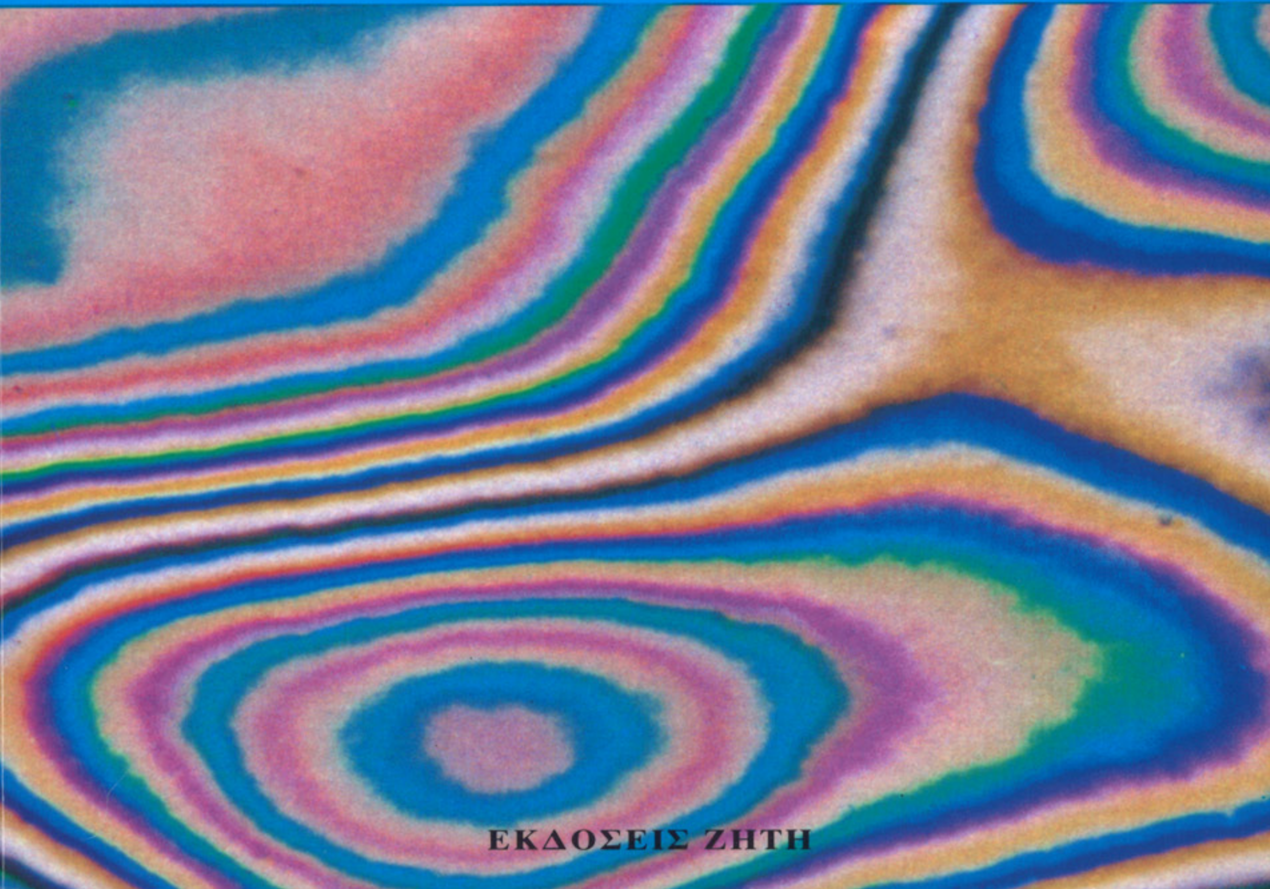
Ι. Ε. ΣΠΥΡΙΔΕΛΗ

ΘΕΜΑΤΑ ΟΠΤΙΚΗΣ



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η συμβολή, η περίθλαση και η πόλωση του φωτός είναι τρία ιδιαίτερης σημασίας φαινόμενα της Οπτικής και αυτό γιατί ακόμη και με απλά μέσα είναι δυνατό να πετύχει κανείς ικανοποιητικά και ακριβή αποτελέσματα.

Το φαινόμενο της συμβολής παρατηρήθηκε, χωρίς όμως να αναγνωριστεί, από τον Issac Newton (1702) στο πείραμα των ομώνυμων δακτυλίων. Η ερμηνεία αυτού του πειράματος δόθηκε αργότερα από τον Thomas Young (1802). Ο τελευταίος συνέχισε και με άλλα σχετικά πειράματα, όπως το πείραμα των δύο οπών κ.ά.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα παρατήρηση που έγινε το 1816 από τους Arago και Fresnel, δηλ. ότι δύο δέσμες πολωμένου φωτός σε κάθετα επίπεδα δεν συμβάλλουν, οδήγησε στο συμπέρασμα ότι το φως είναι μια εγκάρσια διαταραχή.

