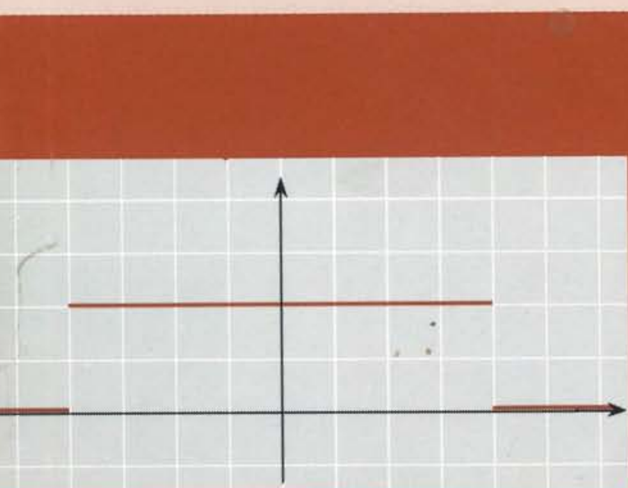
ΙΩΑΝΝΗΣ ΣΧΟΙΝΑΣ

ΕΙΔΙΚΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

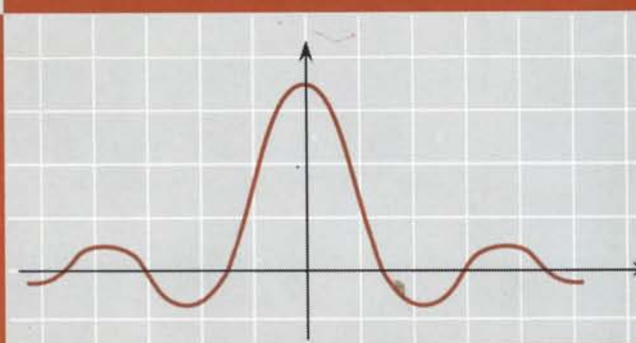
ΣΕΙΡΕΣ FOURIER
ΚΑΙ
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ FOURIER

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
ΣΥΝΗΘΩΝ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ



ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΖΗΤΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στα πλαίσια του εκσυγχρονισμού του προγράμματος σπουδών του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών του Δημοκριτείου Πανεπιστημίου Θράκης το βιβλίο αυτό αποτελεί μια αναπροσαρμοσμένη στις σημερινές απαιτήσεις αναδημοσίευση προηγούμενου, με τον ίδιο τίτλο, βιβλίου.

Η νέα αυτή βελτιωμένη έκδοση έγινε ύστερα από την πείρα που αποκτήθηκε από την πολυετή διδασκαλία του μαθήματος που καλύπτει το βιβλίο. Καταβλήθηκε προσπάθεια στην όσο το δυνατό ευκολότερη κατανόηση και εμπέδωση των χρησιμοποιουμένων μεθόδων και εννοιών ώστε να μπορέσει ο φοιτητής με άνεση να τις εφαρμόσει στα τεχνικά μαθήματα των επόμενων εξαμήνων.

Κατά τη διάρθρωση της ύλης δε δόθηκε έμφαση στις θεωρητικές και λεπτομερείς αποδείξεις αλλά κυρίως στη λύση πολλών επιλεγμένων αντιπροσωπευτικών παραδειγμάτων και εφαρμογών ώστε να γίνει κατανοητός ο μηχανισμός ο οποίος συνδέει την πράξη με το μαθηματικό λογισμό.

Εξάλλου, πρέπει να σημειωθεί ότι, επειδή κάθε κεφάλαιο αυτού του βιβλίου είναι και ένας αυτοτελής μαθηματικός κλάδος εδώ επιδιώκουμε να δώσουμε τη βασική θεωρία σε ένα πρώτο στάδιο και γι' αυτό εξετάζουμε τα κυριότερα μόνο θέματα σε μια περιορισμένη έκταση.

