Ε.-Α. Ηλιοπούλου
Καθηγητή Πανεπιστημίου
Θεσσαλονίκης

Π. Ταμία-Δημοπούλου
Λέκτορα Πανεπιστημίου
Θεσσαλονίκης

Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών των τελευταίων εξάμηνων, γιατί προϋποθέτει γνώσεις Άλγεβρας και Ανάλυσης. Απαρτίζεται από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος χωρίζεται σε τέσσερα κεφάλαια. Στο πρώτο, δεύτερο και τρίτο κεφάλαιο αναπτύσσεται αναλυτικά η ανάλυση τανυστών, που είναι απαραίτητη για την κατανόηση της θεωρίας των Διαφορίσιμων Πολλαπλοτήτων. Στο τέταρτο κεφάλαιο αναφέρονται συνοπτικά ορισμοί και θεωρήματα από την Τοπολογία, που πρέπει να γνωρίζει ο φοιτητής, ώστε να μπορεί να κατανοήσει τους ορισμούς του δεύτερου μέρους.

Στο δεύτερο μέρος αναπτύσσεται η θεωρία των Διαφορίσιμων Πολλαπλοτήτων, των αφινικών συνδέσεων καθώς και της συναλλοίωτης παραγώγισης τανυστικών πεδίων. Σε κάθε ορισμό δίνεται και το ανάλογο παράδειγμα, ώστε ο φοιτητής να μπορεί να κατανοεί τις καινούργιες έννοιες ευκολότερα. Στο τέλος του δεύτερου μέρους υπάρχουν λυμένες αντιπροσωπευτικές ασκήσεις που αναφέρονται στην ύλη του δεύτερου μέρους.

Θεσσαλονίκη, Φεβρουάριος 1985

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Ι

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι. **Τανυστές**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ. **Ειδικοί τανυστές**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ. **Άλγεβρα τανυστών**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV. **Στοιχεία Τοπολογίας**

ΜΕΡΟΣ II

Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες

ΜΕΡΟΣ Ι

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι
ΤΑΝΥΣΤΕΣ

Στη μελέτη της θεωρίας των διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων είναι απαραίτητη η γνώση του αλγεβρικού λογισμού τανυστών, γι' αυτό και το πρώτο μέρος του βιβλίου αυτού αφιερώνεται στη μελέτη του λογισμού των τανυστών.

§1. Συμβολισμός του Einstein

Ας θεωρήσουμε το άθροισμα

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha^i b_i$$

Αυτό είναι ένα άθροισμα γινόμενων δύο παραγόντων που ο ένας εξαρτάται από ένα δείχτη που βρίσκεται σε πάνω θέση και ο δεύτερος από τον ίδιο δείχτη που βρίσκεται σε κάτω θέση. Τα αθροίσματα της μορφής αυτής συμφωνούμε να τα συμβολίζουμε με :

$$\alpha^i b_i$$

Όμοια ένα άθροισμα γινόμενων, όπως το

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} b^i c^j$$

το γράφουμε με τη συνεπτυγμένη μορφή

$$\alpha_{ij} b^i c^j$$

Οι επαναλαμβανόμενοι δείχτες λέγονται συνήθως, «βουβοί δείχτες», διότι το γράμμα που τους συμβολίζει δεν έχει καμμία σημασία, παρά μόνο η θέση που βρίσκονται, ώστε να δηλώνουν άθροιση.

Μπορούμε επομένως να γράψουμε π.χ.

$$a_i\, b^i = a_j\, b^j = \alpha_k\, b^k$$

Όμοια

$$\alpha_{ijk}\, b^{ij}\, c^k = \alpha_{\rho\sigma\tau}\, b^{\rho\sigma}\, c^{\tau}.$$

Ο συμβολισμός αυτός, που είναι γνωστός σαν συμβολισμός του Einstein, είναι πολύ χρήσιμος στη μελέτη του λογισμού τανυστών, διότι σ' αυτόν χρησιμοποιούνται πολλαπλά αθροίσματα, όπως π.χ. στις αλλαγές συντεταγμένων των τανυστών από τη μία βάση στην άλλη.

