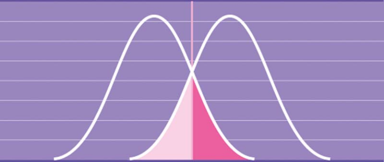
ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΓΡ. ΡΟΥΣΣΑ

Καθηγητή Πανεπιστημίου

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑ

ΤΟΜΟΣ ΙΙ

ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ



Επιμέλεια - Μεταγλώττιση:

Δρ. Γεώργιος Δ. Σταματέλος

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Β' ΕΚΔΟΣΗ

Πρόλογος 2ης έκδοσης

Το σύγγραμμα αυτό αποτελεί μεταγλώττιση του εγχειριδίου με τον ίδιο τίτλο που εκδόθηκε για πρώτη φορά στην ελληνική γλώσσα τον Φεβρουάριο του 1976. Το γλωσσικό ιδίωμα που χρησιμοποιήθηκε στην έκδοση εκείνη ήταν η καθιερωμένη γλώσσα γραφής επιστημονικών συγγραμμάτων, δηλαδή, η στρωτή καθαρεύουσα. Η εκπαιδευτική μεταρρύθμιση δημιούργησε πρόβλημα στην πλήρη κατανόηση από τους Έλληνες φοιτητές και φοιτήτριες αυτού του ιδιώματος. Η μεταγλώττιση αυτή στην καθομιλουμένη γλώσσα έγινε στο πλαίσιο αυτό και για να τεθεί στη διάθεση του Έλληνα φοιτητή και Ελληνίδας φοιτήτριας το σύγχρονο αυτό σύγγραμμα της διεθνούς βιβλιογραφίας.

Ο άλλοτε συνεργάτης μου στο πανεπιστήμιο Πατρών και τώρα καθηγητής του ΤΕΙ Θεσσαλονίκης, Δρ. Γεώργιος Σταματέλος είχε την έμπνευση να προτείνει τη μεταγλώττιση αυτή καθώς και την υπομονή και επιμονή να τη φέρει σε πέρας. Του εκφράζω τις θερμές μου ευχαριστίες.

Εκτός από τη διόρθωση τυπογραφικών λαθών που υπέπεσαν στην αντίληψή μας δεν έχουν γίνει αλλαγές στο κείμενο. Είναι σχεδόν βέβαιο, πάντως ότι υπάρχουν γλωσσικά και γραμματικά λάθη στο μεταγλωττισμένο κείμενο.

Ο αναγνώστης ας επιδείξει επιείκεια και ας εκτιμήσει την προσπάθεια που καταβλήθηκε. Παρόμοια προσπάθεια έγινε και για τη μεταγλώττιση του τόμου της Εκτιμητικής που θα εκτυπωθεί σύντομα και θα τεθεί στη διάθεση της σπουδάζουσας ελληνικής νεολαίας με ενδιαφέροντα στην πιθανοθεωρία και Στατιστική.

Πριν κλείσουμε το εισαγωγικό αυτό σημείωμα θα πρέπει να μνημονευθεί ότι τα τελευταία χρόνια έχει κυκλοφορήσει μια μη εξουσιοδοτημένη διασκευή των τόμων της Εκτιμητικής και του Ελέγχου Υποθέσεων. Το θεωρούμε χρήσιμο για το ελληνικό αναγνωστικό κοινό να είναι ενήμερο του γεγονότος αυτού.

Davis, California, Αύγουστος 1991

Γ.Γ.Ρ.

Πρόλογος 1ης έκδοσης

Το παρόν σύγγραμα αποτελεί τον δεύτερο τόμο ενός τρίτομου έργου στην Στατιστική Συμπερασματολογία. Ο πρώτος τόμος με τον τίτλο "Εκτιμητική" τυπώθηκε για πρώτη φορά το 1975, και ο τρίτος τόμος, Γραμμικά Πρότυπα, βρίσκεται υπό μετάφραση και διασκευή και θα εκτυπωθεί σύντομα.

Ο τόμος αυτός, όπως επίσης και εκείνος της Εκτιμητικής, αποτελούν διασκευασμένη μετάφραση του συγγράμματος "A First Course in Mathematical Statistics" υπό τον παρόντα συγγραφέα, που δημοσιεύθηκε από τον Εκδοτικό Οίκο Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading Massachusetts, 1973 μετά από σχετική άδεια του εκδότη. Η διασκευή αυτή περιλαμβάνει ανακατάταξη της σχετικής ύλης, εμπλουτισμό της με νέα εδάφια ή και κεφάλαια και λεπτομερή και αναλυτική έκθεση πολλών θεμάτων. Αυτό κρίθηκε αναγκαίο, για να υπάρξει έτσι και στην διάθεση του Έλληνα αναγνώστη ένα σχετικά ολοκληρωμένο και ασφαλώς σύγχρονο σύγγραμμα, στο αντικείμενο του ελέγχου στατιστικών υποθέσεων, χωρίς παρόλα αυτά να ξεφεύγει από τα όρια ενός διδακτικού συγγράμματος.

Εκτός των διαφόρων Πινάκων, Παραρτημάτων κ.λπ., το κύριο μέρος του συγγράμματος αυτού αποτελείται από εννέα κεφάλαια. Απ' αυτά, ένα, το Κεφάλαιο εννέα, αναφέρεται σε μη παραμετρικό έλεγχο υποθέσεων, και τα υπόλοιπα οκτώ σε παραμετρικό έλεγχο υποθέσεων.

Σε σχέση με τα κεφάλαια ελέγχου υποθέσεων σ' ένα παραμετρικό πρότυπο, μελετώνται διαδοχικά και διεξοδικά τα ακόλουθα αντικείμενα. Κατ' αρχήν, εισάγονται οι βασικές έννοιες ελέγχου υποθέσεων και στη συνέχεια διατυπώνεται και αποδεικνύεται το θεμελιώδες λήμμα των Neyman και Pearson. Αυτό, όπως είναι γνωστό, αποτελεί την σπονδυλική στήλη της κλασσικής θεωρίας ελέγχου υποθέσεων. Ακολουθούν πολυάριθμα διασαφητικά παραδείγματα και ασκήσεις και έτσι συμπληρώνεται το πρώτο κεφάλαιο.

Στο δεύτερο κεφάλαιο εξετάζεται το πρόβλημα ελέγχου υποθέσεων, σε αντίθεση με εκείνο του ελέγχου απλών υποθέσεων, το οποίο ήταν το αντικείμενο του πρώτου κεφαλαίου. Εισάγεται η έννοια της ομοιόμορφα ισχυροτάτης -από άποψης ισχύος- ελεγχοσυνάρτησης και στη συνέχεια αποδεικνύεται η ύπαρξη τέτοιων ελεγχοσυναρτήσεων για ορισμένες εκθετικές οικογένειες πυκνοτήτων πιθανότητας.

Σε πολλές περιπτώσεις πρακτικού ενδιαφέροντος είναι γνωστό ότι δεν υπάρχουν ομοιόμορφα ισχυρότατες ελεγχοσυναρτήσεις, μέσα στην κλάση όλων των ελεγχοσυναρτήσεων με καθορισμένο επίπεδο σημαντικότητας. Σε τέτοιες περιπτώσεις ακολουθείται η γνωστή μαθηματική μέθοδος του περιορισμού της κλάσης των συγκεκριμένων ελεγχοσυναρτήσεων. Στην προκειμένη περίπτωση περιοριζόμαστε στις αποκαλούμενες αμερόληπτες ελεγχοσυναρτήσεις και μεταξύ αυτών και κάτω από ορισμένες συνθήκες αποδεικνύεται η ύπαρξη ομοιόμορφα ισχυροτάτων ελεγχοσυναρτήσεων. Τούτο αποτελεί το αντικείμενο του τρίτου κεφαλαίου.

Στο επόμενο κεφάλαιο μελετώνται ενδιαφέροντα προβλήματα ελέγχου υποθέσεων, με βάση τον λόγο πιθανοφάνειας, ή κάποιας κατάλληλης συνάρτησής του. Η μέθοδος αυτή αποτελεί κατά κάποιον τρόπο μία γενίκευση της βασικής θεωρίας των Neyman και Pearson. Μεταξύ άλλων, η μέθοδος αυτή ελέγχου υποθέσεων εφαρμόζεται στις Κανονικές κατανομές, Πολυωνυμικές κατανομές και Πίνακες συνάφειας.

Στο Κεφάλαιο πέντε εισάγεται η μέθοδος ελέγχου υποθέσεων με τις αποκαλούμενες χ^2-ελεγχοσυναρτήσεις καλής προσαρμογής. Κατ' αρχήν, αποδεικνύονται ορισμένα βασικά αποτελέσματα και, στη συνέχεια, γίνεται εφαρμογή τους σε Πολυωνυμικές κατανομές και ιδιαίτερα σε Πίνακες συνάφειας. Ορισμένες δυσκολίες, οι οποίες μερικές φορές εμφανίζονται στην εφαρμογή της μεθόδου αυτής ελέγχου υποθέσεων, αναφέρονται και μελετώνται εν μέρει στο επόμενο κεφάλαιο, κυρίως με την μορφή παραδειγμάτων.

Εκτός των διαφόρων μεθόδων ελέγχου υποθέσεων, οι οποίες αναφέρθηκαν μέχρι τώρα, υπάρχει και άλλη σχετική θεωρία, η θεωρία αποφάσεων, που αναπτύχθηκε από τον A. Wald. Η θεωρία αυτή μελετάται συνοπτικά και εφαρμόζεται σε διάφορα συγκεκριμένα παραδείγματα στο κεφάλαιο επτά.