Στο βιβλίο αυτό περιέχονται πέντε κεφάλαιο: Μιγαδικές Συναρτήσεις, Σειρές Fourier και Μετασχηματισμοί Fourier, Μετασχηματισμοί Laplace, Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους και Συστήματα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων και Εφαρμογές τους στα Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου.

Θεωρώ υποχρέωσή μου να ευχαριστήσω το προσωπικό του εκδοτικού οίκου Π. Ζήτη που συνέβαλε στην όσο το δυνατό αρτιότερη εμφάνιση του βιβλίου.

Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 1990 Ι. ΣΧΟΙΝΑΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο I. ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο II. ΣΕΙΡΕΣ FOURIER ΚΑΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ FOURIER

Κεφάλαιο III. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Κεφάλαιο IV. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

Β. Το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής

Γ. Μέθοδοι λύσης ΔΕΜΠ με συνοριακές συνθήκες

Δ. Λύση ΔΕΜΠ με τη βοήθεια μετασχηματισμών Fourier και μετασχηματισμών Laplace

Κεφάλαιο V. **ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ**

Κεφάλαιο I

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Εισαγωγή

Η διδασκαλία της θεωρίας των Μιγαδικών Συναρτήσεων είναι απαραίτητη στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά γιατί πολλά φαινόμενα στην φύση και συστήματα στην τεχνική περιγράφονται από μαθηματικά μοντέλα μιγαδικών μεταβλητών. Εξάλλου η θεμελίωση των επόμενων κεφαλαίων των Μετασχηματισμών Fourier και Μετασχηματισμών Laplace βασίζεται στη θεωρία των Μιγαδικών Συναρτήσεων.

Θα θεωρήσουμε γνωστή τη θεωρία των μιγαδικών αριθμών και θα αναφέρουμε στη συνέχεια μόνο μερικές βασικές ιδιότητές τους.

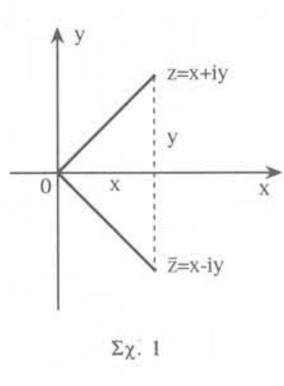
Είναι γνωστό ότι το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι ισόμορφο με το σώμα $\mathbb{R}^2$ των διατεταγμένων δυάδων πραγματικών αριθμών. Εξαιτίας αυτής της ισομορφίας το αντίστοιχο επίπεδο Oxy λέγεται **μιγαδικό επίπεδο** και συμβολίζεται επίσης με $\mathbb{C}$.

2. Μιγαδικοί αριθμοί

Έστω $z = x+iy$ μιγαδικός αριθμός, όπου $x=\text{Re}\, z$, $y=\text{Im}\, z$ το **πραγματικό** και **φανταστικό μέρος** του z αντιστοίχως (Σχ. 1). Η γραφή αυτή λέγεται **αναλυτική παράσταση** του μιγαδικού αριθμού z. **Μέτρο** του μιγαδικού αριθμού z είναι ο μη αρνητικός αριθμός $\sqrt{x^2+y^2}$ και παριστάνεται με $|z|$. **Συζυγής** του $z = x+iy$ είναι ο μιγαδικός αριθμός $x-iy$ και παριστάνεται με $\bar{z}$. Ισχύει:

$z=\bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$, $z=-\bar{z} \Leftrightarrow z$ φανταστικός αριθμός.

Από τις σχέσεις $z=x+iy$ και $\bar{z}=x-iy$ προκύπτει ότι



Σχ. 1

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z+\bar{z}), \tag{1}$$

$$y = \operatorname{Im} z = \frac{1}{2}(z-\bar{z}), \tag{2}$$

$$z\bar{z} = x^2+y^2 = |z|^2 \tag{3}$$

Αν $z, w \in \mathbb{C}$ τότε

(α) $$\operatorname{Re}(z\bar{w}) = \operatorname{Re}(\bar{z}w) \tag{4}$$

(β) $$|z \pm w|^2 = |z|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z\cdot\bar{w}) + |w|^2 \tag{5}$$

α) Πράγματι, έχουμε $\overline{\bar{z}w} = z\bar{w}$, δηλαδή οι $\bar{z}w$ και $z\bar{w}$ είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί και συνεπώς έχουν ίσα πραγματικά μέρη.