Κάθε φορά, επομένως, που θα συναντάμε σε μιά παράσταση γινόμενων επαναλαμβανόμενους δείχτες, που ο ένας θα βρίσκεται σε πάνω θέση και ο άλλος σε κάτω θέση, θα συμπεραίνουμε ότι πρόκειται για άθροισμα γινόμενων και όχι για απλά γινόμενα.

§2. Δέλτα του Kronecker

Θεωρούμε το σύμβολο δ_i^j. Αυτό εξαρτάται από δύο δείχτες i, j που λαμβάνουν τιμές από 1 μέχρι n. Υποθέτουμε ότι :

$$\delta_j^i = 1 \quad \text{όταν} \quad i=j$$

και

$$\delta_j^i = 0 \quad \text{όταν} \quad i=j$$

Το σύμβολο αυτό λέγεται «Δέλτα του Kronecker».

Παράδειγμα 1. Ας θεωρήσουμε το μοναδιαίο πίνακα τάξης n· δηλαδή

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Είναι φανερό, ότι το γενικό στοιχείο του πίνακα αυτού είναι το δ_i^j· άρα :

$$I_n = (\delta_i^j)$$

Παράδειγμα 2. Ας θεωρήσουμε το άθροισμα

$$\delta_i^j\, \alpha_j$$

Αυτό είναι ίσο με το μοναδικό στοιχείο α_i και τούτο γιατί :

$$\delta_i^{\,j}\,\alpha_j = \sum_{j=1} \delta_i^{\,j}\,\alpha_j = \delta_i^{\,1}\,\alpha_1 + \delta_i^{\,2}\,\alpha_2 + \ldots + \delta_i^{\,i}\,\alpha_i + \ldots + \delta_i^{\,n}\,\alpha_n =$$

$$= 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \ldots 1\alpha_i + \ldots + 0\alpha_n = \alpha_i$$

Άρα

$$\delta_i^{\,j}\,\alpha_j = \alpha_i.$$

Σημείωση. Σαν «δέλτα του Kronecker», πολλές φορές συναντάμε τα σύμβολα δ_{ij} και $\delta^{\,ij}$. Και στις περιπτώσεις αυτές τά σύμβολα αυτά ορίζονται με τον ίδιο τρόπο· δηλ.

$$\delta_{ij}=1,\ i=j \quad \text{και} \quad \delta^{\,ij}=1,\ i=j$$
$$\delta_{ij}=0,\ i\neq j \quad \text{και} \quad \delta^{\,ij}=0,\ i\neq j$$

Ασκήσεις

1. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι ισότητες:

α) $\alpha^{\,ij}\, b_{jk}\, c^{\,k\mu\lambda} = \alpha^{\,\rho\nu}\, b_{\nu\sigma}\, c^{\sigma\mu\lambda}$

β) $\alpha^{\,ij}\, c_j + b^{\,i\lambda}\, c_\lambda = (\alpha^{\,i\rho} + b^{\,i\rho})\, c_\rho$

γ) $b^{\,jk}\, c_j\, v_k + b^{\,\lambda\mu}\, \alpha_{\lambda\mu} = b^{\,\rho\sigma}\, (c_\rho\, v_\sigma + \alpha_{\rho\sigma})$

2. Γράψτε αναλυτικά τα αθροίσματα :

$\alpha_{ij}\, c^{\,i}\, v^{\,j}$, $h^{\,ij}\, c_i\, v_j$ όταν $i, j = 1, 2, 3$

3. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα :

α) $\delta_{ij}\, \alpha^{\,i}\, \alpha^{\,j}$, β) $\delta_i^{\,j}\, b_{jk}$, γ) $\delta_i^{\,j}\, \delta_k^{\,j}\, \alpha_{j\lambda}$

δ) $\delta_i^{\,j}\, \delta_j^{\,k}$, ε) $\delta_{ij}\, \delta^{\,ij}$, στ) $\delta^{\,ik}\, \alpha_i\, b_k$

όταν όλοι οι δείχτες παίρνουν τιμές από 1 έως n.

