ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η Άλγεβρα και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση

Ξένια Βαμβακούση
Πέτρος Βερύκιος
Κώστας Γαβρίλης
Γιάννης Θωμαΐδης
Στέφανος Κεΐσογλου
Νίκος Κλαουδάτος
Παναγιώτης Κυλάφης
Αραξή Ναζαριάν
Χαράλαμπος Σακονίδης

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

ISBN 978-960-456-302-9

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ.: 2310.203.720, Fax: 2310.211.305 • e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) - 105 64 ΑΘΗΝΑ • Τηλ.-Fax: 210.3211.097

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Ασκληπιού 60 - Εξάρχεια 114 71, Αθήνα
Τηλ.-Fax: 210.3816.650 • e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Περιεχόμενα

Η Άλγεβρα και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση

Εισαγωγή των επιμελητών της έκδοσης

Από τον Οκτώβριο του 2009 μέχρι τον Μάρτιο του 2010, η Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών διοργάνωσε στο Τμήμα Μαθηματικών του Ε.Κ.Π.Α. σεμινάριο με θέμα "Η Άλγεβρα και η διδακτική της", στη διάρκεια του οποίου πραγματοποιήθηκαν επτά διαλέξεις. Το σεμινάριο ολοκληρώθηκε τον Οκτώβριο του 2010 με τη διοργάνωση μιας ημερίδας στην οποία έγιναν τέσσερις εισηγήσεις. Τα κείμενα των διαλέξεων και των εισηγήσεων που κατατέθηκαν από τους ομιλητές αποτελούν το περιεχόμενο του ανά χείρας συλλογικού τόμου.

Στη διάρκεια του σεμιναρίου αναπτύχθηκαν από τους ομιλητές και έγιναν αντικείμενο ευρείας συζήτησης με το ακροατήριο θέματα θεωρητικού και πρακτικού ενδιαφέροντος, τα οποία αποτελούν σημεία αιχμής στις πολλαπλές έρευνες και δραστηριότητες γύρω από τη διδασκαλία και μάθηση της Άλγεβρας που αναπτύσσει η διεθνής κοινότητα των ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Στην εισαγωγική αυτή επισκόπηση ομαδοποιούμε και παρουσιάζουμε σύντομες περιλήψεις αυτών των θεμάτων έτσι, ώστε ο αναγνώστης να αποκτήσει μια γενική εικόνα πριν εμβαθύνει στη μελέτη των επιμέρους εργασιών.[1]

Ένα πρώτο θέμα αφορά την παρουσίαση κεντρικών, σύγχρονων ερευνητικών δεδομένων για τη μάθηση και διδασκαλία της Άλγεβρας και τη διατύπωση κάποιων πρώτων βασικών συμπερασμάτων (Μπάμπης Σακονίδης, *Σχολική άλγεβρα: επιστημολογικές, γνωστικές και διδακτικές αναζητήσεις*). Σε αντίθεση με την κατανόηση της σχολικής άλγεβρας ως εργαλείου συμβολικών χειρισμών και επίλυσης προβλημάτων το οποίο οι μαθητές δυσκολεύονται να χρησιμοποιήσουν ή να

[1] Οι εργασίες δημοσιεύονται στον τόμο σύμφωνα με την αλφαβητική σειρά των συγγραφέων.

κατανοήσουν, το ενδιαφέρον της σύγχρονης ερευνητικής κοινότητας στο συγκεκριμένο ζήτημα στρέφεται πλέον στην ανάπτυξη του αλγεβρικού νοήματος από τους μαθητές. Η εστίαση αυτή οδήγησε στην επικέντρωση στα δρώμενα της τάξης, ανέδειξε νέα ερωτήματα σχετικά με τη φύση της μάθησης και νέα θεωρητικά πλαίσια για την απόδοση νοήματος στα αλγεβρικά αντικείμενα.