β) $$|z\pm w|^2 = (z\pm w)(\overline{z\pm w}) = (z\pm w)(\bar{z}\pm\bar{w}) = z\bar{z}\pm(z\bar{w}+\bar{z}w)+w\bar{w} =$$
$$= |z|^2\pm(z\bar{w}+\bar{z}w)+|w|^2 = |z|^2\pm 2\operatorname{Re}(z\bar{w})+|w|^2,$$

σύμφωνα με την (α).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να δειχτεί ότι

$$|1-\bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1-z_2|^2 = (1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2).$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τον τύπο (3) έχουμε

$$\begin{aligned} |1-\bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1-z_2|^2 &= (1-\bar{z}_1 z_2)(1-z_1\bar{z}_2)-(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2) \\ &= 1-z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1 z_2+z_1\bar{z}_1 z_2\bar{z}_2-z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1 z_2-z_2\bar{z}_2 \\ &= 1+|z_1|^2|z_2|^2-|z_1|^2-|z_2|^2 \\ &= (1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2). \end{aligned}$$

Στους μιγαδικούς αριθμούς ισχύουν η τριγωνική ανισότητα

$$\big||z|-|w|\big| \le |z\pm w| \le |z|+|w|$$

και η ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$|z_1w_1+z_2w_2|^2 \le (|z_1|^2+|z_2|^2)(|w_1|^2+|w_2|^2).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha>0$ να δειχθεί ότι

$$|z_1+z_2|^2 \le (1+\alpha)|z_1|^2+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)|z_2|^2.$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον τύπο (5), αν

$$|z_1+z_2|^2 \leq (1+\alpha)\ |z_1|^2+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\ |z_2|^2.$$

αρκεί να δειχθεί ότι

$$2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \leq \alpha\,|z_1|^2+\frac{1}{\alpha}\ |z_2|^2$$

Ή, αν $z_1 = x_1+iy_1$, $z_2 = x_2+iy_2$,

$$2(x_1x_2+y_1y_2) \leq \alpha(x_1^2+y_1^2)+\frac{1}{\alpha}\ (x_2^2+y_2^2)$$

ή

$$\left(\sqrt{\alpha}\,x_1-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}x_2\right)^2+\left(\sqrt{\alpha}\,y_1-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ y_2\right)^2 \geq 0\,,$$

που ισχύει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Αν $|z|=1$ ή $|w|=1$ να δειχθεί ότι $\dfrac{z-w}{1-\bar{z}w} = 1.$

Απόδειξη. Αφού $|z|=1$, έπεται ότι $|z\bar{z}|=1$.
Αρκεί να δείξουμε ότι $\left|\dfrac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|^2 = 1$ ή $\dfrac{|z-w|^2}{|1-\bar{z}w|^2} = 1.$
Οπότε

$$\frac{|z-w|^2}{|1-\bar{z}w|^2} = \frac{(z-w)\,(\overline{z-w})}{(1-\bar{z}w)\,(\overline{1-\bar{z}w})} = \frac{(z-w)\,(\bar{z}-\bar{w})}{(1-\bar{z}w)\,(1-z\bar{w})} = \frac{z\bar{z}-z\bar{w}-\bar{z}w+w\bar{w}}{1-z\bar{w}-\bar{z}w+z\bar{z}w\bar{w}}$$

$$= \frac{1-z\bar{w}-\bar{z}w+w\bar{w}}{1-z\bar{w}-\bar{z}w+w\bar{w}} = 1$$

αφού $\bar{\bar{z}}=z$. Ομοίως εργαζόμαστε αν $|w|=1$.

