ΓΙΑΝΝΗΣ Χ. ΘΩΜΑΪΔΗΣ
Δρ. Μαθηματικών – Σχολικός Σύμβουλος

Εξισώσεις και ανισώσεις δευτέρου βαθμού στα *Αριθμητικά* του Διόφαντου

Μια μελέτη για την ιστορία της Άλγεβρας

ὅταν δὲ τοιαύτην ἴσωσιν ἰσώσωμεν, ποιοῦμεν τῶν ϛ τὸ 𐅵′ ἐφ' ἑαυτό, γίνεται $\overline{\vartheta}$, καὶ τὰς $\Delta^{Y}\overline{\beta}$ ἐπὶ τὰς $\dot{M}\,\overline{\iota\eta}$, γίνονται $\overline{\lambda ϛ}$· πρόσθες τοῖς $\overline{\vartheta}$, γίνονται $\overline{\mu\varepsilon}$, ὧν π^{λ}· οὐκ ἔλαττόν ἐστι $\dot{M}\,\overline{\zeta}$· πρόσθες τὸ ἡμίσευμα τῶν ϛ· ⟨γίνεται οὐκ ἔλαττον $\dot{M}\,\overline{\iota}$· καὶ μέρισον εἰς τὰς Δ^{Y}·⟩ γίνεται οὐκ ἔλαττον $\dot{M}\,\overline{\varepsilon}$.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Το αρχαίο κείμενο του εξωφύλλου είναι απόσπασμα της επίλυσης του προβλήματος 39 από το Βιβλίο IV των *Αριθμητικών* του Διόφαντου. Περιγράφεται μια αλγοριθμική διαδικασία από την οποία προκύπτει ότι κάθε ρητός αριθμός $x \geq 5$ επαληθεύει την ανίσωση $6x + 18 < 2x^2$. Το ζήτημα αναπτύσσεται διεξοδικά στο Κεφάλαιο 5 και στο Παράρτημα II του βιβλίου.

ISBN 978-960-456-308-1

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) - 105 64 ΑΘΗΝΑ • Τηλ.-Fax: 210.3211.097

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Ασκληπιού 60 - Εξάρχεια 114 71, Αθήνα
Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Αντί προλόγου

Το βιβλίο αυτό επιχειρεί μια «κατάδυση στα βαθειά» ενός γοητευτικού και ταυτόχρονα αινιγματικού κόσμου: τη μαθηματική επιστήμη της ύστερης Ελληνικής αρχαιότητας όπως αυτή έχει διασωθεί σε μια συλλογή προβλημάτων με τίτλο *Διοφάντου Αλεξανδρέως Αριθμητικά*. Η εξοικείωση όμως με αυτό τον κόσμο επιβάλει να «καταδυθούμε» χωρίς τον εξοπλισμό που παρέχουν τα σύγχρονα Μαθηματικά, μη εξαιρουμένων των απλών εργαλείων που αναφέρονται στον τίτλο του βιβλίου: οι όροι «εξίσωση», «ανίσωση» και «βαθμός» έχουν αποκτήσει από την εποχή του μεσαιωνικού Ισλάμ και της Ευρωπαϊκής αναγέννησης συγκεκριμένες σημασίες, λειτουργίες και αναπαραστάσεις που δεν ήταν οικείες στους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς.

Για να επιλύσει προβλήματα εύρεσης ρητών αριθμών με δεδομένες ιδιότητες, ο Διόφαντος, χρησιμοποιούσε μια έννοια «αγνώστου» σε εμβρυακή μορφή και ορισμένες συντομογραφίες για τις δυνάμεις του, με τη βοήθεια των οποίων και με τεχνάσματα εξαίρετης επινοητικότητας, δημιουργούσε «υποστάσεις» που είναι «ίσες», «μείζονες» ή «ελάσσονες» κάποιων άλλων για να προσδιορίσει από αυτές την τιμή του αγνώστου και εν συνεχεία τους ζητούμενους αριθμούς.

Ένα από τα πολλά αινίγματα που εγείρει η ανάγνωση των *Αριθμητικών* είναι ότι στην εισαγωγή τους ο Διόφαντος δίνει προς τους αναγνώστες μια σημαντική υπόσχεση την οποία όμως αφήνει ανεκπλήρωτη, τουλάχιστον στα τμήματα εκείνα του έργου που έχουν διασωθεί. Συγκεκριμένα, υπόσχεται ότι θα παρουσιάσει «ύστερον» τον τρόπο εύρεσης του αγνώστου από τις ισότητες που σήμερα ονομάζονται «τριώνυμες εξισώσεις δευτέρου ή ανωτέρου βαθμού»· σε κανένα όμως από τα υπάρχοντα τμήματα του έργου δεν γίνεται αυτή η παρουσίαση, παρά το γεγονός ότι τα στοιχεία της αντίστοιχης θεωρίας θεωρούνται γνωστά και χρησιμοποιούνται «σιωπηλά» στην επίλυση αρκετών προβλημάτων. Το βιβλίο αυτό εξετάζει όλα τα προβλήματα των *Αριθμητικών* που περιέχουν εξισώσεις και ανισώσεις αυτού του είδους και επιχειρεί να διαφωτίσει τον τρόπο που τις κατανοούσε και τις χρησιμοποιούσε ο Διόφαντος.

Στην ιστορική βιβλιογραφία έχουν καταγραφεί πολλές απόπειρες αναζήτησης αλγεβρικών χαρακτηριστικών στο περιεχόμενο των *Αριθμητικών* ή άλλων έργων της αρχαιοελληνικής μαθηματικής παράδοσης. Αυτές οι απόπειρες όμως καταλήγουν συνήθως σε σύγχρονες μαθηματικές ανακατασκευές οι οποίες δεν συμβάλουν στην κατανόηση του ιστορικού πλαισίου μέσα στο οποίο τα έργα αυτά αναπτύχθηκαν. Το πρόβλημα που αντιμετωπίζει κάθε σύγχρονη αφήγηση για τα αρχαία Μαθηματικά είναι το εξής: Πώς θα μεταβιβάσει τον αυθεντικό τρόπο σκέψης του αρχαίου συγγραφέα σε έναν αναγνώστη που δεν έχει προ οφθαλμών (ή αδυνατεί να διαβάσει) το πρωτότυπο κείμενο;

Ελπίζω ότι η «κατάδυσή» και αναζήτηση των εξισώσεων και ανισώσεων δευτέρου βαθμού στα *Αριθμητικά* του Διόφαντου, θα προσφέρει στους αναγνώστες αυτού του βιβλίου ένα αυθεντικό δείγμα του ιδιαίτερου τρόπου σκέψης που χαρακτηρίζει μια όψιμη αλλά ιδιαίτερα γόνιμη περίοδο της αρχαιοελληνικής μαθηματικής παράδοσης.

