακεδονίας για την υλική και ηθική στήριξη της προσπάθειας και τις Εκδόσεις Ζήτη για την έκδοση των πρακτικών και την αμέριστη συμπαράσταση σε πολλά άλλα επί μέρους ζητήματα που απαιτούσαν οικονομική και υλική υποστήριξη. Τέλος, ευχαριστώ όλους εσάς για την συμμετοχή σας και ελπίζω ότι τούτη η συνάντηση, μέσω των ομιλιών και συζητήσεων που θα γίνουν, θα είναι χρήσιμη και εποικοδομητική για όλους μας.

***Κώστας Τζανάκης***

*Πρόεδρος της International Study Group*
*on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics*

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στον παρόντα τόμο περιέχονται τα κείμενα των εισηγήσεων που παρουσιάστηκαν στη διήμερη συνάντηση με θέμα "Ιστορία των Μαθηματικών, της μαθηματικής εκπαίδευσης και οι διδακτικές τους προεκτάσεις". Η συνάντηση πραγματοποιήθηκε στις 14 & 15 Απριλίου 2006 στη Θεσσαλονίκη, υπό την αιγίδα του Τμήματος Μαθηματικών του Α.Π.Θ. και της Περιφερειακής Διεύθυνσης Πρωτοβάθμιας & Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης Κ. Μακεδονίας.

Σκοπός της συνάντησης ήταν να φέρει σε επαφή τους Έλληνες ερευνητές που ασχολούνται με την Ιστορία των Μαθηματικών και ιδιαίτερα με τους τομείς εκείνους όπου η τελευταία συναντά και επηρεάζει το χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Το ζήτημα αυτό έχει προσελκύσει τις τελευταίες δεκαετίες το ενδιαφέρον ερευνητών από όλο τον κόσμο και έχει γίνει αντικείμενο πολλών δραστηριοτήτων, κυρίως μέσα στο πλαίσιο της International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics (HPM Group). Μια τέτοια, ιδιαίτερα σημαντική δραστηριότητα υπήρξε η συγγραφή και δημοσίευση του συλλογικού τόμου "History in Mathematics Education: The ICMI Study" (με επιμέλεια των J. Fauvel και J. van Maanen), στη σειρά των εκδόσεων της Διεθνούς Επιτροπής για τη Μαθηματική Εκπαίδευση (ICMI Study Series, Kluwer Academic Publishers, 2000).

Σε όλες αυτές τις δραστηριότητες υπάρχει τα τελευταία χρόνια σημαντική Ελληνική συμμετοχή, έτσι ώστε, το καλοκαίρι του 2004, στο (ανά τετραετία) συνέδριο της HPM που έλαβε χώρα στην Ουψάλα της Σουηδίας, να ανατεθεί στους Κώστα Τζανάκη και Νίκο Καστάνη η προεδρία της HPM Group και η επιμέλεια έκδοσης του Ενημερωτικού της Δελτίου (Newsletter) αντίστοιχα για την περίοδο 2004-2008.

Η θεματολογία της συνάντησης αυτής οργανώθηκε σε τρεις ενότητες. Η πρώτη επικεντρώνεται στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά και αποβλέπει στην ανάδειξη ορισμένων χαρακτηριστικών της μαθηματικής σκέψης στον Αρχαίο Ελληνικό Πολιτισμό. Στη δεύτερη ενότητα προσεγγίζονται πλευρές της Ελληνικής μαθηματικής παιδείας του 19$^{ου}$ αιώνα, και στην τρίτη επισημαίνονται μερικές διδακτικές όψεις της Ιστορίας των Μαθηματικών. Όλες οι εισηγήσεις κρίθηκαν από την ακόλουθη επιστημονική επιτροπή: Κ. Ζορμπαλά, Γ. Θωμαΐδης, Ν. Καστάνης, Μ. Λάμπρου, Μ. Παντέκη, Κ. Τζανάκης και Χ. Φίλη.

Οι συζητήσεις που έγιναν κατά τη διάρκεια της διήμερης συνάντησης στη Θεσσαλονίκη και ο ανά χείρας τόμος των εισηγήσεων, πιστεύουμε ότι θα συμβάλλουν αποφασιστικά στη συσπείρωση και οργάνωση ενός ελληνικού τμήματος της HPM, στην ανάπτυξη ερευνητικών συνεργασιών και στην πραγματοποίηση παρόμοιων εκδηλώσεων σε άλλες πόλεις.

*Οι επιμελητές της έκδοσης*

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

**Προσεγγίσεις στην Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών**

***Γιάννης Θωμαΐδης***
Διδακτικές όψεις της γενίκευσης στα *Αριθμητικά* του Διόφαντου......................15

***Γιάννης Πετράκης***
Η γλώσσα των μαθηματικών κειμένων του Ευκλείδη και του Πρόκλου ...........29

***Βαγγέλης Σπανδάγος***
Οι εκδόσεις των έργων των Αρχαίων Ελλήνων Μαθηματικών
και Αστρονόμων στη νεότερη Ελλάδα ...................................................................47

**Προσεγγίσεις στην Ιστορία της Μαθηματικής Παιδείας**

***Ανδρέας Πούλος*** *(Εισαγωγή)*
Οι πολλαπλές διαστάσεις του παιδαγωγικού και μαθηματικού έργου
του Νικολάου Σωτηράκη .........................................................................................71

***Κωνσταντίνα Ζορμπαλά***
Κυρίαρχες απόψεις στην Ελληνική Σχολική Γεωμετρία τον $19^{ον}$ αιώνα............95

***Γιώργος Ζούμπος***
Ο Ιταλός μαθηματικός Ottavio F. Mossotti και η περίοδος
της καθηγεσίας του στην Ιόνιο Ακαδημία (1836-1841) ....................................113

***Ανδρέας Καστάνης***
Η Διδασκαλία των Μαθηματικών στην Στρατιωτική Σχολή Ευελπίδων
κατά την πρώτη Οθωνική περίοδο (1834-1854) ................................................131

***Νίκος Καστάνης***
Ο Αμερικανικός Πεσταλοτσισμός στην Ελληνική Μαθηματική Παιδεία
(1830-1836) ..............................................................................................................153

***Χριστίνα Φίλη***
Η επιστημονική δραστηριότητα του Νικολάου Νικολαΐδη στο Παρίσι
(1862-1865) ..............................................................................................................171

## Διδακτικές Προσεγγίσεις στην Ιστορία των Μαθηματικών

***Κώστας Τζανάκης*** *(Εισαγωγή)*
Η Διεθνής Ομάδα Μελέτης των Σχέσεων μεταξύ Ιστορίας των Μαθηματικών και Μαθηματικής Εκπαίδευσης ........ 201

***Κατερίνα Βερυκάκη*** & ***Νίκος Καστάνης***
*Εννοιολογικές αλλαγές*: Μια αναβάθμιση του διδακτικού ρόλου της Ιστορίας των Μαθηματικών ........ 213

***Ελένη Δημητριάδου***
*Φανερώνω ή πείθω*: Επιστημολογικά και διδακτικά ζητήματα που συνδέονται με την έννοια της απόδειξης ........ 233

***Γιάννης Θωμαΐδης*** & ***Κώστας Τζανάκης***
Ανάγνωση ιστορικών κειμένων και συζητήσεις για την έννοια της απόδειξης σε μια διαθεματική προσέγγιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ........ 253

***Δημήτρης Πατσόπουλος***
*Ευκλείδης ή Ήρων*; Μετρήσεις απόστασης απρόσιτων σημείων στα βυζαντινά εγχειρίδια Γεωμετρίας ........ 273

*Ευρετήριο συγγραφέων* ........ 287

# Διδακτικές όψεις της γενίκευσης στα *Αριθμητικά* του Διόφαντου

***Γιάννης Θωμαΐδης***

*Πειραματικό Σχολείο*
*Πανεπιστημίου Μακεδονίας*
*gthom@otenet.gr*

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή εξετάζουμε το ζήτημα της γενικότητας των μεθόδων “αλγεβρικής” επίλυσης αριθμητικών προβλημάτων που χρησιμοποιεί ο Διόφαντος στο έργο του *Αριθμητικά*. Συνδυάζοντας τις υποδείξεις διδακτικού χαρακτήρα που περιέχονται στην εισαγωγή του έργου, με στοιχεία που προκύπτουν από τη μελέτη των διαδικασιών επίλυσης, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ορισμένες ιδιότυπες πρακτικές του Διόφαντου, με εμφανείς διδακτικές όψεις, αποτελούν δομικά στοιχεία της γενικότητας των μεθόδων του.

## Εισαγωγή

Το περιεχόμενο των *Αριθμητικών* του Διόφαντου, έργο που σύμφωνα με την επικρατέστερη εκδοχή γράφτηκε γύρω στο 250 μ.Χ. στην Αλεξάνδρεια, θα μπορούσε σήμερα να χαρακτηριστεί επιγραμματικά ως “αλγεβρική επίλυση αριθμητικών προβλημάτων κατά την προ-συμβολική περίοδο της Άλγεβρας”.[1]

Ένα πολύ χαρακτηριστικό στοιχείο αυτού του έργου είναι ότι τα αριθμητικά προβλήματα που περιέχει διατυπώνονται με τελείως γενικό τρόπο, αλλά αμέσως μετά επιλέγονται συγκεκριμένα αριθμητικά δεδομένα πάνω στα οποία διεξάγεται η διαδικασία επίλυσης. Έτσι τα τελικά αποτελέσματα που προκύπτουν αποτελούν μια

1 Ο συγκεκριμένος χαρακτηρισμός θέτει ήδη ένα ιστοριογραφικό ζήτημα, με το οποίο όμως δεν πρόκειται να ασχοληθούμε εδώ. Είναι γνωστό ότι ο Αραβικής προέλευσης όρος “άλγεβρα” προέρχεται από τον τίτλο ενός βιβλίου που έγραψε ο al-Khwārizmī στις αρχές του 9ου αιώνα, με αντικείμενο επίσης την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων, αλλά περιεχόμενο που διαφέρει ουσιωδώς από εκείνο των *Αριθμητικών* (χωρίς να υπάρχουν ενδείξεις ότι ο al-Khwārizmī γνώριζε το έργο του Διόφαντου). Είναι επίσης γνωστό ότι η “άλγεβρα” έγινε γνωστή στη Δυτική Ευρώπη κατά το 12ο αιώνα μέσα από Λατινικές μεταφράσεις του εν λόγω Αραβικού βιβλίου, ενώ η μετάφραση και αξιοποίηση των *Αριθμητικών* ακολούθησε ύστερα από τρεις περίπου αιώνες.

ειδική λύση του προβλήματος. Σε γενικές γραμμές, η επίλυση αρχίζει με την εισαγωγή ενός αγνώστου ο οποίος δηλώνεται με το ς, τελικό γράμμα της λέξης "αριθμός", στη συνέχεια δημιουργούνται συντομογραφικές εκφράσεις ("υποστάσεις") για τους υπόλοιπους αγνώστους, εκφράζονται συντομογραφικά οι διάφορες σχέσεις ("επιτάγματα") του προβλήματος και κατασκευάζεται μια εξίσωση. Η τελευταία μετασχηματίζεται με τους κανόνες της "μεταφοράς όρων" και της "αναγωγής ομοίων όρων" σε μια απλοποιημένη μορφή, από την οποία προσδιορίζεται η τιμή του αρχικού αγνώστου (που είναι πάντοτε ένας θετικός ρητός αριθμός).

Ας δούμε ως παράδειγμα το πρώτο πρόβλημα του $1^{ου}$ Βιβλίου των *Αριθμητικών*.[2] Στο πρόβλημα αυτό, όπως και στα επόμενα, έχουμε χωρίσει την παρουσίαση σε μικρές ενότητες ώστε να γίνονται φανερά τα επιμέρους δομικά στοιχεία της μεθοδολογίας του Διόφαντου.

| | |
|---|---|
| **Διατύπωση του προβλήματος** | Να διασπαστεί ένας αριθμός σε δύο αριθμούς που έχουν δοθείσα διαφορά. |
| **Επιλογή δεδομένων** | Έστω ότι ο δοθείς αριθμός είναι το 100, η δε διαφορά το 40. Να βρεθούν οι αριθμοί. |
| **Εισαγωγή του αγνώστου, επιλογή υποστάσεων, δημιουργία και επίλυση μιας εξίσωσης** | Ας τεθεί x ο μικρότερος.[3] Τότε ο μεγαλύτερος είναι $x+40$. Άρα οι δύο μαζί γίνονται $2x+40$. Δόθηκε όμως ότι είναι 100.<br>Άρα το 100 είναι ίσο με $2x+40$.<br>Από ομοίων όμοια. Αφαιρώ από το 100, το 40 και από το 2x+ 40 ομοίως το 40. Μένουν οι 2x ίσοι με 60. Άρα ο καθένας γίνεται 30. |
| **Η λύση του προβλήματος** | Έρχομαι στις υποστάσεις. Ο μικρότερος είναι το 30, ο μεγαλύτερος το 70 και η απόδειξη φανερή. |

Για να αξιολογήσουμε την προηγούμενη διατύπωση και λύση του Διόφαντου από τη σκοπιά της νεώτερης συμβολικής Άλγεβρας, ας δούμε πώς διατυπώνει και λύνει

2 Σύμφωνα με τα αναφερόμενα από τον Διόφαντο στην εισαγωγή των *Αριθμητικών*, το έργο αυτό αποτελούνταν από 13 βιβλία (δηλαδή κεφάλαια). Από αυτά έχουν διασωθεί 10 βιβλία, 6 στο ελληνικό πρωτότυπο και 4 σε μια αραβική μετάφραση του $9^{ου}$ αιώνα.

3 Ο Διόφαντος χρησιμοποιεί ως σύμβολο του αγνώστου το τελικό γράμμα της λέξης "αριθμός". Επίσης δεν χρησιμοποιεί το σημερινό σύμβολο της πρόσθεσης, αλλά παραθέτει τους προσθετέους τον ένα μετά τον άλλο, και φυσικά γράφει τους αριθμούς σύμφωνα με το αρχαιοελληνικό σύστημα αρίθμησης.

το ίδιο πρόβλημα ο Leonhard Euler στην περίφημη *Άλγεβρά* του (1770): [4]

Ζητείται να διασπαστεί ο α σε δύο μέρη, ώστε το μεγαλύτερο να υπερβαίνει το μικρότερο κατά b.

**1η μέθοδος**. Έστω $x$ το μεγαλύτερο μέρος. Τότε το άλλο θα είναι $\alpha - x$. Άρα $x = \alpha - x + b$. Προσθέτοντας $x$, έχουμε $2x = \alpha + b$ και διαιρώντας με το 2, $x = \dfrac{\alpha + b}{2}$.

**2η μέθοδος**. Έστω το μεγαλύτερο μέρος $= x$. Επειδή αυτό υπερβαίνει το μικρότερο κατά $b$, είναι φανερό ότι το τελευταίο θα είναι μικρότερο κατά $b$, και επομένως πρέπει να είναι $= x - b$. Αυτά τα δύο μέρη μαζί, οφείλουν να κάνουν $\alpha$. Έτσι λοιπόν $2x - b = \alpha$. Προσθέτοντας το $b$, έχουμε $2x = \alpha + b$, από το οποίο $x = \dfrac{\alpha + b}{2}$, που είναι η τιμή του μεγαλύτερου μέρους. Και αυτή του μικρότερου θα είναι

$$\frac{\alpha + b}{2} - b, \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha + b}{2} - \frac{2b}{2}, \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha - b}{2}.$$

**3η μέθοδος**. Έστω ότι ο μεγαλύτερος από τους δύο αριθμούς εκφράζεται με το $x$, και ο μικρότερος με το $y$. Θα έχουμε τότε $x + y = \alpha$ και $x - y = b$.
Εδώ η πρώτη εξίσωση δίνει $x = \alpha - y$, και η δεύτερη $x = b + y$.

