

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Α. ΤΕΡΖΙΑΗ M. Sc., Ph. D.  
ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ  
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

# ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ

## 2. κλειστοί αγωγοί

σταθερή ροή  
υδραυλικό πλήγμα  
προβλήματα



ΕΚΔΟΣΕΙΣ  
**ZHTH**

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 1987

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό αποτελεί το δεύτερο τόμο μιας σειράς από τρεις τόμους που καλύπτουν σε μεγάλο ποσοστό τις διδακτικές και ερευνητικές ανάγκες των μαθημάτων Υδραυλικής που διδάσκονται στους προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς φοιτητές της Ειδικότητας των Εγγείων Βελτιώσεων του τμήματος Γεωπονίας του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.

Η σειρά διατάξεως της ύλης, η περιγραφή των φυσικών φαινομένων και η μαθηματική ανάλυσή τους γίνονται έτσι ώστε να είναι εύκολη η κατανόηση, αυστηρή η εμπέδωση και απλή η χρήση των απαραίτητων γνώσεων της σύγχρονης Υδραυλικής τόσο από φοιτητές των Γεωπονικών και Πολυτεχνικών Σχολών όσο και από τους επιστήμονες Γεωπόνους και Μηχανικούς που ασχολούνται με την έρευνα και εφαρμογή της Υδραυλικής Επιστήμης.

Ο τόμος αυτός αποσκοπεί στο να δώσει στον αναγνώστη τις απαραίτητες γνώσεις της Ρευστομηχανικής και Υδραυλικής για τη σωστή επίλυση πρακτικών προβλημάτων της ροής του νερού μέσα στους κλειστούς υπό πίεση αγωγούς.

Οι κλειστοί υπό πίεση αγωγοί χρησιμοποιούνται για τη μεταφορά του νερού για την άρδευση αγροτικών περιοχών, για την ύδρευση κατοικημένων ή βιομηχανικών περιοχών αλλά και την παραγωγή υδροηλεκτρικής ενέργειας.

Η ροή μέσα στους κλειστούς αγωγούς είναι κατά κανόνα ασταθής και ανομοιόμορφη. Λόγω όμως της πολυπλοκότητας της ασταθούς και ανομοιόμορφης ροής και της ελείψεως πειραματικών δεδομένων επεκράτησε ακόμη και σήμερα τα προβλήματα των κλειστών αγωγών να αντιμετωπίζονται με την παραδοχή της σταθερής ομοιόμορφης ροής. Έτσι στην πράξη γίνεται δεκτό ότι η ροή είναι σταθερή και ομοιόμορφη στα τμήματα των αγωγών σταθερής διαμέτρου και σταθερή και ανομοιόμορφη στις γωνίες, ρυθμιστικές δικλίδες, διαπλατύνσεις, στενώσεις κλπ. Η σταθερή ροή καλύπτεται στις πρώτες εννέα παραγράφους και η ασταθής ροή στις επόμενες επτά. Στις πρώτες τέσσερις παραγράφους παράγονται όλες οι εξισώσεις και δίνεται το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο για την αντιμετώπιση πρακτικών προβλημάτων. Στην πέμπτη και έκτη παράγραφο γίνεται επίλυση προβλημάτων σε απλούς σωληνωτούς αγωγούς υπό πίεση. Τα συστήματα σωληνωτών αγωγών και τα δίκτυα διανομής νερού περιγράφονται στην έβδομη και όγδοη παράγραφο. Στην έννατη παράγραφο παρουσιάζονται 21 λυμένα παραδείγματα που αναφέρονται σε πρακτικά προβλήματα της Υδραυλικής των κλειστών αγω-

ρών. Στη δέκατη παράγραφο παρουσιάζονται οι βασικές αρχές και οι διαφορικές εξισώσεις της ασταθούς ροής. Στις επόμενες τέσσερις παραγράφους παρουσιάζονται οι κυριότερες αριθμητικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται σήμερα στην επίλυση πρακτικών προβλημάτων της ασταθούς ροής. Για κάθε υπολογιστικό σχήμα παρουσιάζεται και η ανάλυση ευσταθείας του. Στην δέκατη πέμπτη παράγραφο παρουσιάζονται διάφορες εφαρμογές τα δε προγράμματα ηλεκτρονικού υπολογιστή σε γλώσσα Fortran IV παρουσιάζονται στα Παραρτήματα I και III.

Στη δέκατη έκτη παράγραφο παρουσιάζονται η συμβατότητα των εξισώσεων του πλήγματος κριού για σταθερή και ασταθή ροή, καθώς και μια νέα μέθοδος χαρακτηριστικών με εξαρτημένες μεταβλητές την πυκνότητα και την ταχύτητα του ρευστού.

Τέλος στο παράρτημα II παρουσιάζονται οι βασικές αρχές της διαστατικής αναλύσεως και ορισμένες εφαρμογές της σε πρακτικά προβλήματα της υδραυλικής.

Ο τόμος αυτός, αν και αποτελεί βελτιωμένη και επανωξημένη μορφή του ομώνυμου τόμου του 1982, μπορεί να θεωρηθεί ως νέα έκδοση γιατί έχει ξαναγραφεί στο μονοτονικό σύστημα με μερική αναδιάρθρωση της ύλης και αρκετές προσθήκες και βελτιώσεις, τόσο στη σταθερή όσο και στην ασταθή ροή.