Από τη θέση αυτή θέλω να ευχαριστήσω τις Εκδόσεις Ζήτη και ιδιαίτερα τον Άρη Σύρμο για την άψογη συνεργασία στην έκδοση αυτού του βιβλίου.

Γιάννης Χ. Θωμαΐδης

Θεσσαλονίκη

Οκτώβριος 2011

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η επόμενη σειρά αριθμητικών πράξεων είναι μέρος της επίλυσης ενός προβλήματος από τη Βαβυλωνιακή πινακίδα με τον κωδικό αριθμό AO8862:

$$29 : 2 = 14{,}5$$
$$14{,}5 \times 14{,}5 = 210{,}25$$
$$210{,}25 - 210 = 0{,}25$$
$$\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$$
$$14{,}5 + 0{,}5 = 15$$
$$14{,}5 - 0{,}5 = 14$$

Πόσοι από τους αναγνώστες θα υποστήριζαν την άποψη ότι ο Βαβυλώνιος που εκτελεί αυτές τις πράξεις γύρω στο 1750 π.Χ., λύνει την εξίσωση $x^2 - 29x + 210 = 0$;[1]

Στα βιβλία της σύγχρονης, πανεπιστημιακής Άλγεβρας η μελέτη της γενικής δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ γίνεται τελείως συνοπτικά, κυρίως για να δοθεί το πρώτο παράδειγμα εφαρμογής των αποτελεσμάτων της γενικής θεωρίας Galois (επίλυση εξισώσεων με ριζικά σε ένα σώμα) ή του θεμελιώδους θεωρήματος της Άλγεβρας (στο σώμα των μιγαδικών αριθμών). Για παράδειγμα, στην περίφημη *Algebra* του επιφανούς αλγεβριστή και ιστορικού των Μαθηματικών Bartel Leenert van der Waerden (1903–1996) η σχετική παρουσίαση και των δύο περιπτώσεων καταλαμβάνει συνολικά περίπου μία σελίδα και περιλαμβάνει τα εξής: [2]

Η επίλυση της γενικής *εξίσωσης 2 βαθμού* $x^2 + px + q = 0$

πρέπει σύμφωνα με τη γενική θεωρία να γίνεται μέσω μιας τετραγωνικής ρίζας· ως τέ-

---

[1] Η άποψη αυτή (την οποία πρώτος θα αμφισβητούσε ο γραφέας της πινακίδας!) αποτελούσε κυρίαρχη ερμηνευτική προσέγγιση στην ιστοριογραφία των Βαβυλωνιακών Μαθηματικών για πολλές δεκαετίες. Το συγκεκριμένο ζήτημα εξετάζεται αναλυτικά στη συνέχεια του βιβλίου.

[2] Βλέπε: B. L. van der Waerden, *Algebra* I, σ.191 & σ.252.

τοια μπορεί να επιλέξει κανείς (βλέπε το συμπέρασμα της προηγούμενης παραγράφου) το γινόμενο διαφορών των ριζών x_1, x_2:

$$x_1 - x_2 = \sqrt{D} \cdot \quad D = p^2 - 4q\,.$$

Από εδώ και από την $\quad x_1 + x_2 = -p$

παίρνει κανείς τους γνωστούς τύπους επίλυσης

$$x_1 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2} \qquad x_2 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2}\,.$$

Μοναδική προϋπόθεση αποτελεί ότι η χαρακτηριστική του βασικού σώματος δεν είναι 2.

Όταν το βασικό σώμα είναι ειδικότερα το σώμα των μιγαδικών αριθμών, ο van der Waerden χρησιμοποιεί την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης ως προάγγελο του θεμελιώδους θεωρήματος της Άλγεβρας. Αφού αποδεικνύει αρχικά ότι στο σώμα αυτό κάθε εξίσωση της μορφής $x^2 = a + bi$ (a, b πραγματικοί) είναι επιλύσιμη, γράφει:

Από την προηγούμενη απόδειξη προκύπτει ότι στο σώμα των μιγαδικών αριθμών κάθε δευτεροβάθμια εξίσωση

$$x^2 + px + q = 0$$

μπορεί να λυθεί, αφού τεθεί στη μορφή $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$.

Η λύση είναι λοιπόν $x = -\frac{p}{2} \pm w$, όπου το w σημαίνει μια οποιαδήποτε λύση της εξίσωσης $w^2 = \frac{p^2}{4} - q$.

Το «θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας», καλύτερα θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας των μιγαδικών αριθμών, δηλώνει ότι στο σώμα C όχι μόνο κάθε δευτεροβάθμιο, αλλά κάθε μη σταθερό πολυώνυμο f(z) έχει μια ρίζα.

Την περίοδο που ο Waerden έγραφε αυτές οι γραμμές,[3] οι εξισώσεις και οι ανισώσεις 2ου βαθμού αποτελούσαν έναν από τους πυλώνες της στοιχειώδους, σχολικής Άλγεβρας. Η σχετική θεωρία μαζί με πολυάριθμες ασκήσεις και προβλήματα κά-

---

[3] Το απόσπασμα προέρχεται από την 8η έκδοση (1971) της *Algebra* του Waerden (1η έκδοση το 1930).

λυπτε μεγάλο μέρος των διδακτικών βιβλίων, ενώ στην εξωσχολική βιβλιογραφία κυκλοφορούσαν πολλές μονογραφίες με αποκλειστικό περιεχόμενο τη μελέτη των ιδιοτήτων των ριζών του τριωνύμου 2^{ου} βαθμού, τη διερεύνηση εξισώσεων και ανισώσεων 2^{ου} βαθμού με παραμετρικούς συντελεστές, την επίλυση προβλημάτων, καθώς και ικανό αριθμό από τις περιβόητες «συνδυαστικές» ασκήσεις, που συνδύαζαν το «τριώνυμο» με ετερόκλητα κεφάλαια της σχολικής Άλγεβρας και παράγονταν ως προϊόν μαζικής κατανάλωσης για τις ανάγκες των εισαγωγικών εξετάσεων.

