ΓΕΩΡΓΙΟΥ Α. ΤΕΡΖΙΔΗ M. Sc., Ph. D.
ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΩΤΕΡΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

1. διαφορικές εξισώσεις

θεωρία
προβλήματα
ασκήσεις

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στο βιβλίο αυτό παρουσιάζονται οι θεμελιώδεις αρχές και μέθοδοι επίλυσης των συνήθων διαφορικών εξισώσεων και οι εφαρμογές τους σε προβλήματα των μηχανικών και βιολογικών επιστημών. Είναι γραμμένο με το πνεύμα των εφαρμοσμένων μαθηματικών και γι' αυτό δίνει μεγαλύτερη έμφαση στην τεχνική και εφαρμογή και μικρότερη στη θεωρία. Βασίζεται κυρίως στην πείρα του συγγραφέα που απόκτησε είτε σαν μεταπτυχιακός σπουδαστής της υδρομηχανικής και των εφαρμοσμένων μαθηματικών στα Πανεπιστήμια της Καλιφόρνιας στο Berkeley και Davis ή σαν καθηγητής της μηχανικής των ρευστών, υδραυλικής και εφαρμοσμένων μαθηματικών στα Πανεπιστήμια Cornell και Θεσσαλονίκης. Είναι το ραφιναρισμένο απαύγασμα των συστηματικών διαλέξεων που δόθηκαν τα τελευταία δέκα χρόνια στους φοιτητές της Γεωπονίας και Δασολογίας, καθώς και στους μεταπτυχιακούς σπουδαστές της Ειδίκευσης Εγγείων Βελτιώσεων, που αποτελούνταν από γεωπόνους, δασολόγους, μηχανικούς, φυσικομαθηματικούς και γεωλόγους.

Η ανάπτυξη της ύλης προχωρεί προοδευτικά από τις απλές και εύκολες στις πιο σύνθετες και δύσκολες διαφορικές εξισώσεις ανάλογα με την τάξη και το βαθμό τους. Σαν μαθηματικό υπόβαθρο θεωρείται το επίπεδο του συμβατικού διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού, που μπορεί να έχει μια μικτή ομάδα φοιτητών των εφαρμοσμένων θετικών επιστημών με διαφορετικά ενδιαφέροντα και προσανατολισμούς της επιστήμης τους. Επειδή η θεωρία της ύπαρξης και της μοναδικότητας των λύσεων, καθώς και οι αποδείξεις ορισμένων θεωρημάτων απαιτούν μεγαλύτερη μαθηματική ωριμότητα απ' αυτή που συνήθως χρειάζεται για τη μελέτη των βασικών διαφορικών εξισώσεων, θεωρήθηκε ότι τέτοιες αποδείξεις δεν πρέπει να συμπεριληφθούν σ' αυτόν τον τόμο για να μη προκαλέσουν σύγχιση.

Ο τόμος αυτός περιλαμβάνει σχεδόν όλη την ύλη που συνήθως χρειάζεται για να καλυφθεί ένα ετήσιο μάθημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων για τις εφαρμοσμένες μηχανικές και βιολογικές επιστήμες. Η ύλη χωρίσθηκε σε επτά κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο εισάγονται οι βασικές έννοιες των διαφορικών εξισώσεων και των λύσεών τους. Στο δεύτερο κεφάλαιο επιλύονται οι διαφορικές εξισώσεις της πρώτης τάξης, αφού ταξινομηθούν σε διάφο-

ρες κατηγορίες ανάλογα με τη μορφή τους και την τεχνική επίλυσής τους. Στις τελευταίες παραγράφους αυτού του κεφαλαίου παρουσιάζονται και πολλές εφαρμογές από τις οικονομικές, κοινωνικές, χημικές και βιολογικές επιστήμες. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι μέθοδοι επίλυσης διαφορικών εξισώσεων ανώτερης τάξης με ελλιπή μορφή.

Οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις της δεύτερης τάξης με σταθερούς και μεταβλητούς συντελεστές, που έχουν ιδιαίτερη σημασία και εφαρμογή στις μηχανικές και βιολογικές επιστήμες, παρουσιάζονται πιό αναλυτικά στο τέταρτο και πέμπτο κεφάλαιο. Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται συνοπτικά τα συστήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές.

Τέλος στο έβδομο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι μη γραμμικές εξισώσεις ανώτερου βαθμού με κάποια ξεχωριστή επιμέλεια λόγω της σπουδαιότητάς τους.

Σε κάθε κεφάλαιο περιέχονται πολλά λυμένα παραδείγματα και επιλεγμένες ασκήσεις για εξάσκηση ώστε να συμπληρώνουν και να εμπεδώνουν καλύτερα τις απαραίτητες γνώσεις επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων.

Η ύλη του τόμου αυτού διδάχθηκε σε διάφορες τάξεις προπτυχιακών και μεταπτυχιακών φοιτητών και από τους Διαμαντή Καραμούζη, λέκτορα, Ευαγγελία Αναστασιάδου-Παρθενίου, βοηθό και Στέφανο Μπαλλή, διδάκτορα μαθηματικό και ειδικό επιστήμονα.

Τα χειρόγραφα αυτού του τόμου δακτυλογραφήθηκαν με προσοχή από τη Νίκη Τάκου, όλα δε τα σχέδια σχεδιάσθηκαν με επιμέλεια από την Αθηνά Σιγανού-Χαλούλα. Μεγάλη βοήθεια στη διόρθωση των δοκιμίων είχα από τους συνεργάτες μου Θωμά Ζήση, Δημήτρη Παπαμιχαήλ, Ευαγγελία Αναστασιάδου - Παρθενίου και Νίκη Καλαϊτζίδου - Πάϊκου. Την πιο μεγάλη όμως βοήθεια είχα από τον ειδικό επιστήμονα Στέφανο Μπαλλή, που βοήθησε όχι μόνο στη διόρθωση των δοκιμίων αλλά και στη μεταγλώττιση των αρχικών σημειώσεων στη δημοτική του μονοτονικού συστήματος.

Όλους αυτούς και άλλους που βοήθησαν στην τελική εμφάνιση του τόμου αυτού, ευχαριστώ θερμά.

Θεσσαλονίκη, Απρίλιος 1983

Γ. ΤΕΡΖΙΔΗΣ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

1 Εισαγωγή

1.1. Γενικότητες - Ορισμοί

Ὁ απλούστερος ορισμός της διαφορικής εξίσωσης είναι ο παρακάτω:

Μια εξίσωση που περιέχει παραγώγους ή διαφορικά μιας συνάρτησης λέγεται διαφορική εξίσωση. Οι εξισώσεις

$$y' = 1 + y$$

ή $$(1+y)\,dx - dy = 0 \tag{1.1}$$

$$2xyy' + x^2 + y^2 = 0$$

ή $$(x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0 \tag{1.2}$$

$$y'' + 9y = 8 \sin x$$

ή $$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 8 \sin x \tag{1.3}$$

$$(y')^2 - 2y' + y = 3x$$

ή $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} + y = 3x \tag{1.4}$$

$$h_{xx} + h_{yy} = 0$$

ή $$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \tag{1.5}$$

$$hh_{xx} + (h_x)^2 = h_t$$

ή

$$h\,\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial h}{\partial t} \tag{1.6}$$

στις οποίες οι ολικές παράγωγοι συμβολίζονται και με οξείες πάνω και δεξιά της συνάρτησης, δηλαδή

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \ \ldots, \ y^{(\nu)} = \frac{d^\nu y}{dx^\nu},$$

ενώ οι μερικές παράγωγοι συμβολίζονται και με δείκτες κάτω και δεξιά της συνάρτησης, δηλαδή

$$h_x = \frac{\partial h}{\partial x}, \quad h_{xx} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad h_{xt} = \frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial t}, \quad h_{tt} = \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}, \quad h_t = \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{κ.ο.κ.},$$

είναι διάφορες μορφές διαφορικών εξισώσεων.