Στη νέα αυτή έκδοση έχουν διορθωθεί και όσα παροράματα ή ατέλειες επισημάνθηκαν από μένα και από τους συναδέλφους καθηγητές και βοηθούς που χρησιμοποίησαν τον προηγούμενο τόμο στη διδασκαλία αντίστοιχων μαθημάτων τους στις Πολυτεχνικές Σχολές Θεσσαλονίκης, Θράκης και Πατρών και στη Γεωτεχνική Σχολή Θεσσαλονίκης.

Όλους όσους βοήθησαν στην τελική εμφάνιση αυτού του τόμου, και ιδιαίτερα τον κ. Χ. Μπαμπατζιμόπουλο, ευχαριστώ θερμά.

Θεσσαλονίκη, Μάιος 1986

Γ. ΤΕΡΖΙΑΔΗΣ

## ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

	Σελίδα
5.1. Γενικότητες .....	9
5.2. Σταθερή στρωτή ροή μεταξύ δυο παράλληλων πλακών .....	12
5.3. Σταθερή στρωτή ροή μέσα σε σωλήνα .....	15
5.4. Θεωρία των οριακών στιβάδων .....	19
5.4.1. Στρωτές οριακές στιβάδες σε κλειστούς αγωγούς .....	21
5.4.2. Τυρβώδης ροή-Γενικότητες .....	21
5.4.3. Τυρβώδεις οριακές στιβάδες σε κλειστούς αγωγούς .....	22
5.4.3α Κατανομή ταχύτητας στη στρωτή υποστιβάδα .....	24
5.4.3β Ημιεμπειρική θεωρία του μήκους αναμίξεως του <i>Prandtl</i> .....	25
5.4.4. Λογαριθμικές εξισώσεις ταχύτητας των <i>Karman-Prandtl</i> .....	28
5.4.5. Λογαριθμικές εξισώσεις ταχύτητας της τυρβώδους ροής μέσα σε σωλήνες .	30
5.4.6. Συντελεστής τριβής <i>f</i> των <i>Darcy-Weisbach</i> .....	32
5.4.7. Ημιεμπειρική εξίσωση των <i>Darcy-Weisbach</i> .....	36
5.5. Επίλυση προβλημάτων σε σωληνωτούς αγωγούς υπό πίεση .....	38
5.5.1. Υπολογισμός της απώλειας φορτίου .....	39
5.5.2. Υπολογισμός της παροχής .....	39
5.5.3. Υπολογισμός της διαμέτρου .....	41
5.5.4. Αριθμητικά παραδείγματα .....	43
5.6. Επίλυση προβλημάτων σε ανοικτούς αγωγούς με τα διαγράμματα <i>Moody</i>	49
5.6.1. Γήρανση αγωγών .....	56
5.6.2. Εμπειρική εξίσωση των <i>Hazen-Williams</i> .....	58
5.6.3. Νέα Διαγράμματα και εξισώσεις κλειστών αγωγών .....	70
5.6.3.1. Τροποποιημένα Διαγράμματα <i>Moody</i> .....	70
5.6.3.2. Τροποποιημένο Διάγραμμα <i>Moody</i> -Τερζίδη (1981) .....	75
5.6.3.3. Γενικό διάγραμμα συντελεστή τριβής (Τερζίδης 1982) .....	77
5.6.3.4. Ακριβείς, ρητές προσεγγιστικές εξισώσεις για τη λύση προβλημάτων των κλειστών αγωγών .....	80
5.7. Συστήματα σωληνωτών αγωγών .....	90
5.7.1. Γενικότητες .....	90
5.7.2. Τοπικές ή «ελάσσονες» απώλειες ενέργειας .....	93
5.7.3. Συστήματα σωληνωτών αγωγών σε σειρά .....	96
5.7.4. Μετάδοση της υδροδυναμικής ισχύος δια μέσου ακροφυσίου .....	99
5.7.5. Συστήματα διακλαδιζόμενων σωληνωτών αγωγών προς δεξαμενές .....	102
5.7.6. Σωληνωτοί αγωγοί με αντλία ή υδροστρόβιλο .....	105
5.7.7. Συστήματα παράλληλων σωληνωτών αγωγών .....	106
5.8. Δίκτυα διανομής νερού με σωληνωτούς αγωγούς .....	109
5.8.1. Γενικότητες .....	109
5.8.2. Ανάλυση των δικτύων διανομής του νερού .....	111
5.8.3. Μέθοδος <i>Hardy Cross</i> .....	115
5.8.4. Υπολογισμός δενδράδους δικτύου .....	126
5.8.5. Ισοδύναμοι σωλήνες .....	131
5.9. Λυμένα προβλήματα σωληνωτών αγωγών .....	136
5.10. Ασταθής ροή σε κλειστούς αγωγούς .....	186
5.10.1. Γενικότητες .....	186
5.10.2. Εξίσωση Συνέχειας .....	187
5.10.3. Εξισώσεις κινήσεως και ποσότητας κινήσεως .....	194
5.10.4. Συστήματα διαφορικών εξισώσεων ασταθούς ροής .....	199
5.11. Μέθοδος των χαρακτηριστικών .....	204