Η έμφαση στη μελέτη του τριωνύμου 2^{ου} βαθμού, τόσο στη διδασκαλία όσο και στις εξετάσεις, είχε λάβει τέτοιες υπερβολικές διαστάσεις ώστε η μεγάλη διεθνής απόπειρα εκσυγχρονισμού των σχολικών Μαθηματικών που άρχισε να υλοποιείται στα τέλη της δεκαετίας του 1950, έβαλε εξαρχής στο στόχαστρο την «αρρώστια της τριωνυμίτιδας» (illness of trinomialitis).[4]

Στα χρόνια που ακολούθησαν, οι τάσεις για εκσυγχρονισμό και εξορθολογισμό έφεραν στο προσκήνιο της σχολικής Άλγεβρας την έννοια της συνάρτησης, με αποτέλεσμα η «μελέτη του τριωνύμου» να συρρικνωθεί και να ενταχθεί μέσα στο ευρύτερο πλαίσιο μελέτης της πολυωνυμικής συνάρτησης 2^{ου} βαθμού

$$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma .$$

Οι εξελίξεις αυτές μπορεί να περιόρισαν ποσοτικά την έκταση της διδασκαλίας των εξισώσεων και ανισώσεων 2^{ου} βαθμού, αλλά δεν έχουν αλλάξει την ουσία του ζητήματος· οι συγκεκριμένες έννοιες και ο «τύπος της διακρίνουσας»

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

παραμένουν ουσιαστικά ένα από τα πιο βασικά –αν και όχι πάντοτε ευχάριστα– ενθυμήματα της μαθηματικής εκπαίδευσης των μαθητών όλου του κόσμου.

Η σύντομη αυτή αναδρομή στο χώρο της ιστορίας, της επιστήμης και της εκπαίδευσης διεγείρει την έμφυτη ανθρώπινη περιέργεια να γνωρίσει την προέλευση και την εξέλιξη γεγονότων ή καταστάσεων που σήμερα εμφανίζονται περίπου ως αμετάβλητες, αιώνιες αλήθειες. Η περιέργεια αυτή, που είναι ουσιώδες χαρακτη-

---

[4] Ο άλλος μεγάλος στόχος των μεταρρυθμιστών ήταν η κατάργηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, που εκφράστηκε με το περιβόητο σύνθημα «να φύγει ο Ευκλείδης». Βλέπε σχετικά: O.E.E.C., *New Thinking in School Mathematics*, §§100, 263.

ριστικό της κριτικής σκέψης, ελάχιστα ενθαρρύνεται ή καλλιεργείται από τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο σημερινό σχολείο και η όποια παροχή ιστορικής γνώσης συνήθως συμπιέζεται μέσα στα ασφυκτικά περιθώρια ιστορικών σημειωμάτων των διδακτικών βιβλίων. Οι εξισώσεις και ανισώσεις 2^{ου} βαθμού έχουν τη δική τους, πολύ ενδιαφέρουσα ιστορική καταγωγή και εξέλιξη, η αφήγηση όμως της οποίας συχνά εξαντλείται σε αναπαραγωγή στερεοτύπων ή εγκλωβίζεται σε απριοριστικές και αναχρονιστικές ερμηνείες.

Στα κεφάλαια που ακολουθούν θα επιχειρηθεί μια σύνθεση των στοιχείων εκείνων που συγκροτούν την πρώτη γνωστή διαπραγμάτευση εξισώσεων και ανισώσεων 2^{ου} βαθμού στην ιστορική εξέλιξη των Μαθηματικών. Ενταγμένη με αποσπασματικό και μάλλον αινιγματικό τρόπο στα *Αριθμητικά* του Διόφαντου, η διαπραγμάτευση αυτή έχει προβληματίσει τους μαθηματικούς και ιστορικούς που ασχολήθηκαν με το συγκεκριμένο έργο, αλλά το ζήτημα δεν προβάλλεται όσο θα έπρεπε στη σχετική βιβλιογραφία. Αποτέλεσμα ευρύτερων ερευνών του συγγραφέα για το έργο του Αλεξανδρινού μαθηματικού κατά την τελευταία δεκαετία[5], το μεγαλύτερο μέρος αυτού του υλικού δημοσιεύεται για πρώτη φορά στο ανά χείρας βιβλίο.

[5] Για το περιεχόμενο αυτών των ερευνών βλέπε:
Y. Thomaidis, A Framework for Defining the Generality of Diophantos' Methods in «Arithmetica». *Archive for History of Exact Sciences* 59, 591–640 (2005).
Γ. Θωμαΐδης, Διδακτικές όψεις της γενίκευσης στα Αριθμητικά του Διόφαντου. *Ιστορία & Μαθηματική Εκπαίδευση*, 15–28. Θεσσαλονίκη, Εκδόσεις Ζήτη (2006).
Y. Thomaidis, Some remarks on the meaning of equality in Diophantos' Arithmetica. *Historia Mathematica* 38, 28–41 (2011).

Κεφάλαιο 1

Γνώριζαν οι αρχαίοι τις εξισώσεις 2^{ου} βαθμού;[6]

1.1. Αρχαίες μαθηματικές παραδόσεις και σύγχρονες ιστορικές ερμηνείες

Για να κατανοήσουμε την ιστορική εξέλιξη μιας μαθηματικής έννοιας χρειάζεται τις περισσότερες φορές να έχουμε πρόσβαση σε κείμενα γραμμένα πριν από πολλούς αιώνες και σε γλώσσες που σήμερα θεωρούνται νεκρές, με ανύπαρκτο ή υποτυπώδη συμβολισμό (και σε κάθε περίπτωση διαφορετικό από αυτόν που κατανοεί ένας σημερινός αναγνώστης). Επιπλέον, τα κείμενα αυτά είναι πολλές φορές αποσπασματικά, δηλαδή δεν περιέχουν κάποιο θεωρητικό υπόβαθρο με ορισμούς των εννοιών και ερμηνείες των μεθόδων που χρησιμοποιούν οι συγγραφείς τους στην επίλυση των προβλημάτων. Όπως γίνεται φανερό, η μελέτη αυτών των κειμένων αποτελεί μια εξειδικευμένη ερευνητική δραστηριότητα που διεξάγεται από τους ιστορικούς των Μαθηματικών, οι οποίοι έχουν αναπτύξει ειδικά εργαλεία και μεθόδους ανάλυσης και ερμηνείας. Είναι μάλιστα χαρακτηριστικό ότι τα μέσα που χρησιμοποιούν οι ιστορικοί δεν είναι αμετάβλητα αλλά εξελίσσονται και προσαρμόζονται στα νέα ιστοριογραφικά προβλήματα που ανακύπτουν με την πάροδο του χρόνου. Σ' αυτό το πρώτο κεφάλαιο λοιπόν θα επιχειρήσουμε να δώσουμε ένα

[6] Το περιεχόμενο αυτού του κεφαλαίου προέρχεται από επεξεργασία και επικαιροποίηση παλαιότερης εργασίας μου που είχε δημοσιευθεί στο περιοδικό *Διάσταση* του Παραρτήματος Κεντρικής Μακεδονίας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (τεύχος 1-2, 1992, σσ.56-64)

μικρό πανόραμα της ερευνητικής δραστηριότητας που αναπτύσσεται στο χώρο της ιστοριογραφίας των Μαθηματικών, έχοντας ως άξονα την ιστορική εξέλιξη των εξισώσεων 2ου βαθμού.