Όσα έχουν εκτεθεί μέχρι τώρα έχουν το κοινό χαρακτηριστικό, ότι το μέγεθος του δείγματος που χρησιμοποιείται για τον έλεγχο κάποιας υπόθεσης θεωρείται ότι έχει καθορισθεί προκαταβολικά. Μερικές φορές ο ερευνητής ή πειραματιστής έχει την ευχέρεια ν' αυξάνει το δειγματικό μέγεθος. Οι σχετικές μέθοδοι στατιστικής συμπερασματολογίας ονομάζονται τότε ακολουθιακές μέθοδοι και έχουν αναπτυχθεί κυρίως από τον A. Wald. Στοιχεία των μεθόδων αυτών, και σε σχέση με τον έλεγχο υποθέσεων, μελετώνται στο κεφάλαιο οκτώ και διασαφηνίζονται κατάλληλα με συγκεκριμένα παραδείγματα.

Τέλος, στο τελευταίο κεφάλαιο, Κεφάλαιο εννέα, εισάγονται και μελετώνται μερικά βασικά θέματα από τον κλάδο του μη παραμετρικού ελέγχου υποθέσεων, όπως αναφέρθηκε ήδη στην τρίτη παράγραφο του παρόντος προλόγου.

Στο σημείο αυτό πρέπει ν' αναφερθεί ότι σε όλα ανεξαιρέτως τα κεφάλαια παρουσιάζονται λεπτομερώς παραδείγματα πρακτικού ενδιαφέροντος, και στο τέλος κάθε κεφαλαίου, υπάρχει πλήθος ασκήσεων, οι οποίες συγκεντρώθηκαν κυρίως με βάση το κριτήριο των εφαρμογών.

Όπως συμβαίνει και με τον προηγούμενο τόμο, τον τόμο της Εκτιμητικής, έτσι και ο τόμος αυτός έχει γραφεί υπό το πνεύμα των πιο σύγχρονων εγχειριδίων Στατιστικής της διεθνούς βιβλιογραφίας. Μολονότι το σύγγραμμα αυτό απευθύνεται κυρίως σε φοιτητές των Μαθηματικών, πιστεύουμε, παρόλα αυτά, ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί εύκολα και ωφέλιμα από οποιονδήποτε μελετητή της επιστήμης της Στατιστικής ή από οποιονδήποτε άλλον που ενδιαφέρεται μόνον για τις εφαρμογές της. Οι αναγνώστες της κατηγορίας αυτής μπορούν απλά να παραλείψουν τις μη απαραίτητες γι' αυτούς μαθηματικές αποδείξεις.

Κατά την συγγραφή του παρόντος συγγράμματος είχα την συνδρομή των επιστημονικών μου συνεργατών κ. Κων. Δρόσου, Παν. Σύψα, Γ. Σταματέλου, Εμ. Μανατάκη, της Δ/δας Όλγας-Γιασεμή Σαραφίδου και του κ. Μιχ. Ακρίτα. Ο κ. Δρόσος επίσης φιλοτέχνησε και το εξώφυλλο και η δεσποινίδα Σαραφίδου με επιμέλεια διόρθωσε τα δοκίμια. Προς όλους αυτούς, όπως επίσης και την κ. Ειρήνη Α. Πέττα, εκφράζω τις θερμές μου ευχαριστίες. Όπως δε συνηθίζεται, τυχόν παραλήψεις και αστοχίες βαρύνουν μόνο τον συγγραφέα του συγγράμματος αυτού.

Πάτρα, Φεβρουάριος 1976

Γ.Γ.Ρ

Περιεχόμενα

Πίνακας συντμήσεων

τ.μ.	τυχαία μεταβλητή
π.π.	πυκνότητα πιθανότητας
τ.δ.	τυχαίο δείγμα, τυχαίο διάνυσμα
ε.σ.	επίπεδο σημαντικότητας
ΟΙ	ομοιόμορφα ισχυρότατη
σ.κ.	συνάρτηση κατανομής
ΚΟΘ	Κεντρικό Οριακό Θεώρημα
ΜΠΠ	Μονότονο πηλίκο πιθανοφάνειας
ΠΠ	Πηλίκο πιθανοφάνειας
σ.σ.	στατιστική συνάρτηση
ΑΟΙ	Αμερόληπτη ομοιόμορφα ισχυροτάτη
σ.α.	σταθερή απόκλιση
ΕΜΠ	εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας
ΕΛΠ	ελεγχοσυνάρτηση λόγου πιθανοφάνειας
π.τ.	πείραμα τύχης
ΑΕΛΠ	ακολουθιακός έλεγχος με τη βοήθεια του λόγου πιθανοφάνειας
ΝΜΑ	Νόμοι των Μεγάλων Αριθμών
σ.β.	σχεδόν βέβαια
α.σ.α.	ασυμπτωτική σχετική αποδοτικότητα

1

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ
ΑΠΛΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ

1.1. Εισαγωγή - Βασικοί ορισμοί

Έστω X μια τ.μ. που έχει π.π. $f(\bullet\,;\underset{\sim}{\theta})$ γνωστής συναρτησιακής μορφής, η οποία όμως εξαρτάται από μια παράμετρο $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_r)'$. Οι δυνατές τιμές αυτής της παραμέτρου αποτελούν τον παραμετρικό χώρο Ω, ο οποίος στις περισσότερες περιπτώσεις είναι ένα ανοικτό r-διάστατο υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^r$, $r \geq 1$. Στην πραγματικότητα η παράμετρος $\underset{\sim}{\theta}$ έχει μια ορισμένη σταθερή τιμή στον παραμετρικό χώρο Ω, την οποία αποκαλούμε **αληθινή** τιμή. Η τιμή όμως αυτή είναι άγνωστη στον ενδιαφερόμενο ερευνητή. Είναι πιθανόν παρ' όλο τούτο να μπορεί κανείς να καθορίσει ένα υποσύνολο ω του Ω, ως ένα υποσύνολο που περιέχει την αληθινή τιμή της παραμέτρου $\underset{\sim}{\theta}$. Αυτό μπορεί να συμβεί, π.χ. με βάση αποκτημένη πείρα του ερευνητή με προβλήματα που έχουν σχέση με το προς μελέτη θέμα. Ο καθορισμός ενός υποσυνόλου ω, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, ισοδυναμεί με την διατύπωση μιας στατιστικής υπόθεσης. Δηλαδή:

Ορισμός 1.1.

Ο καθορισμός ενός υποσυνόλου ω του παραμετρικού χώρου Ω, ως ενός υποσυνόλου που περιέχει την αληθινή τιμή $\underset{\sim}{\theta}$, ονομάζεται (**στατιστική**) υπόθεση του $\underset{\sim}{\theta}$ και συνήθως συμβολίζεται με H (με ή χωρίς δείκτη). Επίσης ο καθορισμός του συνόλου ω^c (συμπληρώματος του ω σε σχέση με το Ω) ως του υποσυνόλου που περιέχει την αληθή τιμή του $\underset{\sim}{\theta}$, αποτελεί μία (στατιστική) υπόθεση. Αυτή συνήθως συμβολίζεται με το A (με ή χωρίς δείκτη) και ονομάζεται **εναλλακτική** προς την υπόθεση H.

Συμβολικά γράφουμε:

H: $\underset{\sim}{\theta} \in \omega$ (η αληθινή τιμή του $\underset{\sim}{\theta}$ υπάρχει στο ω)

$$A: \underset{\sim}{\theta} \in \omega^c \quad (\text{η αληθινή τιμή του } \underset{\sim}{\theta} \text{ υπάρχει στο } \omega^c)$$

Η υπόθεση Η είναι επίσης γνωστή ως **μηδενική** υπόθεση.

Η υπόθεση Η λέγεται **απλή**, αν το ω περιέχει ένα μόνο σημείο και **σύνθετη**, αν περιέχει περισσότερα σημεία (ανάλογα και για την Α).

Στην κλασική θεωρία ελέγχου υποθέσεων, την οποία πρόκειται να μελετήσουμε εδώ, η μηδενική υπόθεση Η και η εναλακτική προς αυτήν υπόθεση Α δεν είναι συμμετρικές, δηλαδή δεν έχουν την ίδια βαρύτητα ή σοβαρότητα για τον ερευνητή. Αμέσως, λοιπόν, γεννάται το ερώτημα: Ποια υπόθεση πρέπει να χαρακτηριστεί ως μηδενική; Το επόμενο συγκεκριμένο παράδειγμα βοηθάει στην εύρεση της σωστής απάντησης.

Παράδειγμα 1.1. Υποθέτουμε ότι μία φαρμακοβιομηχανία παρασκευάζει ένα φάρμακο Α, που χρησιμοποιείται δια την θεραπεία μιας ορισμένης ασθένειας. Με βάση την μακροχρόνια χρήση του φαρμάκου αυτού, είναι γνωστό ότι το ποσοστό θεραπείας που οφείλεται στο φάρμακο Α είναι 60%. Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι συνεχής έρευνα για την βελτίωση της αποτελεσματικότητας του φαρμάκου Α, καταλήγει στην παρασκευή του φαρμάκου Β. Με βάση την περιορισμένη μόνο χρήση του φαρμάκου Β, υπάρχουν ενδείξεις ότι το φάρμακο Β είναι αποτελεσματικότερο από το Α. Ζητείται να διατυπωθούν η μηδενική και η εναλλακτική προς αυτή υπόθεση.