Επομένως, $\alpha - y = b + y$, $\alpha = b + 2y$, $2y = \alpha - b$, τελικά $y = \dfrac{\alpha - b}{2}$ και επομένως

$$x = \alpha - y = \alpha - \frac{\alpha - b}{2} = \frac{\alpha + b}{2}.$$

Έχουμε λοιπόν το επόμενο θεώρημα: Όταν το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε αριθμών είναι α, και η διαφορά τους είναι b, τότε ο μεγαλύτερος των δύο αριθμών θα είναι το ημιάθροισμα συν η ημιδιαφορά, ενώ ο μικρότερος των δύο αριθμών θα είναι το ημιάθροισμα μείον η ημιδιαφορά.

**4η μέθοδος**. Επειδή οι δύο εξισώσεις είναι,

$$x + y = \alpha \quad \text{και} \quad x - y = b,$$

αν προσθέσουμε τη μία στην άλλη, έχουμε $2x = \alpha + b$. Επομένως $x = \dfrac{\alpha + b}{2}$.

Επίσης, αν αφαιρέσουμε τις ίδιες εξισώσεις τη μία από την άλλη, έχουμε $2y = \alpha - b$

4 Βλ. L. Euler, *Elements of Algebra* (σ.194 και σ.208)

και επομένως $y = \frac{\alpha - b}{2}$.

Όπως γίνεται φανερό από τα παραπάνω, οι λύσεις του Euler στηρίζονται στη χρήση γενικών μεταβλητών για τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος, καθώς και διαφορετικών συμβόλων για κάθε άγνωστο. Τα μέσα αυτά, που καθιερώθηκαν ύστερα από τη συστηματική χρήση τους στο έργο του F. Viète *In Artem Analytikem Isagoge* (1591), έκαναν δυνατή την αναπαράσταση και το χειρισμό των δεδομένων, των σχέσεων και των ζητουμένων ενός μαθηματικού προβλήματος με συμβολικό τρόπο, καθώς και την έκφραση των αποτελεσμάτων στη μορφή κλειστών αλγεβρικών τύπων. Έτσι λοιπόν, αν στο συγκεκριμένο πρόβλημα ο δοθείς αριθμός είναι $\alpha = 2290$ και η δοθείσα διαφορά $b = 410$, τότε ο αναγνώστης του Euler για να βρει τη λύση $(2290 = 1350 + 940)$ δεν έχει παρά να αντικαταστήσει τις τιμές αυτές στους τύπους του ημιαθροίσματος και της ημιδιαφοράς. Αντίθετα, ο αναγνώστης του Διόφαντου πρέπει να επαναλάβει όλη τη διαδικασία επίλυσης με τα νέα αριθμητικά δεδομένα.

Η έλλειψη από το έργο του Διόφαντου των συμβολικών εργαλείων της σύγχρονης Άλγεβρας οδηγεί σε ορισμένα βασικά ερωτήματα:

1. Η εξάρτηση των λύσεων του Διόφαντου από συγκεκριμένους αριθμούς αποκαλύπτει απλώς τον ειδικό χαρακτήρα τους, ή υποδηλώνει κάποια διαφορετική αντίληψη περί γενίκευσης στα Μαθηματικά;
2. Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στη γενική διατύπωση ενός προβλήματος στα *Αριθμητικά* και την αντίστοιχη ειδική λύση;
3. Πώς αντιλαμβάνονταν οι αρχαίοι αναγνώστες των *Αριθμητικών* ότι η μέθοδος επίλυσης ενός προβλήματος που διεξάγεται με συγκεκριμένα αριθμητικά δεδομένα, είναι έγκυρη σε όλες τις περιπτώσεις που υπονοεί η γενική διατύπωσή του;

Συνδετικός κρίκος στα ερωτήματα αυτά είναι, όπως βλέπουμε, η γενικότητα των μεθόδων του Διόφαντου. Η σημασία, ειδικότερα, του τρίτου ερωτήματος προκύπτει άμεσα από τον εμφανή διδακτικό προσανατολισμό των *Αριθμητικών*.

Στο εισαγωγικό τμήμα του έργου ο Διόφαντος, απευθυνόμενος σε κάποιον διψασμένο για μάθηση "τιμιότατο Διονύσιο", εκθέτει ορισμένες ψυχολογικές, διδακτικές και μεθοδολογικές παρατηρήσεις σχετικά με την επίλυση προβλημάτων.
Ο Διόφαντος τονίζει το γεγονός ότι οι ψυχές των αρχάριων αμφιβάλλουν για την επιτυχία, αλλά η προθυμία για μάθηση συνοδευόμενη από τη δική του διδασκαλία θα εξασφαλίσει την ταχεία πρόσληψη της νέας γνώσης. Για να πραγματοποιηθεί όμως αυτό απαιτούνται δύο βασικές προϋποθέσεις. Η πρώτη αφορά την εξάσκηση. Ο Διόφαντος παροτρύνει το Διονύσιο να ασκηθεί πρωταρχικά πάνω στο περιεχόμενο των *Αριθμητικών* έτσι ώστε να γίνει κάτοχος της βασικής θεωρίας και της με-

θοδολογίας, δηλαδή τις πράξεις με τις δυνάμεις του αγνώστου καθώς επίσης τη δημιουργία και επίλυση εξισώσεων (καλώς ούν έχει εναρχόμενον της πραγματείας συνθέσει καί αφαιρέσει καί πολλαπλασιασμοίς τοις περί τά είδη γεγυμνάσθαι ... Φιλοτεχνείσθω δε τούτο εν ταις υποστάσεσι των προτάσεων). Από την άλλη μεριά όμως, ο όγκος της ύλης επιβραδύνει την αφομοίωση και δυσχεραίνει τη συγκράτηση στη μνήμη (καί διά τούτο βραδέως βεβαιουμένων υπό των παραλαμβανόντων αυτά καί όντων εν αυτοίς δυσμνημονεύτων). Έτσι λοιπόν η δεύτερη προϋπόθεση αφορά την οργάνωση της ύλης. Ο Διόφαντος ανακοινώνει προς το Διονύσιο ότι προσπάθησε να διαιρέσει τα προβλήματα ώστε στην αρχή να βρίσκονται τα στοιχειώδη και να προχωρεί από τα ευκολότερα στα δυσκολότερα. Διότι με τον τρόπο αυτό, σημειώνει, γίνονται εύκολα αντιληπτά από τους αρχάριους και όσα μαθαίνουν αποτυπώνονται στη μνήμη (ούτως γάρ ευόδευτα γενήσεται τοις αρχομένοις, καί η αγωγή αυτών μνημονευθήσεται ...).[5]

Το γεγονός ότι η μάθηση συνδέεται δύο φορές με τη “συγκράτηση ή αποτύπωση στη μνήμη”, δεν είναι άσχετο με το ζήτημα της γενικότητας που θέτουν τα τρία προηγούμενα ερωτήματα. Στον αναγνώστη των *Αριθμητικών* δεν παρέχονται προς απομνημόνευση τύποι αλγεβρικών ταυτοτήτων ή επίλυσης εξισώσεων, όπως αυτοί που προβάλλονται στα σύγχρονα σχολικά βιβλία Άλγεβρας. Εκείνο που βλέπει και πρέπει να συγκρατήσει στη μνήμη του, είναι μακροσκελείς περιγραφές διαδικασιών που ξεκινούν από αριθμητικά δεδομένα και οδηγούν σε αριθμητικά αποτελέσματα. Για να “μεταβιβαστεί” όμως η **γενικότητα** που υποδηλώνεται στη διατύπωση του προβλήματος, μέσω της περιγραφής μιας επίλυσης που χρησιμοποιεί **συγκεκριμένα** αριθμητικά δεδομένα, θα πρέπει η τελευταία να είναι παραδειγματική, δηλαδή να λειτουργεί ως “υπόδειγμα”. Αυτό επιβάλλει την ύπαρξη κάποιων “δεικτών” που θα διευκολύνουν τον προσανατολισμό του αναγνώστη – λύτη όταν επιχειρήσει να **επαναλάβει** τη διαδικασία με διαφορετικά δεδομένα. Άρα ο διδάσκων, για να εξασφαλίσει την αποτελεσματικότητα και γενικότητα της μεθόδου επίλυσης που προτείνει, θα πρέπει ν’ αναλάβει κάποιες πρωτοβουλίες προς αυτή την κατεύθυνση.

Θα παρουσιάσουμε τώρα δύο προβλήματα των *Αριθμητικών* από τα οποία φαίνεται ότι οι μέθοδοι επίλυσης του Διόφαντου περιέχουν βήματα που υποδηλώνουν διδακτικές πρωτοβουλίες αυτού του είδους. Όπως θα διαπιστώσουμε όμως στη συ-

5 Όπως είναι φανερό, ο Διόφαντος εξαίρει εδώ ορισμένες παραδοσιακές αρχές της διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών: η οργάνωση της ύλης από το απλό προς το σύνθετο και η συστηματική διδασκαλία, μαζί με την προθυμία για μάθηση και εξάσκηση, θα εξασφαλίσουν σταθερή γνώση. Είναι βέβαια γνωστό ότι η σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών, υπό την επίδραση των λεγόμενων “εποικοδομητικών” θεωριών μάθησης, αμφισβητεί σοβαρά αυτό το μοντέλο διδασκαλίας και μάθησης.

νέχεια, τα βήματα αυτά αποτελούν δομικά στοιχεία της γενικότητας των μεθόδων του Αλεξανδρινού μαθηματικού.

## Το πρόβλημα 15 του 4ου Ελληνικού Βιβλίου των *Αριθμητικών*

Να βρεθούν τρεις αριθμοί τέτοιοι, ώστε αν προσθέσουμε δύο οποιουσδήποτε από αυτούς και πολλαπλασιάσουμε το άθροισμα με τον τρίτο, να προκύπτει δεδομένος αριθμός.

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να διατυπωθεί σήμερα με γενικό τρόπο, στη μορφή ενός συστήματος τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους:

$$x(y+\omega)=\alpha,\quad y(\omega+x)=\beta,\quad \omega(x+y)=\gamma$$ [6]

Ο Διόφαντος λύνει το πρόβλημα με τον εξής τρόπο:

| | |
|---|---|
| **Διατύπωση του προβλήματος** | Να βρεθούν τρεις αριθμοί τέτοιοι, ώστε αν προσθέσουμε δύο οποιουσδήποτε από αυτούς και πολλαπλασιάσουμε το άθροισμα με τον τρίτο, να προκύπτει δεδομένος αριθμός. |
| **Επιλογή αριθμητικών δεδομένων** | Έστω ότι το άθροισμα του πρώτου και δεύτερου επί τον τρίτο να δίνει 35, το άθροισμα του δεύτερου και τρίτου επί τον πρώτο να δίνει 27 και το άθροισμα του πρώτου και τρίτου επί τον δεύτερο να δίνει 32. |
| **Εισαγωγή του αγνώστου, επιλογή υποστάσεων και δημιουργία εξισώσεων** | Ας τεθεί ο τρίτος $x$. Τότε το άθροισμα του πρώτου και δεύτερου θα είναι $35/x$.<br>Έστω ότι ο πρώτος είναι $10/x$, άρα ο δεύτερος θα είναι $25/x$.<br>Υπολείπονται δύο επιτάγματα, το άθροισμα του δεύτερου και τρίτου επί τον πρώτο να δίνει 27 και το άθροισμα του πρώτου και τρίτου επί τον δεύτερο να δίνει 32.<br>Αλλά ο δεύτερος και τρίτος επί τον πρώτο δίνει $10+\frac{250}{x^2}$.<br>Άρα το $10+\frac{250}{x^2}$ ισούται με 27. |

6 Το σύστημα αυτό ανήκει στην κατηγορία των λεγόμενων “κυκλικών συστημάτων”, τα οποία μαζί με άλλες μορφές συστημάτων 2ου βαθμού αποτελούσαν παραδοσιακά ένα ιδιαίτερο κεφάλαιο της σχολικής Άλγεβρας. Βλ. σχετικά Π. Τόγκα, *Άλγεβρα και Συμπλήρωμα Αλγέβρας* (σ.667). Το ίδιο πρόβλημα περιέχεται και στην Άλγεβρα του Euler (ό.π., σ.222). Μια σύγχρονη γενική λύση του συστήματος δίνουμε στο Παράρτημα.

| | |
|---|---|
| | Επίσης ο πρώτος και ο τρίτος επί τον δεύτερο δίνει $25+\frac{250}{x^2}$. <br> Άρα το $25+\frac{250}{x^2}$ ισούται με 32. |
| **Απόρριψη των αρχικών υποστάσεων** | Επειδή όμως η διαφορά των 32 και 27 είναι 5, θα πρέπει και η διαφορά των $25+\frac{250}{x^2}$ και $10+\frac{250}{x^2}$ να είναι 5. |
| **Ανάλυση της κατάστασης και αναγωγή του προβλήματος** | Αλλά το 25 προέρχεται από τον δεύτερο και το 10 από τον πρώτο. Θέλουμε λοιπόν η διαφορά τους να είναι 5. Όμως ο πρώτος και ο δεύτερος δεν είναι τυχόντες, αλλά έχουν άθροισμα 35. Ανάγεται λοιπόν στο να διασπαστεί ο 35 σε άθροισμα δύο αριθμών ώστε ο ένας να υπερέχει του άλλου κατά 5.[7] Τέτοιοι είναι ο 15 και ο 20. |
| **Επιλογή νέων υποστάσεων, δημιουργία και επίλυση νέων εξισώσεων** | Θέτω τον πρώτο $15/x$ και τον δεύτερο $20/x$. <br> Το άθροισμα του δεύτερου και τρίτου επί τον πρώτο δίνει <br> $15+\frac{300}{x^2}$. Αυτά είναι ίσα με 27. <br> Το άθροισμα του πρώτου και τρίτου επί το δεύτερο δίνει <br> $20+\frac{300}{x^2}$ Αυτά είναι ίσα με 32. <br> Από τη τελευταία προκύπτει ότι είναι $\frac{300}{x^2}$ ίσα με 12, δηλαδή ο x ίσος με 5. |
| **Η λύση του προβλήματος** | Έρχομαι στις υποστάσεις. Ο πρώτος θα είναι 3, ο δεύτερος 4 και ο τρίτος 5. |

Παρατηρούμε ότι στην προηγούμενη επίλυση του προβλήματος ο Διόφαντος ενσωματώνει μια διαδικασία “δοκιμής και πλάνης”. Αναζητώντας δύο αριθμούς με άθροισμα 35, δοκιμάζει αρχικά τους 10 και 25 αλλά η επιλογή αυτή οδηγεί σε δύο ασυμβίβαστες εξισώσεις. Ύστερα από επανεξέταση της κατάστασης καταλήγει σε μια νέα επιλογή (15 και 20) και σε επανάληψη των ίδιων βημάτων, τα οποία οδηγούν τελικά στη λύση του προβλήματος. Το ερώτημα που εύλογα τίθεται είναι το εξής: Για ποιο λόγο ο Διόφαντος ενσωμάτωσε στα *Αριθμητικά* την αποτυχημένη

7 Αυτό είναι, με διαφορετικά αριθμητικά δεδομένα, το πρώτο πρόβλημα του πρώτου Βιβλίου των *Αριθμητικών* που εξετάσαμε προηγουμένως.

απόπειρα και δεν παρουσίασε την επίλυση με χρήση των ορθών αριθμητικών δεδομένων;

Είναι χαρακτηριστικό ότι αυτή η διαδικασία “δοκιμής και πλάνης” χρησιμοποιείται από το Διόφαντο με συστηματικό τρόπο, και πολλές φορές η επανεξέταση της κατάστασης και η έξοδος από το αδιέξοδο απαιτούν την επίλυση ενός υπο-προβλήματος. Μια τέτοια περίπτωση παρουσιάζεται στο επόμενο πρόβλημα.

## Το πρόβλημα 18 του 4ου Ελληνικού Βιβλίου των *Αριθμητικών*

Να βρεθούν δύο αριθμοί τέτοιοι, ώστε αν ο κύβος του πρώτου προσλάβει το δεύτερο να προκύπτει κύβος και αν το τετράγωνο του δεύτερου προσλάβει τον πρώτο να προκύπτει τετράγωνο.