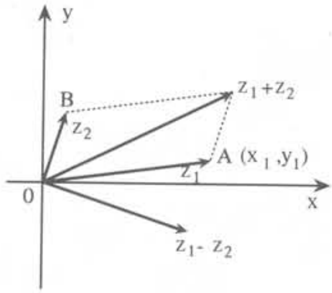
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Αν $|z|=1$ να δειχθεί ότι $\left|\dfrac{\alpha z+b}{\bar{b}z+\bar{\alpha}}\right| = 1$, όπου $\alpha, b \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη. Αφού $|z|=1$, έχουμε $z\bar{z}=1$. Συνεπώς,

$$\left|\frac{\alpha z+b}{\bar{b}z+\bar{\alpha}}\right| = \frac{|\alpha z+b|}{|\bar{b}+\bar{\alpha}\bar{z}|\ |z|} = \frac{|\alpha z+b|}{|\overline{\alpha z+b}|} = \frac{|\alpha z+b|}{|\alpha z+b|} = 1\,.$$

Πολλές φορές ένας μιγαδικός αριθμός $z_1 = x_1 + iy_1$ παριστάνεται ως



Σχ. 2

ένα διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$, οπότε το άθροισμα και η διαφορά των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 στην πραγματικότητα βρίσκεται με το γνωστό κανόνα του παραλληλογράμμου των αντίστοιχων διανυσμάτων τους. (Σχ. 2). Αν δε z_1 και z_2 είναι δύο σημεία του μιγαδικού επιπέδου, τότε, ομοίως όπως στα διανύσματα, **το μέτρο $|z_1-z_2|$ δίνει την απόσταση αυτών.**

Ένα μιγαδικό αριθμό $z=x+iy$ μπορούμε να τον παραστήσουμε υπό **τριγωνομετρική μορφή** ή **πολική μορφή** αν θεωρήσουμε τη γωνία θ μεταξύ του άξονα Ox και της ευθείας που ενώνει την αρχή των αξόνων με το μιγαδικό αριμό z (Σχ. 3). Τότε

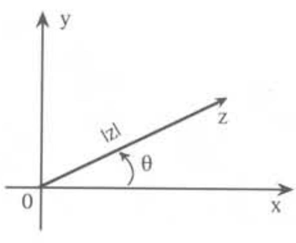
$$x = |z|\cos\theta, \quad y = |z|\sin\theta$$

οπότε

$$z = x+iy = |z|(\cos\theta+i\sin\theta) = |z|\text{cis}\theta\,.$$

Η γωνία θ λέγεται **όρισμα** του z, συμβολίζεται $\arg z$ και μεταβάλλεται στο διάστημα $(-\pi, \pi]$. Την παράσταση $\cos\theta+i\sin\theta$ συνήθως την γράφουμε συνοπτικά $\text{cis}\theta$.

Το όρισμα θ του μιγαδικού αριθμού $z=x+iy$ βρίσκεται, ως γνωστό, από τις σχέσεις



Σχ. 3

$$\sin\theta = \frac{y}{|z|}, \quad \cos\theta = \frac{x}{|z|}, \quad -\pi<\theta\leq\pi.$$

Προφανώς δύο συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί έχουν ίσα μέτρα και αντίθετα ορίσματα.

Η τριγωνομετρική μορφή μιγαδικών αριθμών απλουστεύει τις πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης αυτών. Πράγματι, αν $z_1=|z_1|\text{cis}\theta_1$ και $z_2=|z_2|\text{cis}\theta_2$, τότε

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= |z_1|\,|z_2|\,(\cos\theta_1+i\sin\theta_2)\,(\cos\theta_2+i\sin\theta_2) \\ &= |z_1|\,|z_2|\,[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i\,(\sin\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_2\cos\theta_1)] \\ &= |z_1|\,|z_2|\,\text{cis}(\theta_1+\theta_2) \end{aligned}$$

ή

$$z_1z_2 = |z_1|\,|z_2|\,\text{cis}(\theta_1+\theta_2)\,.$$

Δηλαδή **το γινόμενο δύο μιγαδικών αριθμών έχει μέτρο το γινόμενο των μέτρων τους και όρισμα το άθροισμα των ορισμάτων τους.** Ο τύπος αυτός, προφανώς ισχύει και για το γινόμενο περισσοτέρων των δύο μιγαδικών αριθμών.