5.11.1.	Μέθοδος των χαρακτηριστικών στις απλές εξισώσεις υδραυλικού πλήγματος, χωρίς παρεμβολή .....	205
5.11.2.	Ρητή μέθοδος χαρακτηριστικών με γραμμική προσέγγιση .....	209
5.11.3.	Μέθοδος προβλέψεως-διορθώσεως των χαρακτηριστικών με προσέγγιση δευτέρας τάξεως .....	213
5.11.4.	Οριακές συνθήκες .....	215
5.11.5.	Χρονικό βήμα για σύνθετα συστήματα αγωγών .....	224
5.11.6.	Κεντρωμένη άρρητη μέθοδος .....	226
5.12.	Μέθοδος των χαρακτηριστικών σε ορθογώνιο δίκτυο με καθορισμένα χρονικά διαστήματα και παρεμβολή .....	231
5.12.1.	Μέθοδος των χαρακτηριστικών σε ορθογώνιο δίκτυο με παρεμβολή .....	234
5.12.2.	Απλοποιημένη μέθοδος των χαρακτηριστικών .....	238
5.12.3.	Πειραματική επαλήθευση .....	240
5.13.	Ρητά υπολογιστικά σχήματα πεπερασμένων διαφορών .....	243
5.13.1.	Υπολογιστικό σχήμα των <i>Courant-Isaacson-Rees</i> .....	243
5.13.2.	Υπολογιστικό σχήμα των <i>Keller-Lax</i> .....	248
5.13.3.	Ανάλυση ευστάθειας .....	251
5.13.4.	Ανάλυση ευστάθειας του υπολογιστικού σχήματος των <i>Courant-Isaacson-Rees</i> .....	252
5.13.5.	Ανάλυση ευστάθειας του υπολογιστικού σχήματος των <i>Keller-Lax</i> .....	259
5.14.	Πλήρης μέθοδος των χαρακτηριστικών για την ασταθή ροή σε σωληνωτούς κλειστούς αγωγούς .....	261
5.15.	Αριθμητικές εφαρμογές .....	270
5.15.1.	Απλό παράδειγμα 3.1 των <i>Streeter-Wylie</i> .....	270
5.15.2.	Εφαρμογή της ρητής απλής μεθόδου των χαρακτηριστικών σε σύστημα σωληνώσεων .....	284
5.16.	Συμβατότητα των εξισώσεων πλήγματος κριού για σταθερή και ασταθή ροή .....	288
5.16.1.	Μέθοδος των χαρακτηριστικών με εξαρτημένες μεταβλητές $\rho$ και $V$ .....	290

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι	Πρόγραμμα σε <i>Fortran IV</i> για εφαρμογή 5.12.2. ....	297
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ	Διαστατική ανάλυση .....	302
1.	Γενικότητες .....	302
2.	Διαστάσεις και διαστατική ανάλυση .....	303
2.1.	Η μέθοδος του <i>Rayleigh</i> .....	304
2.2.	Η μέθοδος των Π-παραμέτρων .....	306
2.3.	Η χρήση της διαστατικής ανάλυσης στην παρουσίαση πειραματικών δεδομένων .....	310
2.4.	Νταρσιανή και μη νταρσιανή ροή .....	313
2.5.	Συντελεστής τριβής σε σωληνωτούς αγωγούς .....	317
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	.....	321

# 5

## ΚΛΕΙΣΤΟΙ ΑΓΩΓΟΙ

---

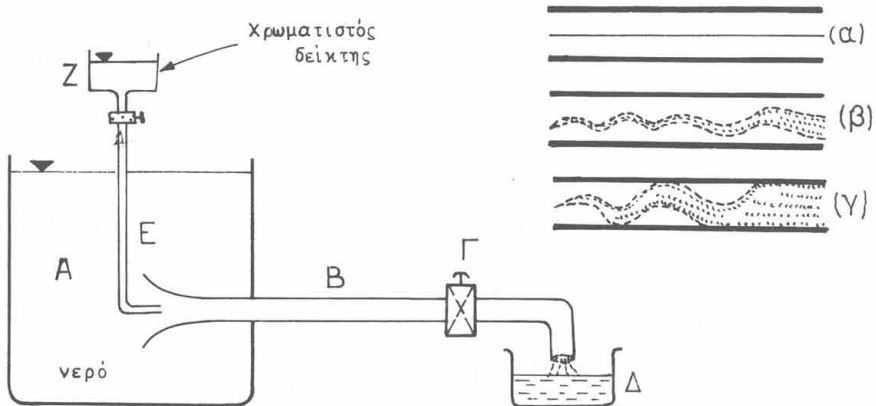
### 5.1. Γενικότητες

Η ροή των πραγματικών ρευστών είναι πιο πολύπλοκη από τη ροή των ιδανικών ή τέλειων ρευστών, εξαιτίας των φαινομένων, που προκαλούνται από την ύπαρξη του ιξώδους. Το ιξώδες προκαλεί διατμητικές τάσεις ή δυνάμεις τριβής μεταξύ των μορίων ενός ρευστού και μεταξύ των μορίων του ρευστού και των τοιχωμάτων των αγωγών, μέσα στους οποίους κινείται το ρευστό, με τελικό αποτέλεσμα να δημιουργείται αντίσταση προς την κίνηση. Για να υπάρξει ροή ενός πραγματικού ρευστού, πρέπει να εκτελεσθεί έργο για την υπερνίκηση αυτών των δυνάμεων αντιστάσεως και κατά τη διαδικασία αυτή η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα. Επίσης εξαιτίας του ιξώδους προκαλούνται τα φαινόμενα της οριακής στιβάδας, της αποκολλήσεώς της, των δευτερευουσών κινήσεων και της ανομοιόμορφης κατανομής των ταχυτήτων.