§3. Τανυστικό γινόμενο διανυσματικών χώρων

Ας είναι E και F δύο πραγματικοί διανυσματικοί χώροι με διάσταση n και m αντίστοιχα. Είναι γνωστό ότι μια διγραμμική μορφή επί του γινόμενου E×F είναι εξ ορισμού μιά απεικόνιση

$$f\colon\ E \times F \to R$$

τέτοια ώστε :

1) $f(\lambda\bar{x}+\mu\bar{y}, \bar{z}) = \lambda f(\bar{x}, \bar{z}) + \mu f(\bar{y}, \bar{z}) \quad \forall\ \lambda, \mu \in R \quad \forall\ x, y \in E,$
$\forall\ \bar{z} \in F$

2) $f(\bar{z}, \lambda\bar{y}+\mu\bar{z}) = \lambda f(\bar{x}, \bar{y})+\mu f(\bar{x}, \bar{z}) \quad \forall\ \lambda, \mu \in R, \quad \forall\ \bar{x} \in E,$
$\forall\ \bar{y}, \bar{z} \in F$

Ας θεωρήσουμε τους χώρους E^* και F^*, που είναι οι αντίστοιχοι δυϊκοί των E και F, καθώς και το καρτεσιανό τους γινόμενο $E^* \times F^*$.

Αν f_1 και f_2 είναι δύο διγραμμικές μορφές στο γινόμενο αυτό, τότε το άθροισμα αυτών $f = f_1+f_2$ είναι η απεικόνιση :

$$f\colon E^* \times F^* \to R$$

που ορίζεται από τη σχέση

$$f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y) \quad \forall\ x \in E^*, \quad \forall\ y \in F^*$$

Όμοια το γινόμενο μιάς διγραμμικής μορφής f_1 με ένα πραγματικό αριθμό α είναι η απεικόνιση :

$$f\colon E^* \times F^* \to R$$

που ορίζεται από τη σχέση

$$f(x, y) = af_1(x, y) \quad \forall\ x \in E^*, \ \forall\ y \in F^*$$

Το γινόμενο αυτό συμβολίζεται συνήθως με αf_1.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι το άθροισμα και το γινόμενο, όπως έχουν οριστεί, είναι διγραμμικές μορφές και ότι το σύνολο των διγραμμικών μορφών πάνω στο χώρο $E^* \times F^*$ αποτελεί διανυσματικό χώρο ως προς τις παραπάνω πράξεις. Το διανυσματικό αυτό χώρο το λέμε τανυστικό γινόμενο των E και F (όχι των E^* ή F^*) και τον παριστάνουμε με το σύμβολο $E \otimes F$.

Θεώρημα 3.1

Αν E και F είναι δύο πραγματικοί διανυσματικοί χώροι τότε ισχύει :

$$\dim(E \otimes F) = (\dim E)(\dim F)$$

Απόδειξη. Ας είναι $(\bar{e}_i)_{i=1 \ldots n}$ και $(\bar{f}_\alpha)_{\alpha=1, \ldots m}$ δύο βάσεις των χώρων E και F αντίστοιχα και (e^i), (f^a) οι αντίστοιχες δυϊκές τους των χώρων E^* και F^*. Οι δύο αυτές βάσεις ορίζουν μοναδική βάση του τανυστικού γινομένου $E \otimes F$. Πράγματι :