Υποθέτουμε ότι η αποτελεσματικότητα του φαρμάκου Α ή Β μετράται από τον (άγνωστο) μέσο θ μιας τ.μ. Χ που έχει Κανονική κατανομή με γνωστή διασπορά σ^2 η οποία (χωρίς να θίξουμε την γενικότητα) είναι δυνατόν να ληφθεί ίση με την μονάδα. Δηλαδή, $X \sim N(\theta, 1)$, $\theta \in \Omega = \mathbb{R}$. Το γεγονός ότι η αποτελεσματικότητα του φαρμάκου Α είναι 60% μπορεί να εκφρασθεί ως εξής: $\theta = 0{,}6$. Η υπόθεση ότι το φάρμακο Β είναι αποτελεσματικότερο του Α εκφράζεται ως εξής: $\theta > 0{,}6$, ενώ η υπόθεση ότι το Β δεν είναι αποτελεσματικότερο του Α εκφράζεται με την ανισότητα $\theta \leq 0{,}6$. Ποια όμως από τις δύο αυτές υποθέσεις είναι η μηδενική; Εάν $\theta \leq 0{,}6$ και παρόλο αυτά το φάρμακο Β τίθεται σε κυκλοφορία, τότε τα αποτελέσματα μπορεί να είναι οδυνηρά, όπως η εμφάνιση σοβαρών παρενεργειών (στον αναγνώστη υπενθυμίζουμε σχετικά τα πρόσφατα δεινά αποτελέσματα της ανεπαρκούς κλινικής δοκιμασίας του φαρμάκου θαλιδομίνη), η εξαιτίας αυτού δυσφήμιση του ονόματος της φαρμακοβιομηχανίας ή πιθανώς και η οικονομική της κατάρρευση. Αν όμως $\theta > 0{,}6$ και παρ' όλα αυτά το φάρμακο Β δεν τίθεται σε κυκλοφορία, τότε οι συνέπειες δεν είναι ίσως τόσο σοβαρές. Οι ενδιαφερόμενοι ασθενείς θα πρέπει να περιμένουν μεγαλύτερο χρονικό διάστημα για την χρήση του (πιθανώς αποτελεσματικότερου) φαρμάκου Β, ή η συγκεκριμένη φαρμακοβιομηχανία δε θα βελτιώσει άμεσα την οικονομική της κατάσταση από την ευθεία πώληση ενός αποτελεσματικότερου φαρμάκου. Είναι, λοιπόν, λογικό να χαρακτηρίσουμε ως μηδενική την υπόθεση εκείνη, η εσφαλμένη απόρριψη της οποίας εγκυμονεί τους πιο σοβαρούς κινδύνους και για αυτό η απόρριψη της δικαιολογείται μόνο με βάση νέα αποδεικτικά στοιχεία. Σύμφωνα με αυτά $H: \theta \le 0{,}6$ και συνεπώς $A: \theta > 0{,}6$.

Στο προηγούμενο παράδειγμα, μεταξύ δύο υποθέσεων, ως μηδενική υπόθεση θεωρήθηκε εκείνη, η εσφαλμένη απόρριψή της οποίας θα συνεπάγετο τις πιο σοβαρές και δυσάρεστες συνέπειες. Παρακάτω αναφέρουμε κάποιο παράδειγμα διαφορετικής κάπως φύσεως.

Παράδειγμα 1.2. Υποθέτουμε ότι παρακολουθούμε κάποιο άτομο που είναι φτωχά ντυμένο, αποφεύγει να χρησιμοποιεί τα συγκοινωνιακά μέσα και αντί γι' αυτό προτιμάει να περπατάει για να γλυτώσει το εισιτήριο κ.λπ. Τότε φυσιολογικά δημιουργούνται οι υποθέσεις: Το συγκεκριμένο άτομο είτε είναι φτωχό, είτε δεν είναι: Ποια όμως απ' αυτές τις υποθέσεις είναι η μηδενική υπόθεση; Είναι λογικό να δεχτεί κανείς ως μηδενική υπόθεση εκείνη που από την πρώτη ματιά φαίνεται ότι είναι αληθινή. Να απορρίψει όμως αυτή, αν προκύψει σαφής ένδειξη για το αντίθετο, όπως π.χ. ότι το συγκεκριμένο άτομο έχει μεγάλη ακίνητη περιουσία και ένα όχι τόσο ασήμαντο ποσό σε τραπεζικό λογαριασμό κ.λπ. Με αυτά τα στοιχεία έχουμε:

Η: Το συγκεκριμένο άτομο είναι φτωχό και συνεπώς

Α: Το συγκεκριμένο άτομο δεν είναι φτωχό.

Ο παραπάνω τρόπος σκέψης ισχύει και για γενικότερες περιπτώσεις.

Εφόσον αποφασιστεί ποια είναι η μηδενική υπόθεση σε συγκεκριμένο στατιστικό πρόβλημα τίθεται το ερώτημα πως μπορεί να ελεγχθεί η υπόθεση αυτή. Μέσα στα πλαίσια της κλασικής θεωρίας (ή θεωρίας Neyman - Pearson) ελέγχου υποθέσεων, ο παραπάνω έλεγχος γίνεται με βάση ένα δείγμα από τη συγκεκριμένη π.π. και με τη βοήθεια μίας ελεγχοσυνάρτησης. Συγκεκριμένα έστω $X_1, \ldots, X_n$ ένα τ.δ. μεγέθους n από τη π.π. $f(\cdot\,;\underset{\sim}{\theta})$ και έστω $x_1, \ldots, x_n$ οι παρατηρημένες τιμές των τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$, αντίστοιχα. Θέτουμε λόγω ευκολίας:

$$\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)', \quad \underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n)'.$$

Τότε:

Ορισμός 1.2.

Μία **τυχοποιημένη ελεγχοσυνάρτηση** φ για τον έλεγχο της υποθέσεως $H: \underset{\sim}{\theta}\in\omega$ έναντι της εναλλακτικής $A: \underset{\sim}{\theta}\in\omega^c$, είναι μία (μετρήσιμη) συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, όπου το $\varphi(\underset{\sim}{x})$ παριστάνει τη δεσμευμένη πιθανότητα με την οποία η υπόθεση Η απορρίπτεται, δοθέντος ότι $\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{x}$. (Δηλαδή, με δεδομένη την παρατηρημένη τιμή $\underset{\sim}{x}$ του τ.δ. $\underset{\sim}{X}$, ο ερευνητής περιστρέφει ένα νόμισμα για το οποίο το γεγονός {H} έχει πιθανότητα $\varphi(\underset{\sim}{x})$.

Τότε, εάν εμφανισθεί το γεγονός {H}, η υπόθεση απορρίπτεται, γίνεται όμως δεκτή αν το γεγονός {T} εμφανισθεί). Αν η φ μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές 0 και 1 τότε λέγεται **μη τυχοποιημένη** ελεγχοσυνάρτηση και γράφουμε

$$\varphi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1\,, & \underset{\sim}{x} \in B \\ 0\,, & \underset{\sim}{x} \in B^c \end{cases} \tag{1.1}$$

όπου B είναι ένα σύνολο (του Borel) στο χώρο $\mathbb{R}^n$

και ονομάζεται **χωρίο απορρίψεως** (της H) ή **κρίσιμο χωρίο**. Το σύνολο B^c ονομάζεται **χωρίο αποδοχής** (της H).

Στην πράξη, μία ελεγχοσυνάρτηση είναι συνήθως μη τυχοποιημένη, εάν όμως είναι τυχοποιημένη, συνήθως λαμβάνει την τιμή 1 σε ένα ανοικτό σύνολο, την τιμή 0 στο συμπλήρωμα της (τοπολογικής) θήκης του, και μία ή δύο τιμές στο διάστημα (0, 1) στο σύνολο του συγκεκριμένου συνόλου.

Είναι προφανές ότι κατά τον έλεγχο της υποθέσεως H μπορεί να γίνει ένα από τα δύο παρακάτω σφάλματα:

(i) Να απορριφθεί η H, ενώ είναι αληθινή. Αυτό ονομάζεται **σφάλμα τύπου** – I.

(ii) Να γίνει αποδεκτή η H ενώ είναι εσφαλμένη. Αυτό ονομάζεται **σφάλμα τύπου** –II. Τα σφάλματα αυτά μετρώνται με πιθανότητες, όπως παρακάτω, και αποτελούν τη βάση για αποδοχή ή απόρριψη μιας υπόθεσης. Κατά αρχήν υπενθυμίζουμε ότι για κάθε $\underset{\sim}{\theta} \in \Omega$ οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$, ορίζονται σε έναν πιθανοθεωρητικό χώρο $(\mathcal{S}, \alpha, P_{\underset{\sim}{\theta}})$ όπου ο δείκτης $\underset{\sim}{\theta}$ στο πιθανοθεωρητικό μέτρο δηλώνει ότι η κατανομή των διαφόρων τ.μ. εξαρτάται από το $\underset{\sim}{\theta}$. Παρόμοια σημασία έχει ο δείκτης αυτός στο σύμβολο της μαθηματικής ελπίδας $E_{\underset{\sim}{\theta}}$.

Ορισμός 1.3.

Έστω ότι φ είναι ελεγχοσυνάρτηση για τον έλεγχο της υπόθεσης H: $\underset{\sim}{\theta} \in \omega$ έναντι της εναλλακτικής A: $\underset{\sim}{\theta} \in \omega^c$, και έστω ότι $\beta_\varphi(\underset{\sim}{\theta})$ είναι η συνάρτηση που ορίζεται με τη σχέση $\beta_\varphi(\underset{\sim}{\theta}) = P_{\underset{\sim}{\theta}}$ (απόρριψης της H), $\underset{\sim}{\theta} \in \Omega$. Τότε, με $\underset{\sim}{\theta} \in \omega$, η ποσότητα $\beta_\varphi(\underset{\sim}{\theta})$ είναι η πιθανότητα απόρριψης της H, όταν αυτή είναι αληθινή, και ονομάζεται **πιθανότητα σφάλματος τύπου** –I. Όταν $\underset{\sim}{\theta} \in \omega^c$, η ποσότητα $1 - \beta_\varphi(\underset{\sim}{\theta}) = P_{\underset{\sim}{\theta}}$ (αποδοχής της H) είναι η πιθανότητα αποδοχής της H, όταν αυτή είναι λανθασμένη, και ονομάζεται **πιθανότητα σφάλματος τύπου** - II. H συνάρτηση β_φ με πεδίο ορισμού το ω^c ονομάζεται *ισχύς* της ελεγχοσυνάρτησης φ, ενώ η τιμή $\beta_\varphi(\underset{\sim}{\theta})$ ονομάζεται **ισχύς** της ελεγχοσυνάρτησης φ στο σημείο $\underset{\sim}{\theta}$.