Αν επιχειρήσει κανείς να ανιχνεύσει την καταγωγή των εξισώσεων 2ου βαθμού και καταφύγει στα κλασικά εγχειρίδια της Ιστορίας των Μαθηματικών, θα συναντήσει δύο στερεότυπες αναφορές:

Η πρώτη παραπέμπει στους Βαβυλώνιους οι οποίοι θεωρείται ότι έλυναν εξισώσεις 2ου βαθμού ήδη από την περίοδο 1800-1700 π.Χ. (εποχή του βασιλιά Χαμμουραπί και των διαδόχων του), χρησιμοποιώντας μια μέθοδο παρόμοια προς τη σημερινή, αλλά διατυπωμένη με λόγια, στη μορφή οδηγιών. Η δεύτερη αναφορά γίνεται στους αρχαίους Έλληνες της κλασικής περιόδου οι οποίοι θεωρείται ότι έλυναν εξισώσεις 2ου βαθμού με γεωμετρικές μεθόδους, στο πλαίσιο της λεγόμενης «γεωμετρικής άλγεβρας».

Οι θέσεις αυτές είναι ευρύτατα διαδεδομένες και μπορεί να τις συναντήσει κανείς ακόμη και στα ιστορικά σημειώματα των σχολικών βιβλίων. Τις τελευταίες δεκαετίες όμως η ιστορική έρευνα έχει αναδείξει ορισμένες όψεις του ζητήματος που θέτουν υπό έντονη αμφισβήτηση τις προηγούμενες θέσεις, αλλά και συνολικά την πρώιμη ιστορία της Άλγεβρας. Μπορούμε μάλιστα να υποστηρίξουμε ότι το συγκεκριμένο ζήτημα έχει συμβάλει καθοριστικά στη δημιουργία μιας ρήξης που οριοθετεί την «παραδοσιακή» από τη «σύγχρονη» σχολή ιστοριογραφίας των Μαθηματικών της αρχαιότητας.

Ο B. van der Waerden, επιχειρώντας μια σύνθεση ανάμεσα σε διαφορετικές εποχές και μαθηματικές παραδόσεις, αναφέρει ότι αν συγκρίνουμε τα κείμενα των Βαβυλωνιακών πινακίδων με εκείνα του Ευκλείδη (περίπου 300 π.Χ.), του Al–Khwārizmī (περίπου 780-850 μ.Χ.) και του Omar Khayyām (1048-1131 μ.Χ.), μπορούμε να διακρίνουμε τρία διαφορετικά είδη άλγεβρας:[7]

Α. *Μικτή Άλγεβρα* Βαβυλωνιακού τύπου, στην οποία ευθύγραμμα τμήματα προστίθενται με εμβαδά και εξισώνονται με αριθμούς.

Β. *Αριθμητική Άλγεβρα*, στην οποία μόνο ρητοί αριθμοί m/n είναι δεκτοί για συντελεστές και λύσεις εξισώσεων, όπως στα «Αριθμητικά» του Διόφαντου.

Γ. *Γεωμετρική Άλγεβρα* όπως η άλγεβρα του Omar Khayyām, στην οποία απαγορεύεται αυστηρά η ανάμειξη ευθυγράμμων τμημάτων, εμβαδών και όγκων.

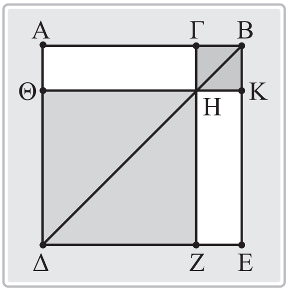
[7] Βλέπε: B. L. van der Waerden, *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, σ.74.

Τα θεμέλια αυτού του είδους άλγεβρας, υποστηρίζει ο αλγεβριστής Waerden, είχαν τεθεί από τον Ευκλείδη στο Βιβλίο II των *Στοιχείων*.

Στα παραπάνω συνοψίζονται ορισμένες βασικές ερμηνευτικές προσεγγίσεις που χαρακτηρίζουν μια ολόκληρη σχολή ιστοριογραφίας των προελληνικών και ελληνικών Μαθηματικών. Κυρίαρχο στοιχείο αυτών των προσεγγίσεων αποτελεί η υπόθεση για την ύπαρξη, κατά την αρχαιότητα, ενός αλγεβρικού τρόπου σκέψης που ταυτίζεται ουσιαστικά με τη νεότερη συμβολική άλγεβρα.

Ο όρος «γεωμετρική άλγεβρα» χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στα τέλη του 19^{ου} αιώνα από τους ιστορικούς Hieronymus Zeuthen (1839–1920) και Paul Tannery (1843–1904), και καθιερώθηκε μετά την κλασική έκδοση των *Στοιχείων* από τον επιφανή ιστορικό των αρχαιοελληνικών Μαθηματικών Sir Thomas Heath (1861–1940) που έκανε συστηματική χρήση του όρου στην ανάλυση του Ευκλείδειου έργου. Χαρακτηριστικό παράδειγμα του τρόπου με τον οποίο εισάγεται η ερμηνευτική οπτική της «γεωμετρικής άλγεβρας» αποτελεί η «παραδοσιακή» ερμηνεία της πρότασης 4 του Βιβλίου II των *Στοιχείων*:

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Σχήμα 1.1.1.