Οι επιδράσεις του ιξώδους αναγκάζουν ένα πραγματικό ρευστό να ρέει κάτω από δύο διαφορετικές καταστάσεις : την κατάσταση της *στρωτής ροής* και την κατάσταση της *τυρβώδους ροής*. Τα φυσικά χαρακτηριστικά των δυο αυτών καταστάσεων ροής μελετήθηκαν αρχικά το έτος 1883 από τον *O. Reynolds* με μια συσκευή ίδια με αυτήν του Σχ. 5.1.1.

Νερό από τη γυάλινη δεξαμενή *A* μπαίνει στο γυάλινο σωλήνα *B* μέσα από το κωδωνοειδές στόμιό του. Η παροχή του νερού μέσα στο σωλήνα *B* ρυθμίζεται με μια στρόφιγγα *Γ* και μετριέται με το ογκομετρικό δοχείο *Δ*. Ένας λεπτός σωλήνας *E* επιτρέπει μικρή παροχή με χρωματισμένο νερό από το δοχείο *Z* να εκρέει στο κέντρο του κωδωνοειδούς στομίου και να μπαίνει στο σωλήνα *B* με την κίνηση του νερού της δεξαμενής *A*.

Όταν η μέση ταχύτητα του νερού μέσα στο σωλήνα B είναι μικρή, το χρωματισμένο νερό ρέει σαν ένα λεπτό ευθύγραμμο νήμα παράλληλο προς τον άξονα του σωλήνα (Σχ. 5.1.1 α). Με την αύξηση της ταχύτητας πάνω από μια ορισμένη τιμή, το χρωματισμένο νήμα γίνεται κυματοειδές, ταλαντεύεται και διευρύνεται (Σχ. 5.1.1 β). Με παραπέρα αύξηση της ταχύτητας, το χρωματισμένο νήμα σπάζει γρήγορα και διασκορπίζεται ακανόνιστα προς όλες τις κατευθύνσεις χρωματίζοντας όλη τη μάζα του νερού που είναι μέσα στο σωλήνα (Σχ. 5.1.1 γ).



Σχ. 5.1.1. Συσκευή Reynolds.

Ο Reynolds επανέλαβε πολλές φορές το παραπάνω πείραμα, μεταβάλλοντας όχι μόνο τη μέση ταχύτητα, αλλά και τη διάμετρο του σωλήνα καθώς και το συντελεστή ιξώδους του ρευστού. Τελικά απόδειξε ότι οι παραπάνω καταστάσεις ροής των Σχ. 5.1.1α, β, γ επαναλήφθηκαν για ορισμένες τιμές του αδιάστατου αριθμού  $\frac{U \cdot D}{\nu}$ . Ο αριθμός αυτός αργότερα ονομάστηκε *αριθμός του Reynolds* και συμβολίζεται :

$$Re = \frac{U \cdot D}{\nu} \quad (5.1.1)$$

όπου  $U$  = μέση ταχύτητα ροής,  
 $D$  = διάμετρος και  
 $\nu$  = συντελεστής του κινηματικού ιξώδους.

Η κατάσταση ροής του Σχ. 5.1.1 α ονομάζεται *στρωτή ή παράλληλη ροή* και εμφανίζεται όταν οι τιμές του  $Re$  είναι μικρότερες του 2.000.

Η κατάσταση ροής του Σχ. 5.1.1 γ ονομάζεται *τυρβώδης ροή* και εμφανίζεται όταν οι τιμές του  $Re$  είναι μεγαλύτερες από 40.000 μέχρι 100.000.

Η κατάσταση του Σχ. 5.1.1. β, που είναι μια ασταθής ενδιάμεση κατάσταση μεταξύ στρωτής και τυρβώδους ροής, ονομάζεται *μεταβατική κατάσταση* και είναι δυνατό να εμφανισθεί για αριθμούς *Reynolds* μεταξύ των τιμών 2.000 ως 100.000, και εξαρτιέται από τους παρακάτω παράγοντες :

- α) από την αρχική ηρεμία του ρευστού,
- β) από το σχήμα εισόδου του σωλήνα  $B$ ,
- γ) από την τραχύτητα των τοιχωμάτων και
- δ) από τυχόν δονήσεις κατά την εκτέλεση του πειράματος.