Η ποσότητα $\sup[\beta_\varphi(\underset{\sim}{\theta})\,;\,\underset{\sim}{\theta}\in\omega]$ συνήθως συμβολίζεται με το α και ονομάζεται ε**πίπεδο σημαντικότητας** (ε.σ.) ή **μέγεθος** της ελεγχοσυνάρτησης φ.

Για τη γραφική διασάφηση μερικών από τις παραπάνω έννοιες σε ένα συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα, ο αναγνώστης παραπέμπεται στην Εικόνα 1.2. παρακάτω.

Από τον ορισμό των παραπάνω ποσοτήτων είναι προφανές ότι μία ιδανική ελεγχοσυνάρτηση φ θα ήταν εκείνη για την οποία $\alpha=0$ και η $\beta_\varphi(\underset{\sim}{\theta})$ γίνεται μέγιστη δυνατή για κάθε $\underset{\sim}{\theta}\in\omega^c$. Δυστυχώς όμως τέτοιες ελεγχοσυναρτήσεις δεν υπάρχουν για μη τετριμμένα στατιστικά προβλήματα. Μετά από αυτό και με βάση την σημασία που αποδόθηκε στην (μηδενική) υπόθεση Η, η προτεινόμενη πορεία αναζήτησης μιας ελεγχοσυνάρτησης φ είναι η ακόλουθη. Επιλέγουμε εκ των προτέρων μία (μικρή) τιμή του α (π.χ. α=0,005, 0,01, 0,05, 0,10) και κατόπιν επιζητούμε την κατασκευή μίας ελεγχοσυνάρτησης φ τέτοιας ώστε

$$\sup[\beta_\varphi(\underset{\sim}{\theta})\,;\,\underset{\sim}{\theta}\in\omega] = \alpha \tag{1.2}$$

και

$$\beta_\varphi(\underset{\sim}{\theta}) \ge \beta_{\varphi^*}(\underset{\sim}{\theta}),\quad \underset{\sim}{\theta}\in\omega^c, \tag{1.3}$$

για κάθε άλλη ελεγχοσυνάρτηση φ* για την οποία

$$\sup[\beta_{\varphi^*}(\underset{\sim}{\theta})\,;\,\underset{\sim}{\theta}\in\omega] \le \alpha. \tag{1.4}$$

Ορισμός 1.4.

Μία ελεγχοσυνάρτηση φ η οποία, ικανοποιεί τις σχέσεις (1.2) και (1.3) ονομάζεται **ομοιόμορφα** (όσον αφορά το $\underset{\sim}{\theta}\in\omega$) **ισχυρότατη** (0Ι) (μεταξύ όλων των ελεγχοσυναρτήσεων που ικανοποιούν τη σχέση (1.4)) ελεγχοσυνάρτηση με ε.σ. α.

Παρατήρηση 1.1. Αν Α είναι απλή, τότε για προφανείς λόγους, μία ΟΙ ελεγχοσυνάρτηση φ ονομάζεται απλά **ισχυρότατη**.

Αν μία ελεγχοσυνάρτηση φ είναι της μορφής (1.1) τότε:

$$\begin{aligned}\beta_\varphi(\underset{\sim}{\theta}) &= P_{\underset{\sim}{\theta}}\,(\text{απόρριψης της Η})\\ &= P_{\underset{\sim}{\theta}}\,(\underset{\sim}{X}\in B)\\ &= 1\cdot P_{\underset{\sim}{\theta}}(\underset{\sim}{X}\in B)+0\cdot P_{\underset{\sim}{\theta}}(\underset{\sim}{X}\in B^c)\\ &= E_{\underset{\sim}{\theta}}\varphi\,(\underset{\sim}{X})\,.\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\beta_\varphi(\underset{\sim}{\theta}) = E_{\underset{\sim}{\theta}}\varphi\,(\underset{\sim}{X})\,,\ \underset{\sim}{\theta}\in\Omega \tag{1.5}$$

Είναι δυνατό να δειχθεί (βλ. επίσης Άσκηση 1.2) ότι η σχέση (1.5) ισχύει για οποιαδήποτε (τυχοποιημένη ή μη) ελεγχοσυνάρτηση φ.

1.2 . Έλεγχος απλών στατιστικών υποθέσεων

Στο χωρίο αυτό επιζητούμε την κατασκευή μιας ισχυρότατης ελεγχοσυνάρτησης όταν και οι δύο υποθέσεις H και A είναι απλές. Αυτό μπορεί να συμβαίνει, είτε γιατί το Ω έχει πράγματι δύο μόνο σημεία, είτε γιατί μπορεί κατάλληλα να περιορισθεί σε ένα δισύνολο.

Ώστε επί του προκειμένου έχουμε το τ.δ. $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ από την π.π. $f(\bullet\,; \underset{\sim}{\theta})$, $\underset{\sim}{\theta} \in \Omega = \{\underset{\sim}{\theta}_0, \underset{\sim}{\theta}_1\}$ και ζητάμε την κατασκευή μιας ισχυρότατης ελεγχοσυνάρτησης μεγέθους $\alpha\ (0<\alpha<1)$ για τον έλεγχο της υπόθεσης H: $\underset{\sim}{\theta} \in \omega = \{\underset{\sim}{\theta}_0\}$ (δηλαδή H: $\underset{\sim}{\theta}=\underset{\sim}{\theta}_0$) έναντι της εναλλακτικής A: $\underset{\sim}{\theta} \in \omega^c = \{\underset{\sim}{\theta}_1\}$ (δηλαδή A: $\underset{\sim}{\theta} = \underset{\sim}{\theta}_1$). Για λόγους ευκολίας θέτουμε $f_0 = f(\bullet\,; \underset{\sim}{\theta}_0)$ και $f_1 = f(\bullet\,; \underset{\sim}{\theta}_1)$ και υπενθυμίζουμε ότι $\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n)'$, όπου $x_1, \ldots, x_n$ είναι οι παρατηρημένες τιμές των τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$, αντίστοιχα.

Επίσης θέτουμε $L(\underset{\sim}{x}\,; \underset{\sim}{\theta}) = \prod_{j=1}^{n} f(x_j\,; \underset{\sim}{\theta})$.

Θεώρημα 1.1.

(Θεμελιώδες λήμμα των Neyman – Pearson). *Για τον έλεγχο της υποθέσεως* H: $\underset{\sim}{\theta} = \underset{\sim}{\theta}_0$ *έναντι της εναλλακτικής* A: $\underset{\sim}{\theta} = \underset{\sim}{\theta}_1$ *σε επίπεδο σημαντικότητας* α (0<α<1) *και με βάση το* $\underset{\sim}{x}$ *όπως παραπάνω, θεωρούμε την ελεγχοσυνάρτηση* φ *που ορίζεται ως εξής:*

$$\varphi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1\,, & \text{αν } L(\underset{\sim}{x}\,; \underset{\sim}{\theta}_1) > C L(\underset{\sim}{x}\,; \underset{\sim}{\theta}_0) \\ \gamma\,, & \text{αν } L(\underset{\sim}{x}\,; \underset{\sim}{\theta}_1) = C L(\underset{\sim}{x}\,; \underset{\sim}{\theta}_0) \\ 0\,, & \text{αν } L(\underset{\sim}{x}\,; \underset{\sim}{\theta}_1) < C L(\underset{\sim}{x}\,; \underset{\sim}{\theta}_0) \end{cases} \tag{1.6}$$

όπου οι σταθερές γ (0≤γ≤1) *και* C (>0) *καθορίζονται με τη σχέση*

$$E_{\underset{\sim}{\theta}_0}\, \varphi(\underset{\sim}{X}) = \alpha. \tag{1.7}$$

Τότε η ελεγχοσυνάρτηση αυτή είναι ισχυρότατη ανάμεσα σε όλες τις ελεγχοσυναρτήσεις, των οποίων το επίπεδο σημαντικότητας είναι ≤α *(Για προφανείς λόγους η σταθερά* C *καλείται* **κρίσιμη** *σταθερά ή* **σημείο αποκοπής**).

Η απόδειξη του θεωρήματος γίνεται περισσότερο αντιληπτή με τους διαχωρισμούς της σε τμήματα. Αυτό επιτυγχάνεται με τα ακόλουθα δύο λήμματα.

Λήμμα 1.1.

Για τον έλεγχο της υποθέσεως Η έναντι της εναλλακτικής Α του θεωρήματος 1.1, είναι πάντοτε δυνατόν να ορισθούν σταθερές $\gamma \in [0, 1]$ και $C>0$ τέτοιες ώστε η ελεγχοσυνάρτηση φ που ορίζεται από τη σχέση (1.6) να είναι μεγέθους α.

Απόδειξη: (i) Συνεχής περίπτωση: Σε ό,τι ακολουθεί θα χρειαστεί να διαιρέσουμε με την ποσότητα $L(\underset{\sim}{x} ; \underset{\sim}{\theta}_0)$. Για τον σκοπό αυτό ορίζουμε το σύνολο

$$T = \{\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n ; L(\underset{\sim}{x} ; \underset{\sim}{\theta}_0) > 0\}$$

και έστω $A^c = \underset{\sim}{X}^{-1}(T^c)$ έτσι ώστε

$$P_{\underset{\sim}{\theta}_0}(A^c) = P_{\underset{\sim}{\theta}_0}(\underset{\sim}{X} \in T^c) = \int_{T^c} L(\underset{\sim}{x} ; \underset{\sim}{\theta}_0)d\underset{\sim}{x} = 0.$$

(Προφανώς $d\underset{\sim}{x}$ είναι συνοπτικός συμβολισμός του $dx_1, \ldots, dx_n$). Συνεπώς, επί του συνόλου A^c, οποιαδήποτε τ.μ. είναι δυνατόν να τροποποιηθεί κατά τον υπολογισμό πιθανοτήτων όσον αφορά το πιθανοθεωρητικό μέτρο $P_{\underset{\sim}{\theta}_0}$.