Το πρόβλημα αυτό, που είναι αρκετά πιο δύσκολο από το προηγούμενο, μπορεί να διατυπωθεί σήμερα γενικά στη μορφή ενός τριτοβάθμιου συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$$x^3 + y = \alpha^3, \quad y^2 + x = \beta^2$$

Ο Διόφαντος λύνει το πρόβλημα με το συνήθη τρόπο. Ύστερα από τη γενική διατύπωση, εισάγει συγκεκριμένα αριθμητικά δεδομένα, δημιουργεί τις “υποστάσεις” των αγνώστων και χρησιμοποιεί τα “επιτάγματα” για να κατασκευάσει τελικά μια εξίσωση.

| | |
|---|---|
| **Διατύπωση του προβλήματος** | Να βρεθούν δύο αριθμοί τέτοιοι, ώστε αν ο κύβος του πρώτου προσλάβει το δεύτερο να προκύπτει κύβος και αν το τετράγωνο του δεύτερου προσλάβει τον πρώτο να προκύπτει τετράγωνο. |
| **Επιλογή αριθμητικών δεδομένων** | Έστω ότι ο κύβος που προκύπτει σύμφωνα με το πρώτο επίταγμα είναι το 8. |
| **Εισαγωγή του αγνώστου, επιλογή υποστάσεων και δημιουργία μιας εξίσωσης** | Ας τεθεί ο πρώτος x. Τότε ο δεύτερος θα είναι $8 - x^3$. Έτσι ο κύβος του πρώτου, αφού προσλάβει το δεύτερο, γίνεται ίσος με ένα κύβο.<br>Υπολείπεται τώρα το τετράγωνο του δεύτερου, αφού προσλάβει τον πρώτο, να δίνει τετράγωνο. Αλλά το τετράγωνο του δεύτερου, αφού προσλάβει τον πρώτο, δίνει $x^6 + x + 64 - 16x^3$. Αυτό πρέπει να είναι να είναι ίσο με τετράγωνο, έστω με εκείνο που έχει πλευρά $x^3 + 8$, δηλαδή το $x^6 + 16x^3 + 64$. |

| | |
|---|---|
| | Άρα είναι $x^6+x+64-16x^3$ ίσο με $x^6+16x^3+64$. Προσθέτουμε στα δύο μέρη αυτά που λείπουν και αφαιρούμε τα όμοια από τα όμοια. Μένουν $32x^3$ ίσοι με $x$. Τα διαιρούμε όλα με το x. Άρα μένουν $32x^2$ ίσα με 1. |
| **Απόρριψη των αρχικών υποστάσεων** | Αλλά η μονάδα είναι τετράγωνο. Αν και το $32x^2$ ήταν τετράγωνο τότε θα είχε λυθεί η εξίσωση. |
| **Ανάλυση της κατάστασης και αναγωγή του προβλήματος** | Αλλά το $32x^2$ προέρχεται από το διπλάσιο του $16x^3$, το δε $16x^3$ προέρχεται από το διπλάσιο γινόμενο του 8 και του $x^3$, δηλαδή το διπλάσιο του 8. Άρα το $32x^2$ προέρχεται από το τετραπλάσιο του 8. Ανάγεται λοιπόν στην εύρεση ενός κύβου ο οποίος όταν τετραπλασιάζεται να δίνει τετράγωνο. |
| **Προσδιορισμός νέων δεδομένων μέσω ενός υπο-προβλήματος** | Έστω $x^3$ ο ζητούμενος κύβος. Αυτός όταν τετραπλασιάζεται γίνεται $4x^3$ και πρέπει να είναι ίσος με τετράγωνο. Έστω το $16x^2$. Άρα ο x είναι ίσος με 4.<br>Έρχομαι στις υποστάσεις. Ο κύβος είναι το 64. |
| **Επιλογή νέων υποστάσεων, δημιουργία και επίλυση μιας νέας εξίσωσης** | Θέτω λοιπόν τον δεύτερο ίσο με $64-x^3$. Υπολείπεται τώρα το τετράγωνο του δεύτερου, αφού προσλάβει τον πρώτο, να δίνει τετράγωνο. Αλλά το τετράγωνο του δεύτερου, αφού προσλάβει τον πρώτο, δίνει $x^6+4096+x-128x^3$. Αυτό πρέπει να είναι ίσο με τετράγωνο, έστω με εκείνο που έχει πλευρά $x^3+64$, δηλαδή το $x^6+4096+128x^3$. Από την ισότητα προκύπτει τώρα $256x^3=x$, και γίνεται ο x ίσος με 1/16. |
| **Η λύση του προβλήματος** | Έρχομαι στις υποστάσεις. Ο πρώτος θα είναι 1/16 και ο δεύτερος 262143/4096 |

Όπως παρατηρούμε και εδώ, μια αρχική επιλογή, ο κύβος 8, οδηγεί στην εξίσωση $32x^2=1$ την οποία ο Διόφαντος απορρίπτει επειδή δεν έχει ρητή λύση. Ακολουθεί η επανεξέταση της κατάστασης που οδήγησε σ' αυτήν την εξίσωση, διατυπώνεται μια ικανή συνθήκη και μέσω ενός υπο-προβλήματος προσδιορίζεται ο κατάλληλος κύβος, που είναι το 64.

Το ερώτημα τίθεται πάλι και απαιτεί μιαν απάντηση: Για ποιο λόγο ο Διόφαντος ενσωματώνει στην παρουσίαση της επίλυσης την αποτυχημένη επιλογή του κύβου

8 και δεν αρχίζει απ' ευθείας με τον κύβο 64;

Η συχνή εμφάνιση αυτής της διαδικασίας "δοκιμής και πλάνης" στα *Αριθμητικά* έχει οδηγήσει πολλούς ιστορικούς στο συμπέρασμα ότι πρόκειται για ένα στοιχείο της μεθοδολογίας του Διόφαντου. Ήδη από τα μέσα του 19$^{ου}$ αιώνα, ο G.H.F. Nesselmann την είχε χαρακτηρίσει "Μέθοδο του αναδρομικού υπολογισμού και του παράπλευρου προβλήματος"[8], ενώ πιο πρόσφατα ο B.L. van der Waerden, για μια ανάλογη περίπτωση που εμφανίζεται στο πρόβλημα 10 του 3$^{ου}$ Ελληνικού Βιβλίου των *Αριθμητικών*, γράφει χαρακτηριστικά:

Αυτό που εφαρμόζει εδώ ο Διόφαντος είναι η "μέθοδος της λαθεμένης υπόθεσης" (method of wrong hypothesis)· αρχίζει υποθέτοντας ορισμένες εκφράσεις για τους άγνωστους αριθμούς, και, όταν αυτό τον βάζει σε μπελάδες (brings him into trouble), ψάχνει για τις αιτίες της δυσκολίας και για τις αλλαγές στις υποθέσεις που θα του δώσουν τη δυνατότητα να λύσει το πρόβλημα. [9]

Οι προηγούμενοι χαρακτηρισμοί και οι περιγραφές απέχουν όμως πολύ από μια ερμηνεία του φαινομένου, η οποία θα έδινε ικανοποιητική απάντηση στο ερώτημα:

Γιατί ο Διόφαντος θέλει να αποκαλύψει στον αναγνώστη των *Αριθμητικών* τους μπελάδες και τις δυσκολίες του; Ή για να το θέσουμε κάπως διαφορετικά: Ποιο σκοπό εξυπηρετεί η δημοσιοποίηση μιας ευρετικής διαδικασίας η οποία – υπό κανονικές συνθήκες – πραγματοποιείται σε ένα πρόχειρο σημειωματάριο;

Σε μια πρώτη προσέγγιση, φαίνεται εύλογο να υποθέσουμε ότι αυτή η ιδιότυπη συμπεριφορά του Διόφαντου οφείλεται σε **διδακτικούς λόγους**.[10] Αντί να σβήσει τα ίχνη που τον οδήγησαν σε μια λαθεμένη επιλογή και να παρουσιάσει την τελική, άψογη λύση, ο καλός δάσκαλος δείχνει στο μαθητή το δύσκολο δρόμο που χρειάστηκε να διανύσει. Ο συγγραφέας των *Αριθμητικών* εμφανίζεται εδώ ένας πρόδρομος της λεγόμενης **γενετικής** μεθόδου διδασκαλίας. Αυτή θα ήταν πράγματι μια ελκυστική ερμηνεία, αν ο Διόφαντος την ακολουθούσε με συνέπεια σε όλα τα στά-

8 Βλ. Th. Heath, *Diophantus of Alexandria* (σ.56, υποσημείωση).

9 Το απόσπασμα αυτό υπάρχει στο βιβλίο του Waerden *Science Awakening* (σ.284) και επαναλαμβάνεται αυτούσιο στο πιο πρόσφατο *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations* (σ.104)

10 Η διδακτική σημασία της διαδικασίας "δοκιμής και πλάνης" του Διόφαντου έχει επισημανθεί αρκετές φορές, αλλά συνήθως συνδέεται με τη λεγόμενη μέθοδο "regula falsi" στην οποία, όπως είναι γνωστό, η λύση του προβλήματος προσδιορίζεται από το συντελεστή **αναλογίας** ανάμεσα στα δεδομένα και σε ένα αποτέλεσμα που προκύπτει με βάση μια αυθαίρετη υπόθεση. (Βλ. T. Heath, *Diophantus of Alexandria*, σσ.112 & 175 και B. Lumpkin, *From Egypt to Benjamin Banneker: African origins of false position methods*, σ.282). Προφανώς η ευρετική διαδικασία του Διόφαντου έχει πολύ πιο σύνθετα χαρακτηριστικά από τον προσδιορισμό μιας απλής αναλογίας.

δια της διαδικασίας επίλυσης. Σε ορισμένα όμως από αυτά, όπως στο κρίσιμο στάδιο της επιλογής του αρχικού αγνώστου, το αποτέλεσμα εμφανίζεται πολλές φορές στα μάτια του αναγνώστη σαν ένα τρυκ θαυματοποιού. Π.χ. στο πρόβλημα 27 του $1^{ου}$ Βιβλίου, όπου ζητείται να βρεθούν δύο αριθμοί με δεδομένο άθροισμα και γινόμενο (ο Διόφαντος επιλέγει άθροισμα 20 και γινόμενο 96), οι ζητούμενοι θα μπορούσαν να εκφραστούν στη μορφή x και $20-x$, έτσι ώστε να γίνει αναγωγή του προβλήματος στην επίλυση της εξίσωσης $x^2+96=20x$. Για λόγους που σχετίζονται μάλλον με την πρόθεσή του να αποφύγει εξισώσεις αυτού του είδους στην αρχή των *Αριθμητικών*, ο Διόφαντος επιλέγει χωρίς καμιά εξήγηση την ημιδιαφορά των ζητούμενων αριθμών ως άγνωστο x, εκφράζει τους τελευταίους στη μορφή $10+x$ και $10-x$ και καταλήγει στην εξίσωση $100-x^2=96$, από την οποία συμπεραίνει αμέσως ότι $x=2$. Αυτή η επίλυση πολύ δύσκολα θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως "γενετική προσέγγιση" του συγκεκριμένου προβλήματος.[11]

Τα προηγούμενα δείχνουν ότι η αδιαμφισβήτητη διδακτική αξία της διαδικασίας "δοκιμής και πλάνης" δεν αιτιολογεί επαρκώς την ενσωμάτωσή της στα *Αριθμητικά*. Θεωρούμε ότι βρίσκεται πιο κοντά στην πραγματικότητα μια ερμηνεία που δεν απορρίπτει το ενδεχόμενο να αποτελεί η διαδικασία αυτή ένα δομικό στοιχείο της γενικότητας των λύσεων του Διόφαντου.

Μη διαθέτοντας ένα σύστημα συμβολικών εργαλείων αναπαράστασης, ο Διόφαντος είναι υποχρεωμένος να χρησιμοποιήσει εξαρχής συγκεκριμένα αριθμητικά δεδομένα για να εκφράσει τα "επιτάγματα" που περιέχονται στη γενική διατύπωση ενός προβλήματος. Από την επιλογή των δεδομένων εξαρτάται άμεσα το είδος της εξίσωσης που θα δημιουργηθεί και θα επιτρέψει τον υπολογισμό του αγνώστου. Αν εξαιρεθούν οι λίγες περιπτώσεις όπου η διατύπωση του προβλήματος συνοδεύεται από "διορισμό", δηλαδή μια συνθήκη για την ύπαρξη ρητών λύσεων, είναι αδύνατο να προβλέψει κανείς με βεβαιότητα αριθμητικά δεδομένα που οδηγούν σε εξίσωση επιλύσιμη με τα λιτά εργαλεία που *Αριθμητικών*. Δηλαδή εξίσωση που μπορεί να απλοποιηθεί με τους κανόνες της "μεταφοράς όρων" και της "αναγωγής ομοίων όρων" και να έχει οπωσδήποτε μια θετική ρητή ρίζα.[12]

11 Είναι χαρακτηριστικό ότι στη διάρκεια του $16^{ου}$ και του $17^{ου}$ αιώνα, όταν τα *Αριθμητικά* έγιναν αντικείμενο εξονυχιστικής μελέτης στην Ευρώπη, ο Διόφαντος "κατηγορήθηκε" για επίδειξη ευφυών τεχνασμάτων και απόκρυψη της μεθόδου που οδηγούσε σε αυτά. Βλ. F. Viète, *The Analytic Art* (σ. 26) και R. Descartes, *Κανόνες για την καθοδήγηση του πνεύματος* (σ.41).

12 Είναι συνηθισμένο φαινόμενο να απορρίπτει ο Διόφαντος στην πορεία επίλυσης των προβλημάτων διάφορες εξισώσεις με χαρακτηρισμούς όπως "μη ευχερής" (όταν δεν εφαρμόζονται οι κανόνες επίλυσης), "άτοπος" (όταν οδηγεί σε αρνητική λύση) και "μη ρητή" (όταν

Είναι φανερό ότι η γενική διατύπωση ενός προβλήματος δεν συμβιβάζεται με την ιδέα μιας λύσης η οποία στηρίζεται στην τυχαία επιλογή δεδομένων. Έτσι λοιπόν, σ' ένα έργο στο οποίο η γενικότητα δεν προκύπτει από την ύπαρξη γενικών αποτελεσμάτων, αλλά από την καθολικότητα εφαρμογής των μεθόδων, ο προσδιορισμός κατάλληλων αριθμητικών δεδομένων αναδεικνύεται σε ζήτημα μεγάλης σημασίας και η αντιμετώπισή του απαιτεί κατάλληλη τεχνογνωσία. Με την ένταξη και επίδειξη της διαδικασίας "δοκιμής και πλάνης" στα *Αριθμητικά*, ο Διόφαντος διδάσκει ουσιαστικά την τεχνογνωσία εύρεσης κατάλληλων αριθμητικών δεδομένων στους αναγνώστες του έργου του.[13]

Η "δοκιμή και πλάνη" συνιστά επομένως ένα αντικείμενο διδασκαλίας, αλλά ταυτόχρονα και ένα από τα ευδιάκριτα δομικά στοιχεία της γενικότητας των μεθόδων που χρησιμοποιούνται στα *Αριθμητικά*. Η ύπαρξη παρόμοιων δομικών στοιχείων είναι χαρακτηριστικό γνώρισμα της μεθοδολογίας του Διόφαντου, η καταγραφή και ανάλυση των οποίων αποτελεί βασική προϋπόθεση για να απαντηθούν τα ερωτήματα που διατυπώσαμε στην αρχή αυτής της εισήγησης.[14]

οδηγεί σε άρρητη λύση).