Από τις παραπάνω μορφές των διαφορικών εξισώσεων φαίνεται ότι ένας πληρέστερος ορισμός της διαφορικής εξίσωσης είναι : *Μια εξίσωση, που περιέχει ορισμένες ανεξάρτητες μεταβλητές, ορισμένες άγνωστες συναρτήσεις αυτών των μεταβλητών και ορισμένες παραγώγους αυτών των συναρτήσεων ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές, λέγεται διαφορική εξίσωση.*

Αν μία διαφορική εξίσωση περιέχει μόνο ολικές παραγώγους (ή ολικά διαφορικά) λέγεται *συνήθης διαφορική εξίσωση*. Οι εξισώσεις (1.1), (1.2), (1.3) και (1.4) είναι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις η άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) εξαρτάται μόνο από μια ανεξάρτητη μεταβλητή.

Αν μια διαφορική εξίσωση περιέχει μερικές παραγώγους λέγεται *μερική διαφορική εξίσωση* ή *εξίσωση με μερικές παραγώγους*. Οι εξισώσεις (1.5) και (1.6) είναι μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Στις μερικές διαφορικές εξισώσεις η εξαρτημένη μεταβλητή εξαρτάται από περισσότερες της μιάς ανεξάρτητες μεταβλητές.

Τάξη μιάς διαφορικής εξίσωσης είναι η τάξη της *υψηλότερης* παραγώγου, που περιέχεται σ' αυτή. Οι εξισώσεις (1.1), (1.2) και (1.4) είναι διαφορικές εξισώσεις *πρώτης τάξης*, ενώ οι εξισώσεις (1.3), (1.5) και (1.6) είναι διαφορικές εξισώσεις *δεύτερης τάξης*. Γενικά λέμε ότι μια διαφορική εξίσωση είναι νιοστής τάξης ($\nu=1, 2, 3, \ldots$) όταν περιέχει παράγωγο νιοστής τάξης και καμιά ανώτερης τάξης.

Βαθμός μιας διαφορικής εξίσωσης είναι ο βαθμός της *υψηλότερης* παραγώγου, που περιέχεται σ' αυτήν. Οι εξισώσεις (1.1), (1.2), (1.3), (1.5) και (1.6) είναι διαφορικές εξισώσεις πρώτου βαθμού, ενώ η διαφορική εξίσωση (1.4) είναι δεύτερου βαθμού. Όμοια η εξίσωση :

$$(y''')^2 - 2y'y''' + (y'')^3 = 0 \tag{1.7}$$

είναι συνήθης διαφορική εξίσωση τρίτης τάξης και δεύτερου βαθμού.

Μια διαφορική εξίσωση νιοστής τάξης λέγεται *γραμμική* όταν είναι της μορφής :

$$a_0(x)\, y^{(\nu)} + a_1(x)\, y^{(\nu-1)} + \ldots + \alpha_{\nu-1}(x)\, y' + a_\nu(x)\, y = Q\,(x)\,, \tag{1.8}$$

δηλ. όταν η εξαρτημένη μεταβλητή και όλες οι παράγωγοι αυτής είναι πρώτου βαθμού και οι συντελεστές αυτών είναι συναρτήσεις μόνο της ανεξάρτητης μεταβλητής ή είναι σταθερές. Σε κάθε άλλη περίπτωση η εξίσωση λέγεται *μη γραμμική*. Έτσι οι εξισώσεις (1.1), (1.3) και (1.5) είναι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ενώ οι εξισώσεις (1.2), (1.4), (1.6) και (1.7) είναι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Γενικά μπορούμε να πούμε ότι μια γραμμική διαφορική εξίσωση είναι πάντοτε πρώτου βαθμού, ενώ μια πρώτου βαθμού διαφορική εξίσωση δεν είναι πάντοτε γραμμική. Οι διαφορικές εξισώσεις δεύτερου βαθμού και πάνω είναι πάντοτε μη γραμμικές.

Παρακάτω θ' ασχοληθούμε κύρια με τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, τις οποίες, για συντομία, θα λέμε απλά διαφορικές εξισώσεις.