Η μελέτη του φαινομένου της συμβολής βοήθησε στην ανάπτυξη της μετρολογίας, στη μέτρηση με μεγάλη ακρίβεια του μήκους κύματος του φωτός, και η μέτρηση μεγάλων αποστάσεων, στην ανάπτυξη της φασματοσκοπίας μακρού υπέρυθρου (συμβολομετρική φασματοσκοπία) και τέλος στην ανακάλυψη και ανάπτυξη της ολογραφίας και των εφαρμογών της. Διάφορες συμβολομετρικές διατάξεις προσαρμόστηκαν και σε μεγάλα μήκη κύματος, όπως είναι τα ραδιοκύματα, με αποτέλεσμα να εξελιχθεί στη σημερινή του μορφή ο κλάδος της ραδιο-αστρονομίας.

Από το απλό γεωμετρικό υπόδειγμα της ευθύγραμμης διαδόσεως του φωτός, θα πρέπει να περιμένει κανείς πολλές αποκλίσεις, οι οποίες διαπιστώνονται με την εμφάνιση φωτεινών και σκοτεινών κροσσών, των κροσσών περιθλάσεως. Η διατύπωση της κυματικής θεωρίας από τον Huygens και στη συνέχεια η διατύπωση της απόψεως από τον Fresnel (1818) ότι τα φαινόμενα της περιθλάσεως είναι δυνατόν να ερμηνευτούν με την αρχή του Huygens σε συνδυασμό με φαινόμενα συμβολής, βοήθησε στην ερμηνεία των φαινομένων περιθλάσεως και στην διατύπωση ανάλογων θεωριών.

Τέλος, το φως του ουρανού, πολλών φυσικών πηγών, αλλά και το ανακλώμενο ή διαθλώμενο φως είναι μερικώς ή ολικώς πολωμένο και έτσι θα πρέπει να αντιμετωπίζεται στις οπτικές μετρήσεις.

Στο βιβλίο αυτό περιγράφονται και ερμηνεύονται τα φαινόμενα της συμβολής με την αρχή της επαλληλίας, το φαινόμενο της περιθλάσεως, η συσχέτιση των φαινομένων συμβολής με το φαινόμενο της περιθλάσεως και τέλος η περιγραφή του φαινομένου της πολώσεως με τις εξισώσεις της κυματικής.

Με το τεύχος αυτό συμπληρώνεται η ύλη που θα πρέπει να γνωρίζει ένας φυσικός για να μπορέσει να διδάξει και να ερμηνεύσει φαινόμενα της Οπτικής σε προπτυχιακό επίπεδο. Όσοι θέλουν να μελετήσουν τα φαινόμενα της Οπτικής σε μεγαλύτερο βάθος θα πρέπει να ανατρέξουν στη γενική βιβλιογραφία που αναφέρεται στο τέλος του βιβλίου.

Θα ήταν παράλειψη να μη ευχαριστήσω τις κυρίες Ε. Μπίμπη και Μ. Αλβανού για όλη τη βοήθεια που με προσέφεραν.

Θεσσαλονίκη
Ιανουάριος 1991

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1

Κυμάνσεις

1.1. Εισαγωγή

Στους περισσότερους τομείς της φυσικής οι κυμάνσεις έχουν ιδιαίτερη σημασία επειδή συνδέονται με φαινόμενα διαδόσεως ενέργειας.

Στα επόμενα θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε τις κυμάνσεις τόσο από τη φυσική τους άποψη, όσο και από τη μαθηματική. Από τη φυσική άποψη ένα κύμα μεταφέρει ενέργεια, ορμή και γωνιακή ορμή. Από τη μαθηματική άποψη ένα κύμα περιγράφεται με τη βοήθεια απλών εξισώσεων.

Στην αρχή θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε τις μηχανικές κυμάνσεις, οι οποίες διαδίδονται σε υλικά μέσα, η δε συμπεριφορά τους ερμηνεύεται με τη βοήθεια των εξισώσεων της μηχανικής. Αργότερα θα διαπιστώσουμε ότι και για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα (π.χ. το φως) ισχύει η ίδια περιγραφή. Τα τελευταία θα τα ερμηνεύσουμε με τη βοήθεια των εξισώσεων του Maxwell.