Στη στρωτή ή παράλληλη ροή τα ρευστά μόρια κινούνται σε γραμμές ή στρώσεις παράλληλες μεταξύ τους και δεν υπάρχει μηχανική ανάμιξη των μορίων. Η διατμητική τάση  $\tau$  ορίζεται από την εξίσωση:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (5.1.2)$$

όπου  $\mu$  = συντελεστής δυναμικού ιξώδους και

$$\frac{du}{dy} = \text{η βαθμίδα ταχύτητας.}$$

Στην τυρβώδη ροή τα ρευστά μόρια κινούνται προς όλες τις κατευθύνσεις κατά έντελώς τυχαίο και απρόβλεπτο τρόπο, προκαλώντας την πλήρη ανάμιξη του ρευστού. Οι νόμοι της τυρβώδους ροής δεν είναι ακόμη γνωστοί. Η διατμητική τάση ανάμεσα σε δυο στρώσεις πλήρους τυρβώδους ροής δεν οφείλεται στο ιξώδες, αλλά μάλλον στην ανταλλαγή της ποσότητας κινήσεως μεταξύ των στρώσεων, καθώς τα μόρια της μιας στρώσεως αναμειγνύονται με τα μόρια της άλλης στρώσεως. Η μέση τιμή της διατμητικής τάσεως  $\bar{\tau}$  στην πλήρως τυρβώδη ροή μπορεί να ορισθεί σύμφωνα με τη θεωρία που αναπτύχθηκε από τον *J. Boussinesq*, από την εξίσωση (Βλέπε παρ. 5.4.2) :

$$\bar{\tau} = \eta \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (5.1.3)$$

όπου  $\eta$  = ο δυναμικός συντελεστής τυρβώδους και

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \text{η βαθμίδα της μέσης σημειακής ταχύτητας.}$$



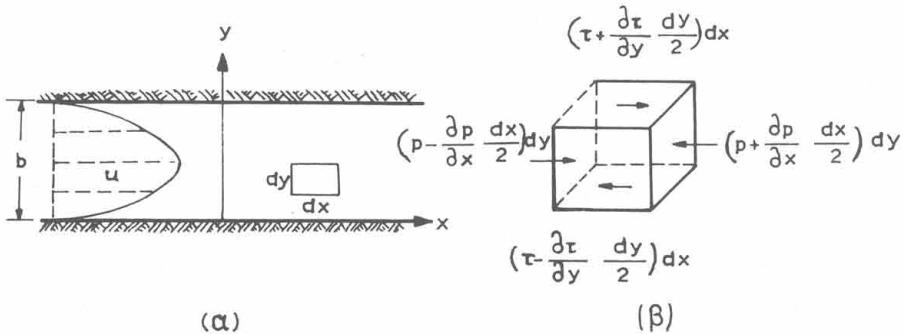
Στη μεταβατική κατάσταση εμφανίζονται και οι δυο προηγούμενες καταστάσεις ροής και κατά συνέπεια η διατμητική τάση, κατά τον *J. Boussinesq*, μπορεί να οριστεί από την εξίσωση :

$$\bar{\tau} = (\mu + \eta) \frac{d\bar{u}}{dy} . \quad (5.1.4)$$

## 5.2. Σταθερή στρωτή ροή μεταξύ δύο παράλληλων πλακών

Ας θεωρήσουμε τη σταθερή στρωτή ροή μεταξύ δυο παράλληλων στερεών επίπεδων πλακών με άπειρες διαστάσεις που απέχουν μεταξύ τους απόσταση  $b$ . Το νερό ρέει κατά την οριζόντια  $x$  - διεύθυνση με σημειακή ταχύτητα  $u$ , που εξαρτιέται μόνο απ' την ανεξάρτητη μεταβλητή  $y$ , δηλαδή  $u = f(y)$ , (Σχ. 5.2.1).

Η ένταση της πίεσεως  $p$  δεν εξαρτιέται απ' το  $y$  γιατί οι γραμμές ροής είναι ευθείες και παράλληλες μεταξύ τους.



Σχ. 5.2.1. Στρωτή ροή μεταξύ παράλληλων πλακών.

Ας θεωρήσουμε ένα απειροστό όγκο, με διαστάσεις  $(dx) \cdot (dy) \cdot (1)$ , μέσα στη ροή και ας εφαρμόσουμε σ' αυτό το νόμο της διατήρησης της ποσότητας κινήσεως. Για μηδενική επιτάχυνση παίρνουμε (Σχ. 5.2.1. β) :

$$\begin{aligned} & \left( p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy + \left( \tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx - \\ & - \left( \tau - \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx = 0. \end{aligned}$$

Εκτελώντας τις αλγεβρικές πράξεις, τελικά παίρνουμε :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (5.2.1)$$

Απ' τις εξισώσεις (5.2.1) και (5.1.2) παίρνουμε :

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{l}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (5.2.2)$$

όπου οι μερικές και ολικές παράγωγοι των παραπάνω εξισώσεων είναι ισοδύναμες εξαιτίας της εξαρτήσεως κάθε όρου από μιά μόνο μεταβλητή.

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (5.2.2) δυο φορές ως προς  $y$  και έχοντας υπόψη ότι το  $\frac{dp}{dx}$  δεν εξαρτιέται απ' το  $y$ , παίρνουμε τη γενική λύση της εξισώσεως (5.2.2), δηλαδή

$$u = \frac{l}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (5.2.3)$$

όπου  $C_1$  και  $C_2$  είναι οι σταθερές ολοκληρώσεως.