13 Πρέπει βέβαια να επισημάνουμε ότι ο Διόφαντος δεν είναι πάντοτε συνεπής στο συγκεκριμένο ζήτημα. Π.χ. στο προαναφερθέν πρόβλημα 15 χρησιμοποιεί "δοκιμή και πλάνη" για να προσδιορίσει τη διάσπαση $35 = 15 + 20$, αλλά αποφεύγει να μας πει με τρόπο επέλεξε τα αρχικά δεδομένα 35, 27 και 32 που οδηγούν στην απροσδόκητα απλή λύση 3, 4, 5. Θεωρούμε ότι μια πληρέστερη ερμηνεία του ζητήματος μπορεί να δοθεί μόνο μέσα στο πλαίσιο των συζητήσεων για το ρόλο της ανάλυσης και σύνθεσης στα κλασικά έργα της Ελληνικής μαθηματικής παράδοσης. Μια πρόσφατη προσέγγιση, που αμφισβητεί καθιερωμένες απόψεις και αναδεικνύει τη σημασία διδακτικών παραγόντων, αποτελεί η εργασία του R. Netz, *Why did Greek Mathematicians Publish their Analyses?*

14 Το ζήτημα της γενικότητας των μεθόδων που χρησιμοποιούνται στα *Αριθμητικά* το έχουμε εξετάσει λεπτομερώς στην εργασία μας *A Framework for Defining the Generality of Diophantos' Methods in Arithmetica* (βλ. βιβλιογραφία). Σ' αυτήν επιχειρούμε μια κωδικοποίηση των δομικών στοιχείων της μεθοδολογίας του Διόφαντου και τη δημιουργία ενός πλαισίου για τη μελέτη των προαναφερθέντων ερωτημάτων.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ


Descartes, R.: *Κανόνες για την καθοδήγηση του πνεύματος* (μετάφραση Γ. Δαρδιώτης, εισαγωγή Ν. Αυγελής). Θεσσαλονίκη: Εγνατία (1976).

Euler, L.: *Elements of Algebra* (translated from the French edition of 1774 by J. Hewlett). 5th Edition, London: Longman, Orme & Co. (1840). Reprinted, New York: Springer-Verlag (1984).

Heath, Th.: *Diophantus of Alexandria. A Study in the History of Greek Algebra*. 2nd Edition, London: Constable & Co. (1910). Reprinted, New York: Dover (1964).

Netz, R.: Why did Greek Mathematicians *Publish* their Analyses? Στο P. Suppes, J. Moravcsik & H. Mendell (eds.), *Ancient and Medieval Traditions in the Exact Sciences. Essays in Memory of Wilbur Knorr*, pp.139-157. Stanford: CSLI Publications (2000).

Lumpkin, B.: From Egypt to Benjamin Banneker: African origins of false position methods. Στο R. Calinger (ed.), *Vita Mathematica. Historical Research and Integration with Teaching*, pp.279-289. Mathematical Association of America (1996).

Thomaidis, Y.: A Framework for Defining the Generality of Diophantos' Methods in Arithmetica. *Archive for History of Exact Sciences*, pp.591-640 (2005).

Τόγκας, Π.: *Άλγεβρα και Συμπλήρωμα Αλγέβρας*. 24η Έκδοσις. Αθήναι: Εκδοτικός Οίκος Π. Τόγκα (χ.χ.).

Viète, F.: *The Analytic Art* (translated by T. R. Witmer). Kent, Ohio: The Kent State University Press (1983)

Waerden, B. L. van der.: *Science Awakening* (translated from the Dutch edition of 1950 by A. Dresden). New York: John Wiley & Sons (1963). Ελληνική έκδοση (μετάφραση Γ. Χριστιανίδης), Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης (2000).

Waerden, B. L. van der.: *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Berlin: Springer-Verlag (1983).

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Όπως είδαμε, η γενική διατύπωση του προβλήματος 15 του $4^{ου}$ Ελληνικού Βιβλίου των *Αριθμητικών* ισοδυναμεί με το σύστημα των εξισώσεων:

$$x(y + \omega) = \alpha, \quad y(\omega + x) = \beta, \quad \omega(x + y) = \gamma,$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma$ δεδομένοι και $x, y, \omega$ άγνωστοι θετικοί ρητοί αριθμοί.

Αν γράψουμε τις εξισώσεις στη μορφή $xy + x\omega = \alpha$, $y\omega + yx = \beta$, $\omega x + \omega y = \gamma$, και τις προσθέσουμε κατά μέλη, προκύπτει η εξίσωση:

$$xy + y\omega + \omega x = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

Αφαιρώντας διαδοχικά από την τελευταία τις προηγούμενες προκύπτουν οι:

$$y\omega = \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\ , \quad \omega x = \frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}, \quad xy = \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τις τελευταίες κατά μέλη προκύπτει η εξίσωση:

$$x^2y^2\omega^2 = \frac{(\beta+\gamma-\alpha)(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)}{8}$$

δηλαδή

$$xy\omega = \frac{\sqrt{(\beta+\gamma-\alpha)(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)}}{2\sqrt{2}}$$

Διαιρώντας διαδοχικά την τελευταία με τις προηγούμενες βρίσκουμε τη λύση:

$$x = \sqrt{\frac{(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)}{2(\beta+\gamma-\alpha)}}$$

$$y = \sqrt{\frac{(\beta+\gamma-\alpha)(\alpha+\beta-\gamma)}{2(\alpha+\gamma-\beta)}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{(\beta+\gamma-\alpha)(\alpha+\gamma-\beta)}{2(\alpha+\beta-\gamma)}}$$

Από τις τελευταίες σχέσεις γίνεται φανερό ότι η εξασφάλιση θετικών ρητών λύσεων του συστήματος προϋποθέτει σημαντικούς περιορισμούς για τους δεδομένους αριθμούς α, β και γ. Ο Διόφαντος, όπως είδαμε, επιλέγει τις τιμές $\alpha = 27$, $\beta = 32$, και $\gamma = 35$ που οδηγούν στη εξαιρετικά απλή λύση $x = 3$, $y = 4$, $\omega = 5$, χωρίς όμως να διευκρινίζει με ποιο τρόπο έφτασε στη συγκεκριμένη επιλογή. Αυτή η "σιωπή" οδηγεί στην υπόνοια ότι ακολούθησε μάλλον την αντίστροφη πορεία, δηλαδή επέλεξε πρώτα τη λύση 3, 4, 5 και εν συνεχεία υπολόγισε τα α, β, γ σύμφωνα με τις σχέσεις του προβλήματος.

# Οι εκδόσεις των έργων των Αρχαίων Ελλήνων Μαθηματικών και Αστρονόμων στη νεότερη Ελλάδα

***Ευάγγελος Σπανδάγος***

*Μαθηματικός – Συγγραφέας*
*τ. καθηγητής του Πειραματικού Σχολείου*
*του Πανεπιστημίου Αθηνών*

Οι καταστροφές των βιβλιοθηκών της Αλεξάνδρειας το 47 π.Χ., του ιερού του Σεραπείου (στην ίδια πόλη) το 391 και των διαφόρων Αθηναϊκών Σχολών το 526 στέρησαν την ανθρωπότητα από τα τεράστιας πνευματικής αξίας έργα της Αρχαίας Ελληνικής διανοήσεως. Σώθηκε ένα μόνο μικρό ποσοστό, περίπου 5%, του έργου αυτού, που αποτελεί όμως ένα ικανό δείγμα για να εκτιμηθεί η αξία του.

Για να επιβεβαιωθεί δε η ρήση ότι η Ελλάδα καταποντίζει τα παιδιά της, κανείς κρατικός φορέας από το 1830 έως σήμερα δεν φρόντισε να εκδώσει έστω κι ένα μέρος της ανεκτίμητης αυτής πνευματικής κληρονομιάς, ώστε να γίνει γνωστή στους νεοέλληνες[1]. Το πολιτιστικό αυτό κενό ήρθε ευτυχώς να καλύψει η ιδιωτική πρωτοβουλία. Ήδη από τον προηγούμενο αιώνα μέχρι και τις ημέρες μας αρκετοί συγγραφείς φρόντισαν να **παρουσιασθεί** στη νεοελληνική, να σχολιασθεί και να εκδοθεί το σύνολο σχεδόν των έργων που σώθηκαν της Αρχαίας Ελληνικής λογοτεχνίας και ποιήσεως, της Αρχαίας Ελληνικής ιστορίας και φιλοσοφίας και ένα ελάχιστο της Αρχαίας Ελληνικής επιστήμης.

Άγνωστο γιατί, για την Αρχαία Ελληνική επιστήμη και ιδιαίτερα για την κορωνίδα της τα μαθηματικά, και κατ' επέκταση την αστρονομία, δεν έχει σημειωθεί ιδιαίτερο εκδοτικό ενδιαφέρον.

Κατά το χρονικό διάστημα 1953 – 1970 ο αείμνηστος καθηγητής φυσικών **Ευάγγελος Σταμάτης** (1897 – 1990), μέλος της διεθνούς Ακαδημίας της Ιστορίας

1 Σημειώνουμε ότι τα έργα αυτά εκδίδονται από ξένους εκδοτικούς οίκους από ανακαλύψεως τυπογραφίας μέχρι σήμερα. Αναφέρουμε χαρακτηριστικά:
α) Την τετράτομη νέα έκδοση των "Στοιχείων" του Ευκλείδου στη γαλλική με επιμέλεια του Bernard Vitrac από τον εκδοτικό οίκο Presses Universitaires de France (1990 – 2001) και
β) την έκδοση των έργων του Αρχιμήδους στην αγγλική με επιμέλεια Reviel Netz από τις εκδόσεις Cambridge University Press (2004).

των Επιστημών, εξέδωσε έργα των μαθηματικών **Ευκλείδου**, **Αρχιμήδους**, **Απολλωνίου** και **Διοφάντου**. Συγκεκριμένα εξέδωσε (με δική του απόδοση στη νεοελληνική και δικό του σχολιασμό) τα "Στοιχεῖα" του **Ευκλείδου**, τα "Κωνικά" του **Απολλωνίου**, άπαντα τα σωζόμενα του **Αρχιμήδους** και τα "Αριθμητικά" του **Διοφάντου**. Παράλληλα δημοσίευσε 56 (πενήντα έξι) επιστημονικές εργασίες που αναφέρονται στις θετικές επιστήμες της αρχαίας Ελλάδος. Πολλές από τις εργασίες του είχαν δημοσιευθεί και σε ξένα περιοδικά. Στα πρακτικά της Ακαδημίας Αθηνών έχουν δημοσιευθεί από το 1953 έως και το 1971 δεκατέσσερις ανακοινώσεις του.

Ο **Ευάγγελος Σταμάτης** υπήρξε ο συστηματικότερος και ο πλέον επιφανής ερευνητής των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών. Υπήρξε ένας ευπροσήγορος και σεμνός άνθρωπος που διέθετε τα λίγα χρήματά του για τις εκδόσεις των ανατύπων των διαφόρων δημοσιευμένων εργασιών του. Το επιστημονικό έργο του στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά έχαιρε διεθνούς αναγνωρίσεως, όπως προκύπτει από σωρεία επιστολών και άρθρων. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ότι ο Ούγγρος συγγραφέας **Arpad Szabo** στον πρόλογο του βιβλίου του "Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών" χαρακτηρίζει τον **Ευάγγελο Σταμάτη** ως "διαπρεπή ιστορικό των αρχαίων μαθηματικών" και κάνει πολλές παραπομπές στο έργο του.

Γνώρισα τον **Ευάγγελο Σταμάτη** το 1978 στα γραφεία της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Ομολογώ ότι η γνωριμία αυτή αποτέλεσε σταθμό στη ζωή μου, γιατί με όδευσε στην αγάπη για την αρχαία ελληνική επιστήμη.

Τύχη αγαθή συνέβαλε ώστε να εκδοθούν, από τον υπογράφοντα την εισήγηση αυτή, για πρώτη φορά στη νεότερη Ελλάδα και από το 1999 έως σήμερα 22 έργα Αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών και αστρονόμων (με αποκατάσταση του αρχαίου κειμένου, απόδοση στη νεοελληνική και σχολιασμό). Συγκεκριμένα έχουν εκδοθεί κατά χρονολογική σειρά τα έργα:

**α) "Οι Χαμένες Πραγματείες τοῦ Εὐκλείδου"**

Πρόκειται για αποσπάσματα από 7 χαμένες πραγματείες του **Ευκλείδου** που αναφέρονται στη μηχανική και στα μαθηματικά. Οι τίτλοι είναι: "Περὶ βαρέων καὶ ἐλαφρῶν σωμάτων", "Περὶ ἰσορροπιῶν", "Ψευδάρια", "Περὶ διαιρέσεων", "Κωνικά", "Τόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ" και "Πορισμάτα". Τα αποσπάσματα αυτά έχουν σωθεί είτε από αρχαίους συγγραφείς (**Πρόκλο**, **Πάππο**, **Ψευδοαλέξανδρο**, **Αρχιμήδη**) είτε από αραβικούς κώδικες.

**β) "Τὰ Ὀπτικά καὶ τὰ Κατοπτρικὰ τοῦ Εὐκλείδου"**

Πρόκειται για τα αρχαιότερα σωζόμενα έργα γεωμετρικής οπτικής. Και στα δύο έργα εκθέτονται ορθές αρχές της οπτικής, όπως η ευθύγραμμη διάδοση του φωτός και οι νόμοι της ανακλάσεως και της διαθλάσεως. Οι πραγματείες αυτές αποτελούν τα δύο πιο αρχαία μνημεία της μαθηματικής φυσικής. Τα "Ὀπτικὰ καὶ Κατοπτρικὰ" αποδίδονται στον **Ευκλείδη** από μια μοναδική αλλά πολύ αξιόπιστη μαρτυρία, τη μαρτυρία του **Πρόκλου**, που περιέχεται στο έργο του "Ὑπόμνημα εἰς τὸ α′ τῶν Εὐκλείδου στοιχείων".

**γ) Τα "Φαινόμενα" του Ευκλείδου**

Τα "Φαινόμενα τοῦ Εὐκλείδου" είναι ένα από τα τρία έργα μαθηματικής αστρονομίας που σώθηκαν. Τα άλλα δύο είναι οι πραγματείες του **Αυτολύκου του Πυτανέως** (4ος – 3ος π.Χ. αιώνας) "Περὶ κινουμένης σφαίρας" και "Περὶ ἐπιτολῶν καὶ δύσεων τῶν ἀστέρων". Το έργο "Φαινόμενα" είναι μια καθαρή αστρονομική πραγματεία – έκθεση των παραγομένων φαινομένων κατά την κίνηση της ουράνιας σφαίρας. Περιέχει 18 θεωρήματα που αναφέρονται στις εφαρμογές της γεωμετρίας στην αστρονομία. Ο **Ευκλείδης** μελετά στα "Φαινόμενα" την περιστροφή ενός σώματος (της ουράνιας σφαίρας), και το έργο του αυτό αποτελεί συγχρόνως μια πραγματεία κινηματικής.

δ) **Τα "Σφαιρικὰ" του Θεοδοσίου** (βιβλία γ′). (Προλογίζει ο καθηγητής του Πανεπιστημίου του Memphis των Η.Π.Α., **Γεώργιος Αναστασίου**)

Πρόκειται για μια γεωμετρική μελέτη που η ύλη της περιορίζεται αυστηρά στις ιδιότητες των κύκλων που δημιουργούνται στην επιφάνεια της σφαίρας από τέμνοντα επίπεδα. Αντιθέτως παραβλέπονται οι ιδιότητες της σφαίρας αυτής καθ' εαυτής. Το έργο αυτό του **Θεοδοσίου** (2ος – 1ος π.Χ. αιώνας) αποτελείται από τρία βιβλία που περιέχουν 60 προτάσεις. Το πρώτο και το δεύτερο βιβλίο περιέχουν από 23 προτάσεις και το τρίτο 14. Ο **Θεοδόσιος** δεν είχε στόχο στο έργο του αυτό παρά μόνο να δημιουργήσει και να συντονίσει προτάσεις προορισμένες να διευκολύνουν τη μελέτη της πρακτικής αστρονομίας. Για το λόγο αυτό η σφαίρα μελετήθηκε απ' αυτόν μόνο ως προς τις γραμμές (ευθύγραμμα τμήματα, τόξα, περιφέρειες κύκλων) που δημιουργούνται στην επιφάνειά της. Επιπλέον το έργο αυτό του **Θεοδοσίου** συμμορφώνεται με την παλιά παράδοση σύμφωνα με την οποία η σφαίρα μελετάται περισσότερο ως αστρονομική οντότητα και λιγότερο ως γεωμετρική. Ίσως έτσι εξηγείται, άλλωστε, και το γεγονός ότι η σφαίρα εξαιρείται από τα "Στοιχεῖα" του **Ευκλείδου**, σε τέτοιο βαθμό ώστε σ' αυτό το μεγαλειώδες έργο, ανάμεσα σε τόσες προτάσεις γεωμετρίας, επίπεδης και στερεάς, δεν εμφανίζεται η σφαίρα, παρά μόνο σε έξι από αυτές και μάλιστα όχι χωριστά, αλλά συσχετισμένα με τα κανονικά πολύεδρα, και ακόμα στην τελευταία πρόταση του ιβ′ βιβλίου, συγκεκριμένα στην πρόταση[2] 18.