1.2. Διάδοση κύματος πάνω σε μια χορδή

Ο απλούστερος τρόπος μηχανικής περιγραφής ενός κύματος είναι η διάδοση του πάνω σε μια χορδή. Ας παρατηρήσουμε μια χορδή της οποίας η μια άκρη είναι στερεωμένη και η άλλη συγκρατιέται με το χέρι. Αν κινήσουμε δύο, τρεις φορές το χέρι κάθετα προς τη διεύθυνση της χορδής, τότε θα διαπιστώσουμε ότι θα εμφανιστεί μία παραμόρφωση πάνω σ' αυτή. Η παραμόρφωση αυτή διαδίδεται πάνω στη χορδή έτσι ώστε να μετακινούνται τα υλικά της σημεία γύρω από μια μέση θεση ισορροπίας αλλά κατά τέτοιο τρόπο, ώστε η μορφή της να διατηρείται. Αυτή η διάδοση της διαταραχής μέσα σε ισότροπο και ομογενές μέσο, χωρίς ν' αλλοιώνεται η μορφή της, αποτελεί τη χαρακτηριστική ιδιότητα του *κύματος*.

Ας μελετήσουμε τώρα τα διάφορα φυσικά φαινόμενα τα οποία συνοδεύουν τη διάδοση του κύματος.

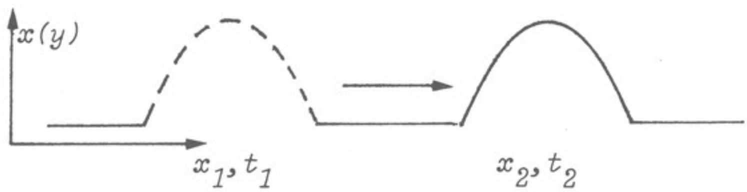
α) Για να δημιουργήσουμε το κύμα χρειάστηκε να δώσουμε μια ορισμένη ενέργεια στη χορδή. Συνεπώς με τη διάδοση της διαταραχής μεταφέρεται ενέργεια από το ένα σημείο της χορδής στο άλλο.

β) Αν το άκρο στηρίξεως της χορδής είναι δυνατό να κινηθεί θα διαπιστώσουμε ότι αυτό θ' αποκτήσει μια ορισμένη ταχύτητα. Δηλαδή θα έχουμε τη μετάδοση μιας ορισμένης ποσότητας κινήσεως (ορμής) ή και γωνιακής ορμής από τη μια άκρη της χορδής μέχρι την άλλη.

Γεννιέται λοιπόν το ερώτημα: Τι είναι κύμα;

Στο παράδειγμα που αναφέραμε διαπιστώνουμε μια αλλαγή της μορφής της χορδής με το χρόνο κατά ένα τελείως ιδιόμορφο τρόπο. Επί πλέον αν ήταν δυνατό να παρακολουθήσουμε μια διαταραχή πάνω στη χορδή σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές, τότε θα διαπιστώναμε ότι η διαταραχή θα είχε προχωρήσει έτσι, ώστε η χορδή να επανέρχεται στην αρχική της κατάσταση ισορροπίας. Δηλαδή το κύμα είναι μια διαταραχή, που διαδίδεται στο χώρο, κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να μεταφέρεται ενέργεια από το ένα σημείο του χώρου στο άλλο χωρίς να μεταφέρεται το μέσον, η δε μορφή της διαταραχής να παραμένει αμετάβλητη.

Στο σχήμα 1.2.1 δίνονται οι διαδοχικές θέσεις μιας διαταραχής σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές t_1 και t_2.



Σχήμα 1.2.1. Δύο διαδοχικές θέσεις μιας διαταραχής σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές t_1 και t_2.

1.3. Μαθηματική περιγραφή

Η μορφή ενός κύματος μπορεί να περιγραφεί σαν μια συνάρτηση $y(x)$, όπου y συμβολίζει την εγκάρσια μετατόπιση του σημείου x της χορδής από τη θέση ισορροπίας. Εφόσον όμως το κύμα διαδίδεται κατά μήκος της χορδής, η μετατόπιση του σημείου x θα μεταβάλλεται και με το χρόνο. Θα είναι δηλαδή $y(x, t)$. Εκείνο το οποίο ξεχωρίζει αυτή τη συνάρτηση από άλλες συναρτήσεις, είναι ότι η μορφή του κύματος, σε δύο διαφορετικές θέσεις της χορδής και δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές, διατηρείται· δηλαδή

$$y(x_1,\ t_1) = y(x_2,\ t_2)$$

Η ειδική αυτή συνάρτηση η οποία περιγράφει ένα κύμα είναι της μορφής

$$y = f(x \mp \upsilon t)$$

ή

$$y = f\left(t \mp \frac{x}{\upsilon}\right)$$

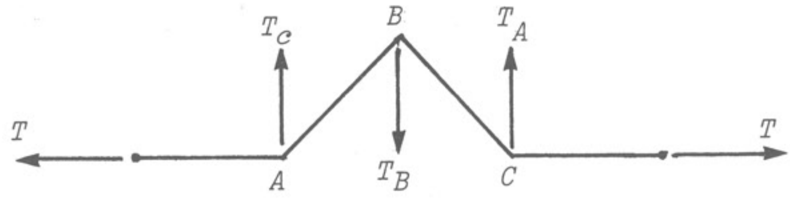
όπου υ η ταχύτητα διαδόσεως του κύματος.