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,\mathrm{cis}(\theta_1-\theta_2)\ .$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να απλοποιηθεί η παράσταση: $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10}$.

Λύση. Θέτουμε πρώτα τους συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $1+i\sqrt{3}$ και $1-i\sqrt{3}$ σε τριγωνομετρική μορφή. Έχουμε,

$$|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2,\quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\quad \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad -\pi<\theta\leq\pi\ ,$$

οπότε $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Άρα

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10} = \left(\frac{2\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{3}}{2\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right)^{10} = \frac{\mathrm{cis}\,\frac{10\pi}{3}}{\mathrm{cis}\left(-\frac{10\pi}{3}\right)} = \frac{\mathrm{cis}\,\frac{4\pi}{3}}{\mathrm{cis}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}$$

$$= \mathrm{cis}\,\frac{8\pi}{3} = \mathrm{cis}\,\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

Στους μιγαδικούς αριθμούς οι ρίζες και οι δυνάμεις ορίζονται διαφορετικά από ότι στους πραγματικούς αριθμούς. Έστω $z\in\mathbb{C}$ και $n\in\mathbb{N}-\{1\}$. Κάθε μιγαδικός αριθμός w, τέτοιος ώστε $w^n=z$ λέγεται **n-οστή ρίζα του** z και παριστάνεται με $z^{1/n}$. Δηλαδή,

$$z^{/n} = w \Leftrightarrow w^n = z\ .$$

Αν $z\in\mathbb{R}^+$, είναι γνωστό ότι υπάρχει ένας μόνο πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $x^n=z$. Στην περίπτωση αυτή συνηθίζεται ο μοναδικός αυτός μη αρνητικός αριθμός x να γράφεται $\sqrt[n]{z}$. Αποδεικνύεται, όμως, γενικά, ότι στους μιγαδικούς αριθμούς **κάθε μιγαδικός αριθμός** z **με μέτρο** $|z|$ **και όρισμα** θ **έχει** n **n-οστές ρίζες** που δίνονται από τον τύπο

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, ..., n-1 .$$

Ειδικώς, αν $z=1$, επειδή $|z|=1$ και $\arg z=0$, από τον τύπο αυτό βρίσκουμε τις n-**οστές ρίζες της μονάδας** που είναι οι

$$w_0 = 1,\ w_1 = \cos\frac{2\pi}{n},\ w_2 = \frac{4\pi}{n},\ ...,\ w_{n-1} = \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

ή αν θέσουμε $w_1=\omega$ οι n-οστές ρίζες της μονάδας είναι οι αριθμοί

$$1, \omega, \omega^2, ..., \omega^{n-1} .$$

Οι ρίζες αυτές είναι τοποθετημένες ανά ίσα τόξα πάνω στο μοναδιαίο κύκλο αρχίζοντας από το σημείο $z=1$ του μιγαδικού επιπέδου C.

Έστω $z \in \mathbb{C}-\{0\}$ με μέτρο $|z|$ και $\arg z=\theta$. Τότε, ο **λογάριθμος** του μιγαδικού αριθμού z ορίζεται από τη σχέση

$$\log z = \log|z| + i(\theta+2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} .$$

Δηλαδή κάθε μιγαδικός αριθμός z έχει άπειρο πλήθος λογαρίθμων. Αν $k=0$, τότε ο $\log z=\log|z|+i\theta$ λέγεται **πρωτεύουσα τιμή** του λογαρίθμου του z.