Ας είναι x ένα στοιχείο του χώρου E* και y ένα στοιχείο του χώρου F*. Τότε ισχύει :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e^i = x_i\, e^i$$

$$y = \sum_{a=1}^{m} y_a\, f^a = y_a\, f^a$$

Ας είναι f ένα τυχαίο στοιχείο του $E \otimes F$· τότε θα έχουμε :

$$f(x, y) = f(x_i\, e^i, y_a\, f^a) = x_i\, y_a\, f(e^i, f^a) \tag{3.1.1}$$

Για χάρη απλότητας θέτουμε :

$$f(e^i, f^a) = f^{ia}$$

αφού $f(e^i, f^a) \in R$, οπότε :

$$f(x, y) = x_i\, y_a\, f^{ia}.$$

Θεωρώ τις $n \times m$ απεικονίσεις

$$\varepsilon_{ia}\colon E^* \times F^* \to R$$

που ορίζονται από τις σχέσεις :

$$\varepsilon_{ia}(x, y) = x_i\, y_a\ .$$

Οι απεικονίσεις αυτές είναι διγραμμικές μορφές. Πράγματι

$$\varepsilon_{ia}(\lambda x + \mu z, y) = (\lambda x_i + \mu z_i)\, y_a = \lambda x_i\, y_a + \mu z_i\, y_a = \lambda\varepsilon_{ia}(x, y) + \mu\varepsilon_{ia}(z, y)$$

για $\forall\ \lambda, \mu \in R$, $\forall\ x, z \in E^*$ και $\forall\ y \in F^*$.

Όμοια

$$\varepsilon_{ia}(x, \lambda z + \mu y) = \lambda\varepsilon_{ia}(x, z) + \mu\varepsilon_{ia}(x, y)$$

Επομένως οι απεικονίσεις ε_{ia} είναι στοιχεία του χώρου $E \otimes F$. Η σχέση (3.1.1) μετά από τα παραπάνω γίνεται :

$$f(x, y) = f^{ia}\, \varepsilon_{ia}(x, y) \Leftrightarrow$$
$$f = f^{i\alpha}\, \varepsilon_{i\alpha} \tag{3.1.2}$$

Από την (3.1.2) προκύπτει ότι, η τυχαία διγραμμική μορφή f είναι γραμμικός συνδυασμός των μορφών $\varepsilon_{i\alpha}$. Για να αποτελούν οι μορφές ε_{ia}

βάση του χώρου $E \otimes F$, αρκεί να είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Πράγματι ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό συνδυασμό αυτών

$A^{ia}\,\varepsilon_{ia} = \bar{0}$, όπου $\bar{0}$ η μηδενική διγραμμική μορφή του $E \otimes F$.

Τότε για κάθε $x \in E^*$ και για κάθε $y \in F^*$

$$A^{ia}\,\varepsilon_{ia}\,(x, y) = 0\,.$$

Επομένως και για τα στοιχεία της βάσης e^j και f^b θα ισχύει

$$A^{ia}\,\varepsilon_{ia}\,(e^j, f^b) = 0 \tag{3.1.3}$$

Αλλά

$$\begin{aligned} e^j &= \delta_i^j\, e^i \\ f^b &= \delta_a^b\, f^a \end{aligned}$$

Τότε η (3.1.3) γίνεται

$$A^{ia}\,\delta_i^j\,\delta_a^b = 0 \Leftrightarrow A^{jb} = 0$$

Επομένως οι μορφές ε_{ia} είναι γραμμικά ανεξάρτητες και αποτελούν μια βάση του $E \otimes F$. Άρα για τις διαστάσεις των χώρων θα έχουμε

$$\dim\,(E \otimes F) = mn = (\dim E)\,(\dim F)$$

Ας είναι $\bar{x}$ και $\bar{y}$ δύο τυχαία διανύσματα των E και F με συνιστώσες (x^j), (y^a) αντίστοιχα ως προς τις βάσεις $(\bar{e}_i)_{i=1,\dots,n}$ και $(\bar{f}_a)_{\alpha=1,\dots,m}$.