ε) **Το "Περὶ Κυλίνδρου Τομῆς καὶ Περὶ Κώνου Τομῆς"** (βιβλία β′) του Σερήνου. (Προλογίζει ο Ακαδημαϊκός - Καθηγητής **Νικόλαος Αρτεμιάδης**.)

Το αντικείμενο της πραγματείας του **Σερήνου** "Περὶ κυλίνδρου τομῆς" δηλώνεται στον πρόλογο του έργου. Ο **Σερήνος** παρατηρεί ότι πολλοί από τους μελετητές της γεωμετρίας είχαν τη λανθασμένη εντύπωση ότι η πλάγια τομή του κυλίνδρου ήταν διαφορετική από την πλάγια τομή του κώνου που είναι γνωστή ως έλλειψη, ενώ πρόκειται φυσικά για την ίδια καμπύλη. Έτσι λοιπόν ο **Σερήνος** θεωρεί απαραίτητο να αποδείξει ότι οι λεγόμενες πλάγιες τομές που τέμνουν τις γενέτειρες των δύο αυτών στερεών είναι ελλείψεις, είτε είναι τομές κυλίνδρου, είτε κώνου. Ο σκοπός αυτός επιτυγχάνεται πλήρως με απλούς συλλογισμούς, αλλά αυστηρούς που είναι συντεταγμένοι κατά τα πρότυπα των Ελλήνων γεωμετρών της χρυσής περιόδου.

Ο **Σερήνος** ξεκινά μ' ένα πιο γενικό ορισμό του κυλίνδρου για να περιλάβει και τους πλάγιους κυκλικούς κυλίνδρους. Δίνει τους ορισμούς των βάσεων, του άξονα και της πλευράς του κυλίνδρου και προχωρά στη διατύπωση των προτάσεων. Το γεγονός δε ότι θεωρήματα του α′ βιβλίου παρέχουν τα μέσα για την επίλυση ορισμένων ενδιαφερόντων προβλημάτων που είναι σχετικά με τους κυλίνδρους που δημιουργούν μια ορισμένη έλλειψη, έχει κατά πολύ μεγαλώσει το κύρος του έργου αυτού.

Η πραγματεία "Περὶ κώνου τομῆς" του **Σερήνου** είναι αρκετά πρωτότυπη. Αντίθετα με ότι μας κάνει να υποθέσουμε ο τίτλος του έργου, το περιεχόμενο της πραγματείας δεν αφορά τις τρεις επίπεδες τομές που προσδιορίζονται από τον κώνο, δηλαδή την έλλειψη, την παραβολή και την υπερβολή, τη θεωρία των οποίων είχε εκθέσει ήδη ο **Απολλώνιος**. Το β′ βιβλίο ασχολείται κυρίως με την σύγκριση των εμβαδών τριών ειδών τριγωνικών τομών ορθών και πλάγιων κώνων που προκύπτουν από επίπεδα που περνούν από τις κορυφές των κώνων και σε ορισμένες περιπτώσεις περνούν και από τους άξονές τους.

Το β′ βιβλίο μπορεί να θεωρηθεί και ως ένα κεφάλαιο της γεωμετρικής θεωρίας των μέγιστων και των ελάχιστων.

Σύμφωνα με δήλωση του ίδιου του **Σερήνου** με το θέμα αυτό δεν είχε ασχοληθεί

2 "Αἱ σφαῖρα πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων" (Δύο σφαίρες έχουν λόγο ίσο με τους κύβους των αντιστοίχων διαμέτρων τους).

κανείς από τους προγενέστερούς του μαθηματικούς. Είναι δε δίκαιο να αναγνωρισθεί ότι το αντικείμενο της πραγματείας "Περὶ κώνου τομῆς" το διαπραγματεύεται κατά τρόπο αυστηρό, εξαντλητικό και πρωτότυπο[3].

στ) **Το "Περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων Ἡλίου καὶ Σελήνης" του Αριστάρχου**. (Προλογίζει ο αστρονόμος **Άγγελος Αναγνωστίδης**, Δρ του Πανεπιστημίου του Γκέντιγκεν.)

Στην μοναδική πραγματεία του **Αριστάρχου** που σώθηκε υπάρχουν 6 υποθέσεις και 18 θεωρήματα. Αν και ορισμένες από τις υποθέσεις δεν είναι ορθές, τα θεωρήματα που ακολουθούν προκαλούν μεγάλο αστρονομικό αλλά και μαθηματικό ενδιαφέρον. Ο μελετητής διαπιστώνει μια λογική ακολουθία προτάσεων, την οποία διακρίνει η χαρακτηριστική μαθηματική αυστηρότητα της ελληνικής γεωμετρίας. Άξιο αναφοράς είναι το επόμενο σχόλιο[4] του **T. Heath**:

"Η μορφή και ο χαρακτήρας της πραγματείας είναι τελείως κλασικά, όπως αρμόζει στην χρονική περίοδο από τον **Ευκλείδη** έως τον **Αρχιμήδη**. Το περιεχόμενο από μαθηματικής απόψεως είναι εξίσου ενδιαφέρον, εφόσον αποτελεί το πρώτο διασωθέν αντιπροσωπευτικό δείγμα αμιγούς γεωμετρίας που χρησιμοποιείται για τριγωνομετρικό σκοπό".

ζ) **"Ἡ Συναγωγὴ τοῦ Πάππου τοῦ Ἀλεξανδρέως"** (τόμος Α′, βιβλία β′, γ′, δ′), (τόμος Β′, βιβλία ε′, στ′), (τόμος Γ′, βιβλίο ζ′). (Προλογίζει η Επ. Καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Αθηνών **Μάρω Παπαθανασίου**.)

**Βιβλίο α′:** Το α′ βιβλίο της "Συναγωγῆς", το οποίο έχει χαθεί, κάλυπτε μάλλον θέματα αριθμητικής.

**Βιβλίο β′:** Σώζεται μόνο ένα μέρος του β′ βιβλίου. Όπως προκύπτει από τις αριθμημένες παραγράφους έχει χαθεί περίπου το μισό μέρος του βιβλίου. Το απόσπασμα του β′ βιβλίου που σώθηκε αρχίζει από τη μισή διατύπωση της δεκάτης τετάρτης προτάσεως και τελειώνει στην 26η πρόταση.

Το βιβλίο ασχολείται με τις μεθόδους τις οποίες χρησιμοποιούσε ο **Απολλώνιος** για την εκτέλεση πολλαπλασιασμών πολλών και μεγάλων αριθμών.

3 Σχετικά με τα έργα αυτά του Σερήνου παραπέμπουμε σε σχετικό άρθρο του Κ. Νικολαντωνάκη στο περιοδικό Νεύσις (τ. 7, 1998).

4 Heath T.: "Aristarchus of Samos the Ancient Copernicus", σελίδα 301.

**Βιβλίο γ′:** Η επικεφαλίδα του βιβλίου αναφέρει: "Περιέχει προβλήματα επίπεδα και στερεά".

Στο προοίμιο ο **Πάππος** κάνει μια ταξινόμηση των γεωμετρικών προβλημάτων σε "επίπεδα", "στερεά" και "καμπυλόγραμμα" ("γραμμικά"), εφόσον η λύση τους εξαρτάται από ευθείες ή κύκλους, από κωνικές τομές, ή από καμπύλες διαφορετικές των κωνικών τομών (σπείρες, τετραγωνίζουσες, κογχοειδείς κισσοειδείς).

Το τελευταίο τμήμα του γ′ βιβλίου δίνει μια σειρά από κατασκευές των πέντε κανονικών πολυέδρων με εγγραφή τους σε σφαίρα. Οι κατασκευές αυτές ακολουθούν διαφορετική διαδικασία απ' αυτήν του ιγ′ βιβλίου των "Στοιχείων" του **Ευκλείδου**, δεδομένου ότι χρησιμοποιείται η ανάλυση και η σύνθεση.

Το γ′ βιβλίο της "Συναγωγῆς" περιέχει ως παράρτημα μια άλλη απόδειξη της 10ης προτάσεως του ίδιου βιβλίου που αναφέρεται στην απόδειξη και στην ενόργανη λύση του προβλήματος του διπλασιασμού του κύβου καθώς και στην κατασκευή των δύο μέσων αναλόγων.

**Βιβλίο δ′:** Το βιβλίο αρχίζει χωρίς τίτλο αμέσως μετά το παράρτημα του γ′ βιβλίου, και δεν περιέχει κανένα πρόλογο ή αφιέρωση. Αποτελείται από έξοχα θεωρήματα "επίπεδα", "στερεά" και "γραμμικά".

Στο πρώτο μέρος δίνεται μια ενδιαφέρουσα γενίκευση του "Πυθαγορείου" θεωρήματος σε μη ορθογώνια τρίγωνα.

Ακολουθεί μετά ένα ζεύγος θεωρημάτων στα οποία συγκεκριμένα ευθύγραμμα τμήματα που προκύπτουν από γεωμετρικές κατασκευές με κύκλους, κατατάσσονται σύμφωνα με το σύστημα των άρρητων μεγεθών που αναφέρονται στο ι′ βιβλίο των "Στοιχείων" του **Ευκλείδου**.

Περιέχεται στη συνέχεια μια σειρά προτάσεων που αφορούν εφαπτόμενους κύκλους.

Το υπόλοιπο του δ′ βιβλίου είναι αφιερωμένο σε ειδικές καμπύλες. Στην "σπείρα (ή έλικα)" του **Αρχιμήδους**, την "κογχοειδή" του **Νικομήδους**, την "τετραγωνίζουσα" του **Ιππίου** και του **Δεινοστράτου** και σε μια καμπύλη δικής του επινοήσεως.

Το δ′ βιβλίο τελειώνει με μια ανάλυση της νεύσεως την οποία αναφέρει ο **Αρχιμήδης** στην "Περὶ ἑλίκων" πραγματεία του.

**Βιβλίο ε′:** Πρόκειται για το πιο τέλειο από άποψη μαθηματικής αυστηρότητας βιβλίο της "Συναγωγῆς". Σύμφωνα με την επικεφαλίδα του βιβλίου "περιέχει συγκρίσεις επιπέδων σχημάτων που έχουν ίση περίμετρο, σε σχέση το ένα με το άλλο και με τον κύκλο και συγκρίσεις στερεών σχημάτων που έχουν ίση επιφάνεια σε σχέση με την σφαίρα".

**Βιβλίο στ′:** Η επικεφαλίδα του βιβλίου είναι: "Περιέχει αναλύσεις των δυσκολιών στο μικρό αστρονομούμενο τόπο". Η χωρίς αφιέρωση εισαγωγή του **Πάππου**

αναφέρεται στο παράπονο ότι πολλοί απ' αυτούς που διδάσκουν τον "μικρό αστρονομούμενο τόπο"[5] προσθέτουν μερικά πράγματα με τη δικαιολογία ότι είναι αναγκαία και παραλείπουν άλλα ως μη απαραίτητα. Ο **Πάππος** στο βιβλίο του αυτό αναφέρεται στα "Σφαιρικά" του **Θεοδοσίου**, στα "Φαινόμενα" του **Ευκλείδου** και στο "Περὶ ἡμερῶν καὶ νυκτῶν" του **Θεοδοσίου**.

Στο ίδιο βιβλίο περιέχεται μια περίληψη της πραγματείας "Περὶ κινουμένων σφαιρῶν" του **Αυτολύκου** και εξετάζεται το "Περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων Ἡλίου καὶ Σελήνης" του **Αριστάρχου**. Μάλιστα γίνεται μια σύγκριση ορισμένων μετρήσεων του **Αριστάρχου** με αντίστοιχες μετρήσεις του **Πτολεμαίου** και του **Ιππάρχου**.

**Βιβλίο ζ′:** Το ζ′ βιβλίο της "Συναγωγῆς" είναι πολύτιμο για την ιστορία της ελληνικής γεωμετρίας και των μαθηματικών γενικότερα, διότι αποτελεί τη μοναδική πηγή για ένα σύνολο χαμένων εργασιών αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών. Η επικεφαλίδα του βιβλίο μαρτυρεί ότι "περιέχει λήμματα του ἀναλυομένου τόπου". Ένας μακρύς πρόλογος που απευθύνει ο **Πάππος** στο γιο του **Ερμόδωρο** εξηγεί τη γεωμετρική ανάλυση και σύνθεση και παρουσιάζει τον κατάλογο των έργων που αποτελούν "τον αναλυόμενο τόπο", δηλαδή την ανώτερη γεωμετρία. Τα έργα αυτά για τα οποία δίνει ή μια περίληψη ή ένα σχόλιο μέσα από τις πολυάριθμες προτάσεις του ζ′ βιβλίου είναι:

α) Το "Περὶ Μεσοτήτων" του **Ερατοσθένους** (έχει χαθεί).
β) Τα "Δεδομένα" του **Ευκλείδου** (έχει σωθεί).
γ) Τα "Πορίσματα" του **Ευκλείδου** (έχει χαθεί).
δ) Το "Περὶ λόγου ἀποτομῆς" του **Απολλωνίου** (σώζεται σε αραβική μετάφραση).
ε) Το "Περὶ χωρίου ἀποτομῆς" του **Απολλωνίου** (χάθηκε).
στ) Το "Περὶ διορισμένης τομῆς" του **Απολλωνίου** (χάθηκε).
ζ) Το "Περὶ νεύσεων" του **Απολλωνίου** (χάθηκε).
η) Το "Περὶ ἐπιπέδων τόπων" του **Απολλωνίου** (χάθηκε).
θ) Τα "Κωνικά" του **Απολλωνίου** (σώζονται τα 7 από τα 8 βιβλία).
ι) Το "Περὶ ἐπαφῶν" του **Απολλωνίου** (χάθηκε).
ια) Το "Περὶ στερεῶν τόπων" του **Αρισταίου του Πρεσβυτέρου** (έχει χαθεί).
ιβ) Το "Τόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ" του **Ευκλείδου** (έχει χαθεί).

Μετά από τις περιλήψεις των προηγουμένων έργων ο **Πάππος** παρουσιάζει μια

5 "Ὁ μικρὸς ἀστρονομούμενος τόπος" ήταν μια συλλογή από αστρονομικά έργα. Παρουσιάσθηκε το 2ο μ.Χ. αιώνα και είχε προορισμό να δώσει τις απαραίτητες βάσεις για τη μελέτη της "Μεγίστης ἀστρονομίας" του Πτολεμαίου.

σειρά σχολίων, καθένα από τα οποία αποτελείται από λήμματα, απαραίτητα για τη μελέτη των έργων.

Τα λήμματα αυτά είναι προσαρμοσμένα ίσως σε μεγάλο βαθμό με τα αντίστοιχα λήμματα των έργων του "ἀναλυομένου τόπου".

η) **"Ἡ Ἀριθμητικὴ Εἰσαγωγὴ τοῦ Νικομάχου τοῦ Γερασηνοῦ"**. (Προλογίζει η Καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης **Σοφία Καλπαζίδου**.)

Η "Ἀριθμητικὴ Εἰσαγωγή" αποτελείται από δύο βιβλία. Το α′ βιβλίο περιέχει 23 παραγράφους (ορισμένοι μελετητές τις χαρακτηρίζουν ως κεφάλαια). Το β′ βιβλίο περιέχει 29 παραγράφους. Πολλοί κώδικες που περιέχουν την αριθμητική εισαγωγή, περιλαμβάνουν μετά το τέλος του β′ βιβλίου 6 αριθμητικά προβλήματα τα οποία μάλλον οφείλονται στο **Ισαάκ Αργυρό** (1310 - 1372).