Η διαφορική εξίσωση διαδόσεως μιας εγκάρσιας διαταραχής ή ενός εγκάρσιου κύματος πάνω σε μια χωρίς βάρος χορδή, έχει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.3.1)$$

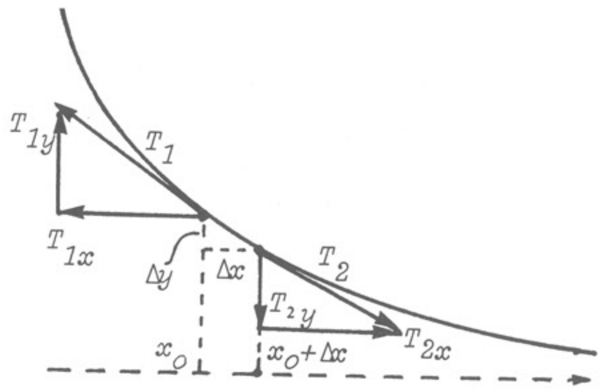
όπου υ η ταχύτητα διαδόσεως του κύματος και y η εγκάρσια μετατόπιση της χορδής.

Ας θεωρησουμε την περίπτωση διαδόσεως μιας τριγωνικής εγκάρσιας διαταραχής πάνω σε μια οριζόντια χορδή (Σχήμα 1.3.1). Οι δυνάμεις T στα άκρα της χορδής πριν και μετά τη διαταραχή θα ισορροπούν και η χορδή θα παραμένει αμετακίνητη. Ανάλογες δυνάμεις θα εφαρμόζονται και πάνω στα τμήματα (AB) και (CB). Μόνο στα σημεία καμπής δεν θα ισορροπούν οι δυνάμεις. Π.χ. στο σημείο A θα υπάρχει μία δύναμη η οποία τείνει να ανυψώσει τη χορδή ενώ στο B μία δύναμη η οποία τείνει να την επαναφέρει.



Σχήμα 1.3.1. Κατανομή των δυνάμεων πάνω σε μια παραμορφωμένη χορδή.

Την επίδραση των δυνάμεων μπορούμε να τη γενικεύσουμε ως εξής: Θεωρούμε μια στοιχειώδη περιοχή της χορδής πάνω στην οποία ενεργούν οι δυνάμεις T_1 και T_2 (σχήμα 1.3.2). Αν Δx είναι το μήκος της χορδής στη θέση ηρεμίας και ρ η γραμμική της πυκνότητα, τότε η μάζα της θα είναι ρΔx. Επειδή η χορδή, σύμφωνα με τον ορισμό του κύματος, δεν μετατοπίζεται κατά τη διεύθυνση x, οι συνιστώσες των δυνάμεων T_1 και T_2 κατά τη x–διεύθυνση θα είναι ίσες:



Σχήμα 1 3.2. Στοιχειώδης περιοχή μιας χορδής και ανάλυση των δυνάμεων που ενεργούν πάνω σ' αυτή.

$$T_{1x} = T_{2x} = T$$

Η εφαρμογή του 2ου νόμου του Newton κατά τη διεύθυνση y δίνει:

$$+T_{1y} - T_{2y} = \varrho \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \ ,$$

ενώ από τη γεωμετρία του σχήματος 1.3.2, προκύπτει

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_0+\Delta x} = -\frac{T_{2y}}{T}$$

και

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_0} = -\frac{T_{1y}}{T}$$

Άρα

$$\frac{\varrho}{T} \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_0+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_0}$$

ή

$$\frac{\varrho}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_0+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_0}}{\Delta x}$$

΄Οταν το Δx τείνει στο μηδέν τότε

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\varrho}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.3.2)$$

Η εξίσωση (1.3.2) είναι η διαφορική εξίσωση διαδόσεως της διαταραχής πάνω στη χορδή. Αν συγκρίνουμε τις εξισώσεις (1.3.1) και (1.3.2) θα βρούμε ότι $\upsilon^2 = \frac{T}{\rho}$, δηλαδή η ταχύτητα διαδόσεως της διαταραχής ή ταχύτητα φάσεως, εξαρτάται από τις φυσικές ιδιότητες της χορδής.