Τανυστικό γινόμενο των $\bar{x}$ και $\bar{y}$ λέγεται το στοιχείο του $E \otimes F$ με συνιστώσες $x^i\,y^a$ ως προς τη βάση (ε_{ia}), που ορίζεται από τη σχέση

$$\bar{x} \otimes \bar{y} = x^i\,y^a\,\varepsilon_{ia}$$

Κάθε στοιχείο του $E \otimes F$ της μορφής $\bar{x} \otimes \bar{y}$ λέγεται αναλύσιμο. Οι μορφές ε_{ia} είναι προφανώς αναλύσιμα στοιχεία και ισχύει επομένως

$$\varepsilon_{jb} = \delta_j^i\,\delta_b^a\,\varepsilon_{ia} = \bar{e}_j \otimes \bar{f}_b$$

Άρα αν $(\bar{e}_j)_{j=1,\dots,n}$ είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου E και $(\bar{f}_\alpha)_{a=1,\dots,m}$ μια βάση του χώρου F, τότε τα διανύσματα (διγραμμικές μορφές) $(\bar{e}_i \otimes \bar{f}_a)_{\substack{i=1,\dots,n \\ \alpha=1,\dots,m}}$ αποτελούν μια βάση του τανυστικού γινομένου $E \otimes F$.

Κάθε στοιχείο του τανυστικού γινόμενου $E \otimes F$ είναι γραμμικός συνδυασμός αναλύσιμων στοιχείων, αφού είναι γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης $\bar{e}_i \otimes \bar{f}_a$, που είναι αναλύσιμα στοιχεία.

Θεώρημα 3.2. Ας είναι E, F και G τρεις διανυσματικοί χώροι με βάσεις $(\bar{e}_i)_{i=1,\ldots,n}$, $(\bar{f}_a)_{a=1,\ldots,m}$ και $\{\bar{g}_A\}_{A=1,\ldots,p}$ αντίστοιχα. Οι χώροι $(E \otimes F) \otimes G$ και $E \otimes (F \otimes G)$ είναι φυσικά ισόμορφοι.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το θεώρημα (3.1) είναι φανερό, ότι οι δύο χώροι έχουν την ίδια διάσταση γιατί :

$$\dim (E \otimes F) \otimes G = \dim (E \otimes F) \dim G = (\dim E \cdot \dim F) \dim G = nmp$$

$$\dim E \otimes (F \otimes G) = \dim E \cdot \dim (F \otimes G) = \dim E (\dim F \cdot \dim G) = nmp.$$

Επομένως, οι δύο χώροι είναι ισόμορφοι.

Κάθε στοιχείο του χώρου $(E \otimes F) \otimes G$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης του χώρου· δηλαδή των στοιχείων $(\bar{e}_i \otimes \bar{f}_a) \otimes \bar{g}_A$. Άρα, αν $T \in (E \otimes F) \otimes G$, αυτό θα γράφεται :

$$T = T^{iaA} (\bar{e}_i \otimes \bar{f}_a) \otimes \bar{g}_A.$$

Ο χώρος $E \otimes (F \otimes G)$ έχει για βάση το σύνολο

$$\{\bar{e}_i \otimes (\bar{f}_a \otimes \bar{g}_A)\}.$$

Θεωρώ το στοιχείο S του χώρου $E \otimes (F \otimes G)$, που ορίζεται από τη σχέση

$$S = T^{iaA} \bar{e}_i \otimes (\bar{f}_a \otimes \bar{g}_A)$$

Η απεικόνιση

$$f\colon (E \otimes F) \otimes G \to E \otimes (F \otimes G),$$

που στο στοιχείο T αντιστοιχεί το στοιχείο S, είναι μια φυσική ισομορφία.

Προφανώς είναι ισομορφία. Αρκεί να δείξουμε ότι η αντιστοιχία είναι ανεξάρτητη από τις βάσεις που έχουμε εκλέξει, δηλαδή να δείξουμε ότι είναι φυσική ισομορφία.