Η όλη δομή της "Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς" δείχνει ότι είναι γραμμένη από έναν επαγγελματία συγγραφέα. Η νοηματική σαφήνεια διακρίνει όλο το έργο, ενώ διατηρείται ένας τόνος σοβαρότητας την οποία δεν χάνει ούτε στις 6 πρώτες παραγράφους, που δεν εμπλέκονται στις ουσιώδεις αριθμητικές έννοιες. Τα ρητορικά σχήματα δεν λείπουν εντελώς, ακόμα κι από τις αυστηρά μαθηματικές παραγράφους. Όσον αφορά τις ρητορικές ερωτήσεις, αυτές είναι λίγες, αλλά αποτελεσματικές. Ο μελετητής του έργου εύκολα παρατηρεί ότι οι παρομοιώσεις δεν πλατειάζουν και ότι έχουν πραγματική αξία για την παρουσίαση του υπό μελέτη αντικειμένου.

Ο **Νικόμαχος** ($1^{ος}$ – $2^{ος}$ αιώνας) δεν χρησιμοποιεί το διάλογο, αλλά περιορίζεται στην στεγνή, απέριττη παρουσίαση με αποτέλεσμα η σύνταξη του έργου να εμφανίζει μικρή ποικιλία.

Το έργο γενικά παρουσιάζει μια ακρίβεια, μια καθαρότητα και μια τέλεια οργάνωση λόγου, στοιχεία τα οποία συνετέλεσαν ώστε όχι μόνο να διασωθεί, αλλά και να βρίσκεται σε χρήση μέχρι και τον $16^{ο}$ αιώνα.

Η "Ἀριθμητικὴ Εἰσαγωγή" παρουσιάζει δύο ιδιαιτερότητες (αν την συγκρίνουμε με άλλα έργα αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών):

α) Δεν γίνεται απόδειξη των διαφόρων προτάσεων που περιέχονται σ' αυτήν και

β) Μέσα από τα αριθμητικά κείμενα του έργου παρουσιάζεται συγχρόνως και το φιλοσοφικό σύστημα[6] του **Νικομάχου.**

---

6 Για ευρύτερη μελέτη της φιλοσοφίας του Νικομάχου παραπέμπουμε στα άρθρα των:
Αγαπίδη Χ.: "Ἡ φιλοσοφία τοῦ ἐκ Γεράσων Νικομάχου" (Ἀνάτυπον λόγου ἀπαγγελθέντος ἐν τῷ Ἐθνικῷ Πανεπιστημίῳ τῇ 1η Μαρτίου 1906), και

θ) "**Ὑπόμνημα εἰς τὸ πρῶτον τῶν Εὐκλείδου Στοιχείων τοῦ Πρόκλου**" (βιβλία δ′) (τόμος Α′, προλογίζει ο Καθηγητής του Πανεπιστημίου Κρήτης **Μιχάλης Λάμπρου**), (τόμος Β′, προλογίζει ο Καθηγητής του Πανεπιστημίου Cameron των Η.Π.Α. **Ιωάννης Αργυρός**.)

Τα σχόλια του **Πρόκλου** στο α′ βιβλίο των "Στοιχείων" μπορούμε να τα χωρίσουμε σε πέντε μέρη.

Το πρώτο μέρος περιέχει το α′ βιβλίο και ένα τμήμα του β′ βιβλίου . Το α′ βιβλίο (Πρόλογος Ι κατά τον **Friedlein**) αποτελεί ένα από τα αξιολογότερα φιλοσοφικά δοκίμια του **Πρόκλου** κι ένα ανεκτίμητο ντοκουμέντο σχετικά με τη φιλοσοφία των μαθηματικών της ύστερης ελληνικής αρχαιότητας. Το α′ βιβλίο (τον Πρόλογο Ι) ο **Glenn Morrow**[7] το υποδιαιρεί[8] ως εξής:

**1:** Η ενδιάμεση θέση της μαθηματικής ουσίας.
**2:** Οι κοινές αρχές της μαθηματικής ουσίας. Το πέρας και το άπειρο.
**3:** Τα κοινά θεωρήματα των μαθηματικών ειδών.
**4:** Με ποιο τρόπο υπάρχουν τα κοινά θεωρήματα.
**5:** Το κριτήριο των μαθηματικών.
**6:** Η ύπαρξη των μαθηματικών γενών και ιδεών.
**7:** Η λειτουργία και οι διαδικασίες των Μαθηματικών. Η προοπτική τους.
**8:** Η χρησιμότητα των Μαθηματικών.
**9:** Μια απάντηση στους επικριτές των Μαθηματικών.
**10:** Απάντηση στην άποψη ότι ο **Πλάτων** υποτιμούσε τα Μαθηματικά.
**11:** Οι απαιτήσεις από τους Μαθηματικούς.
**12:** Οι Πυθαγόρεια ταξινόμηση των Μαθηματικών επιστημών.
**13:** Η ταξινόμηση των μαθηματικών από τον **Γεμίνο**.
**14:** Η διαλεκτική ως κορωνίδα των Μαθηματικών επιστημών.
**15:** Η προέλευση του ονόματος "Μαθηματικά"[9].

Ακολουθεί ένα τμήμα του β′ βιβλίου, που ο **Friedlein** χαρακτηρίζει ως "Πρόλογο ΙΙ". Το τμήμα αυτό αναφέρεται στη γεωμετρία γενικά και στο αντικείμενό της

---

Δέμη Κ. Α.: "Μαθηματικά και φιλοσοφία στον Νικόμαχο Γερασηνό", Περιοδικό "Νεύσις" (Άνοιξη 1995, σελίδες 117 - 141).

7 Βλέπε βιβλιογραφία.

8 Η υποδιαίρεση προκύπτει από μια προσεκτική μελέτη του αρχαίου κειμένου, δεδομένου ότι ο Πρόκλος στην αρχή κάθε σχεδόν παραγράφου αναφέρει το θέμα που θα διαπραγματευτεί.

9 Ο Morrow θα έπρεπε να προσθέσει "και η αξία των μαθηματικών", δεδομένου ότι στην παράγραφο αυτή ο Πρόκλος ασχολείται και με την προσφορά της μαθηματικής επιστήμης.

σύμφωνα με τον **Πλάτωνα** και τον **Αριστοτέλη**. Μετά ακολουθεί η περίφημη περίληψη της ιστορίας της γεωμετρίας του **Ευδήμου**, που τελειώνει μ' ένα εγκώμιο προς τον **Ευκλείδη**. Ακολουθούν διάφορα θέματα που έχουν σχέση με τα "Στοιχεῖα".

Ο **Glenn Morrow** υποδιαιρεί επίσης πολύ εύστοχα τον δεύτερο πρόλογο σε 11 παραγράφους ως εξής:

**1:** Η γεωμετρία και τα υποκείμενα θέματά της ως μέρος των μαθηματικών.
**2:** Τα αντικείμενα και οι μέθοδοι της γεωμετρικής επιστήμης.
**3:** Το πεδίο και η χρησιμότητα της γεωμετρίας.
**4:** Η προέλευση και η ανάπτυξη της γεωμετρίας.
**5:** Τα μαθηματικά έργα του **Ευκλείδου**.
**6:** Ο σκοπός των "Στοιχείων".
**7:** Το νόημα των "Στοιχείων".
**8:** Η τακτοποίηση των προτάσεων των "Στοιχείων".
**9:** Ο σκοπός του α′ βιβλίου των "Στοιχείων".
**10:** Η διαίρεση του α′ βιβλίου των "Στοιχείων".

Το δεύτερο μέρος που περιέχεται στο β′ βιβλίο του έργου που εξετάζουμε, αναφέρεται στον σχολιασμό των 23 ορισμών του α′ βιβλίου των "Στοιχείων". Η σειρά των ορισμών του **Ευκλείδου** παρουσιάζει ορισμένες διαφορές σε σύγκριση με την αντίστοιχη σειρά του **Πρόκλου**.

Το τρίτο μέρος των σχολίων του **Πρόκλου**, το οποίο περιέχεται σ' ένα τμήμα του γ′ βιβλίου, αναφέρεται στα αιτήματα του α′ βιβλίου των "Στοιχείων". Ο **Πρόκλος** παρουσιάζει μαζί τα αιτήματα α′, β′, γ′ του **Ευκλείδου**, ενώ τα υπόλοιπα δύο αιτήματα δ′ και ε′ τα παρουσιάζει χωριστά.

Το τέταρτο μέρος (τμήμα του γ′ βιβλίου) περιέχει τον σχολιασμό των 5 από τις 9 "κοινές έννοιες" των "Στοιχείων" τις οποίες ο **Πρόκλος** ονομάζει "αξιώματα". Ο **Πρόκλος** παρουσιάζει μαζί τις α′, β′, γ′, ζ′ και η′ "κοινές έννοιες".

Γενικά ασχολείται ιστορικά και κριτικά με τους ορισμούς, τα αιτήματα και τα αξιώματα του α′ βιβλίου των "Στοιχείων". Μετά τον σχολιασμό των ορισμών κάνει μια γενική εξέταση των αρχών της γεωμετρίας, των υποθέσεων, των αιτημάτων και των αξιωμάτων (τμήμα του γ′ βιβλίου).

Το πέμπτο μέρος (τμήμα του γ′ βιβλίου και το δ′ βιβλίο) σχολιάζει ακριβώς με την ίδια σειρά του **Ευκλείδου**, **τ**ις 48 προτάσεις και προβλήματα του α′ βιβλίου των "Στοιχείων". Στο τέλος του βιβλίου υπάρχει ένα ακόμα σχόλιο στην κδ′ πρόταση[10].

10 Οι προτάσεις 1 - 26 του α′ βιβλίου των "Στοιχείων" περιέχονται (σχολιασμένες) στο γ′ βιβλίο του παρόντος έργου του Πρόκλου, ενώ οι προτάσεις 27 - 48 περιέχονται στο δ′ βιβλίο.

ι) **"Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν σπουδὴν τῶν οὐρανίων φαινομένων τοῦ Γεμίνου τοῦ Ροδίου"**. (Προλογίζει η Αν. Καθηγήτρια του Ε.Μ.Π. **Χριστίνα Φίλη**.)

Η "Εἰσαγωγὴ εἰς τὰ Οὐράνια φαινόμενα" χωρίζεται σε 18 κεφάλαια ως εξής:

Κεφάλαιο 1: Ο Ζωδιακός κύκλος, το Ηλιακό έτος, η ακανόνιστη κίνηση του Ηλίου (η οποία εξηγείται από την έκκεντρη θέση της τροχιάς του Ηλίου σε σχέση με το ζωδιακό κύκλο). Η σειρά και οι περίοδοι περιστροφής των πλανητών και της Σελήνης. Στην παράγραφο 23 αναφέρεται ότι οι απλανείς αστέρες δε βρίσκονται στην ίδια σφαιρική επιφάνεια, αλλά κάποιοι είναι πιο ψηλά και άλλοι πιο χαμηλά (η θεωρία αυτή αποδίδεται στους Στωικούς).

Κεφάλαιο 2: Εξετάζονται τα δώδεκα τμήματα του ζωδιακού κύκλου.

Κεφάλαιο 3: Εξετάζονται οι αστερισμοί.

Κεφάλαιο 4: Αναφέρεται στον άξονα του Κόσμου και στους πόλους.

Κεφάλαιο 5: Περιγράφει τους κύκλους της ουράνιας σφαίρας (τον ισημερινό, τους παράλληλους κύκλους, τον αρκτικό, τον θερινό τροπικό, τον χειμερινό τροπικό, τον ανταρκτικό, τους κόλουρους, τον ζωδιακό, την εκλειπτική, τον ουράνιο μεσημβρινό και το Γαλαξία).

Κεφάλαιο 6: Περιέχει τα σχετικά με την ημέρα και τη νύχτα, τη σχετική διάρκειά τους ανάλογα με το διαφορετικό πλάτος, την αύξηση και την ελάττωση της διάρκειάς τους.

Κεφάλαιο 7: Αναφέρεται στους χρόνους που χρειάζονται για να ανατείλουν τα 12 ζώδια.

Κεφάλαιο 8: Πρόκειται γα ένα ενδιαφέρον κεφάλαιο σχετικά με το ημερολόγιο, με τη διάρκεια των μηνών του έτους και των διαφόρων κύκλων (της οκταετηρίδας, τους 16ετείς και 160ετείς κύκλους, τον 19ετή κύκλο του **Ευκτήμονος** (και του **Μέτωνος**) και τον 76ετή κύκλο του **Καλλίππου**[11]).

Κεφάλαιο 9: Εξετάζει τις φάσεις της Σελήνης.

Κεφάλαια 10 και 11: Παρουσιάζουν τις εκλείψεις του Ηλίου και της Σελήνης.

Κεφάλαιο 12: Αναφέρεται στο πρόβλημα της ερμηνείας των κινήσεων του Ηλίου, της Σελήνης και των πλανητών.

Κεφάλαιο 13: Μελετά την Ανατολή και τη Δύση των αστέρων.

Κεφάλαιο 14: Ασχολείται με τους κύκλους τους οποίους διαγράφουν οι απλανείς αστέρες.

11 Βλέπε σχετικά: Ευαγ. Σπανδάγου - Ρ. Σπανδάγου: "Οι Αστρονόμοι της Αρχαίας Ελλάδος" β′ έκδοση (Αίθρα), Αθήνα 2000, σελίδα 128.

Κεφάλαια 15 και 16: Περιγράφουν τις ζώνες της Γης και τη μαθηματική και φυσική γεωγραφία (ο **Γεμίνος** ακολουθεί τη μέτρηση του **Ερατοσθένους**[12] και όχι του **Ποσειδωνίου**).

Κεφάλαιο 17: Είναι σχετικό με τις καιρικές ενδείξεις. Το κεφάλαιο αυτό εγκαταλείπει τη δημοφιλή θεωρία ότι οι αλλαγές των ατμοσφαιρικών συνθηκών εξαρτώνται από την ανατολή και τη δύση συγκεκριμένων αστέρων και δηλώνει ότι οι προγνώσεις του καιρού *(ἐπισημασίαι)* στα ημερολόγια προκύπτουν μόνο από την εμπειρία και την παρατήρηση.

Κεφάλαιο 18: Το κεφάλαιο αυτό επιγράφεται *"περὶ ἐξελιγμοῦ"*. Ο **Γεμίνος** εξηγεί ότι ο όρος *"ἐξελιγμός"* σημαίνει το ελάχιστο χρονικό διάστημα που περιέχει ακέραιο πλήθος σεληνιακών μηνών, ακέραιο πλήθος ημερών και ακέραιο πλήθος αποκαταστάσεων[13] της Σελήνης.

Στο τέλος του κεφαλαίου εξετάζεται η μέγιστη, η μέση και η ελάχιστη ημερήσια κίνηση της Σελήνης.

Στο τέλος του έργου ο **Γεμίνος** αναπαράγει το παλαιότερο "παράπηγμα" (ημερολόγιο) του **Καλλίππου του Κυζικηνού**[14]. Στο ημερολόγιο αυτό παρουσιάζεται ο αριθμός των ημερών που απαιτούνται ώστε ο Ήλιος να διέλθει από κάθε σημείο του ζωδιακού κύκλου, τις ανατολές και δύσεις διαφόρων αστέρων και τις καιρικές ενδείξεις που έχουν σημειώσει διάφοροι αστρονόμοι (**Δημόκριτος, Εύδοξος, Δοσίθεος, Ευκτήμων, Μέτων** και **Κάλλιππος**).

ια) "**Οἱ Καταστερισμοὶ τοῦ Ἐρατοσθένους**". (Προλογίζει ο Αν. Καθηγητής του Πανεπιστημίου Αθηνών **Στράτος Θεοδοσίου**.)

Το έργο "Καταστερισμοί"[15] (ή "Ἀστροθεσία") του **Ερατοσθένους** σώζεται μόνο κατά ένα μέρος. Στο έργο αυτό συνδυάζονται φιλολογικές, μυθολογικές και αστρονομικές ειδήσεις και παρατηρήσεις. Παρέχονται δε διάφορες διασαφήσεις σχετικά με τα είδη και τα σχήματα των αστέρων και οι οικείοι μύθοι μεταμορφώσεων σε αστέρες ή αστερισμούς[16] επιφανών προσώπων ή περιέργων και σπουδαίων ζώων

12 Βλέπε σχετικά: Ευαγ. Σπανδάγου - Ρ. Σπανδάγου: "Οι Αστρονόμοι της Αρχαίας Ελλάδος" β′ έκδοση (Αίθρα), Αθήνα 2000, σελίδα 194.