Ομοίως, τώρα, μπορούμε να ορίσουμε τις δυνάμεις z^α, $(z, \alpha \in \mathbb{C})$ των μιγαδικών αριθμών. Έστω $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$, τότε η **δύναμη** z^α με βάση z και εκθέτη α ορίζεται από τον τύπο

$$z^\alpha = \begin{cases} 0, & \text{όταν } z=0 \text{ και } \alpha \neq 0 \\ e^{\alpha\log z} = e^{\alpha[\log|z|+i(\theta+2k\pi)]}, & z \neq 0,\ k \in \mathbb{Z} . \end{cases}$$

Από τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι **υπάρχουν άπειρες τιμές για τη δύναμη ενός μιγαδικού αριθμού όταν ο εκθέτης α της δύναμης είναι διάφορος ρητού αριθμού**, σε αντίθεση από ότι δεχόμαστε για τις δυνάμεις πραγματικών που όταν είναι θετικοί έχουν πάντα μία δύναμη. Όταν $\alpha=n \in \mathbb{N}$, τότε η δύναμη z^n είναι μονότιμα ορισμένη, ενώ όταν n ρητός $\neq$ ακεραίου η δύναμη z^n έχει πεπερασμένου πλήθους τιμές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Να υπολογιστεί η δύναμη $1^{\sqrt{3}}$ στους μιγαδικούς αριθμούς.

Λύση. Επειδή $|1|=1$ και $\arg 1=0$,

$$1^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}[\log|1|+i(0+2k\pi)]} = e^{2k\sqrt{3}i}, \quad k \in \mathbb{Z} .$$

Συνεπώς το $1^{\sqrt{3}}$ έχει άπειρες τιμές που είναι όλες τοποθετημένες πάνω στο μοναδιαίο κύκλο στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Να υπολογιστεί η δύναμη i^i στους μιγαδικούς.

Λύση. Προφανώς $|i|=1$ και $\arg i = \frac{\pi}{2}$. Άρα οι δυνάμεις i^i είναι οι

$$i^i = e^{i\,[\log|i| + i\,(\theta+2k\pi)]} = e^{i\left[0+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right]} = e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi} \qquad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Από το Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό είναι γνωστό ότι

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots,\quad \cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots,\quad \sin x = \frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

Αν λοιπόν θέσουμε στις σχέσεις αυτές αντί για x το iθ, $-\pi<\theta\leq\pi$, τότε

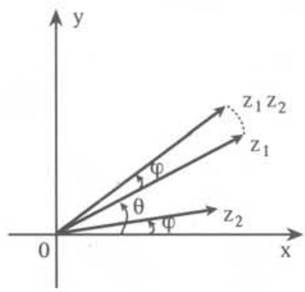
$$e^{i\theta} = 1+\frac{i\theta}{1!}-\frac{\theta^2}{2!}-i\frac{\theta^3}{3!}+\ldots = \left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\ldots\right)+i\left(\frac{\theta}{1!}-\frac{\theta^3}{3!}+\ldots\right)=\cos\theta+i\sin\theta$$

Άρα

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \quad \text{(τύπος Euler)}.$$

Συνεπώς αν ο μιγαδικός αριμός $z = |z|(\cos\theta+i\sin\theta)$, τότε σύμφωνα με τον τύπο του Euler αυτός γράφεται

$$z = |z|e^{i\theta}.$$



Σχ. 4

Η παράσταση αυτή του z λέγεται **εκθετική μορφή** του μιγαδικού αριθμού z. Από τη σχέση αυτή βρίσκουμε ότι αν $z_1 = |z_1|e^{i\theta}$ και $z_2 = e^{i\varphi}$, τότε το γινόμενο $z_1 z_2 = |z_1|e^{i(\theta+\varphi)}$ έχει γεωμετρική εικόνα που προκύπτει από εκείνη του z_1 με στροφή κατά γωνία φ (Σχ. 4).