Οι τιμές των  $C_1$  και  $C_2$  μπορούν να υπολογισθούν από τις οριακές συνθήκες της μηδενικής ταχύτητας στα στερεά τοιχώματα, δηλαδή :

$$u = 0 \quad \text{όταν} \quad y = 0 \quad \text{και} \quad y = b \quad (5.2.3 \alpha)$$

Πραγματικά αντικαθιστώντας τις παραπάνω συνθήκες στην εξίσωση (5.2.3), παίρνουμε :

$$C_2 = 0 \quad \text{και} \quad C_1 = - \frac{l}{2\mu} \frac{dp}{dx} b \quad (5.2.3 \beta)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των  $C_1$  και  $C_2$  απ' την εξίσωση (5.2.3 β) στην εξίσωση (5.2.3), παίρνουμε :

$$u = - \frac{l}{2\mu} \frac{dp}{dx} (by - y^2) \quad (5.2.4)$$

Η εξίσωση (5.2.4) δείχνει ότι η κατανομή της σημειακής ταχύτητας στη σταθερή ροή μεταξύ παράλληλων πλακών είναι *παραβολική*. Η κλίση η βαθμίδα της πίεσεως είναι αρνητική γιατί η πίεση ελαττώνεται κατά τη διεύθυνση της ροής.

Απ' την εξίσωση (5.2.4) αποδειχνεται ότι η ταχύτητα παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή στο μεσοδιάστημα μεταξύ των πλακών, δηλαδή όταν  $y = \frac{b}{2}$ . Αντικαθιστώντας την τιμή  $y = \frac{b}{2}$  στην εξίσωση (5.2.4), παίρνουμε :

$$u_{max} = -\frac{b^2}{8\mu} \frac{dp}{dx} \quad (5.2.5)$$

Η ανά μονάδα πλάτους παροχή  $q$  είναι :

$$q = \int u \, dy = \int_0^b -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (by - y^2) \, dy = -\frac{b^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} \quad (5.2.6)$$

Άρα η μέση ταχύτητα ροής είναι :

$$V = \frac{q}{b} = -\frac{b^2}{12\mu} \frac{dp}{dx} = \frac{2}{3} u_{max} \quad (5.2.7)$$

Απ' την εξίσωση (5.2.7) μπορούμε να υπολογίσουμε την πτώση της πίεσεως μεταξύ δυο σημείων 1 και 2, που βρίσκονται σε απόσταση  $L = x_2 - x_1$  μεταξύ τους κατά τη διεύθυνση της ροής, όπως φαίνεται παρακάτω :

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\frac{12\mu V}{b^2} \int_{x_1}^{x_2} dx$$

ή

$$p_2 - p_1 = -\frac{12\mu V}{b^2} (x_2 - x_1)$$

ή

$$p_1 - p_2 = \frac{12\mu VL}{b^2} \quad (5.2.8)$$

Απ' τις εξισώσεις (5.1.2) και (5.2.4) μπορούμε να υπολογίσουμε τη μεταβολή της διατμητικής τάσεως. Έτσι έχουμε :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{d}{dy} \left[ -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (by - y^2) \right]$$

ή

$$\tau = -\frac{dp}{dx} \left( \frac{b}{2} - y \right) \quad (5.2.9)$$

Η εξίσωση (5.2.9) δείχνει ότι η διατμητική τάση είναι μηδενική

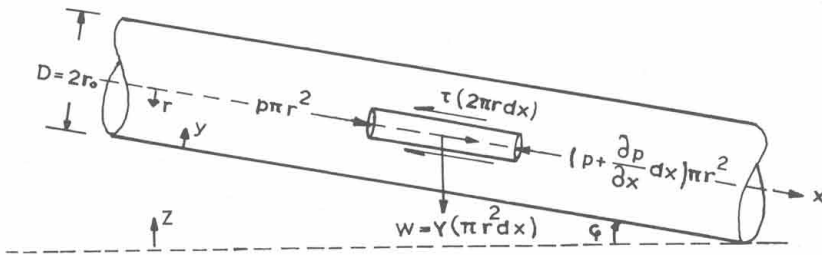
στο κέντρο ( $\tau = 0$  όταν  $y = \frac{b}{2}$ ) και αυξάνει γραμμικά απ' το κέντρο προς τα τοιχώματα, παίρνοντας μεγαλύτερη τιμή  $\tau = -\frac{dp}{dx} \frac{b}{2}$  στο τοίχωμα  $y = 0$ .

### 5.3. Σταθερή στρωτή ροή μέσα σε σωλήνα

Ας θεωρήσουμε τη σταθερή στρωτή ροή μέσα σε σωλήνα με σταθερή διάμετρο, που σχηματίζει γωνία  $\varphi$  με το οριζόντιο επίπεδο (βλέπε Σχ. 5.3.1). Το νερό ρέει κατά τη  $x$  - διεύθυνση με σημειακή ταχύτητα  $u$ , που εξαρτιέται μόνο απ' την ανεξάρτητη μεταβλητή  $r$ , δηλαδή  $u = f(r)$ .

Η ένταση της πίεσεως  $p$  δεν εξαρτιέται απ' το  $r$  γιατί οι γραμμές ροής είναι ευθείες και παράλληλες μεταξύ τους.