13 Αποκατάσταση γενικά ενός αστέρος ονομάζεται η επάνοδός του στη θέση στην οποία βρισκόταν κατά το προηγούμενο έτος.

14 Βλέπε σχετικά: Ευαγ. Σπανδάγου - Ρ. Σπανδάγου: "Οι Αστρονόμοι της Αρχαίας Ελλάδος" (Αίθρα), Αθήνα 2000, σελίδα 128.

15 Καταστερισμοί = τοποθέτηση των αστέρων.

16 Η παλαιότερη συναγωγή των ελληνικών αστερισμών που σώθηκε (και οι μύθοι τους) είναι

και αντικειμένων. Στους "Καταστερισμούς", όπου είναι διάχυτη η πλατωνική πίστη ότι η ψυχή προέρχεται από τις αστρικές σφαίρες, απαριθμούνται 44 αστερισμοί που περιλαμβάνουν 745 συνολικά αστέρες.

Μετά τους αστερισμούς ο **Ερατοσθένης** αναφέρει τους πέντε πλανήτες, δηλαδή τον Κρόνο, το Δία, τον Άρη, την Αφροδίτη και τον Ερμή. Δίνει δε τον ορισμό των πλανητών ως εξής: "περὶ τῶν πέντε ἀστέρων τῶν καλουμένων πλανητῶν, διὰ τὸ κίνησιν ἔχειν ἰδίαν αὐτοῖς".

Οι "Καταστερισμοί" παρουσιάζονται και με τον τίτλο "Ἀστροθεσίαι ζωδίων".

ιβ) "**Τὰ Φαινόμενα καὶ Διοσημεῖα τοῦ Ἀράτου**". (Προλογίζει ο Επ. Καθηγητής του Πανεπιστημίου Αθηνών **Μάνος Δανέζης**.)

Αποτελείται από 1155 στίχους (δακτυλικούς εξάμετρους) και αποτελεί το πλέον επιτυχημένο ποίημα της αρχαιότητας με επιστημονικό θέμα. Με το ποίημά του αυτό ο **Άρατος** έγινε για πολλούς αιώνες ο δάσκαλος των ανθρώπων στη γνωριμία των άστρων.

Ο **Ίππαρχος** στο έργο του "Τῶν Ἀράτου καὶ Εὐδόξου φαινομένων ἐξηγήσεως βιβλία γ′" χωρίζει το ποίημα του **Αράτου** σε τρία μέρη:

Στίχοι 1 - 450: Πραγματεύονται την καταστέρωση δηλαδή τα περί των αστερισμών και τους σχετικούς μ' αυτούς μύθους.

Στίχοι 451 - 732: Αναφέρονται στις συνανατολές και συγκαταδύσεις των αστερισμών (συνανατέλλοντας καὶ συνδύοντας ἀστέρας).

Στίχοι 733 - 1154: Πραγματεύονται τις καιρικές ενδείξεις.

Οι νεώτεροι κριτικοί διαιρούν το όλο ποίημα σε δύο μέρη:

Στα κυρίως "Φαινόμενα" (στίχοι 1 - 732) και στα "Διοσημεῖα" (στίχοι 733 - 1124).

Το δεύτερο μέρος, δηλαδή τα "Διοσημεῖα", το έγραψε ο **Άρατος** έχοντας υπ' όψη αντίστοιχο έργο του **Θεόφραστου**[17].

Οι στίχοι 1 - 732, οι οποίοι διατυπώνουν εργασίες του **Ευδόξου** και παρατηρήσεις του **Φαίνου** και του **Μέτωνος**, αποτελούν μια έκθεση των αστρονομικών γνώσεων της εποχής του. Ο **Άρατος** επιχειρεί μέσα από τους στίχους αυτούς μια ξενά-

το διδακτικό έπος "Φαινόμενα" του ποιητή Αράτου (315 - 240 π.Χ.). Το έργο αυτό έχει σωθεί.

17 Θεοφράστου: "Περὶ σημείων ὑδάτων καὶ πνευμάτων καὶ χειμώνων καὶ εὐδιῶν" (Arthur Hort, Harvard 1961).

γηση στην Ουράνια σφαίρα. Περιγράφει τους αστέρες και τους αστερισμούς με τους αντίστοιχους μύθους τους, τα νεφελώματα και το Γαλαξία.

ιγ) **"Τὸ ιδ′ καὶ τὸ ιε′ βιβλία τῶν «Στοιχείων»".** (Προλογίζει ο Δρ. των Μαθηματικών **Ιωάννης Θωμαΐδης**.)

Στα δεκατρία βιβλία των "Στοιχείων" του **Ευκλείδου** οι αρχαίοι εκδότες πρόσθεταν δύο ακόμα το ιδ′ και το ιε′, τα οποία αναπτύσσουν περαιτέρω τη θεωρία των κυρτών κανονικών πολυέδρων, αλλά δεν γράφτηκαν από το διάσημο Αλεξανδρινό γεωμέτρη. Το ιδ′ βιβλίο είναι έργο ενός σημαντικού Αλεξανδρινού γεωμέτρη και αστρονόμου του **Υψικλέους**, ο οποίος έδρασε στην Αλεξάνδρεια μεταξύ του 150 και 120 π.Χ. Κατά έναν αιώνα περίπου μεταγενέστερος του **Ευκλείδου** και μεταγενέστερος του **Αρισταίου** και του **Απολλωνίου**, αναφέρεται σ' αυτούς, μελετά και συμπληρώνει μερικά έργα τους και καταλήγει έτσι σ' ένα σύνολο κομψών σχέσεων υφισταμένων μεταξύ διαφόρων στοιχείων (εμβαδόν, όγκος, ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου σε μια έδρα) ενός κυρτού κανονικού πολυέδρου.

Το φερόμενο ως ιε′ βιβλίο των "Στοιχείων" είναι έργο αγνώστου συγγραφέως, μαθητού του **Ἰσιδώρου τοῦ Τραλλιανοῦ**, του αρχιτέκτονα της Αγίας Σοφίας. Ο ίδιος ο συγγραφέας του ιε′ λέει: *"Ἰσίδωρος ὁ ἡμέτερος ὑφηγήσατο μέγας διδάσκαλος"*. Άγνωστο όμως παραμένει αν ο **Ἰσίδωρος** αυτός είναι ο μηχανικός που μαζί με τον **Ανθέμιο** οικοδόμησε (532 - 537 μ.Χ.) το ναό ή ο ανιψιός του με το όνομα **Ἰσίδωρος**, ο οποίος επισκεύασε το μεγάλο θόλο της Αγίας Σοφίας που κατέπεσε από τον σεισμό του 558, όταν κανείς από τους δύο πρώτους αρχιτέκτονες δεν ζούσε.

Το ιε′ βιβλίο έχει μικρότερο ενδιαφέρον από το ιδ′. Αυτό περιέχει κατασκευές κανονικών στερεών. Το βιβλίο χωρίζεται σε τρία μέρη. Το πρώτο μέρος δείχνει τον τρόπο εγγραφής συγκεκριμένων κανονικών στερεών σε συγκεκριμένα άλλα κανονικά στερεά. Δηλαδή:

α) Ένα τετράεδρο σ' έναν κύβο.
β) Ένα οκτάεδρο σ' ένα τετράεδρο.
γ) Ένα οκτάεδρο σ' έναν κύβο.
δ) Έναν κύβο σ' ένα οκτάεδρο.
ε) Ένα δωδεκάεδρο σ' ένα εικοσάεδρο.

Το δεύτερο μέρος εξηγεί τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζεται το πλήθος των ακμών και το πλήθος των στερεών γωνιών των πέντε κανονικών στερεών.

Το τρίτο μέρος δείχνει πως καθορίζονται οι δίεδρες γωνίες μεταξύ των εδρών που τέμνονται σε οποιαδήποτε ακμή οποιουδήποτε κανονικού στερεού. Η μέθοδος έγκειται στην κατασκευή ενός ισοσκελούς τριγώνου με γωνία κορυφής ίση με τη γωνία που αναφέρεται. Από το μέσο μιας τυχαίας ακμής άγονται προς αυτή δύο κάθετες, μία σε καθεμιά από τις δύο έδρες που τέμνονται στην ακμή αυτή. Αυτές οι κάθετες, οι οποίες ορίζουν τη δίεδρη γωνία χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό των δύο ίσων πλευρών ενός ισοσκελούς τριγώνου και η βάση του τριγώνου βρίσκεται από τις γνωστές ιδιότητες του δοσμένου στερεού. Οι κανόνες σχεδιάσεως των αντίστοιχων ισοσκελών τριγώνων δίνονται αρχικά όλοι μαζί με γενικούς όρους. Οι κανόνες αυτοί αποδίδονται από τον άγνωστο συγγραφέα στον "Ισίδωρο, το μεγάλο μας δάσκαλο".

ιδ) "**Τῶν Ἀράτου καὶ Εὐδόξου Φαινομένων ἐξηγήσεως τοῦ Ἱππάρχου**" (βιβλία γʹ). (Προλογίζει η Επ. Καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Αθηνών **Μάρω Παπαθανασίου**.)

Ο **Ἵππαρχος** έγραψε το έργο αυτό μάλλον σε σχετικά νεαρή ηλικία και οπωσδήποτε πριν από την εποχή των μεγάλων ανακαλύψεών του. Σε σχέση με τα άλλα χαμένα του έργα έχει μικρότερη σπουδαιότητα. Είναι όμως το μοναδικό έργο του που σώθηκε ολόκληρο. Το "Τῶν Ἀράτου καὶ Εὐδόξου φαινομένων ἐξηγήσεως" αποτελεί ένα σχολιασμό της πραγματείας του **Ευδόξου**[18] "Φαινόμενα" και του αστρονομικού ποιήματος του **Αράτου** με τίτλο "Φαινόμενα καὶ Διοσημεῖα", το ένα μέρος του οποίου, όπως είναι γνωστό, αποτελεί μια έμμετρη μορφή των "Φαινομένων" του **Ευδόξου**. Από το έργο "Φαινόμενα καὶ Διοσημεῖα" ο **Ἵππαρχος** σχολιάζει μόνο τα "Φαινόμενα". Ο σχολιασμός καλύπτει το αʹ βιβλίο και ένα μέρος του βʹ βιβλίου. Το υπόλοιπο μέρος του βʹ βιβλίου αναφέρεται στις ανατολές και στις δύσεις των αστερισμών βορείως του ζωδιακού κύκλου οι οποίοι παρατηρούνται από τη Ρόδο. Περιέχει δε τις ανατολές, τις δύσεις και τις μεσουρανήσεις ορισμένων απλανών αστέρων και τμημάτων των 12 ζωδίων.

Το γʹ βιβλίο αναφέρεται στις ανατολές και δύσεις των αστερισμών που βρίσκονται νότια του ζωδιακού κύκλου, καθώς και των 12 αστερισμών του ζωδιακού κύκλου. Περιέχει δε ανατολές, δύσεις και μεσουρανήσεις διαφόρων απλανών αστέρων. Στο τελευταίο κεφάλαιο του γʹ βιβλίου ο **Ἵππαρχος** αναφέρεται στα 24 ωριαία ισημερινά διαστήματα.

Ο **Ἵππαρχος** στο παρόν έργο του αναφέρει συνολικά 48 αστερισμούς.

18 Ο Εύδοξος είχε γράψει δύο έργα σχετικά με τα ουράνια φαινόμενα. Το ένα είχε τίτλο "Φαινόμενα" και το άλλο "Ἔνοπτρον".

ιε) **"Τα έργα του Αυτολύκου του Πιτανέως «Περὶ κινουμένης σφαίρας»**[19] και **«Περὶ ἐπιτολῶν καὶ δύσεων»"**. (Προλογίζει ο Λέκτορας του τμήματος Μαθηματικών του Α.Π.Θ. **Νικόλαος Καστάνης**.)

**1.** Το περιεχόμενο του έργου *"Περὶ κινουμένης σφαίρας"*

Στο έργο αυτό ο **Αυτόλυκος** (4$^{ος}$ – 3$^{ος}$ π.Χ. αιώνας) κάνει μια γεωμετρική μελέτη μιας κινουμένης σφαίρας. Είναι προφανές ότι αυτή η κινούμενη σφαίρα είναι ένα μοντέλο της Ουράνιας σφαίρας που σύμφωνα με τη γεωκεντρική υπόθεση στρέφεται με κίνηση ομαλή από ανατολικά προς δυτικά γύρω από ένα σταθερό άξονα ο οποίος διαπερνά τη Γη και του οποίου τα άκρα είναι οι πόλοι της σφαίρας. Κέντρο της Ουράνιας σφαίρας (κατά το γεωκεντρικό πάντα σύστημα) θεωρείται η Γη ή ο παρατηρητής στην επιφάνεια της Γης. Το οριζόντιο επίπεδο το οποίο διέρχεται από το μάτι του παρατηρητή χωρίζει την ουράνια σφαίρα σε δύο ημισφαίρια, το ένα το ορατό, το "υπεράνω της Γης", και το άλλο το αφανές, το "κάτω από τη Γη".

Το ύψος του ορατού πόλου πάνω από τον ορίζοντα δεν είναι για όλους τους τόπους το ίδιο, αλλά σε όλους είναι ίσο με το γεωγραφικό πλάτος του τόπου.

**2.** Το περιεχόμενο του έργου *"Περὶ ἐπιτολῶν καὶ δύσεων"*

Σκοπός του **Αυτολύκου** στη συγγραφή του αυτή ήταν να διατυπώσει μια θεωρία "ἐπιτολῶν" και "δύσεων" των απλανών αστέρων, είτε αυτά είναι τοποθετημένα στο ζωδιακό είτε όχι. Η δεύτερη πραγματεία του **Αυτολύκου** είναι πιο σημαντική από την πρώτη. Παρεμβάλει ένα νέο στοιχείο, τον Ήλιο, του οποίου οι δύο εμφανείς κινήσεις, η ετήσια και η ημερήσια, δημιουργούν μια σχέση κατά τη διάρκεια της κινήσεως της Ουράνιας σφαίρας, η οποία ποικίλει ανάλογα με την εποχή. Η κίνηση της Ουράνιας σφαίρας (της σφαίρας των απλανών) και η κίνηση του Ήλιου προκαλούν τις επιτολές και τις δύσεις των αστέρων, δηλαδή το πέρασμά τους πάνω ή κάτω από τον ορίζοντα τη στιγμή που ο Ήλιος ανατέλλει ή δύει. Όλες οι προτάσεις των δύο βιβλίων της πραγματείας "Περὶ ἐπιτολῶν καὶ δύσεων" αναφέρονται σε "ἐπιτολές" και "δύσεις" αστέρων και ζωδιακών αστερισμών.

ιστ) "**Το έργο του Κλεομήδους «Κυκλική Θεωρία Μετεώρων»**". (Προλογίζει ο Αν. Καθηγητής του Πανεπιστημίου Αθηνών **Ξενοφών Μουσάς**.)

Ο αστρονόμος, γεωγράφος και μαθηματικός **Κλεομήδης**[20] (1$^{ος}$ αιώνας), κατά

---

19 Πρόκειται για το πλέον παλιό επιστημονικό έργο που σώζεται.

20 Προς τιμήν του ένας κρατήρας της Σελήνης ονομάστηκε "Κλεομήδης".

τον αείμνηστο αστρονόμο **Κωνσταντίνο Χασάπη**[21], θεωρείται ένας από τους μεγαλύτερους αστρονόμους της αρχαιότητας. Ο χρόνος της δράσεώς του εντοπίζεται στο διάστημα μεταξύ του τέλους του πρώτου αιώνα και στην αρχή του δεύτερου, δεδομένου ότι πρέπει να ήταν προγενέστερος του **Πτολεμαίου**, εφόσον δεν τον αναφέρει, ενώ αντίθετα αναφέρεται στον **Ερατοσθένη** και τον **Ίππαρχο**. Άγνωστος είναι επίσης και ο τόπος γεννήσεώς του[22]. Κανείς από τους αρχαίους συγγραφείς δεν τον μνημονεύει. Υπάρχουν όμως γι' αυτόν αρκετές βυζαντινές μαρτυρίες.