Από την (1.6) έχουμε

$$\begin{aligned} P_{\underset{\sim}{\theta}_0}\varphi(\underset{\sim}{X}) &= P_{\underset{\sim}{\theta}_0}[L(\underset{\sim}{X} ; \underset{\sim}{\theta}_1) > CL(\underset{\sim}{X} ; \underset{\sim}{\theta}_0)] + \gamma\, P_{\underset{\sim}{\theta}_0}[L(\underset{\sim}{X} ; \underset{\sim}{\theta}_1) = CL(\underset{\sim}{X} ; \underset{\sim}{\theta}_0)] \\ &= P_{\underset{\sim}{\theta}_0}\{[L(\underset{\sim}{X} ; \underset{\sim}{\theta}_1) > CL(\underset{\sim}{X} ; \underset{\sim}{\theta}_0)] \cap A\} + \gamma P_{\underset{\sim}{\theta}_0}\{[L(\underset{\sim}{X} ; \underset{\sim}{\theta}_1) = \\ &= CL(\underset{\sim}{X} ; \underset{\sim}{\theta}_0)] \cap A\} \\ &= P_{\underset{\sim}{\theta}_0}[(Y > C) \cap A] + \gamma\, P_{\underset{\sim}{\theta}_0}[(Y = C) \cap A] \\ &= P_{\underset{\sim}{\theta}_0}(Y > C) + \gamma\, P_{\underset{\sim}{\theta}_0}(Y = C), \end{aligned}$$

όπου

$$Y = \begin{cases} \dfrac{L(\underset{\sim}{X} ; \underset{\sim}{\theta}_1)}{L(\underset{\sim}{X} ; \underset{\sim}{\theta}_0)} & \text{επί του } A \\ 0 & \text{επί του } A^c \end{cases}.$$

Στη συνέχεια έστω G η σ.κ. της τ.μ. Y (υπό το πιθανοθεωρητικό μέτρο $P_{\underset{\sim}{\theta}_0}$), δηλαδή, $G(y) = P_{\underset{\sim}{\theta}_0}(Y \leq y)$, και έστω h η συνάρτηση που ορίζεται ως εξής:

$$h(y) = 1 - G(y) \left(= P_{\underset{\sim}{\theta}_0}(Y > y)\right), \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Τότε από τις γνωστές ιδιότητες μιας σ.κ. (δηλαδή, το ότι είναι μη φθίνουσα, συνεχής από τα δεξιά, $G(\infty) = 1$ και $G(-\infty) = 0$, και ιδιαίτερα, στη συγκεκριμένη περίπτωση $G(0) = 0$, η συνάρτηση h κληρονομεί τις ακόλουθες ιδιότητες: Είναι μη αύξουσα, συνεχής από τα δεξιά, $h(\infty)=0$ και $h(0)=1$.

Από αυτά προκύπτει ότι για οποιοδήποτε $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P_{\underset{\sim}{\theta}_0}(Y = y) &= G(y)–G(y–) \\ &= [1–h(y)]–[1–h(y–)] = h(y–)–h(y), \end{aligned}$$

όπου $h(y–)$ παριστάνει όριο από τ' αριστερά. (Οι ιδιότητες αυτές περιέχονται γραφικά στην Εικόνα 1.1 παρακάτω). Από την προηγούμενη έκφραση για την $E_{\underset{\sim}{\theta}_0}\varphi(\underset{\sim}{X})$, του ορισμού της ποσότητας $h(C)$ και την έκφραση για την πιθανότητα $P_{\underset{\sim}{\theta}_0}(Y=y)$, έχουμε

$$\begin{aligned} E_{\underset{\sim}{\theta}_0}\varphi(\gamma) &= h(C)+\gamma[h(C–)–h(C)] \\ &= (1–\gamma)h(C)+\gamma h(C–). \end{aligned}$$

Επιθυμούμε τον προσδιορισμό των σταθερών $\gamma\in[0, 1]$ και $C>0$ με τρόπο ώστε η παραπάνω έκφραση να ισούται με α, δηλαδή:

$$h(C)+\gamma[h(C–)–h(C)] = (1–\gamma)h(C)+\gamma h(C–) = \alpha.$$

Απ' αυτήν την έκφραση και από το γεγονός ότι $\gamma\in[0, 1]$ έχουμε αφ' ενός ότι

$$h(C) \le \alpha \le h(C–),$$

και αφ' ετέρου

$$\gamma = \frac{\alpha–h(C)}{h(C–)–h(C)}$$

(όπου η έκφραση $\frac{0}{0}$ πρέπει να θεωρηθεί ως 0). Με δεδομένο ότι η συνάρτηση h είναι γνωστή, μία σταθερή $C=C_0$, για την οποία $h(C_0)\le\alpha\le h(C_0–)$, είναι δυνατόν να προσδιορισθεί με τη βοήθεια κατάλληλων πινάκων και γραφικά με την χάραξη της ευθείας γραμμής που είναι παράλληλη προς τον άξονα των y από το σημείο $(0, \alpha)$. (Όσον αφορά στο μονοσήμαντο του ορισμού της σταθερής C_0 και κατά συνέπεια και της αντίστοιχης ελεγχοσυνάρτησης φ, βλέπε Παρατήρηση 1.2 (ii) παρακάτω). Στο σημείο αυτό διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: Το σημείο C_0 είναι σημείο συνέχειας της h, δηλαδή $h(C_0) = h(C_0–)$. Τότε από τις παραπάνω εκφράσεις συνάγουμε $\alpha=h(C_0)$, $\gamma=0$ και $E_{\underset{\sim}{\theta}_0}\varphi(\underset{\sim}{X}) = \alpha$. Δηλαδή η αντίστοιχη ελεγχοσυνάρτηση φ έχει μέγεθος α.

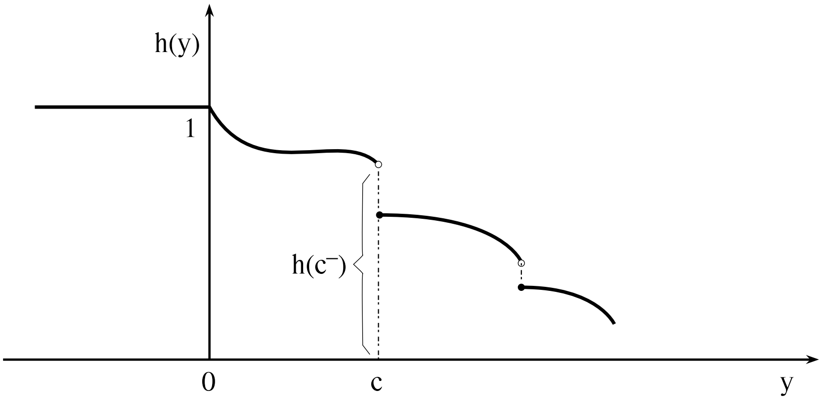
Υποθέτουμε τώρα, ότι το C_0 είναι σημείο ασυνέχειας της h.
Τότε

$$\gamma = \frac{\alpha–h(C_0)}{h(C_0–)–h(C_0)} \qquad (0\le\gamma\le 1)$$

και

$$E_{\underset{\sim}{\theta}_0}\varphi(\underset{\sim}{X}) = h(C_0) + \frac{\alpha–h(C_0)}{h(C_0–)–h(C_0)}[h(C_0–)–h(C_0)] = \alpha.$$

Δηλαδή, πάλι η αντίστοιχη ελεγχοσυνάρτηση φ έχει μέγεθος α. Η απόδειξη του λήμματος ολοκληρώθηκε.



Εικ. 1.1

(ii) Διακριτική περίπτωση: Όπως παραπάνω, εκτός του ότι τα ολοκληρώματα αντικαθιστούνται από αθροίσματα.

Λήμμα 1.2.

Έστω ότι φ είναι μία ελεγχοσυνάρτηση, όπως αυτή κατασκευάστηκε στην απόδειξη του Λήμματος 1.1. Τότε αυτή είναι η πιο ισχυρή, όπως ισχυριστήκαμε στο Θεώρημα 1.1.