Ας θεωρήσουμε έναν απειροστό κυλινδρικό όγκο ρευστού, με μήκος  $dx$  και ακτίνα  $r$ , όπως φαίνεται στο Σχ. 5.3.1. Σ' αυτόν ενεργούν οι δυνάμεις πίεσεως, τριβής και θάρους. Εφαρμόζοντας τον νόμο της δια-



Σχ. 5.3.1. Σταθερή στρωτή ροή μέσα σε σωλήνα.

τηρήσεως της ποσότητας κινήσεως κατά την  $x$  - διεύθυνση, παίρνουμε για μηδενική έπιτάχυνση :

$$p \pi r^2 - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \pi r^2 - \tau (2 \pi r dx) + \gamma (\pi r^2 dx) \eta \mu \varphi = 0$$

Εκτελώντας τις αλγεβρικές πράξεις, παίρνουμε :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{r}{2} - \tau + \gamma \frac{r}{2} \eta \mu \varphi = 0$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς  $\tau$  και έχοντας υπόψη ότι  $\eta \mu \varphi = -\frac{dz}{dx}$ , παίρνουμε :

$$\tau = -\frac{\gamma}{2} \left( \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} + \frac{dz}{dx} \right) r$$

Για τα ασυμπίεστα ρευστά το  $\gamma = \rho g =$  σταθερό και άρα η παραπάνω εξίσωση γράφεται :

$$\tau = -\frac{\gamma}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{p}{\gamma} + z \right) r$$

ή

$$\tau = -\frac{\gamma}{2} \frac{dh}{dx} r \quad (5.3.1)$$

όπου  $h = \frac{p}{\gamma} + z =$  το πιεζομετρικό ύψος ή φορτίο.

Η εξίσωση (5.1.2) μπορεί να γραφεί με ανεξάρτητη μεταβλητή την ακτίνα  $r$ , όπως παρακάτω :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{du}{dr} \frac{dr}{dy} = -\mu \frac{du}{dr} \quad (5.3.2)$$

γιατί έχουμε :

$$r = r_0 - y$$

και άρα

$$\frac{dr}{dy} = -1 .$$

Απ' τής εξισώσεις (5.3.1) και (5.3.2), παίρνουμε :

$$\mu \frac{du}{dr} = \frac{\gamma}{2} \frac{dh}{dx} r$$

ή

$$du = \frac{\gamma}{2\mu} \frac{dh}{dx} r dr \quad (5.3.3)$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (5.3.3) ως προς  $r$ , παίρνουμε :

$$u = \frac{\gamma}{4\mu} \frac{dh}{dx} r^2 + C \quad (5.3.4)$$

όπου  $C =$  σταθερή ολοκληρώσεως, που μπορεί να προσδιοριστεί από την οριακή συνθήκη  $u = 0$  όταν  $r = r_0$ .

Πραγματικά αντικαθιστώντας τις τιμές  $u = 0$  και  $r = r_0$  στην εξίσωση (5.3.4), παίρνουμε :

$$C = - \frac{\gamma}{4\mu} \frac{dh}{dx} r_0^2 \quad (5.3.5)$$

Από τις εξισώσεις (5.3.4) και (5.3.5) παίρνουμε :

$$u = - \frac{\gamma}{4\mu} \frac{dh}{dx} (r_0^2 - r^2) \quad (5.3.6)$$

Η εξίσωση (5.3.6) δείχνει ότι η κατανομή της ταχύτητας στη σταθερή στρωτή ροή μέσα σε σωλήνα είναι *παραβολική* (παραβολοειδής εκ περιστροφής). Η κλίση ή βαθμίδα του πιεζομετρικού φορτίου είναι αρνητική γιατί το πιεζομετρικό φορτίο ελαττώνεται κατά τη διεύθυνση της ροής.

Απ' την εξίσωση (5.3.6) αποδείχνεται ότι η ταχύτητα παίρνει τη μέγιστη τιμή στο κέντρο του σωλήνα, δηλαδή όταν  $r = 0$ . Αντικαθιστώντας την τιμή  $r = 0$  στην εξίσωση (5.3.6) παίρνουμε :

$$u_{max} = - \frac{\gamma}{4\mu} \frac{dh}{dx} r_0^2 \quad (5.3.7)$$

Απ' τις εξισώσεις (5.3.6) και (5.3.7) παίρνουμε επίσης :

$$u = u_{max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \quad (5.3.8)$$

Η μέση ταχύτητα ροής  $V = \frac{Q}{E} = \frac{Q}{\pi r_0^2}$ , παίρνεται ως εξής :

$$V = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{l}{\pi r_0^2} \int u \, dE = \frac{l}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \left[ - \frac{\gamma}{4\mu} \frac{dh}{dx} (r_0^2 - r^2) \right] 2\pi r \, dr$$

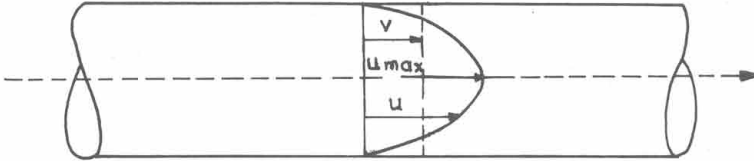
και μετά την ολοκλήρωση

$$V = - \frac{\gamma}{8\mu} \frac{dh}{dx} r_0^2 \quad (5.3.9)$$

Απ' τις εξισώσεις (5.3.7) και (5.3.9) παίρνουμε :

$$V = \frac{1}{2} u_{max}, \quad (5.3.10)$$

δηλαδή η μέση ταχύτητα της στρωτής ροής μέσα σε σωλήνα είναι ίση με το μισό της σημειακής ταχύτητας στο κέντρο του.