Ας είναι $(\bar{e}_{j'})_{j'=1,\ldots,n}$, $(\bar{f}_{\beta'})_{\beta'=1,\ldots,m}$, $(\bar{g}_{B'})_{B'=1,\ldots,p}$ τρείς νέες βάσεις των χώρων E, F και G αντίστοιχα. Τότε θα ισχύουν οι σχέσεις :

$$\bar{e}_i = \sum_{j'=1}^{n} A_i^{j'} \bar{e}_{j'} = A_i^{j'} \bar{e}_{j'},$$

$$\bar{f}_a = B_\alpha^{\beta'} \bar{f}_{\beta'},$$

$$\bar{g}_A = \Gamma_A^{B'} \bar{g}_{B'},$$

όπου $(A_i^{j'})$, $(B_\alpha^{\beta'})$, $(\Gamma_A^{B'})$ είναι οι πίνακες αλλαγής από τη μία βάση στην άλλη στους αντίστοιχους χώρους.

Τα στοιχεία T και S μπορούν να γραφούν σαν

$$T = T^{i\alpha A} A_i^{j'} B_\alpha^{\beta'} \Gamma_A^{B'} (\bar{e}_{j'} \otimes \bar{f}_{\beta'}) \otimes \bar{g}_{B'} = T^{j'\beta' B'} (\bar{e}_{j'} \otimes \bar{f}_{\beta'}) \otimes \bar{g}_{B'}$$
$$S = T^{i\alpha A} A_i^{j'} B_\alpha^{\beta'} \Gamma_A^{B'} \bar{e}_{j'} (\bar{f}_{\beta'} \otimes \bar{g}_{B'}) = T^{j'\beta' B'} \bar{e}_{j'} \otimes (\bar{f}_{\beta'} \otimes \bar{g}_{B'})$$

Παρατηρούμε επομένως ότι η αντιστοιχία f των στοιχείων των χώρων $(E \otimes F) \otimes G$ και $E \otimes (F \otimes G)$ είναι ανεξάρτητη των βάσεων που έχουμε θεωρήσει για τον ορισμό της. Άρα είναι φυσική ισομορφία.

Μετά την απόδειξη του θεωρήματος (3.2), μπορούμε να ταυτοποιήσουμε τους δύο χώρους και να γράψουμε :

$$(E \otimes F) \otimes G = E \otimes (F \otimes G) = E \otimes F \otimes G$$

Ας θεωρήσουμε το γινόμενο $E^* \times F^* \times G^*$ και το σύνολο των τριγραμμικών μορφών πάνω σ' αυτό το γινόμενο. Ας είναι φ_1 και φ_2 δύο τριγραμμικές μορφές πάνω στο χώρο $E^* \times F^* \times G^*$.

Ονομάζουμε άθροισμα $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ την τριγραμμική μορφή που ορίζεται από τη σχέση

$$\varphi (x, y, z) = \varphi_1(x, y, z) + \varphi_2 (x, y, z), \quad \forall\, x \in E^*, \ \forall\, y \in F^*, \ \forall\, z \in G^*$$

Γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού α και μιας τριγραμμικής μορφής φ_1 λέγεται η τριγραμμική μορφή φ', που ορίζεται από τη σχέση :

$$\varphi'(x, y, z) = \alpha\varphi_1 (x, y, z) \quad \forall\, x \in E^*, \ \forall\, y \in F^*, \ \forall\, z \in G^*$$

Είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι το σύνολο των τριγραμμικών μορφών, που ορίζονται στον χώρο $E^* \times F^* \times G^*$, αποτελεί διανυσματικό χώρο ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, που ορίστηκαν παραπάνω. Αυτόν το συμβολίζουμε με W.