Απόδειξη: (i) Συνεχής περίπτωση: Έστω ότι φ^* είναι μία οποιαδήποτε ελεγχοσυνάρτηση μεγέθους $\leq\alpha$ και έστω ότι υπάρχουν τα (μετρήσιμα) σύνολα B και Γ που ορίζονται όπως παρακάτω

$$B = \{\underset{\sim}{x}\in \mathbb{R}^n \,;\, \varphi(\underset{\sim}{x})-\varphi^*(\underset{\sim}{x}) > 0\} = (\varphi > \varphi^*),$$
$$\Gamma = \{\underset{\sim}{x}\in \mathbb{R}^n \,;\, \varphi(\underset{\sim}{x})-\varphi^*(\underset{\sim}{x}) < 0\} = (\varphi < \varphi^*).$$

Τότε, προφανώς, $B\cap\Gamma = \varnothing$ και

$$\left.\begin{aligned} B &= (\varphi > \varphi^*) \subseteq (\varphi=1) \cup (\varphi=\gamma) = (f_1 \geq Cf_0) \\ \Gamma &= (\varphi > \varphi^*) \subseteq (\varphi=0) \cup (\varphi=\gamma) = (f_1 \leq Cf_0) \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

Συνεπώς

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\varphi(\underset{\sim}{x})-\varphi^*(\underset{\sim}{x})]\,[f_1(\underset{\sim}{x})-Cf_0(\underset{\sim}{x})]\, d\underset{\sim}{x}$$

$$= \int_{B} [\varphi(\underset{\sim}{x})-\varphi^*(\underset{\sim}{x})]\,[f_1(\underset{\sim}{x})-Cf_0(\underset{\sim}{x})]\, d\underset{\sim}{x}$$

$$+\int_{\Gamma} [\varphi(\underset{\sim}{x})-\varphi^*(\underset{\sim}{x})]\ [f_1(\underset{\sim}{x})-Cf_0(\underset{\sim}{x})]\ d\underset{\sim}{x}$$

και καθένα από τα δύο παραπάνω ολοκληρώματα είναι ≥ 0 με βάση τις σχέσεις (1.8). Ώστε, λοιπόν,

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\varphi(\underset{\sim}{x})-\varphi^*(\underset{\sim}{x})]\ [f_1(\underset{\sim}{x})-Cf_0(\underset{\sim}{x})]\ d\underset{\sim}{x} \geq 0$$

ή, ισοδύναμα,

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\varphi(\underset{\sim}{x})-\varphi^*(\underset{\sim}{x})]\ f_1(\underset{\sim}{x})\ d\underset{\sim}{x} \geq C \int_{\mathbb{R}^n} [\varphi(\underset{\sim}{x})-\varphi^*(\underset{\sim}{x})]\ f_0(\underset{\sim}{x})\ d\underset{\sim}{x}\ . \tag{1.9}$$

Αλλά

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} [\varphi(\underset{\sim}{x})-\varphi^*(\underset{\sim}{x})]\ f_0(\underset{\sim}{x})\ d\underset{\sim}{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\underset{\sim}{x})f_0(\underset{\sim}{x})\ d\underset{\sim}{x} - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^*(\underset{\sim}{x})f_0(\underset{\sim}{x})\ d\underset{\sim}{x} \\ &= E_{\underset{\sim}{\theta}_0}\ \varphi(\underset{\sim}{X})-E_{\underset{\sim}{\theta}_0}\ \varphi^*(\underset{\sim}{X}) \\ &= \alpha-E_{\underset{\sim}{\theta}_0}\ \varphi^*(\underset{\sim}{X})\end{aligned}$$

και η τελευταία αυτή διαφορά είναι ≥ 0, όπως προκύπτει από τον ορισμό της ελεγχοσυνάρτησης φ^*. Δηλαδή,

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\varphi(\underset{\sim}{x})-\varphi^*(\underset{\sim}{x})]\ f_0(\underset{\sim}{x})\ d\underset{\sim}{x} \geq 0$$

και συνεπώς η σχέση (1.9) δίνει

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\varphi(\underset{\sim}{x})-\varphi^*(\underset{\sim}{x})]\ f_1(\underset{\sim}{x})\ d\underset{\sim}{x} \geq 0\ . \tag{1.10}$$

Αλλά

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} [\varphi(\underset{\sim}{x})-\varphi^*(\underset{\sim}{x})]\ f_1(\underset{\sim}{x})\ d\underset{\sim}{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\underset{\sim}{x})f_1(\underset{\sim}{x})\ d\underset{\sim}{x} - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^*(\underset{\sim}{x})f_1(\underset{\sim}{x})\ d\underset{\sim}{x} \\ &= E_{\underset{\sim}{\theta}_1}\ \varphi(\underset{\sim}{X})-E_{\underset{\sim}{\theta}_1}\ \varphi^*(\underset{\sim}{X}) \\ &= \beta_{\varphi}(\underset{\sim}{\theta}_1)-\beta_{\varphi^*}(\underset{\sim}{\theta}_1).\end{aligned}$$

Από αυτό και την ανισότητα (1.10) έχουμε τότε $\beta_{\varphi}(\underset{\sim}{\theta}_1) \geq \beta_{\varphi^*}(\underset{\sim}{\theta}_1)$, όπως επρόκειτο να δειχθεί.

(ii) Διακριτική περίπτωση: Όπως παραπάνω, εκτός του ότι τα ολοκληρώματα αντικαθίστανται από αθροίσματα.

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.1. Αυτή είναι άμεση από τα Λήμματα 1.1 και 1.2.

Το παραπάνω θεώρημα δεν αναφέρεται στο μέγεθος της ισχύος της ισχυροτάτης ελεγχοσυνάρτησης φ. Είναι όμως άμεση συνέπεια αυτού του θεωρήματος ότι αυτή δεν υπολείπεται του ε.σ. α. Δηλαδή:

Πόρισμα 1.1.

Για την ελεγχοσυνάρτηση φ του θεωρήματος ισχύει $\beta_\varphi(\underset{\sim}{\theta}_1) \geq \alpha$.

Απόδειξη: Έστω ότι $\varphi^*(\underset{\sim}{x})=\alpha$, $\underset{\sim}{x}\in \mathbb{R}^n$. Τότε η φ^* έχει μέγεθος α, και επειδή η φ είναι ισχυρότατη, $\alpha = \beta_{\varphi^*}(\underset{\sim}{\theta}_1) \leq \beta_\varphi(\underset{\sim}{\theta}_1)$.

Παρατήρηση 1.2. (i) Από την απόδειξη του Λήμματος 1.1 προκύπτει ότι η μόνη περίπτωση, κατά την οποία $0<\gamma<1$ είναι εκείνη, όπου η παράλληλη από το σημείο $(0, \alpha)$ προς τον άξονα των y συναντά το "άνοιγμα" ενός πηδήματος της καμπύλης που παριστάνει την $h(y)$, σε ένα σημείο C_0. Σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις $\gamma=0$ ή $\gamma=1$ (παρόμοια βλ. Άσκηση 1.3).

(ii) Επίσης από την απόδειξη του παραπάνω λήμματος εγείρεται το ερώτημα αν η ελεγχοσυνάρτηση φ, όπως κατασκευάστηκε, είναι μοναδική. Σχετικά με αυτό η μόνη περίπτωση που χρειάζεται διασάφηση είναι εκείνη στην οποία η παράλληλη από το σημείο $(0, \alpha)$ προς τον άξονα y συναντά την καμπύλη που παριστάνει την $h(y)$ κατά ένα ευθύγραμμο τμήμα C_1C_2. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε το C_0 είτε ίσο με το C_1 είτε με C_2 και την αντίστοιχη τιμή του γ την καθορίζουμε από την σχέση:

$$\gamma = \frac{\alpha - h(C_0)}{h(C_0-)-h(C_0)} \ .$$

Αλλά και οποιαδήποτε άλλη τιμή $C_1<C_0<C_2$ είναι δυνατόν να ληφθεί (οπότε το αντίστοιχο $\gamma=0$), αφού:

$$\begin{aligned} P_{\underset{\sim}{\theta}_0}(C_1<y<C_2) &= P_{\underset{\sim}{\theta}_0}(Y>C_1)-P_{\underset{\sim}{\theta}_0}(Y>C_2)-P_{\underset{\sim}{\theta}_0}(Y=C_2) \\ &= h(C_1)-h(C_2)-h(C_2-)+h(C_2) \\ &= h(C_1)-h(C_2-) \\ &= \alpha-\alpha \\ &= 0. \end{aligned}$$

Άρα ο παραπάνω καθορισμός της ελεγχοσυνάρτησης φ είναι ουσιαστικά μοναδικός. (βλ. επίσης Άσκηση 1.4).

(iii) Κατά το Θεώρημα 1.1 η ελεγχοσυνάρτηση φ που ορίζεται από τις σχέσεις (1.6) και (1.7) είναι πιο ισχυρή ανάμεσα σ' όλες τις ελεγχοσυναρτήσεις, των οποίων το επίπεδο σημαντικότητας είναι $\leq \alpha$. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλ., αν η ελεγχοσυνάρτηση φ είναι ισχυρότατη και έχει επίπεδο σημαντικότητας α, τότε αυτή αναγκαστικά θα έχει τη μορφή (1.6) και οι σταθερές γ και C καθορίζονται από την (1.7) εκτός αν υπάρχει μία ελεγχοσυνάρτηση με μέγεθος $<\alpha$ η οποία έχει ισχύ ίση με την μονάδα.

1.3. Μερικά διασαφητικά παραδείγματα

Σε όλα τα παραδείγματα που ακολουθούν, το πρόβλημα εντοπίζεται στον προσδιορισμό μιας ισχυρότατης ελεγχοσυνάρτησης για τον έλεγχο της απλής υπόθεσης H: $\theta=\theta_0$ έναντι της απλής εναλλακτικής A : $\theta=\theta_1$ σε ε.σ. α $(0<\alpha<1)$. Ο προσδιορισμός αυτός θα γίνει με την εφαρμογή του βασικού λήμματος των Neyman-Pearson. Έτσι η ποσότητα που θα χρησιμοποιηθεί είναι:

$$\lambda = \lambda(\underset{\sim}{x} ; \theta_0, \theta_1) = \frac{L(\underset{\sim}{x} ; \theta_1)}{L(\underset{\sim}{x} ; \theta_0)}$$

ή, όπως εξυπηρετεί περισσότερο, η ποσότητα $\log\lambda$, αφού η συνάρτηση $y = \log x$ $(x > 0)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Παράδειγμα 1.3. Οι ανεξάρτητες τ.μ. $X_1, \ldots, X_n \sim B(1, \theta)$, $\theta \in \Omega=(0, 1)$ και, χωρίς να επηρεαστεί η γενικότητα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\theta_0 < \theta_1$.