Σχ. 5.3.2. Κατανομή ταχύτητας στρωτής ροής μέσα σε σωλήνα.

Λύνοντας την εξίσωση (5.3.9) ως προς  $dh$ , παίρνουμε :

$$-dh = \frac{8\mu V}{\gamma r_0^2} dx$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση μεταξύ των ορίων  $x_1$  και  $x_2$  παίρνουμε :

$$-(h_2 - h_1) = \frac{8\mu V}{\gamma r_0^2} (x_2 - x_1) \quad (5.3.11)$$

Αλλά  $x_2 - x_1 = L =$  το μήκος του σωλήνα μεταξύ  $x_1$  και  $x_2$  και  $r_0 = D/2$ . Άρα η εξίσωση (5.3.11) γράφεται :

$$h_1 - h_2 = \frac{32 \rho \nu V}{\rho g D^2} L = \frac{64 \nu}{VD} \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

ή

$$h_1 - h_2 = \frac{64}{Re} \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (5.3.12)$$

όπου  $Re = \frac{VD}{\nu} =$  ο αριθμός *Reynolds*.

Η εξίσωση (5.3.12) δίνει την απώλεια του πιεζομετρικού ύψους ή φορτίου της σταθερής στρωτής ροής μέσα σε σωλήνα. Η εξίσωση (5.3.12) αποτελεί μερική περίπτωση μιας γενικότερης εξισώσεως απωλειών φορτίου ή ενέργειας, που είναι γνωστή σαν εξίσωση των *Darcy-Weisbach* και που έχει τη μορφή :

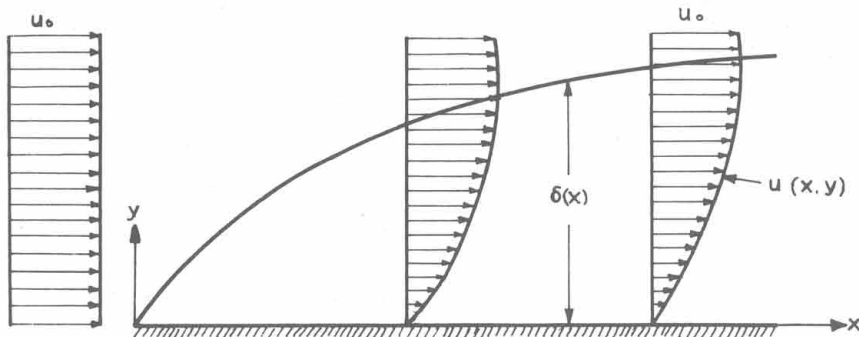
$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (5.3.13)$$

όπου  $h_f$  = το ύψος απωλειών ενέργειας εξαιτίας της τριβής, και  
 $f$  = συντελεστής τριβής.

Στην περίπτωση της σταθερής στρωτής ροής (βλέπε εξίσωση (5.3.12), ο συντελεστής τριβής  $f = \frac{64}{Re}$  εξαρτιέται μόνο απ' τον αριθμό *Reynolds*.

#### 5.4. Θεωρία των οριακών στιβάδων

Όταν ένα πραγματικό ρευστό κινείται επάνω σε μια στερεή επιφάνεια με ταχύτητα  $u_0$  τα μόριά του που βρίσκονται σε άμεση επαφή μ' αυτήν «προσκολλιούνται» επάνω της με αποτέλεσμα η ταχύτητά τους να μηδενίζεται. Αυτό έχει σαν συνέπεια να δημιουργείται μια μεταβατική περιοχή επάνω στην επιφάνεια όπου η ταχύτητα του ρευστού μεταβάλλεται από μηδέν σε  $u_0$ . Η περιοχή αυτή αποτελεί τη λεγόμενη οριακή στιβάδα. Μέσα στην οριακή στιβάδα η κλίση της ταχύτητας  $du/dy$  είναι πολύ μεγάλη. Έτσι η διατμητική τάση  $\tau = \mu \frac{du}{dy}$  παίρνει μεγάλες τιμές και οι δυνάμεις τριβής είναι μεγαλύτερες απ' τις δυνάμεις αδράνειας και πίεσως. Αντίθετα στο εξωτερικό πεδίο ροής οι δυνάμεις τριβής έχουν μια πολύ μικρή επίδραση και η ροή ελέγχεται απ' τις δυνάμεις αδράνειας και πίεσως σε συνάρτηση με τη γεωμετρία των στερεών όριων. Το πάχος της οριακής στιβάδας αυξάνεται κατά τη διεύθυνση της ροής και έχει τη μορφή, που παρουσιάζεται στο σχήμα 5.4.1, όπου οι διαστάσεις έχουν υπερμεγεθυνθεί.



Σχήμα 5.4.1. Οριακή στιβάδα πάνω σε στερεή επιφάνεια.