Είναι σκόπιμο να προσθέσουμε στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών ένα νέο στοιχείο που λέγεται **άπειρο** και παριστάνεται με ∞. Το σύνολο τώρα $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ λέγεται **επεκτεταμένο σύνολο των μιγαδικών αριθμών** ή **επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο**. Ένα τέτοιο στοιχείο θα έχει μέτρο μεγαλύτερο από κάθε μιγαδικό αριθμό του $\mathbb{C}$. Βέβαια, το μιγαδικό άπειρο ∞ είναι διαφορετικό από το $-\infty$ και $+\infty$ της επεκταμένης μιγαδικής ευθείας.

Είναι, επίσης χρήσιμο να ορίσουμε μερικές χαρακτηριστικές καμπύλες στο μιγαδικό επίπεδο. Τις γνωστές, από την Αναλυτική Γεωμετρία, καμπύλες ευθείας $\alpha x+\beta y+\gamma = 0$, κύκλου $x^2+y^2+2\alpha x+2\beta y+\gamma = 0$, έλλειψης κ.λπ. μπορούμε να τις θεωρήσουμε ως καμπύλες του μιγαδικού επιπέδου αρκεί να θέσουμε στις προηγούμενες εξισώσεις, όπου $x = 1/2\,(z+\bar{z})$ και $y=1/2\,i(z-\bar{z})$. Έτσι (Σχ. 5α) ο κύκλος κέντρου $z_0 \in \mathbb{C}$

και ακτίνας $\alpha \geq 0$ στο $\mathbb{C}$ έχει προφανώς εξίσωση

$$|z - z_0| = \alpha .$$

Αλλά αφού $(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0) = \alpha^2$ ο προηγούμενος κύκλος έχει επίσης εξίσωση

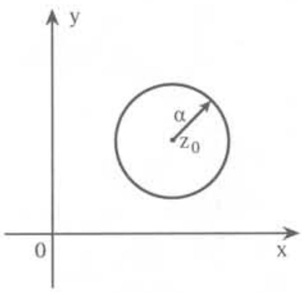
$$z\bar{z} - z_0\bar{z} - z_0\bar{z} + |z_0|^2 - \alpha^2 = 0 .$$

Ακόμη επειδή ο κύκλος είναι μια απεικόνιση $z = z(t)$ από το $[0, 2\pi)$ στο $\mathbb{C}$, η εξίσωση του κύκλου έχει επίσης τη μορφή

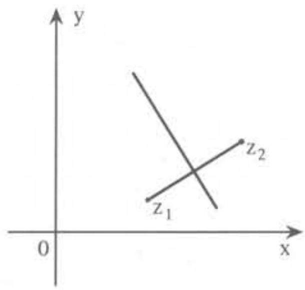
$$z = z_0 + \alpha(\cos t + i \sin t) = z_0 + \alpha e^{it} .$$

Η ευθεία (Σχ. 5β) που είναι μεσοκάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα $z_1 z_2$ του $\mathbb{C}$ είναι προφανώς η

$$|z - z_1| = |z - z_2| .$$



Σχ. 5α



Σχ. 5β

Η ευθεία που περνάει από τα σημεία z_1 και z_2 με παράμετρο t είναι η

$$z(t) = (1-t)\, z_1 + t z_2 , \quad t \in [0, 1) .$$

Οι κάθετες στους άξονες $x = \alpha$ και $y = \beta$ ευθείες στο C είναι αντίστοιχα

$$z + \bar{z} = 2\alpha \quad \text{και} \quad z - \bar{z} = 2i\beta .$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Να περιγραφούν οι καμπύλες

(α) $|z| = 1, \; |z-i| = 1,$

(b) $|z-1| = |z-i|$

και τα σύνολα των σημείων του μιγαδικού επιπέδου

(c) $\{z: |z| < 1\}, \; \{z: 0 < |z| < 1\}, \; \{z: \mathrm{Re}\, z| > 1\}.$

Λύση. α) Η $|z| = 1$ είναι κύκλος κέντρου 0 και ακτίνας 1. Η $|z-i| = 1$