1.4. Γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως κύματος – Αρχή της επαλληλίας

Η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως (1.3.1) είναι δυνατό να βρεθεί είτε από γνωστές κυματικές συναρτήσεις της Φυσικής, δηλαδή συναρτήσεις που είναι γνωστό από τη Φυσική ότι παριστάνουν ένα κύμα, είτε με τη μέθοδο του "χωρισμού των μεταβλητών".

α) Μέθοδος γνωστών κυματικών συναρτήσεων

Η γενική λύση της εξισώσεως (1.3.1) είναι της μορφής

$$y(x,t) = y_1\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) + y_2\left(t + \frac{x}{\upsilon}\right) \qquad (1.4.1)$$

όπου y_1 και y_2 συναρτήσεις με πρώτη και δεύτερη παράγωγο.

Πριν αποδείξουμε ότι η (1.4.1) είναι λύση της (1.3.1) θα πρέπει να αποδείξουμε ότι το άθροισμα των λύσεων μιας διαφορικής εξισώσεως είναι επίσης λύση της εξισώσεως. Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή σαν "αρχή της επαλληλίας".

Πράγματι αν y_1 και y_2 είναι λύσεις της εξίσωσης (1.3.1) τότε θα ισχύει η σχέση

$$y = \alpha y_1 + b y_2 \qquad (1.4.2)$$

όπου α και b είναι σταθερές.

Με τη βοήθεια αυτής της σχέσεως εύκολα καταλήγουμε στην απόδειξη.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η κάθε μια από τις συναρτήσεις y_1 και y_2 είναι λύση της διαφορικής εξισώσεως κύματος.

Ας θεωρήσουμε την y_1. Από την εφαρμογή του κανόνα $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$ θα προκύψουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{\partial y_1}{\partial t} = y_1'\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right), \quad \frac{\partial y_1}{\partial x} = -\frac{1}{\upsilon}\, y_1'\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)$$

όπου

$$y'_1 = \frac{dy_1}{du} \quad \text{και} \quad u = t - \frac{x}{\upsilon}$$

και

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = y''_1\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right), \quad \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\, y''_1\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)$$

Αν τις δύο τελευταίες σχέσεις τις αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (1.3.1), αποδεικνύεται ότι πράγματι οι όροι της (1.4.1) είναι λύση της εξίσωσης (1.3.1). Σε όμοια συμπεράσματα καταλήγουμε και για τη συνάρτηση y_2.

Η φυσική σημασία των συναρτήσεων y_1 και y_2 της εξισώσεως (1.4.1) είναι η εξής:

Η συνάρτηση $y_1\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)$ συμβολίζει μια διαταραχή που διαδίδεται με ταχύτητα υ προς τη διεύθυνση (+x) χωρίς να μεταβάλλεται η μορφή της, ενώ η συνάρτηση $y_2\left(t + \frac{x}{\upsilon}\right)$ μια όμοια διαταραχή που διαδίδεται προς τη διεύθυνση (–x).

Πράγματι, ας θεωρήσουμε μια μετατόπιση της χορδής κατά τη χρονική στιγμή t+Δt και ας τη συγκρίνουμε με την ίδια μετατόπιση κατά τη χρονική στιγμή t. Θα είναι:

$$y_1\left(t + \Delta t - \frac{x}{\upsilon}\right) = y_1\left(t - \frac{x - \upsilon\Delta t}{\upsilon}\right) = y_1\left(t - \frac{x'}{\upsilon}\right)$$

όπου $x' = x - \upsilon\Delta t$. Δηλαδή καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η τιμή της συναρτήσεως y_1 στη θέση x τη χρονική στιγμή t+Δt είναι ίση με την τιμή της συναρτήσεως y_1 στη θέση x', που βρίσκεται αριστερά του x κατά $\upsilon\Delta t$, τη χρονική στιγμή t. Επομένως η διαταραχή μετατοπίζεται προς τα δεξιά με ταχύτητα υ.

Ανάλογες σκέψεις ισχύουν και για τη συνάρτηση $y_2\left(t + \frac{x}{\upsilon}\right)$.

β) Μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών

Μια διαφορετική λύση της διαφορικής εξισώσεως (1.3.1) μπορεί να βρεθεί με τη μέθοδο του "χωρισμού των μεταβλητών". Αφού η y είναι συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών x και t, μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο των συναρτήσεων X(x) και T(t). Δηλαδή

$$y(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

Επομένως, επειδή

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T\,\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\,, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = X\,\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\,,$$

η διαφορική εξίσωση κύματος γίνεται

$$T\,\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{X}{\upsilon^2}\,\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = 0$$

ή

$$\frac{\dfrac{d^2T}{dt^2}}{T} = \upsilon^2\,\frac{\dfrac{d^2X}{dx^2}}{X}$$

Αλλά οι συναρτήσεις X καιT είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και επομένως η τελευταία σχέση θα πρέπει να ισούται με μια σταθερή.