Θέτοντας $t = \sum_{j=1}^{n} x_j$, έχουμε

$$L(\underset{\sim}{x} ; \theta) = \prod_{j=1}^{n} f(x_j ; \theta) = \prod_{j=1}^{n} \theta^{x_j} (1-\theta)^{1-x_j} = \theta^t(1-\theta)^{n-t},$$

έτσι ώστε

$$\begin{aligned} \log\lambda &= \log \frac{\theta_1^t (1-\theta_1)^{n-t}}{\theta_0^t (1-\theta_0)^{n-t}} \\ &= t \log \frac{\theta_1}{\theta_0} + (n-t) \log \frac{1-\theta_1}{1-\theta_0} \\ &= t \log \frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)} + n \log \frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}. \end{aligned}$$

Απ' αυτά και από την ανισότητα $\theta_0<\theta_1$ διαπιστώνουμε ότι το $\lambda < C$ είναι ισοδύναμο με το $t > C_0$, όπου

$$C_0 = \frac{\left(\log C - n\log\dfrac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)}{\log\dfrac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}} .$$

Άρα η ζητούμενη ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση είναι η ακόλουθη:

$$\varphi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1\,, & t > C_0 \\ \gamma\,, & t = C_0 \\ 0\,, & t < C_0 \end{cases} \,, \qquad \left(t = \sum_{j=1}^{n} x_j \right) \tag{1.11}$$

όπου οι σταθερές C και γ ορίζονται από την σχέση:

$$E_{\underset{\sim}{\theta}_0}\, \varphi(\underset{\sim}{X}) = P_{\underset{\sim}{\theta}_0}(T > C_0) + \gamma P_{\underset{\sim}{\theta}_0}(T = C_0) = \alpha \tag{1.12}$$

με βάση το γεγονός ότι $T = \sum_{j=1}^{n} X_j \sim B(n, \theta_i)$, i=0, 1.

Παρατήρηση 1.3. Για $\theta_0 > \theta_1$ η επιθυμητή ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση δίνεται από την σχέση (1.11) με αντεστραμένες ανισότητες.

Αριθμητική εφαρμογή. Έστω n=25, θ_0=0,50, θ_1=0,75 και α=0,05. Τότε $T \sim B(25, \theta_i)$, i=0, 1, και η σχέση

$$P_{0,50}\ (T > C_0) + \gamma P_{0,50}\ (T = C_0) = 0{,}05$$

είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$$P_{0,50}\ (T \le C_0) - \gamma P_{0,50}\ (T = C_0) = 0{,}95.$$

Από τους Διωνυμικούς πίνακες βρίσκουμε ότι:

$$P_{0,50}\ (T \le 17) = 0{,}9784 \quad \text{και} \quad P_{0,50}\ (T = 17) = 0{,}0323.$$

Επομένως το γ προσδιορίζεται από τη σχέση 0,9784–0,0323γ = 0,95 από την οποία βρίσκουμε γ = 0,8792. Ώστε για τα παραπάνω δεδομένα η ζητούμενη ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση δίνεται από τη σχέση (1.11) με C_0=17 και γ=0,8792. Τέλος, η ισχύς της ελεγχοσυνάρτησης αυτής είναι:

$$\beta(0,75) = P_{0,75}\ (T>17) + 0{,}8792\ P_{0,75}\ (T=17) = 0{,}8356.$$

Παρατήρηση 1.4. Από την αριθμητική αυτή εφαρμογή προκύπτει σαφώς η ανάγκη χρησιμοποίησης τυχοποιημένων ελεγχοσυναρτήσεων, δηλαδή για το συγκεκριμένο ζήτημα, η σημασία της σταθεράς γ, όπως επίσης και η ανάγκη εισαγωγής της ποσότητας γ. Συγκεκριμένα η χρησιμοποίηση της σταθεράς γ είναι απαραίτητη προκειμένου να πετύχουμε ε.σ. ίσο με το δοσμένο α=0,05. Παρατηρούμε ότι για C_0=17, $P_{0,50}\ (T>17)=0{,}0216<0{,}05$ ενώ για C_0=16, $P_{0,50}\ (T>16) = 0{,}0538 > 0{,}05$. Αυτό σημαίνει ότι η υπόθεση Η απορρίπτεται, όταν $T > 17$, ενώ για $T = 17$, περιστρέφουμε ένα νόμισμα, για το οποίο η εμφάνιση του γεγονότος $\{H\}$ έχει πιθανότητα γ, τέτοια ώστε:

$$P_{0,50}\ (T>17)+\gamma P_{0,50}\ (T=17) = 0{,}05$$

Η υπόθεση Η γίνεται αποδεκτή (με πιθανότητα γ), όταν $\{H\}$ εμφανιστεί και απορρίπτεται (με πιθανότητα 1–γ), όταν το γεγονός $\{T\}$ εμφανιστεί.

Παρόμοιες παρατηρήσεις ισχύουν για όλες τις περιπτώσεις στις οποίες η τ.μ. $\dfrac{L(\underset{\sim}{X}\ ;\theta_1)}{L(\underset{\sim}{X}\ ;\theta_0)}$ είναι του διακριτικού τύπου.

Παράδειγμα 1.4. Έστω ότι οι ανεξάρτητες τ.μ. $X_1, \ldots, X_n \sim P(\theta)$, $\theta\in\Omega$= = $(0, \infty)$ και υποθέτουμε, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, ότι $\theta_0 < \theta_1$.

Όπως παραπάνω, έστω $t = \sum_{j=1}^{n} x_j$, οπότε

$$L(\underset{\sim}{x}\ ;\theta) = \prod_{j=1}^{n} f(x_j\ ;\theta) = \prod_{j=1}^{n} e^{-\theta}\frac{\theta^{x_j}}{x_j!} = e^{-n\theta}\frac{\theta^t}{\prod_{j=1}^{n} x_j!} .$$

Άρα

$$\log\lambda = \log\frac{e^{-n\theta_1}\theta_1^t}{e^{-n\theta_0}\theta_0^t} = t\log\frac{\theta_1}{\theta_0} - n(\theta_1-\theta_0),$$

και $\lambda < C$ είναι ισοδύναμο του $t > C_0$ (για το γεγονός ότι $\theta_0<\theta_1$) όπου

$$C_0 = \frac{[\log C+n(\theta_1-\theta_0)]}{\log\dfrac{\theta_1}{\theta_0}} .$$

Τότε η ζητούμενη ελεγχοσυνάρτηση είναι

$$\varphi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1\ , & t > C_0 \\ \gamma\ , & t = C_0 \\ 0\ , & t < C_0 \end{cases} \quad \left(t = \sum_{j=1}^{n} x_j \right) \tag{1.13}$$

όπου οι σταθερές C_0 και γ ορίζονται από την σχέση

$$E_{\theta_0}\varphi(\underset{\sim}{x}) = P_{\theta_0}(T > C_0)+\gamma P_{\theta_0}(T = C_0) = \alpha \qquad (1.14)$$

με βάση το γεγονός ότι $T=\sum_{j=1}^{n} x_j \sim P(n\theta_i)$, $i=0,1$.

Παρατήρηση 1.5. Για $\theta_0 > \theta_1$, η ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση δίνεται από την σχέση (1.13) με αντεστραμμένες ανισότητες.

Αριθμητική εφαρμογή. Έστω $n=20$, $\theta_0=0{,}3$, $\theta_1=0{,}4$ και $\alpha=0{,}05$. Τότε $T\sim P(20\theta_i)$, $i=0,1$ και η σχέση

$$P_{0,3}(T > C_0)+\gamma P_{0,3}(T = C_0) = 0{,}05$$

είναι ισοδύναμη με την σχέση

$$P_{0,3}(T \le C_0)-\gamma P_{0,3}(T = C_0) = 0{,}95.$$

Από τους πίνακες του Poisson βρίσκουμε ότι $P_{0,3}(T \le 10) = 0{,}9574$ και $P_{0,3}(T=10) = 0{,}0413$. Συνεπώς το γ, που ορίζεται από τη σχέση $0{,}9574-0{,}0413\gamma = 0{,}95$, είναι $\gamma=0{,}1791$. Άρα η ζητούμενη ελεγχοσυνάρτηση δίνεται από την σχέση (1.13) για $C_0=10$ και $\gamma=0{,}1791$. Η ισχύς της είναι:

$$\beta(0,4) = P_{0,4}(T > 10)+0{,}1791\, P_{0,4}(T = 10) = 0{,}2019.$$

Παράδειγμα 1.5. Εδώ οι ανεξάρτητες τ.μ. $X_1, \ldots, X_n\sim N(\theta, 1)$, $\theta\in\Omega=\mathbb{R}$, με τέτοιο τρόπο ώστε

$$L(\underset{\sim}{x};\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\theta)^2\right].$$

Άρα

$$\begin{aligned}\log\lambda &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left[(x_j-\theta_0)^2-(x_j-\theta_1)^2\right]\\ &= n(\theta_1-\theta_0)\bar{x}-\frac{1}{2}n(\theta_1^2-\theta_0^2),\end{aligned}$$

και η σχέση $\lambda > C$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση $\bar{x} > C_0$ (με την προϋπόθεση ότι $\theta_0<\theta_1$), όπου

$$C_0 = \frac{1}{n}\left[\frac{\log C}{\theta_1-\theta_0}+\frac{n(\theta_0+\theta_1)}{2}\right].$$

Η ζητούμενη ελεγχοσυνάρτηση είναι τότε

$$\varphi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1\,, & \bar{x} > C_0 \\ 0\,, & \bar{x} \le C_0 \end{cases}\,, \tag{1.15}$$

όπου η σταθερά C_0 ορίζεται από την σχέση

$$\begin{aligned} E_{\theta_0}\,\varphi(\underset{\sim}{X}) &= P_{\theta_0}\,(\bar{X} > C_0) \\ &= 1-\Phi[\sqrt{n}(C_0-\theta_0)] \\ &= \alpha \end{aligned} \tag{1.16}$$

από το γεγονός ότι $\bar{X} \sim N\left(\theta_i,\ \frac{1}{n}\right)$, $i = 0,1$.