Δηλαδή, αν ΑΒ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα και Γ τυχαίο σημείο του, τότε το τετράγωνο που έχει πλευρά ολόκληρο το ΑΒ είναι ίσο με τα τετράγωνα που έχουν πλευρές τα τμήματα ΑΓ και ΓΒ συν το διπλάσιο του ορθογωνίου που περιέχεται από τα τμήματα ΑΓ και ΓΒ. Αυτή η σχέση σημαίνει ότι στο παραπάνω σχήμα ισχύει

$$(\mathrm{ΑΒΕΔ}) = (\mathrm{ΘΗΖΔ}) + (\mathrm{ΓΒΚΗ}) + 2(\mathrm{ΑΓΗΘ}),$$

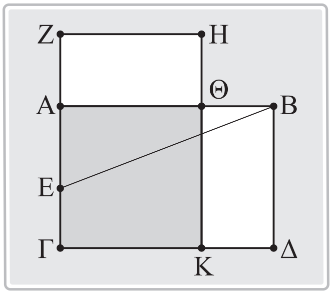
με την επισήμανση ότι ο Ευκλείδης δεν εννοεί ισότητα αριθμητικών εμβαδών, αλλά ισότητα γεωμετρικών χωρίων η οποία στα *Στοιχεία* αποδεικνύεται αυστηρά μέσω μιας διαδικασίας που έχει θεωρητικοποιήσει την κατάτμηση, μετατόπιση και ταύτιση των επιμέρους σχημάτων. Η συγκεκριμένη πρόταση όμως έχει ερμηνευθεί από τους ιστορικούς ως γεωμετρική διατύπωση και απόδειξη της αλγεβρικής ταυτότητας

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\,,$$

η οποία εκφράζει μια σχέση πράξεων μεταξύ πραγματικών αριθμών.[8] Με τον τρόπο αυτό εισάγεται στην ανάγνωση του Ευκλείδειου έργου ένα ξένο σώμα, η έννοια του μέτρου των ευθυγράμμων τμημάτων και της επιφάνειας των γεωμετρικών σχημάτων.

Ένα άλλο παράδειγμα, με το οποίο «εφευρίσκεται» αυτή τη φορά στα *Στοιχεία* η επίλυση των εξισώσεων 2ου βαθμού, αποτελεί η πρόταση 11 του ίδιου Βιβλίου, που είναι επίσης γνωστή ως πρόβλημα διαίρεσης ενός τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο:

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.



Σχήμα 1.1.2.

Δηλαδή, να διαιρεθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε δύο τμήματα ΑΘ και ΘΒ έτσι, ώστε το ορθογώνιο που περιέχεται από ολόκληρο το ΑΒ και το μικρότερο τμήμα (ΘΒ) να είναι ίσο με το τετράγωνο που έχει πλευρά το μεγαλύτερο τμήμα (ΑΘ). Στο παραπάνω σχήμα, η σχέση αυτή σημαίνει ότι ισχύει (ΘΒΔΚ)=(ΖΗΘΑ), με την ίδια επισήμανση που έγινε για την πρόταση 4. Η πρόταση 11, που είναι ένα πρόβλημα αυθεντικής γεωμετρικής κατασκευής, χωρίς την παραμικρή αναφορά σε μήκη, εμβαδά και αριθμητικές πράξεις, έχει ερμηνευθεί ως γεωμετρική επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$\alpha(\alpha-x)=x^2 \quad \text{ή} \quad x^2+\alpha x=\alpha^2\,,$$

[8] Βλέπε για παράδειγμα: T. Heath, *The Thirteen Books of the Elements*, Vol. 1, σ.389.

όπου βέβαια το α εκφράζει το μήκος του τμήματος ΑΒ και ο άγνωστος x το μήκος του τμήματος ΑΘ.[9]

Με αυτή την ερμηνευτική προσέγγιση λοιπόν, το Βιβλίο ΙΙ των *Στοιχείων* παρουσιάζεται στο σημερινό αναγνώστη ως μια συλλογή αλγεβρικών ταυτοτήτων και εξισώσεων σε γεωμετρική μορφή, δηλαδή ένα βιβλίο «γεωμετρικής άλγεβρας».

Η υπόθεση των ιστορικών για την ύπαρξη μιας «γεωμετρικής άλγεβρας» των αρχαίων Ελλήνων ισχυροποιήθηκε όταν ήρθαν στο φως αρχαιολογικά ευρήματα, που έδωσαν για πρώτη φορά μια αρκετά ικανοποιητική εικόνα των Βαβυλωνιακών Μαθηματικών. Ο ιστορικός Otto Neugebauer (1899–1990), ο οποίος τη δεκαετία του 1930 μελέτησε Βαβυλωνιακές πινακίδες μαθηματικού περιεχομένου και δημοσίευσε μεταφράσεις τους, ακολούθησε την ίδια ερμηνευτική μεθοδολογία, μεταγράφοντας το περιεχόμενό τους σε σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό. Έτσι, ορισμένα από τα προβλήματα των πινακίδων και οι μέθοδοι επίλυσής τους παρουσιάστηκαν ως ισοδύναμα με την επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού. Προχωρώντας όμως παραπέρα, ο Neugebauer έκανε την τολμηρή υπόθεση ότι οι αρχαίοι Έλληνες παρέλαβαν την αλγεβρική μέθοδο των Βαβυλωνίων και την περιέβαλαν με «γεωμετρικό ένδυμα», δημιουργώντας τη «γεωμετρική άλγεβρα». Οι προηγούμενες θέσεις προβλήθηκαν ιδιαίτερα από τον van der Waerden, στο πολύ γνωστό βιβλίο του *Science Awakening* (1η έκδοση 1950)[10], και από τότε η ύπαρξη της Βαβυλωνιακής άλγεβρας και της συνακόλουθης «γεωμετρικής άλγεβρας» των αρχαίων Ελλήνων καθιερώθηκε ως ένα οριστικό και ακλόνητο συμπέρασμα της ιστορικής έρευνας και ενσωματώθηκε στα συνθετικά έργα της Ιστορίας των Μαθηματικών.

Μια πρώτη συστηματική αμφισβήτηση αυτών των θέσεων έγινε από τον ιστορικό Árpád Szabó (1913–2001) στο βιβλίο του *Anfänge der griechischen Mathematik* (1969)[11]. Ο Szabó απέρριψε την ερμηνεία της «γεωμετρικής άλγεβρας» για το Βιβλίο ΙΙ των *Στοιχείων*, επισημαίνοντας ότι οι προτάσεις που περιέχει έχουν καθαρά γεωμετρικό υπόβαθρο και προορισμό, χωρίς καμιά σχέση με την επίλυση εξισώσεων. Για παράδειγμα, η προαναφερθείσα πρόταση 11 του Βιβλίου ΙΙ (διαίρεση τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο) παίζει αποφασιστικό ρόλο στις προτάσεις

[9] Βλέπε για παράδειγμα: T. Heath, ο.π., σ.403.

[10] Το βιβλίο αυτό μεταφράστηκε στα Ελληνικά με τίτλο *Η Αφύπνιση της Επιστήμης* και εκδόθηκε από τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης το 2003.

[11] Το βιβλίο αυτό μεταφράστηκε στα Ελληνικά με τίτλο *Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών* και εκδόθηκε από το Τεχνικό Επιμελητήριο της Ελλάδος το 1973.