Ας θεωρήσουμε ένα στοιχείο T του χώρου W και τις βάσεις $(\bar{e}_i)_{i=1, \dots, n}$, $(\bar{f}_\alpha)_{\alpha=1, \dots, m}$, $(\bar{g}_A)_{A=1, \dots, p}$ των χώρων E, F και G αντίστοιχα. Αν (e^i), (f^α), (g^A) είναι οι αντίστοιχες δυϊκές βάσεις των $(\bar{e}_i)$, $(\bar{f}_\alpha)$, $(\bar{g}_A)$, αντίστοιχα, τότε το στοιχείο T για τα τυχαία στοιχεία $x \in E^*$, $y \in F^*$, $z \in G^*$, θα γράφεται :

$$T (x, y, z) = T (x_i e^i, y_\alpha f^\alpha, z_A g^A) = x_i\, y_\alpha\, z_A\, T (e^i, f^\alpha, g^A).$$

Στο άθροισμα αυτό οι παράγοντες των γινόμενων $T (e^i, f^\alpha, g^A)$ είναι πραγματικοί αριθμοί, που τους συμβολίζουμε με $T^{i\alpha A}$

Τότε

$$T(x, y, z) = T^{i\alpha A} x_i y_\alpha z_A$$

Θεωρώ τις απεικονίσεις

$$\varepsilon_{i\alpha A}: E^* \times F^* \times G^* \to R$$

που ορίζονται από τη σχέση :

$$\varepsilon_{i\alpha A}(x, y, z) = x_i y_\alpha z_A$$

Είναι φανερό από τον ορισμό τους, ότι οι απεικονίσεις αυτές είναι στοιχεία του χώρου W.

Το τυχαίο στοιχείο T του χώρου W θα γράφεται :

$$T(x, y, z) = T^{i\alpha A} \varepsilon_{i\alpha A}(x, y, z)$$

ή

$$T = T^{i\alpha A} \varepsilon_{i\alpha A} \quad \forall (x, y, z) \in E^* \times F^* \times G^*$$

Βλέπουμε λοιπόν, ότι κάθε τριγραμμική μορφή μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των $\varepsilon_{i\alpha A}$. Οι τριγραμμικές μορφές $\varepsilon_{i\alpha A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Πράγματι ας είναι

$$\lambda^{i\alpha A} \varepsilon_{i\alpha A} = \bar{0},$$

όπου $\lambda^{i\alpha A} \in R$ και $\bar{0}$ η μηδενική τριγραμμική μορφή.

Τότε

$$\lambda^{i\alpha A} \varepsilon_{i\alpha A}(x, y, z) = 0 \quad \forall (x, y, z) \in E^* \times F^* \times G^*$$

Επομένως και για τα διανύσματα των βάσεων (e^i) (f^α) και (g^A) θα ισχύει

$$\lambda^{i\alpha A} \varepsilon_{i\alpha A}(e^j, f^\beta, g^B) = 0$$

Αλλά

$$\begin{aligned} e^j &= \delta_i^j e^i \\ f^\beta &= \delta_\alpha^\beta f^\alpha \\ g^B &= \delta_A^B g^A \end{aligned}$$

Επομένως :

$$\lambda^{i\alpha A} \varepsilon_{i\alpha A}(e^j, f^\beta, g^B) = \lambda^{i\alpha A} \delta_i^j \delta_\alpha^\beta \delta_A^B = 0 \Rightarrow \lambda^{j\beta B} = 0$$

Άρα τα $\varepsilon_{i\alpha A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του χώρου W. Η διάσταση του χώρου αυτού είναι φανερό ότι είναι nmp, όσο δηλαδή το πλήθος των $e_{i\alpha A}$.

Θεώρημα 3.3. Ο χώρος W των τριγραμμικών μορφών είναι φυσικά ισόμορφος με το χώρο $E \otimes F \otimes G$.

Απόδειξη. Ας είναι :

$$(\bar{e}_i)_{i=1,\dots,n} \quad (\bar{f}_\alpha)_{\alpha=1,\dots,m} \quad (\bar{g}_A)_{A=1,\dots,p}$$

βάσεις των χώρων E, F και G αντίστοιχα.