Παρατήρηση 1.6. **(i)** Αν $\theta_0 > \theta_1$, τότε η ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση δίνεται από την σχέση (1.15) με αντεστραμμένες ανισότητες.

(ii) Αν η γνωστή διασπορά είναι σ^2 και όχι αναγκαστικά 1, τότε η μεν ελεγχοσυνάρτηση παραμένει όπως είναι, ενώ η

$$\bar{X} \sim N\left(\theta_i,\ \frac{\sigma^2}{n}\right),\quad i=0,\ 1.$$

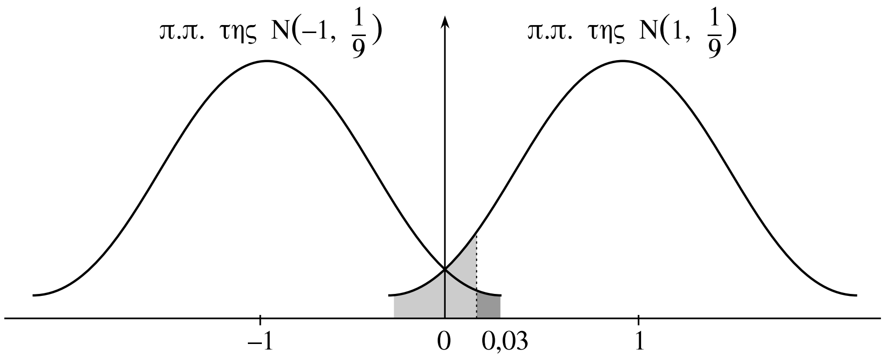
Αριθμητική εφαρμογή. Έστω $n=9$, $\theta_0=-1$, $\theta_1=1$ και $\alpha = 0{,}001$. Τότε $\bar{X} \sim N\left(\theta_i,\ \frac{1}{9}\right)$, $i=0,1$, και η σχέση (1.16) γίνεται

$$\begin{aligned} P_{-1}(\bar{X} > C_0) &= 1-\Phi[3(C_0+1)] \\ &= 0{,}001 \end{aligned}$$

από όπου $C_0=0{,}03$ (με τη βοήθεια των Κανονικών Πινάκων).
Άρα η ζητούμενη ελεγχοσυνάρτηση δίνεται από τη σχέση (1.15) για $C_0=0{,}03$.
Η ισχύς της είναι:

$$\begin{aligned} \beta(1) &= P_1(\bar{X} > 0{,}03) \\ &= 1-\Phi(-2{,}91) \\ &= \Phi(2{,}91) \\ &= 0{,}9932. \end{aligned}$$

Η αριθμητική αυτή εφαρμογή περιέχει και την ευκαιρία για εύκολη γραφική διασάφηση των διαφόρων βασικών εννοιών που χρησιμοποιούμε στον έλεγχο μίας υποθέσεως.



Εικ. 1.2

$C_0 = 0{,}03$ = σημείο αποκοπής η κρίσιμη σταθερά.
$(0{,}03, \infty)$ = χωρίο απορρίψεως της υποθέσεως Η.
$(-\infty, 0{,}03]$ = χωρίο αποδοχής της υποθέσεως Η.

Το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της π.π. της $N\left(-1, \frac{1}{9}\right)$ κατανομής και πάνω από το διάστημα $(0{,}03, \infty)$ ισούται με το ε.σ. ή μέγεθος α της ελεγχοσυνάρτησης φ.

Το εμβαδό κάτω από τη καμπύλη της π.π. της $N\left(1, \frac{1}{9}\right)$ κατανομής και πάνω από το διάστημα $(0{,}03, \infty)$ ισούται με την ισχύ της ελεγχοσυνάρτησης φ στο σημείο 1.

Το εμβαδό κάτω από τη παραπάνω καμπύλη και πάνω από το διάστημα $(-\infty, 0{,}03]$ ισούται με τη πιθανότητα σφάλματος τύπου –ΙΙ.

Παράδειγμα 1.6. Εδώ οι ανεξάρτητες τ.μ. $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \theta)$ όπου μ είναι γνωστό και $\theta \in \Omega = (0, \infty)$.
Τότε

$$L(\underset{\sim}{x}\,; \theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\theta}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)^2\right]$$

και κατά συνέπεια

$$\log\lambda = \log\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right)\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)^2.$$

Άρα η σχέση $\lambda > C$ είναι ισοδύναμη (με την προϋπόθεση ότι $\theta_0 < \theta_1$) προς τη σχέση

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j-\mu)^2 > C_0,$$

όπου

$$C_0 = \frac{2\theta_0\theta_1}{\theta_1-\theta_0} \log\left[C \left(\sqrt{\frac{\theta_1}{\theta_0}} \right)^n \right].$$

Η ζητούμενη ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση είναι, λοιπόν,

$$\varphi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1\,, & \sum_{j=1}^{n} (x_j-\mu)^2 > C_0 \\ 0\,, & \sum_{j=1}^{n} (x_j-\mu)^2 \leq C_0 \end{cases}, \tag{1.17}$$

όπου η σταθερά C_0 ορίζεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} E_{\theta_0}\varphi(\underset{\sim}{X}) &= P_{\theta_0}\left[\sum_{j=1}^{n} (X_j-\mu)^2 > C_0 \right] \\ &= P\left(\chi_n^2 > \frac{C_0}{\theta_0} \right) \\ &= \alpha \end{aligned} \tag{1.18}$$

από το γεγονός ότι

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j-\mu)^2 = \theta_i \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{X_j-\mu}{\sqrt{\theta_i}} \right)^2 \sim \theta_i\chi_n^2\,, \quad i=0,1$$

(Εδώ όπως και σε άλλες ανάλογες περιστάσεις, με το σύμβολο χ_n^2 συμβολίζομε αμφότερα τη χι-τετράγωνο κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας καθώς και μία τ.μ. που έχει την κατανομή αυτή).

Παρατήρηση 1.7. Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, $\theta_0>\theta_1$ συνεπάγεται αντιστροφή των ανισοτήτων στην σχέση (1.17) (και φυσικά, και στη σχέση (1.18)).

Αριθμητική εφαρμογή. Έστω $n=20$, $\theta_0=4$, $\theta_1=16$, $\alpha=0{,}01$ και έστω $\mu=0$.

Τότε η σχέση (1.18) δίνει

$$P_4\left(\sum_{j=1}^{20} X_j^2 > C_0\right) = 1 - P\left(\chi_{20}^2 \leq \frac{C_0}{4}\right)$$
$$= 0{,}01\ ,$$

και επομένως $C_0=150{,}264$ (με τη βοήθεια των χ^2 – Πινάκων). Άρα η ελεγχοσυνάρτηση δίνεται από την σχέση (1.17) για $C_0=150{,}264$. Η ισχύς της είναι:

$$\begin{aligned}\beta(16) &= P_{16}\left(\sum_{j=1}^{20} X_j^2 > 150{,}264\right)\\ &= (\chi_{20}^2 > 9{,}3915)\\ &= 0{,}977.\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1. Στα ακόλουθα παραδείγματα αποφασίστε ποια από τις παρακάτω προτάσεις αποτελούν μία απλή και μία σύνθετη υπόθεση:

(i) X είναι μία τ.μ., της οποίας η π.π. f δίνεται από την σχέση $f(x) = 2e^{-2x}\, I_{(0,\,\infty)}(x)$.

(ii) Κατά την περιστροφή ενός νομίσματος έστω X η τ.μ., η οποία παίρνει την τιμή 1, όταν εμφανίζεται "κεφαλή" και την τιμή 0, όταν εμφανίζονται "γράμματα". Τότε η σχετική πρόταση είναι: Το νόμισμα είναι ανομοιογενές.

(iii) X είναι μία τ.μ., της οποίας η μαθηματική ελπίδα είναι ίση με 5.

1.2. Αναφερόμενοι στη σχέση (1.5), δείξτε ότι αυτή ισχύει για οποιαδήποτε (τυχοποιημένη ή μη) ελεγχοσυνάρτηση φ.

1.3. Αναφερόμενοι στην παρατήρηση 1.2 (i), αιτιολογείστε πλήρως τον ισχυρισμό που γίνεται εκεί.

1.4. Να γίνει το ίδιο για το συμπέρασμα στο τέλος της παρατήρησης 1.2 (ii).

1.5. Για τον έλεγχο της υποθέσεως $H: \theta = \frac{1}{2}$ έναντι της εναλλακτικής $A: \Theta = \frac{1}{4}$ στην κατανομή $B(10, \theta)$, η υπόθεση H απορρίπτεται, όταν $X \leq 3$, όπου η τ.μ. $X \sim B(10, \theta)$. Να προσδιοριστεί το ε.σ. και η ισχύς της σχετικής ελεγχοσυνάρτησης.

1.6. Έστω ότι οι ανεξάρτητες τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ έχουν την κατανομή $B(1, \theta)$. Αν για τον έλεγχο της υποθέσεως $H: \theta = \frac{1}{2}$ έναντι της εναλλακτικής $A: \theta = \frac{1}{4}$, η ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση έχει ε.σ. και ισχύ κατά προσέγγιση 0,10 και 0,80, αντίστοιχα, να προσδιορισθεί το δειγματικό μέγεθος n με τη βοήθεια του ΚΟΘ.

1.7. Έστω ότι οι ανεξάρτητες τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ έχουν την κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$.

(i) Να κατασκευαστεί η ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση για τον έλεγχο της υποθέσεως H ότι η κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ είναι η $N(0, 9)$ έναντι της εναλλακτικής A ότι αυτή είναι η $N(1, 9)$ σε ε.σ. $\alpha = 0{,}05$.