Ένα δεύτερο θέμα αφορά την ιστορική και διδακτική ανάλυση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε ανώτερα επίπεδα μαθηματικής σκέψης όπως είναι η γενίκευση και η απόδειξη (Γιάννης Θωμαΐδης, *Η διδασκαλία της λογικής και της απόδειξης στο Λύκειο* και *Ιστορικές* και *Διδακτικές όψεις της γενίκευσης στην Άλγεβρα*). Το διδακτικό πρόβλημα της μαθηματικής λογικής και της απόδειξης γενικά δεν βρίσκεται στην ύπαρξη ή την έλλειψη σχετικών παραγράφων στα σχολικά βιβλία, αλλά στην απουσία διδακτικών προτάσεων που λαμβάνουν υπόψη την πραγματική φύση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές. Τις δυσκολίες αυτές έχει αναδείξει τα τελευταία χρόνια μια σειρά ερευνών της Διδακτικής των Μαθηματικών που εξέτασαν ορισμένα σημεία αιχμής στην κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας· πολύ δύσκολα όμως θα υποστήριζε κανείς ότι οι έρευνες αυτές έχουν διαμορφώσει κάποια συγκροτημένη πρόταση προς το χώρο της διδακτικής πράξης. Οι έννοιες της απόδειξης και της γενίκευσης αποτελούν βασικά επιστημολογικά γνωρίσματα της μαθηματικής δραστηριότητας, υποκείμενα σε διαρκή ιστορική εξέλιξη και μετασχηματισμό. Η γνώση αυτής της εξέλιξης μπορεί να συνεισφέρει γόνιμες ιδέες για την αντιμετώπιση των προβλημάτων που αντιμετωπίζει η διδασκαλία και μάθηση της Άλγεβρας. Και στις δύο εργασίες γίνεται μια προσπάθεια να μετουσιωθούν αυτές οι ιδέες σε διδακτικές προτάσεις.

Ένα άλλο θέμα είναι η σύνδεση των Μαθηματικών με τη Φυσική και τις απαιτήσεις που θέτει στη διδασκαλία και μάθηση ο χειρισμός των σχετικών προβλημάτων (Νίκος Κλαουδάτος, *Γραφήματα ταχύτητας – χρόνου στην περίπτωση της διδασκαλίας της πλάγιας βολής στα Μαθηματικά κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου*). Ο συνδυασμός γνώσεων από τα μαθηματικά και την φυσική εμφανίζεται συχνά κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος στο σχολείο και για την επιτυχή διαπραγμάτευση των σχετικών θεμάτων που συναντούν οι μαθητές απαιτείται αυτό που οι ερευνητές ονομάζουν "συνείδηση της συνοριακότητας". Οι έρευνες όμως δείχνουν ότι θέματα που θα μπορούσαν να αποτελέσουν σημεία συνάντησης μαθηματικών και φυσικής, δηλαδή θέματα που οδηγούν σε συνοριακές πρακτικές, γίνονται σημεία διαχωρισμού των δύο μαθημάτων λόγω των διαφορών στην διδασκαλία των αντίστοιχων θεμάτων. Εγείρονται έτσι ορισμένα ερωτήματα σχετικά με τους παράγοντες που επηρεάζουν τη συμπεριφορά των μαθητών σε προβλήματα αυτού του είδους, τα οποία γίνονται αντικείμενο διερεύνησης στην παρούσα εργασία.