Αν ονομάσουμε $(-p^2)$ τη σταθερή, προκύπτουν δύο γραμμικές και ομογενείς εξισώσεις δεύτερης τάξεως

$$\frac{d^2T}{dt^2} + p^2T = 0 \text{ και } \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{p^2}{\upsilon^2}\,X = 0$$

η λύση των οποίων οδηγεί στη σχέση

$$y(x,t) = \left(A\sin\frac{px}{\upsilon} + B\cos\frac{px}{\upsilon}\right)(C\sin pt + D\cos pt) \qquad (1.4.3)$$

Αν υποθέσουμε ότι τα δύο άκρα της χορδής είναι ακίνητα τότε οι οριακές συνθήκες της χορδής δίνουν

$$y(0,t) = 0 \qquad (1)$$

και

$$y(L,t) = 0 \qquad (2)$$

όπου L το μήκος της χορδής.

Από την οριακή συνθήκη (1) βρίσκουμε

$$0 = B(C\sin pt + D\cos pt) \quad \text{ή} \quad B=0$$

και από την οριακή συνθήκη (2)

$$0 = \left(A\sin\frac{pL}{\upsilon}\right)(C\sin pt + D\cos pt)$$

Αλλά το A δεν είναι δυνατό να είναι μόνιμα μηδέν και επομένως ο όρος $\sin\frac{pL}{\upsilon}$ θα πρέπει να είναι μηδέν.

Η εξίσωση

$$\sin\frac{pL}{\upsilon} = 0 = \sin N\pi \qquad (1.4.4)$$

ονομάζεται εξίσωση συχνότητας γιατί μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε όλους τους φυσικούς τρόπους δονήσεως της χορδής.

Οι συχνότητες της χορδής θα είναι:

$$p_N = N \frac{\pi \upsilon}{L} \quad \text{όπου} \quad N=1,\ 2,\ 3\ldots \tag{1.4.5}$$

Είναι φανερό ότι θα υπάρχει ένας άπειρος αριθμός συχνοτήτων, πράγμα που θα έπρεπε να το περιμένουμε, εφόσον όλα τα συνεχή μέσα αποτελούνται από ένα άπειρο αριθμό σωματιδίων. Επομένως στην περίπτωση μιας παλλόμενης χορδής με σταθερά άκρα η συνάρτηση X(x) θα έχει την κανονικοποιημένη μορφή.

$$X_N(x) = \sin \frac{N\pi x}{L}$$

οπότε η σχέση (1.4.3) γίνεται

$$y(x,t) = A\sin \frac{px}{\upsilon}\,(C\sin pt + D\cos pt)$$

Η γενική εξίσωση μιας παλλόμενης χορδής με σταθερά άκρα έχει τη μορφή (για A=1).

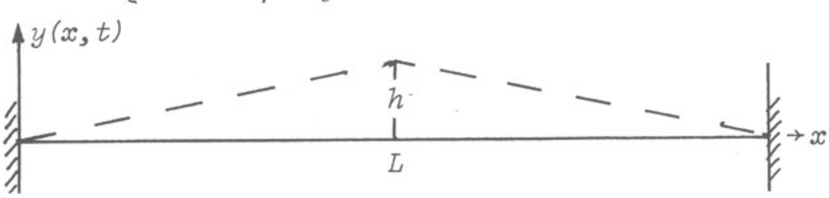
$$y(x,t) = \sum_{N=1,2,\ldots}^{\infty} \left(\sin \frac{N\pi x}{L}\right) \left(C_N \sin p_N t + D_N \cos p_N t\right) \tag{1.4.6}$$

στην οποία εφαρμόσαμε την αρχή της επαλληλίας για να παραστήσουμε όλους τους φυσικούς τρόπους δονήσεως της χορδής.

Οι σταθερές C_N και D_N είναι δυνατό να υπολογιστούν από τις αρχικές συνθήκες του συστήματος.

Παράδειγμα

Το μέσο μιας ομοιογενούς χορδής μήκους L, *μετατοπίζεται κατά* h, *όπως φαίνεται στο σχήμα και μετά αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί. Να βρεθεί η εξίσωση μετατοπίσεως ενός σημείου της χορδής και όλοι οι δυνατοί τρόποι δονήσεως.*



Λύση

Η γενική εξίσωση της ελεύθερης ταλαντώσεως μιας χορδής στερεωμένης στα δύο της άκρα είναι:

$$y(x,t) = \sum_{N=1,2,\ldots}^{\infty} \left(\sin \frac{N\pi x}{L}\right) \left(C_N \sin p_N t + D_N \cos p_N t\right)$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι:

$$y'(x,0) = 0 \text{ και } y(x,0) = \begin{cases} \frac{2h}{L}\,x & \text{για } (0 \le x \le L/2) \\ 2h\left(1-\frac{x}{L}\right) & \text{για } (L/2 \le x \le L) \end{cases}$$