Σώθηκε ένα ενδιαφέρον έργο του με τίτλο "Κυκλική Θεωρία των Μετεώρων". Το έργο αυτό ο **Κλεομήδης**, άδολα και μετριόφρονα, παρουσιάζει ως συνεράνισμα προγενέστερων ελληνικών επινοήσεων και ιδίως ανακαλύψεων του **Ποσειδωνίου**. Γράφει χαρακτηριστικά: *"Τὰ πολλὰ δὲ τῶν εἰρημένων ἐκ τῶν Ποσειδωνίου εἴληπται"*. Στην "Κυκλική Θεωρία" ο **Κλεομήδης** παρουσιάζει ένα πλήθος από αστρονομικά, γεωγραφικά και γεωδαιτικά στοιχεία και συγκρίνει τις μεθόδους μετρήσεως της περιμέτρου της Γης του **Ερατοσθένους** και του **Ποσειδωνίου**. Σε κάθε περίπτωση η "Κυκλική Θεωρία των Μετεώρων" αποτελεί μια περίληψη πολύ ικανοποιητική της αστρονομικής επιστήμης της Στωικής Σχολής.

ιζ) "**Ευκλείδου «Δεδομένα»**". (Προλογίζει ο Αν. Καθηγητής του Πανεπιστημίου Αθηνών **Ιωάννης Αραχωβίτης.)**

Τα "Δεδομένα" είναι ένα έργο στενά συνδεδεμένο με τα "Στοιχεῖα", αφού πραγματεύεται θέματα της επιπεδομετρίας, η οποία αποτελεί το αντικείμενο των βιβλίων α′ έως στ′ των "Στοιχείων".

Το έργο αυτό θεωρήθηκε κατά τους Αλεξανδρινούς χρόνους πολύ σημαντικό ώστε να αποτελέσει το πρώτο στη σειρά έργο της συλλογής "Τόπος ἀναλυόμενος"[23].

Το έργο αρχίζει με 15 ορισμούς εννοιών στις οποίες τα γεωμετρικά αντικείμενα είναι "δεδομένα". Αναφέρουμε ενδεικτικά:

Γεωμετρικά αντικείμενα (επιφάνειες, ευθείες, γωνίες και λόγοι) λέγεται ότι είναι "δοσμένα ως προς το μέγεθος" όταν εξισώνονται άλλα μ' αυτά (ορισμοί 1 – 2).

---

21 Κων/νου Χασάπη: "Ο αστρονόμος και μαθηματικός Κλεομήδης" (ανάτυπο), Αθήνα 1953.

22 Ορισμένοι ιστορικοί των επιστημών προτείνουν ως πατρίδα του Κλεομήδους την πόλη Λυσιμάχεια βόρεια του Ελλησπόντου. Κύριος υποστηρικτής της απόψεως αυτής είναι ο O. Neugebauer ("Cleomedes and the Meridian of Lysimachia", Am. J. Phil. 1941).

23 Βλέπε Πάππου: "Μαθηματικὴ Συναγωγή", τόμος Α′, (επιμέλεια, απόδοση στη νεοελληνική, σχολιασμός Ευαγγέλου Σπανδάγου) "Αίθρα", Αθήνα 2001, σελίδα 29.

Ευθύγραμμα αντικείμενα είναι "δοσμένα ως προς το είδος" όταν οι γωνίες τους δίνονται χωριστά καθώς και οι λόγοι μεταξύ των πλευρών (ορισμός 3).

Σημεία, ευθείες και γωνίες είναι "δοσμένα ως προς θέση" όταν καταλαμβάνουν πάντα την ίδια θέση (ορισμός 4).

Ένας κύκλος είναι "δοσμένος ως προς θέση και μέγεθος" όταν το κέντρο του είναι δοσμένο ως προς τη θέση και η ακτίνα του ως προς το μέγεθος (ορισμός 6) κτλ.

Ακολουθούν 94 προτάσεις οι οποίες αποτελούν εφαρμογές των βιβλίων α′ έως και στ′ των "Στοιχείων".

ιη) "**«Ἡ Μαθηματικὴ Σύνταξις» του Πτολεμαίου**" (τόμος Α′, βιβλία α′, β′, γ′). (Προλογίζει η Επ. Καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Αθηνών **Μάρω Παπαθανασίου**.)

Το κυριότερο από τα έργα του η "**Μαθηματικὴ Σύνταξις**" (ή "**Μεγάλη σύνταξις τῆς ἀστρονομίας**" ή "**Μεγίστη**"[24]) αποτελείται από 13 βιβλία και είναι αφιερωμένο σε κάποιο **Σύρο**. Η "Μαθηματικὴ Σύνταξις" θεωρείται ως ένα από τα σπουδαιότερα αστρονομικά συγγράμματα όλων των εποχών και ένα από τα σημαντικότερα μνημεία της ελληνικής διανοήσεως. Το έργο αυτό μεταφράστηκε στα αραβικά τον 9ο μ.Χ. αιώνα (κατόπιν εντολής του χαλίφη Αλ Μαμούν) με τον τίτλο "**Ταμπίρ-αλ-Μαγκέστ**"[25] και έγινε περισσότερο γνωστό με το συγκεκομμένο τίτλο **Almagest**. Η "Μαθηματικὴ Σύνταξις" που γράφτηκε περίπου το 142 μ.Χ. αποτελούσε την κοινή πηγή των αστρονομικών γνώσεων κατά τους Αλεξανδρινούς και τους Μεσαιωνικούς χρόνους[26].

---

24 Ονομάστηκε έτσι για διάκριση από το αστρολογικό έργο του "Τετράβιβλος σύνταξις".

25 Αλ Μαγκέστ = ἡ Μεγίστη.

26 Από τον 2ο μ.Χ. μέχρι και τον 16ο μ.Χ. αιώνα. Από αναφορές του Πάππου στο στ′ βιβλίο της "Μαθηματικῆς Συναγωγῆς" προκύπτει ότι για την κατανόηση του "μεγίστου ἀστρονομικοῦ κώδικος" τον οποίο μας κληροδότησε η αρχαιότητα, δηλαδή το διάσημο έργο του Πτολεμαίου "Μαθηματικὴ Σύνταξις", συγκροτήθηκε μια συλλογή αστρονομικών έργων με τίτλο "Μικρὸς ἀστρονομούμενος τόπος".
Η συλλογή αυτή περιλάμβανε τα έργα:
Αυτολύκου: "Περὶ κινουμένης σφαίρας".
Ευκλείδου: "Ὀπτικά".
Ευκλείδου: "Φαινόμενα".
Θεοδοσίου: "Σφαιρικά".
Θεοδοσίου: "Περὶ ἡμερῶν καὶ νυκτῶν".

Το ιστορικό ενδιαφέρον το οποίο παρουσιάζει το έργο απορρέει κατά πρώτο λόγο από το γεγονός ότι απ' αυτό αντλούμε πολύτιμες πληροφορίες γύρω από το έργο του πρίγκιπα των Ελλήνων αστρονόμων, τον **Ίππαρχο**. Ένας δεύτερος λόγος είναι ότι το έργο αυτό αποτελεί την αρχαιότερη σωζόμενη συγγραφική εργασία στην οποία περιέχονται πολυάριθμα στοιχεία και θαυμάσιες εφαρμογές της τριγωνομετρίας (επίπεδης και σφαιρικής).

ιθ) **"«Τῶν κατὰ τὸ μαθηματικὸν χρησίμων εἰς τὴν Πλάτωνος ἀνάγνωσιν» του Θέωνος του Σμυρναίου".** (Προλογίζει η καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Αθηνών και Πρόεδρος της Εταιρείας Ελλήνων Φιλολόγων **Γεωργία Ξανθάκη – Καραμάνου**.)

Το παρόν έργο του **Θέωνος** είναι ένα συμπίλημα πολύτιμο τόσο για την ουσία του, όσο και για τις πολυάριθμες ιστορικές πληροφορίες που περιέχει.

Ο τίτλος όμως του έργου, που υποστηρίζει ότι το βιβλίο περιέχει τα χρήσιμα για τη μελέτη της πλατωνικής φιλοσοφίας, δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Χωρίς αμφιβολία πρόκειται για ένα εγκόλπιο πολύτιμο για σπουδαστές φιλοσοφικών σχολών. Δεν θίγει όμως σε βάθος τα μαθηματικά και αστρονομικά ερωτήματα που έθεσε ο **Πλάτων**.

Η σύνδεση με τα ερωτήματα αυτά συνίσταται κυρίως στο μεγάλο προοίμιο, στο οποίο παραθέτει τις απόψεις του **Πλάτωνος** σχετικά με τη μέγιστη σημασία των Μαθηματικών στην εκπαίδευση του φιλοσόφου, και την κοινή σχέση μεταξύ των πέντε διαφορετικών κλάδων της επιστήμης των μαθηματικών, δηλαδή της αριθμητικής, της γεωμετρίας, της στερεομετρίας, της αστρονομίας και της μουσικής. Στην πρώτη παράγραφο ο **Θέων** υπόσχεται να δώσει τα μαθηματικά θεωρήματα που είναι περισσότερο απαραίτητο να γνωρίζουν οι αναγνώστες των έργων του **Πλάτωνος**, στην αριθμητική, στη μουσική και στη γεωμετρία, με τις εφαρμογές τους στη στερεομετρία και την αστρονομία.

Όσον αφορά όμως τη γεωμετρία και τη στερεομετρία, ο **Θέων** δεν τηρεί επ' ακριβώς την υπόσχεσή του με τη δικαιολογία ότι όσοι διαβάζουν τα έργα του Πλάτωνος έχουν την απαραίτητη γεωμετρική υποδομή. Παρά ταύτα στην ενότητα περί μουσικής εισάγει ορισμένους βασικούς γεωμετρικούς ορισμούς.

---

Αριστάρχου: "Περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων ἡλίου καὶ σελήνης".

Αναμφίβολα και η άλλη πραγματεία του Αυτολύκου "Περὶ ἐπιτολῶν καὶ δύσεων", καθώς και οι πραγματείες "Περὶ οἰκήσεων" του Θεοδοσίου και "Ἀναφορικὸς" του Υψικλέους περιλαμβάνονταν στη συλλογή αυτή, όπως προκύπτει από διάφορους κώδικες.

κ) "**Ὑψικλέους:** «Ἀναφορικὸς»", κα) "**Ἐρατοσθένους:** «Εἰς τὰ Ἀράτου Φαινόμενα»", κβ) "**Ἀχιλλέως Τατίου:** «Περὶ τοῦ Παντὸς»" (τα έργα αυτά περιέχονται σ' έναν τόμο). (Προλογίζει η Επ. Καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Αθηνών **Παναγιώτα Πρέκα – Παπαδήμα**.)

Ο **Υψικλής ο Αλεξανδρεύς** θεωρείται ένας από τους πλέον αξιόλογους μαθηματικούς και αστρονόμους της αλεξανδρινής περιόδου. Για τη ζωή του δεν γνωρίζουμε σχεδόν τίποτα εκτός του ότι έδρασε στην Αλεξάνδρεια μεταξύ του 150 – 90 π.Χ.

Σώζονται αποσπάσματα από το έργο του "Ἀναφορικὸς", που θεωρείται ένα από τα κλασικά έργα της χαμένης βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας. Τα αποσπάσματα του έργου "Ἀναφορικὸς" τα οποία παρουσιάζουμε, περιέχουν 3 προτάσεις με αντικείμενο τις αριθμητικές προόδους και 3 προτάσεις (εφαρμογές των προηγουμένων) που αναφέρονται σε τόξα του ζωδιακού κύκλου.

"Τὰ σχόλια τοῦ **Ἐρατοσθένους** (276 – 194 π.Χ.) στὸν **Ἄρατο**". Πρόκειται για ένα σχολιασμό στο αστρονομικό ποίημα του **Αράτου** "Φαινόμενα καὶ Διοσημεία". Ίσως όμως τα σχόλια αυτά να μην είναι γνήσιο έργο του **Ερατοσθένους**.

Μέρος του έργου "Περὶ τοῦ παντὸς" του **Αχιλλέως Τατίου** (2ος αιώνας μ.Χ.). Το μέρος αυτό αναφέρεται στο σχολιασμό του ποιήματος του **Αράτου** που προαναφέραμε. Η πραγματεία του **Αχιλλέως** αποτελεί μια περίληψη των αστρονομικών γνώσεων της εποχής του. Η πραγματεία αυτή είναι λίαν πολύτιμη, διότι διασώζει και αποσπάσματα από διάφορα χαμένα έργα. Αναφέρουμε χαρακτηριστικά ότι διασώζει τα δύο μοναδικά αποσπάσματα που γνωρίζουμε, από το χαμένο αστρονομικό ποίημα του **Ερατοσθένους** "Ἑρμῆς".

Τελειώνοντας αναφέρουμε ότι τα έργα αυτά, όχι μόνο δεν είχαν εκδοθεί ποτέ ως τώρα με τη μέθοδο της τυπογραφίας στον Ελληνικό χώρο, αλλά και αυτά τα πρωτότυπα κείμενα ήταν δυσεύρετα.

Και τα είκοσι δύο εκδοθέντα έως τώρα έργα περιέχουν τα απαραίτητα βιογραφικά στοιχεία των συγγραφέων τους, το ιστορικό των εκδόσεών τους και αναλυτική εισαγωγή. Είναι άξιο παρατηρήσεως ότι **τα Αρχαία Ελληνικά κείμενα των έργων αυτών έχουν αποκατασταθεί και έχουν εκ νέου στοιχειοθετηθεί ηλεκτρονικά**, ενώ η παρουσίασή τους στη νεοελληνική ακολουθεί, όπου απαιτείται, το σύγχρονο μαθηματικό συμβολισμό ως μέσο διευκόλυνσης μιας πρώτης προσέγγισης προς το μαθηματικό περιεχόμενο.

Έχει προγραμματισθεί η έκδοση 10 ακόμα σχετικών έργων.

Σημειώνουμε ότι παράλληλα με την έκδοση των πραγματειών αυτών, από το 1997 γίνονται έρευνες σε βιβλιοθήκες ασιατικών κρατών (αραβικές χώρες, Ινδίες και Πακιστάν) για τον εντοπισμό χαμένων έργων αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών και αστρονόμων που ίσως έχουν διασωθεί σε αραβικούς κώδικες. Τα αποτελέσματα όμως της έρευνας αυτής ξεφεύγουν από το πλαίσιο της παρούσας εισηγήσεως.

## Βιβλιογραφία

1. **Τα αναφερόμενα 22 έργα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών και αστρονόμων**, (εκδόσεις "Αίθρα"), Αθήνα 1999 – 2005.
2. **Αγαπίδη Χ.:** "Η φιλοσοφία τοῦ ἐκ Γεράσων Νικομάχου" (Ἀνάτυπον λόγου ἀπαγγελθέντος ἐν τῷ Ἐθνικῷ Πανεπιστημίῳ τῇ 1η Μαρτίου 1906).
3. **Δέμη Κ. Α.:** "Μαθηματικά και φιλοσοφία στον Νικόμαχο Γερασηνό", Περιοδικό "Νεύσις" (Άνοιξη 1995).
4. **Μαργέτη Δ.:** "Ευάγγελος Στάματης. Ο σύγχρονος αναστηλωτής της αρχαίας Ελληνικής Αστρονομίας" (Δαυλός), Αθήνα 2002.
5. **Neugebauer O.:** "Cleomedes and the Meridian of Lysimachia" (Am. J. Phil.), 1941.
6. **Szabo A.:** "Ἀπαρχαὶ τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν" (Τ.Ε.Ε.), Αθήνα 1973.
7. **Πρακτικά Ακαδημίας Αθηνών**, Διάφοροι τόμοι από το 1953 έως το 1971.
8. **Heath T.:** "Aristarchus of Samos, the Ancient Copernicus" (Dover), N. York 1960.
9. **Morrow G.:** "Proclus a Commentary on the First Book of Euclid's Elements" (Princeton University), Princeton 1970.
10. **Friedlein G.:** "Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum Commentarii" (G. Olms), Hildsheim 1965.
11. **Χασάπη Κ.:** "Ο αστρονόμος και μαθηματικός Κλεομήδης" (ανάτυπο), Αθήνα 1953.