10 και 11 του Βιβλίου IV που διαπραγματεύονται την κατασκευή του κανονικού πενταγώνου. Παράλληλα ο Szabó απέρριψε την υπόθεση ότι οι Έλληνες παρέλαβαν αυτές τις μαθηματικές γνώσεις από τους Βαβυλώνιους, επισημαίνοντας το γεγονός ότι αν υπήρχε κάποιο είδος μεταφοράς μαθηματικών γνώσεων από τη Βαβυλώνα προς την Ελλάδα, τότε οι Έλληνες της κλασικής περιόδου θα είχαν κατεξοχήν οικειοποιηθεί το θεσιακό σύστημα αρίθμησης.[12]

Ένα γενικότερο ρεύμα αμφισβήτησης, κυρίως για την ορθότητα ερμηνείας της αρχαίας μαθηματικής σκέψης με χρήση όρων και συμβολισμών από τα σύγχρονα Μαθηματικά εμφανίστηκε στη διάρκεια της δεκαετίας του 1970. Αποκορύφωμα αυτού του ρεύματος υπήρξε ένα πολεμικό άρθρο του Sabetai Unguru που υποστήριζε την ανάγκη να ξαναγραφεί η ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών.[13] Τα βασικά σημεία στα οποία θεμελιώθηκε η κριτική του Unguru, ήταν τα εξής:

α) Υπάρχει σαφής διαφορά ανάμεσα στον γεωμετρικό και αλγεβρικό τρόπο σκέψης. Η γεωμετρία είναι σκέψη για το χώρο, τα σχήματα και τις ιδιότητές τους, ενώ η αλγεβρική σκέψη χαρακτηρίζεται από το λειτουργικό συμβολισμό και την ενασχόληση με μαθηματικές σχέσεις παρά με μαθηματικά αντικείμενα.

β) Οι προτάσεις των *Στοιχείων* που ερμηνεύονται ως «αλγεβρικές ταυτότητες» ή «δευτεροβάθμιες εξισώσεις», έχουν συγκεκριμένο γεωμετρικό περιεχόμενο, εντάσσονται οργανικά στη λογική δομή του έργου και χρησιμοποιούνται από τον Ευκλείδη ως βασικά στοιχεία των γεωμετρικών κατασκευών. Ποια είναι επομένως η σκοπιμότητα, από ιστορική σκοπιά, της σύγχρονης αλγεβρικής ερμηνείας;

---

[12] Μια έντονη κριτική της υπόθεσης του Neugebauer για τη Βαβυλωνιακή προέλευση των Ελληνικών Μαθηματικών είχε κάνει το 1968 και ο διακεκριμένος ιστορικός Ευάγγελος Σταμάτης (1898–1990). Όμως ο Σταμάτης, ενώ αμφισβητεί την ύπαρξη μιας «Βαβυλωνιακής άλγεβρας», δεν κάνει το ίδιο για τη «γεωμετρική άλγεβρα» που είναι αποτέλεσμα της ίδιας ακριβώς ερμηνευτικής μεθοδολογίας. Βλέπε: Ε. Σταμάτη, Τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων. *Ο Ευκλείδης*, τόμος Β΄, τεύχος 1 (Σεπτέμβριος 1968), σσ.36–40, τεύχος 2 (Οκτώβριος 1968), σσ.72–77 και τεύχος 3 (Νοέμβριος 1968), σσ.110–113.

Μια σύγχρονη άποψη για τη στάση των Ελλήνων απέναντι στα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων παρουσίασε πρόσφατα η ιστορικός των Βαβυλωνιακών Μαθηματικών Eleanor Robson, λαμβάνοντας υπόψη όχι μόνο το περιεχόμενο αλλά και το πλαίσιο μέσα στο οποίο αναπτύχθηκαν οι αντίστοιχες μαθηματικές παραδόσεις. Σε άρθρο της με τίτλο *Influence, ignorance, or indifference? Rethinking the relationship between Babylonian and Greek mathematics*, που δημοσιεύθηκε το 2005 στο Δελτίο της Βρετανικής Εταιρείας για την Ιστορία των Μαθηματικών, η Robson υποστηρίζει την άποψη της «άγνοιας» ή και της «αδιαφορίας» των Ελλήνων για τα Βαβυλωνιακά Μαθηματικά.

[13] S. Unguru, On the need to rewrite the history of Greek Mathematics. *Archive for History of Exact Sciences* 15(1), 67–114 (1975).

Κεφάλαιο 4

Πλήρεις εξισώσεις 2ου βαθμού

Το Βιβλίο IV, το οποίο σήμερα θεωρείται ότι ανήκει στην τελευταία τετράδα των 13 βιβλίων που αποτελούσαν την αρχική έκδοση των *Αριθμητικών*,[60] περιέχει 40 προβλήματα. Στην πορεία επίλυσης του τριακοστού πρώτου προβλήματος (το οποίο επιλύεται με δύο τρόπους) ο Διόφαντος παρέχει την πρώτη σαφή ένδειξη ότι διαθέτει μια συνθήκη για τον έλεγχο της ύπαρξης ρητών λύσεων μιας πλήρους εξίσωσης 2ου βαθμού, καθώς και έναν τρόπο εύρεσής τους.

4.1. Το πρόβλημα 31 του Βιβλίου IV των *Αριθμητικών*

Να διασπαστεί η μονάδα σε άθροισμα δύο αριθμών τέτοιων, ώστε αν προστεθεί σε καθένα από αυτούς δοθείς αριθμός, το γινόμενο [των αθροισμάτων] να δίνει τετράγωνο.

➤ Η προηγούμενη, γενική διατύπωση του προβλήματος IV31 μπορεί σήμερα να εκφραστεί στη μορφή ενός συστήματος 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους α και β:

$$\begin{cases} \alpha+\beta=1 \\ (\alpha+p)(\beta+q)=\kappa^2 \end{cases}$$

[60] Για το ζήτημα της κατανομής των 13 βιβλίων – κεφαλαίων μέσα στο σώμα των *Αριθμητικών* βλέπε όσα αναφέρθηκαν στην υποσημείωση 35.

➥ Μια περιγραφή της πρώτης λύσης του Διόφαντου

Ο Διόφαντος εισάγει δύο συγκεκριμένες τιμές (p = 3 και q = 5) για τους δεδομένους αριθμούς. Στη συνέχεια εισάγει ως άγνωστο x τον πρώτο από τους ζητούμενους αριθμούς οπότε η «υπόσταση» του δεύτερου θα είναι 1 – x. Με αυτή την άμεση επιλογή του αγνώστου είναι x + 1 – x = 1, δηλαδή ισχύει πάντοτε το πρώτο επίταγμα του προβλήματος.