από τις οποίες προκύπτουν οι ισότητες

$$y(x,0) = \sum_{N=1,2,\ldots}^{\infty} D_N \sin \frac{N\pi x}{L} = \begin{cases} \frac{2hx}{L} & \text{για } 0 \le x \le L/2 \\ 2h\left(1-\frac{x}{L}\right) & \text{για } L/2 \le x \le L \end{cases} \tag{1}$$

και

$$y'(x,0) = \sum_{N=1,2,\ldots}^{\infty} C_N\, p_N \sin \frac{N\pi x}{L} = 0 \tag{2}$$

οπότε $C_N=0$.

Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της εξισώσεως (1) επί $\sin \frac{N\pi x}{L}$ και ολοκληρώσουμε με όρια από x=0 έως x=L θα βρούμε:

$$\int_0^L D_N \sin \frac{N\pi x}{L} \sin \frac{N\pi x}{L}\, dx = \int_0^{L/2} \frac{2hx}{L} \sin \frac{N\pi x}{L}\, dx + \int_{L/2}^{L} 2h\left(1-\frac{x}{L}\right) \sin \frac{N\pi x}{2}\, dx$$

ή

$$\frac{LD_N}{2} = \frac{2h}{L}\left[\int_0^{L/2} x \sin \frac{N\pi x}{L}\, dx + \int_L^{L/2} (L-x) \sin \frac{N\pi x}{L}\, dx\right]$$

και επομένως

$$D_N = (-1)^{(N-1)/2}\, \frac{2h}{N^2\pi^2}, \quad N=1,\ 3\ \ldots$$

Οι φυσικές συχνότητες της χορδής είναι:

$$p_N = \frac{N\pi\upsilon}{L} \quad \left(\text{Δηλ. } p_1 = \frac{\pi\upsilon}{L}, \quad p_3 = \frac{3\pi\upsilon}{L}\ \ldots\right)$$

και η εξίσωση μετατοπίσεως της χορδής

$$y(x,t) = \sum_{N=1,3,5,\ldots}^{\infty} (-1)^{(N-1)/2}\, \frac{8h}{N^2\pi^2} \sin \frac{N\pi x}{L} \cos \frac{N\pi\upsilon}{L}\, t$$

όπου $\upsilon = \sqrt{\frac{T}{\varrho}}$ η ταχύτητα διαδόσεως του κύματος, T η τάση της χορδής και ϱ η γραμμική πυκνότητα της χορδής ανά μονάδα μήκους.

1.5. Ενέργεια κύματος

Όπως είδαμε στην §1.2 κατά τη διάδοση μιας διαταραχής μεταφέρεται ενέργεια από το ένα σημείο του χώρου στο άλλο. Την ενέργεια αυτή τη χαρακτηρίζουμε με τον όρο πυκνότητα ενέργειας $U(x,t)$, όταν εκφράζει την ολική μηχανική ενέργεια της χορδής ανά μονάδα μήκους.

Η κινητική ενέργεια μιας στοιχειώδους περιοχής dx της χορδής, που έχει μάζα dm και εγκάρσια ταχύτητα $\frac{dy}{dt}$ θα είναι ίση προς

$$\frac{1}{2}\, dm \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

Αλλά $dm=\varrho\, dx$, όπου ϱ η γραμμική πυκνότητα της χορδής.

Επομένως η γραμμική πυκνότητα της κινητικής ενέργειας θα είναι:

$$U_k = \frac{1}{2}\, \varrho \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \tag{1.5.1}$$

Η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια της χορδής προσδιορίζεται από το έργο που καταβλήθηκε για τη παραμόρφωσή της. Από το σχήμα 1.3.2. προκύπτει ότι το έργο παραμορφώσεως είναι

$$\Delta W = T\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} - T\Delta x$$

για

$$|T_1| \cong |T_2| = T$$

Αν αναπτύξουμε τη τετραγωνική ρίζα σε σειρά, για μικρή παραμόρφωση της χορδής, οπότε $\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| \ll 1$, θα είναι

$$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = \Delta x\sqrt{1+(\Delta y/\Delta x)^2} \cong \Delta x\left[1+\frac{1}{2}(\Delta y/\Delta x)^2\right]$$

Επομένως

$$\Delta W = \frac{1}{2}\, T\Delta x\, (\Delta y/\Delta x)^2$$

Αλλά το έργο που καταβλήθηκε ανά μονάδα μήκους $(\Delta W/\Delta x)_{\Delta x\to 0}$ είναι η πυκνότητα της δυναμικής ενέργειας, δηλαδή

$$U_p = \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

Όταν στη λύση της διαφορικής εξισώσεως (1.3.1) υπάρχει μόνο μια συνιστώσα, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι η πυκνότητα της κινητικής ενέργειας θα είναι ίση με την πυκνότητα της δυναμικής ενέργειας και επομένως

$$U = U_k + U_p = \varrho \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \tag{1.5.3}$$