Παραδείγματα

1. Η εξίσωση $x^2y'' + xy' + (x^2-4)\,y = 0$ είναι γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης και πρώτου βαθμού.

2. Η εξίσωση $u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0$ ή

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$$

είναι γραμμική μερική διαφορική εξίσωση τέταρτης τάξης και πρώτου βαθμού.

3. Η εξίσωση $y' = 1 + xy^2$ είναι μη γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης και πρώτου βαθμού. Η μη γραμμικότητά της οφείλεται στον εκθέτη 2 της εξαρτημένης μεταβλητής.

4. Η εξίσωση $y'' + 4yy' + 2y = \cos x$ είναι μη γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης και πρώτου βαθμού. Η μη γραμμικότητά της οφείλεται στο συντελεστή του όρου της πρώτης παραγώγου.

5. Η εξίσωση $y'' + \sin y = 0$ είναι μη γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης και πρώτου βαθμού. Η μη γραμμικότητά της οφείλεται στον όρο $\sin y$, διότι το ημίτονο y είναι μη γραμμική συνάρτηση του y.

6. Η εξίσωση $(y')^2 + xy' - y^2 = 0$ είναι μη γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης και δεύτερου βαθμού. Η μη γραμμικότητά της οφείλεται στον εκθέτη 2 του πρώτου όρου $(y')^2$ και του τρίτου όρου y^2.

7. Η εξίσωση $\sin(y'') + e^{y'} = 1$ είναι μη γραμική συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης και απροσδιόριστου βαθμού διότι είναι γνωστό ότι :

$$\sin(y'') = y'' - \frac{(y'')^3}{3!} + \frac{(y'')^5}{5!} - \frac{(y'')^7}{7!} + \dots$$

για όλες τις πραγματικές τιμές του y''.

1.2. Λύσεις των διαφορικών εξισώσεων

Έστω η διαφορική εξίσωση

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(\nu)}) = 0 \tag{1.9}$$

Λύση ή ολοκλήρωμα της διαφορικής εξίσωσης (1.9) λέγεται κάθε συνάρτηση $y=f(x)$, που επαληθεύει ταυτοτικά την εξίσωση (1.9), δηλαδή

$$F[x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(\nu)}(x)] \equiv 0$$

Η καμπύλη που παριστάνει η λύση $y=f(x)$ λέγεται τότε *ολοκληρωτική καμπύλη* της διαφορικής εξίσωσης (1.9).

Γενική λύση ή *γενικό ολοκλήρωμα* μιας διαφορικής εξίσωσης νιοστής τάξης λέγεται η συνάρτηση $y=\sigma(x, C_1, C_2, \dots, C_\nu)$, που περιέχει ν ανεξάρτητες αυθαίρετες σταθερές και επαληθεύει την εξίσωση. Οι αυθαίρετες σταθερές $C_1, C_2, C_3, \dots$, λέγονται και παράμετροι της γενικής λύσης.

Μερική λύση ή *μερικό ολοκλήρωμα*, μιας διαφορικής εξίσωσης λέγεται η συνάρτηση, που προκύπτει από τη γενική λύση αυτής για ορισμένες τιμές των παραμέτρων της.

Μια διαφορική εξίσωση έχει άπειρες μερικές λύσεις. Είναι όμως δυνατό ορισμένες μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις να επαληθεύονται και από συναρτήσεις που δεν προκύπτουν από τη γενική λύση τους. Οι συναρτήσεις αυτές (εάν υπάρχουν) λέγονται *ιδιάζουσες λύσεις* της διαφορικής εξίσωσης.

Παραδείγματα:

1. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $y=C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$ *είναι γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης* $y''-y'-6y=0$ *για όλες τις τιμές των* C_1 *και* C_2.