Τότε θα είναι

$$\alpha + p = x + 3 \text{ και } \beta + q = 1 - x + 5 = 6 - x.$$

Το γινόμενο των δύο «υποστάσεων» x + 3 και 6 – x δίνεται απ' ευθείας ίσο με $3x + 18 - x^2$ και έτσι, σύμφωνα με το δεύτερο επίταγμα του προβλήματος, προκύπτει η εξίσωση:

$$3x+18-x^2=\square. \tag{4.1.1}$$

Ο Διόφαντος επιλέγει για το δεύτερο μέρος τον τετράγωνο $4x^2$ και δημιουργεί την εξίσωση

$$3x+18=5x^2, \tag{4.1.2}$$

την οποία όμως απορρίπτει αμέσως, με τη φράση «δεν είναι η εξίσωση ρητή» (*ουκ έστιν η ίσωσις ρητή*).

Κατόπιν επιχειρεί, όπως και στο πρόβλημα IV22, έναν επαναπροσδιορισμό της επιλογής του τετραγώνου $4x^2$ για το δεύτερο μέρος της (4.1.1). Στη διάρκεια αυτού του επαναπροσδιορισμού γίνεται φανερό ότι χρησιμοποιεί ως συνθήκη ύπαρξης ρητών λύσεων της (4.1.2) τη σχέση:

$$5\cdot 18+\left(\frac{1}{2}\cdot 3\right)^2=\square \quad \text{(που δεν ισχύει)} \tag{4.1.3}$$

Σημειώνει ότι το πλήθος 5 των x^2 στην (4.1.2) προέρχεται από το άθροισμα 4+1 (δηλαδή $5x^2 = 4x^2 + x^2$). Για να ισχύει λοιπόν η (4.1.3) θα πρέπει, αντί του 4, να χρησιμοποιηθεί στο δεύτερο μέρος της (4.1.1) ένας τετράγωνος αριθμός με την εξής ιδιότητα: όταν αυξάνεται κατά μία μονάδα και πολλαπλασιάζεται επί 18 και στη συνέχεια το γινόμενο αυξάνεται κατά $\frac{9}{4}$, το αποτέλεσμα να είναι τετράγωνος. Ο προσδιορισμός ενός τέτοιου τετράγωνου αριθμού συνιστά ένα υποπρόβλημα, το οποίο ενσωματώνεται μέσα στην επίλυση του αρχικού προβλήματος.

Αν m^2 είναι αυτός ο τετράγωνος αριθμός[61], τότε η προηγούμενη ιδιότητα οδηγεί διαδοχικά στις εξισώσεις

$$(m^2+1)\cdot 18+\frac{9}{4}=\square \quad ή \quad 18m^2+\frac{81}{4}=\square \quad ή \quad 72m^2+81=\square.$$

Ο Διόφαντος επιλέγει για το δεύτερο μέρος της τελευταίας τον τετράγωνο $(8m + 9)^2 = 64m^2 + 144m + 81$, οπότε προκύπτει η εξίσωση $8m^2 = 144m$. Η λύση της τελευταίας είναι $m = 18$ και άρα ο ζητούμενος τετράγωνος $m^2 = 324$. Επιστρέφοντας στην αρχική εξίσωση (4.1.1), ο Διόφαντος θέτει τώρα:

$$3x+18-x^2=324x^2$$

και δίνει αμέσως, **χωρίς την παραμικρή διευκρίνιση**, την τιμή του αγνώστου

$$x=\frac{78}{325}=\frac{6}{25}.$$

Άρα οι δύο ζητούμενοι αριθμοί είναι $\alpha=x=\frac{6}{25}$ και $\beta=1-x=\frac{19}{25}$, οι οποίοι ικανοποιούν τα δύο επιτάγματα του προβλήματος:

$$\frac{6}{25}+\frac{19}{25}=1 \quad και \quad \left(\frac{6}{25}+3\right)\left(\frac{19}{25}+5\right)=\frac{81}{25}\cdot\frac{144}{25}=\left(\frac{108}{25}\right)^2$$

➥ Μια περιγραφή της δεύτερης λύσης του Διόφαντου

Ο Διόφαντος χρησιμοποιεί τους ίδιους δεδομένους αριθμούς ($p = 3$ και $q = 5$), αλλά καταφεύγει τώρα σε μια έμμεση επιλογή του αγνώστου ονομάζοντας x τον $\alpha + 3$, οπότε οι «υποστάσεις» των ζητούμενων αριθμών είναι

$$\alpha=x-3 \quad και \quad \beta=1-\alpha=4-x.$$

Με αυτή την επιλογή, το πρώτο επίταγμα $\alpha + \beta = 1$ ισχύει για κάθε τιμή του x, ενώ το δεύτερο επίταγμα $(\alpha + 3)(\beta + 5) = \square$ οδηγεί στην αρχική εξίσωση:

$$9x-x^2=\square. \tag{4.1.4}$$

[61] Συμβολίζουμε τον άγνωστο τετράγωνο του υποπροβλήματος με m^2 και όχι x^2, ώστε να μην υπάρξει σύγχυση με τον αρχικό άγνωστο x του προβλήματος. Ο Διόφαντος δεν αντιμετωπίζει τέτοιο πρόβλημα, επειδή χρησιμοποιεί το τελικό σίγμα (ς) για τον αρχικό άγνωστο και τη συντομογραφία $Δ^Υ$ για τον άγνωστο τετράγωνο του υποπροβλήματος.

Όπως και στην προηγούμενη λύση ο Διόφαντος επιλέγει για το δεύτερο μέρος της (4.1.4) τον τετράγωνο $4x^2$:

$$9x - x^2 = 4x^2 .$$

Από την τελευταία προσδιορίζει αμέσως τη λύση $x = \frac{9}{5}$, αλλά τότε, όπως γράφει, η «υπόσταση» του α = x – 3 οδηγεί σε μια **αδύνατη αφαίρεση** (*ου δύναμαι αφελείν*).

Αυτό το αποτέλεσμα οδηγεί στη διατύπωση του περιορισμού $3 < x < 4$ (ώστε οι αφαιρέσεις $x - 3$ και $4 - x$ να έχουν νόημα) και στο συνήθη επαναπροσδιορισμό της αρχικής επιλογής $4x^2$ που οδήγησε στην τιμή $x = \frac{9}{5}$.

Η παρατήρηση ότι ισχύει $\frac{9}{5} = \frac{9}{2^2 + 1}$ οδηγεί τον Διόφαντο στην αναζήτηση ενός τετραγώνου m^2 τέτοιου, ώστε $3 < \frac{9}{m^2 + 1} < 4$.