Στη γενική περίπτωση θα ισχύει η σχέση

$$U = U_k + U_p = \frac{1}{2}\left[\varrho \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] \tag{1.5.4}$$

1.6. Ανάκλαση και διάδοση του κύματος σε ένα σημείο ασυνέχειας

Αν η πυκνοτητα του μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα μεταβάλλεται απότομα από μια ορισμένη επιφάνεια και πέρα, τότε το κύμα εν μέρει θα ανακλαστεί στην επιφάνεια και εν μέρει θα διαδοθεί πέρα από την επιφάνεια. Τόσο το ανακλώμενο κύμα όσο και το διερχόμενο μπορούν να εκφραστούν σε συνάρτηση με το προσπίπτον και τις αντίστοιχες ταχύτητες διαδόσεως του κύματος στα δύο με διαφορετική πυκνότητα μέσα.

Ας θεωρήσουμε και πάλι μια χορδή, άπειρου μήκους, πάνω στην οποία στη θέση x=0 υπάρχει μια ένωση χωρίς μάζα, με γραμμική πυκνότητα ϱ_1 για $x \leq 0$ και $\varrho_2 \neq \varrho_1$ για $x > 0$. Και στα δύο τμήματα της χορδής θα ισχύουν οι διαφορικές εξισώσεις κύματος:

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} - \frac{\varrho_1}{T}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = 0 \quad \text{για } x \leq 0 \tag{1.6.1}$$

και

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - \frac{\varrho_2}{T}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = 0 \quad \text{για } x > 0 \tag{1.6.2}$$

Οι λύσεις των δύο αυτών εξισώσεων θα πρέπει να πληρούν τις εξής οριακές συνθήκες

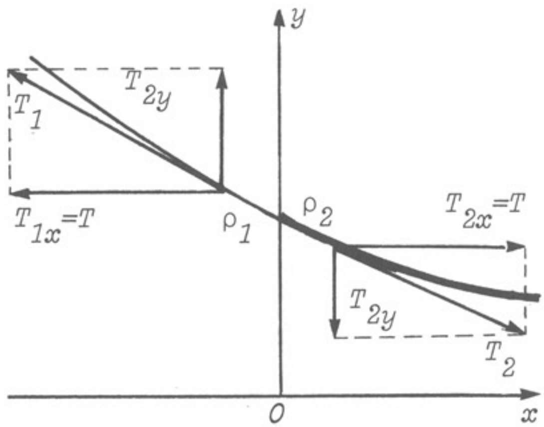
α) Οι δύο μετατοπίσεις y_1 και y_2 θα πρέπει να είναι ίσες για x=0, γιατί αλλοιώς θα έσπαζε η χορδή

$$(y_1)_{x=0} = (y_2)_{x=0}$$

β) Οι δύο δυνάμεις T_{1y} και T_{2y} στη θέση x=0 θα πρέπει να είναι ίσες, γιατί αλλοιώς θα εμφανιζότανε κατακόρυφη δύναμη στη χωρίς μάζα ένωση της χορδής με συνέπεια την άπειρη επιτάχυνσή της. Θα είναι:

$$(T_{1y})_{x=0} = (T_{2y})_{x=0}$$

ή επειδή (βλ. σχήμα 1.6.1)



Σχήμα 1.6.1. Ένωση δύο χορδών διαφορετικής πυκνότητας στη θέση x=0

$$-\frac{T_{1y}}{T} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{και} \quad -\frac{T_{2y}}{T} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

προκύπτει για x=0.

$$T\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)_{x=0} = T\left(\frac{\partial y_2}{\partial x}\right)_{x=0}$$

Επομένως η παράγωγος $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ θα πρέπει να είναι συνεχής και για x=0.

Οι διαφορικές εξισώσεις (1.6.1) και (1.6.2) θα έχουν σαν γενική λύση τις αντίστοιχες εξισώσεις

$$y_1 = f_1\left(t - \frac{x}{\upsilon_1}\right) + g_1\left(t + \frac{x}{\upsilon_1}\right) \quad \text{για } x < 0 \tag{1.6.3}$$

και

$$y_2 = f_2\left(t - \frac{x}{\upsilon_2}\right) + g_2\left(t + \frac{x}{\upsilon_2}\right) \quad \text{για } x > 0 \tag{1.6.4}$$

Οι οριακές συνθήκες μας επιτρέπουν να προσδιορίσουμε τις σχέσεις