Τότε, όπως είδαμε, το τυχαίο στοιχείο T του W θα γράφεται :

$$T = T^{i\alpha A}\, \varepsilon_{i\alpha A}$$

Στο στοιχείο αυτό αντιστοιχούμε το στοιχείο S του χώρου $E \otimes F \otimes G$, που ορίζεται από τη σχέση :

$$S = T^{i\alpha A}\, \bar{e}_i \otimes \bar{f}_a \otimes \bar{g}_A,$$

όπου

$$\bar{e}_i \otimes \bar{f}_\alpha \oplus \bar{g}_A = (\bar{e}_i \otimes \bar{f}_\alpha) \otimes \bar{g}_A = \bar{e}_i \otimes (\bar{f}_\alpha \otimes \bar{g}_A)$$

Η απεικόνιση φ που ορίζεται μ' αυτόν τον τρόπο μεταξύ των χώρων W και $E \otimes F \times G$, είναι μια φυσική ισομορφία.

Πράγματι, ας θεωρήσουμε νέες βάσεις $(\bar{e}_{j'})$, $(\bar{f}_{\beta'})$ και $(\bar{g}_{B'})$ των χώρων E, F και G αντίστοιχα. Από τις βάσεις αυτές ορίζεται νέα βάση $\varepsilon_{j'\beta'B'}$ του χώρου W ανάλογα με τον τρόπο ορισμού των $\varepsilon_{i\alpha A}$. Τότε μεταξύ των βάσεων ισχύουν οι τύποι :

$$\begin{aligned}
\bar{e}_i &= A_i^{j'}\, \bar{e}_{j'} \\
\bar{f}_\alpha &= B_\alpha^{\beta'}\, \bar{f}_{\beta'} \\
\bar{g}_A &= \Gamma_A^{B'}\, \bar{g}_{B'} \\
\varepsilon_{i\alpha A} &= A_i^{j'}\, B_\alpha^{\beta'}\, \Gamma_A^{B'}\, \varepsilon_{j'\beta'B'}
\end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση αποδεικνύεται ως εξής :

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{i\alpha A}(x, y, z) = x_i\, y_\alpha\, z_A \quad \forall\, (x, y, z) \in E^* \times F^* \times G^* \\
\varepsilon_{i\alpha A}(x, y, z) = A_i^{j'}\, x_{j'}\, B_\alpha^{\beta'}\, y_{\beta'}\, \Gamma_A^{B'}\, z_{B'} \Leftrightarrow \\
\varepsilon_{i\alpha A}(x, y, z) = A_i^{j'}\, B_\alpha^{\beta'}\, \Gamma_A^{B'}\, \varepsilon_{j'\beta'B'}(x, y, z) \Leftrightarrow \\
\varepsilon_{i\alpha A} = A_i^{j'}\, B_\alpha^{\beta'}\, \Gamma_A^{B'}\, \varepsilon_{j'\beta'B'}
\end{gathered}$$

Για τα αντίστοιχα στοιχεία T και S έχουμε :

$$\begin{aligned}
T &= T^{i\alpha A}\, \varepsilon_{i\alpha A} = T^{i\alpha A}\, A_i^{j'}\, B_\alpha^{\beta'}\, \Gamma_A^{B'}\, \varepsilon_{j'\beta'B'} = T^{j'\beta'B'}\, \varepsilon_{j'\beta'B'} \\
S &= T^{i\alpha A}\, \bar{e}_i \otimes \bar{f}_\alpha \otimes \bar{g}_A = T^{i\alpha A}\, A_i^{j'}\, B_\alpha^{\beta'}\, \Gamma_A^{B'}\, \bar{e}_j \otimes \bar{f}_{\beta'} \otimes \bar{g}_{B'} = \\
&= T^{j'\beta'B'}\, \bar{e}_{j'} \otimes \bar{f}_{\beta'} \otimes \bar{g}_{B'}
\end{aligned}$$