Από την ανίσωση αυτή προκύπτει ότι είναι $m^2 + 1 < \frac{9}{3} = 3$, δηλαδή $m^2 < 2$ και επίσης $m^2 + 1 > \frac{9}{4}$, δηλαδή $m^2 > \frac{5}{4}$.

Ο Διόφαντος αναλύει την ανισότητα $\frac{5}{4} < m^2 < 2$ «σε τετραγωνικούς παρονομαστές», δηλαδή $\frac{80}{64} < m^2 < \frac{128}{64}$, και επιλέγει αμέσως, ως μια προφανή λύση, τον τετράγωνο

$$m^2 = \frac{100}{64} = \frac{25}{16} .$$

Επιστρέφοντας τώρα στην αρχική εξίσωση (4.1.4), θέτει

$$9x - x^2 = \frac{25}{16} x^2 ,$$

και δίνει αμέσως την τιμή του αγνώστου $x = \frac{144}{41}$, από την οποία προκύπτουν οι αριθμοί

$$\alpha = x - 3 = \frac{21}{41} \quad \text{και} \quad \beta = 4 - x = \frac{20}{41}$$

που ικανοποιούν τα επιτάγματα του προβλήματος.

4.2. Μια συνθήκη ύπαρξης ρητών λύσεων της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

Στον πρώτο τρόπο επίλυσης του προβλήματος ο Διόφαντος μας παρέχει έμμεσες αλλά σαφείς ενδείξεις ότι γνωρίζει μια συνθήκη ύπαρξης ρητών λύσεων δευτεροβάθμιων εξισώσεων, όπως η $3x + 18 = 5x^2$ καθώς και μέθοδο υπολογισμού τους.

Η συνθήκη αυτή, που την εκφράσαμε προηγουμένως με τη σχέση (4.1.3), φαίνεται ότι προέρχεται από μια διαδικασία επίλυσης των συγκεκριμένων εξισώσεων με τη μέθοδο «συμπλήρωσης του τετραγώνου». Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει αν επιχειρήσουμε να λύσουμε τις εξισώσεις $3x+18=5x^2$ και $3x+18=325x^2$ με τον εξής τρόπο:

Πίνακας 4.2.1

Βήμα	$3x + 18 = 5x^2$	$3x + 18 = 325x^2$
1ο	$5\cdot3x + 5\cdot18 = 5\cdot5x^2$	$325\cdot3x + 325\cdot18 = 325\cdot325x^2$
2ο	$2\cdot5\cdot\frac{3}{2}x + 5\cdot18 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 5^2\cdot x^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$	$2\cdot325\cdot\frac{3}{2}x + 325\cdot18 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 325^2\cdot x^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$
3ο	$5\cdot18 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 5^2\cdot x^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\cdot5\cdot\frac{3}{2}x\cdot$	$325\cdot18 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 325^2\cdot x^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\cdot325\cdot\frac{3}{2}x$
4ο	$\frac{369}{4} = \left(5x-\frac{3}{2}\right)^2$	$\frac{23409}{4} = \left(325x-\frac{3}{2}\right)^2$
5ο	«άρρητη εξίσωση»	«ρητή εξίσωση»
6ο		$\frac{153}{2} = 325x - \frac{3}{2} \Rightarrow 78 = 325x$
7ο		$x = \frac{78}{325} = \frac{6}{25}$

Αυτό που προκύπτει μέχρι στιγμής από το συγκεκριμένο πρόβλημα (IV31) είναι ότι ο Διόφαντος χρησιμοποιεί την αριθμητική παράσταση που εμφανίζεται στο πρώτο μέρος της εξίσωσης στο 3ο βήμα, ως μια γνωστή συνθήκη που επιτρέπει να «διακρίνουμε» αν η εξίσωση έχει ρητή λύση. Επιπλέον, στην περίπτωση που η συνθήκη βεβαιώνει την ύπαρξη ρητής λύσης, η πρακτική του Διόφαντου υποδηλώνει ότι θεωρεί τετριμμένη τη διαδικασία υπολογισμού της που περιγράφεται στο 6ο και 7ο βήμα. Ο Διόφαντος θα «αναγκαστεί» να περιγράψει τη διαδικασία αυτή πιο αναλυτικά λίγο παρακάτω, όταν στη διάρκεια της επίλυσης του προβλήματος IV39 βρεθεί αντιμέτωπος με την ανίσωση $6x+18<2x^2$ και επιχειρήσει να τη λύσει μέσω της αντίστοιχης εξίσωσης.[62]

Όπως θα διαπιστώσουμε στις ενότητες 4.6-4.22 αυτού του κεφαλαίου, ο Διόφαντος θα εξακολουθήσει στο Βιβλίο VI να επιλύει εξισώσεις 2ου βαθμού χρησιμοποιώντας τη συνθήκη ύπαρξης ρητών ριζών και τη διαδικασία υπολογισμού τους με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που άρχισε να το πράττει στο πρόβλημα IV31· δηλαδή ως γνωστά μαθηματικά αποτελέσματα που δεν χρειάζεται να εξηγηθούν στον αναγνώστη.

4.3. Το «σύνδρομο αποφυγής» της πλήρους δευτεροβάθμιας εξίσωσης

Αν η σειρά των διασωθέντων βιβλίων των *Αριθμητικών* ταυτίζεται με την πραγματική σειρά που είχαν στην αρχική έκδοση του έργου, τότε είναι πράγματι ανεξήγητος ο σχεδόν «μυστικός» τρόπος με τον οποίο ο Διόφαντος χειρίζεται την πρώτη εμφάνιση της συνθήκης ύπαρξης ρητών λύσεων. Είναι χαρακτηριστικό ότι σε δύο προβλήματα του αμέσως προηγούμενου Βιβλίου III είχε απορρίψει τις εξισώσεις που προέκυψαν από τις αρχικές επιλογές των δεδομένων, παρά το γεγονός ότι αυτές θα μπορούσαν να μετασχηματιστούν σε πλήρεις δευτεροβάθμιες εξισώσεις με ρητή λύση.

Η πρώτη περίπτωση αφορά το πρόβλημα III 10, στο οποίο ζητείται:

Να βρεθούν τρεις αριθμοί τέτοιοι, ώστε το άθροισμα του γινομένου δύο οποιωνδήποτε από αυτούς με ένα δοθέντα αριθμό να δίνει τετράγωνο.

---

[62] Το ζήτημα εξετάζεται λεπτομερώς στις ενότητες 5.1, 5.2 και 5.3 του επόμενου κεφαλαίου.