Απόδειξη:

Η πρώτη και δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης είναι:

$$y' = -2C_1 e^{-2x} + 3C_2 e^{3x}$$
$$y'' = +4C_1 e^{-2x} + 9C_2 e^{3x}$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές των y, y' και y'' στη διαφορική εξίσωση και παίρνουμε:

$$4C_1 e^{-2x} + 9C_2 e^{3x} + 2C_1 e^{-2x} - 3C_2 e^{3x} - 6C_1 e^{-2x} - 6C_2 e^{3x} = 0$$

Κάνοντας τις πράξεις έχουμε: 0=0, δηλ. η εξίσωση επαληθεύεται. Άρα η δοθείσα συνάρτηση είναι λύση της εξίσωσης και επειδή περιλαμβάνει δύο ανεξάρτητες αυθαίρετες σταθερές αυτή είναι και η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης. Οι μερικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης είναι όλες οι συναρτήσεις, που προκύπτουν από τη γενική λύση για ορισμένες τιμές των C_1 και C_2, π.χ.,

$$y=5e^{-2x}+2e^{3x},\quad y=-6e^{-2x}-7e^{3x},\quad y=4e^{-2x},\quad y=5e^{3x}$$

κ.ο.κ. είναι μερικές λύσεις. ▲

2. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $y=ae^{bx}$ *είναι γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης* $yy''-(y')^2=0$ *για όλες τις πεπερασμένες τιμές των* a *και* b.

Απόδειξη:

Η πρώτη και δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης είναι:

$$y'=abe^{bx} \quad \text{και} \quad y''=ab^2 e^{bx}$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές y, y' και y'' στη διαφορική εξίσωση και παίρνουμε:

$$(ae^{bx})\,(ab^2e^{bx}) - (abe^{bx})^2=0$$

ή

$$(abe^{bx})^2 - (abe^{bx})^2 = 0$$

δηλ. η εξίσωση επαληθεύεται. Άρα η δοθείσα συνάρτηση είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης και επειδή περιέχει δύο ανεξάρτητες αυθαίρετες σταθερές είναι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης. Οι μερικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης προκύπτουν από τη γενική λύση για ορισμένες τιμές των a και b.

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι οι συναρτήσεις $y=C_1e^{-2x}$ και $y=C_2e^{3x}$ είναι μερικές λύσεις των διαφορικών εξισώσεων των παραπάνω παραδειγμάτων 1 και 2. Το άθροισμά τους όμως $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}$ είναι λύση μόνο της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $y''-y'-6y=0$ και όχι της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $yy''-(y')^2 = 0$. Όπως θα εξηγηθεί παρακάτω με ορισμένες συνθήκες το άθροισμα δύο λύσεων μιάς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι επίσης λύση της εξίσωσης ενώ το άθροισμα δύο λύσεων μιας μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεν είναι λύση της εξίσωσης.

3. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $y^2=2cx-c^2$ *είναι γενική λύση της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης*

$$y\,(y')^2 -2xy' +y = 0$$

ενώ οι συναρτήσεις $y=x$ *και* $y=-x$ *είναι οι ιδιάζουσες λύσεις αυτής.*

Απόδειξη:

Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση $y^2 = 2cx-c^2$ ως προς x, παίρνουμε

$$2yy' = 2c \quad \text{ή} \quad y'= \frac{c}{y}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή του y' στη διαφορική εξίσωση και έχουμε

$$y\,\frac{c^2}{y^2} - 2x\frac{c}{y} + y = 0$$

ή

$$c^2 - 2cx + y^2=0$$

ή

$$c^2-2cx-c^2+2cx=0$$

δηλ. η εξίσωση επαληθεύεται.

Άρα η συνάρτηση $y^2=2cx-c^2$ είναι μια γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης διότι περιέχει μια αυθαίρετη σταθερή, όση είναι και η τάξη της εξίσωσης. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι και οι συναρτήσεις $y=x$ και $y=-x$ επαληθεύουν την εξίσωση αλλά δεν προκύπτουν από τη γενική λύση της. Άρα είναι οι ιδιάζουσες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης.

Μερικές λύσεις της εξίσωσης είναι οι $y=\pm\sqrt{2x-1}$, $y=\pm\sqrt{4x-4}$, $y=\pm\sqrt{6x-9}$, κ.λπ.

1.3. Εύρεση της διαφορικής εξίσωσης από τη γενική λύση

Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι ανάγκη να βρεθεί η διαφορική εξίσωση, της οποίας η γενική λύση να είναι μια δοθείσα συνάρτηση με ν παραμέτρους. Σ' αυτές τις περιπτώσεις η διαφορική εξίσωση βρίσκεται ως εξής: Παραγωγίζουμε τη δοθείσα συνάρτηση ν φορές ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή οπότε παίρνουμε ν εξισώσεις. Από τις ν αυτές εξισώσεις και τη δοθείσα συνάρτηση, δηλ. από ένα σύνολο $n+1$ εξισώσεων απαλείφουμε αλγεβρικά τις ν παραμέτρους και βρίσκουμε τη διαφορική εξίσωση.

Παραδείγματα:

1. Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση της οικογένειας των ευθειών του επίπεδου xoy

Είναι γνωστό ότι οι ευθείες του επίπεδου *xoy* δίνονται από την εξίσωση

$$y = ax + \beta \tag{1}$$

όπου a και β είναι οι αυθαίρετες σταθερές ή παράμετροι. Παραγωγίζουμε τη δοθείσα συνάρτηση δύο φορές (όσες είναι οι παράμετροι) και παίρνουμε

$$\begin{aligned} y' &= a \\ y'' &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Επειδή με τη δεύτερη παραγώγιση έγινε και η απαλειφή των παραμέτρων, η εξίσωση $y''=0$ είναι η ζητούμενη διαφορική εξίσωση των ευθειών (1).

2. Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση της οικογένειας των ευθειών του επίπεδου xoy, που περνούν από την αρχή των συντεταγμένων.

Απόδειξη:

Το πρόβλημα αυτό είναι μερική περίπτωση του προηγούμενου προβλήματος γιά $\beta=0$, δηλ. η εξίσωση της οικογένειας αυτής είναι:

$$y = ax \tag{1}$$

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς x και έχουμε

$$y' = a \tag{2}$$

Από τίς εξισώσεις (1) και (2) παίρνουμε τη ζητούμενη διαφορική εξίσωση :

$$y = xy' \tag{3}$$

Σημείωση: Η συνάρτηση (1) είναι γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης (3) και μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης (3) του προηγούμενου παραδείγματος 1.

3. Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση της οικογένειας των κύκλων του επίπεδου xoy.

Απόδειξη:

Η εξίσωση της οικογένειας αυτής είναι τριπαραμετρική

$$x^2 + y^2 + ax + \beta y + \gamma = 0 \tag{1}$$

όπου a, β και γ είναι οι τρείς παράμετροι.

Παραγωγίζουμε την εξίσωση (1) τρεις φορές ως προς x και έχουμε

$$2x + 2yy' + a + \beta y' = 0 \tag{2}$$

$$2 + 2\,(yy''+y'^2) + \beta y'' = 0 \tag{3}$$

$$2\,(yy''' + y'y''+2y'y'') + \beta y''' = 0 \tag{4}$$

Απαλείφουμε την παράμετρο β μεταξύ των εξισώσεων (3) και (4) και παίρνουμε :

$$(2yy'''+6y'y'')\,y'' - (2+2yy''+2y'^2)\,y''' = 0$$

ή $$(1+y'^2)\,y''' - 3y'y''^2 = 0 \tag{5}$$

Η διαφορική εξίσωση (5) είναι η ζητούμενη διαφορική εξίσωση, που έχει γενική λύση τη δοθείσα συνάρτηση (1)

α) Για τις τιμές $a=0$, $\beta=0$ και $\gamma=-R^2$, η συνάρτηση (1) γίνεται

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{6}$$

Η μονοπαραμετρική συνάρτηση (6) είναι μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης (5) και αντιπροσωπεύει την οικογένεια των κύκλων, ακτίνας R, των οποίων τα κέντρα βρίσκονται στην αρχή των συντεταγμένων.

Παραγωγίζουμε την εξίσωση (6) ως προς x και παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση :

$$yy' + x = 0 \tag{7}$$

Η μονοπαραμετρική συνάρτηση (6) είναι τώρα γενική λύση της εξίσωσης (7).

β) Για τιμές $\beta=0$ και $\gamma=0$, η συνάρτηση (1) γίνεται

$$x^2 + y^2 + ax = 0 \tag{8}$$

Η μονοπαραμετρική συνάρτηση (8) είναι μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης (5) και αντιπροσωπεύει την οικογένεια των κύκλων, των οποίων τα κέντρα βρίσκονται πάνω στον άξονά των x, ενώ οι περιφέρειές τους περνούν από την αρχή των συντεταγμένων.

Παραγωγίζουμε την εξίσωση (8) ως προς x και παίρνουμε:

$$2x + 2yy' + a = 0 \tag{9}$$

Απαλείφουμε την παράμετρο a μεταξύ των εξισώσεων (8) και (9) και έχουμε τη διαφορική εξίσωση:

$$2xyy' + x^2 - y^2 = 0 \tag{10}$$

της οποίας γενική λύση είναι η συνάρτηση (8).

4. Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση της οικογένειας των καμπύλων

$$y = ax^2 + \beta x^3 \tag{1}$$

Πρόκειται για διπαραμετρική οικογένεια καμπύλων. Παραγωγίζουμε την (1) δύο φορές ως προς x και παίρνουμε:

$$y' = 2ax + 3\beta x^2 \tag{2}$$

$$y'' = 2a + 6\beta x \tag{3}$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε 3 εξισώσεις με άγνωστους τις δύο παραμέτρους, τις οποίες απαλείφουμε ως εξής: Λύνουμε το πρωτοβάθμιο σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) ως προς a και β και βρίσκουμε:

$$a = \frac{3y - xy'}{x^2} \quad \text{και} \quad \beta = \frac{xy' - 2y}{x^3}$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές των a και β στην εξίσωση (3) και παίρνουμε:

$$y'' = \frac{2\,(3y - xy')}{x^2} + \frac{6\,(xy' - 2y)}{x^2} \quad \frac{4xy' - 6y}{x^2}$$

ή

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0 \tag{4}$$

Η εξίσωση (4) είναι η διαφορική εξίσωση, της οποίας γενική λύση είναι η συνάρτηση (1) αλλά με την προϋπόθεση ότι το x δεν είναι μηδέν $(x \neq 0)$, γιατί για $x = 0$ υπάρχει η ασυνέχεια $y'' = \infty$. Για να συμπεριλάβουμε και την τιμή $x = 0$ ενεργούμε ως εξής:

Οι εξισώσεις (1), (2) και (3) μπορεί να θεωρηθούν ότι αποτελούν ένα σύστημα τριών γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων με δύο αγνώστους τους a και β. Από την άλγεβρα γνωρίζουμε ότι για να έχει λύση το σύστημα αυτό πρέπει και αρκεί η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων και των σταθερών όρων να είναι ίση με το μηδέν. Άρα πρέπει να έχουμε

$$\begin{bmatrix} x^2 & x^3 & -y \\ 2x & 3x^2 & -y' \\ 2 & 6x & -y'' \end{bmatrix} = 0 \tag{5}$$

Αναπτύσσουμε την παραπάνω ορίζουσα της 3ης τάξης με τον κανόνα του *Sarrus* και κάνοντας τις αλγεβρικές πράξεις, παίρνουμε

$$x^4y'' - 4x^2y' + 6x^2y = 0 \tag{6}$$

Η εξίσωση (6) είναι η ζητούμενη διαφορική εξίσωση που έχει γενική λύση τη συνάρτηση (1) για όλες τις τιμές του x, συμπεριλαμβανόμενης και της τιμής $x = 0$, αν και το θεώρημα ύπαρξης, όπως θα δούμε παρακάτω δεν δίνει καμμία πληροφορία για $x = 0$.