Το τέταρτο θέμα αφορά τη σύνδεση της θεωρίας με τη διδακτική πρακτική – ένα ζήτημα που θεωρείται πολύ κρίσιμο για τη μαθηματική εκπαίδευση – σε κεντρικά θέματα όπως η επίλυση προβλήματος (Πέτρος Βερύκιος, *Συναρτησιακή προσέγγιση βασικών εννοιών της σχολικής άλγεβρας σε ένα πλαίσιο επίλυσης προβλήματος* και *Σύνδεση παλιάς (αλγεβρική παράσταση) και νέας γνώσης (συνάρτηση) με ερμηνευτικό μοντέλο το «εικόνα έννοιας-ορισμός έννοιας»: μια μελέτη περίπτωσης*). Η μαθηματική εκπαίδευση ασχολείται κυρίως με τρία θέματα: το *τι* θα διδάξουμε, πως θα το διδάξουμε και τελευταία με το *πώς* σκέφτονται τα παιδιά. Το γεφύρωμα θεωρίας και πράξης, ο σχεδιασμός διδακτικού υλικού και η εφαρμογή του στη διδασκαλία, είναι ζητήματα δύσκολα και η έρευνα σ’ αυτόν τον τομέα είναι πολύ κρίσιμη και χρήσιμη για τον εκπαιδευτικό. Τα δύο άρθρα έχουν ως στόχο να αναδείξουν πώς μπορούν οι προηγούμενες θεωρητικές προοπτικές να μετουσιωθούν σε διδακτική πρακτική. Στο πρώτο άρθρο, ο συγγραφέας (ερευνητής και δάσκαλος) σχεδιάζει, υλοποιεί και αξιολογεί μια διδακτική πρόταση για τις αρχικές έννοιες της σχολικής άλγεβρας, όπως *συνάρτηση*, *εξίσωση* και *ανίσωση*, με βάση τις *πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης με διαδικασίες επίλυσης προβλήματος* σε μια τάξη Β΄ Γυμνασίου. Στο δεύτερο άρθρο, εξετάζεται η σύνδεση μεταξύ παλαιάς και νέας γνώσης, μέσα από τη συνέντευξη με μια μαθήτρια της πειραματικής τάξης, στη διάρκεια της οποίας ασχολείται με την επίλυση ενός προβλήματος. Μέσα από τα άρθρα αυτά ο αναγνώστης εκπαιδευτικός μπορεί να πάρει ιδέες για το σχεδιασμό διδακτικού υλικού, την εφαρμογή του στη διδακτική πράξη και τον τρόπο επικοινωνίας με τον μαθητή προκειμένου να κατανοήσει τον τρόπο σκέψης του.

Ένα άλλο θέμα αφορά την ανάδειξη της σημασίας που έχει η μελέτη κανονικοτήτων (patterns) για την ανάπτυξη των πρώιμων μορφών του αλγεβρικού συλλογισμού ή την εισαγωγή βασικών εννοιών όπως η συνάρτηση (Παναγιώτης Κυλάφης & Ξένια Βαμβακούση, *Ο ρόλος των patterns στην ανάπτυξη του πρώιμου αλγεβρικού συλλογισμού* και Αραξή Ναζαριάν *Εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης μέσω ενός pattern: Ανάλυση μιας πειραματικής διδασκαλίας με τη θεωρία δραστηριότητας*). Σημαντικές δυσκολίες των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης οφείλονται, σε μεγάλο βαθμό, στην έλλειψη του κατάλληλου εννοιολογικού υπόβαθρου το οποίο να επιτρέπει την απόδοση νοήματος στις αφηρημένες έννοιες της άλγεβρας και της ανάλυσης. Η έρευνα στην «πρώιμη άλγεβρα» θεωρεί τα patterns σημαντικό εργαλείο για την ανάπτυξη της ικανότητας της γενίκευσης και την εισαγωγή των παιδιών στη συναρτησιακή σκέψη στο επίπεδο της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Οι θεωρητικές προοπτικές για την αξία και το ρόλο των patterns υλοποιούνται με μια διδακτική πρόταση για την εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης στη Β΄ Γυμνασίου μέσω ενός pattern. Ο σχεδιασμός, η πραγματοποίηση και η ανάλυση της πειραματικής διδασκαλίας αναλύονται στο δεύτερο άρθρο με βάση τη θεωρία δραστηριότητας.

Ένα τελευταίο θέμα αφορά την ανάδειξη ορισμένων ζητημάτων που συνδέονται με την αξιοποίηση της τεχνολογίας για τη διδασκαλία και μάθηση της Άλγεβρας στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Κώστας Γαβρίλης, *Η χρήση της τεχνολογίας στη διδασκαλία της (σχολικής) άλγεβρας* και Στέφανος Κεΐσογλου, *Αλγεβρικές δραστηριότητες σε ψηφιακό περιβάλλον*). Στο πρώτο άρθρο γίνεται μια ανασκόπηση της διδασκαλίας και της μάθησης της άλγεβρας πριν και μετά την έλευση των νέων τεχνολογιών. Ο συγγραφέας θέτει και επιχειρεί να απαντήσει στο ερώτημα: μπορεί η ψηφιακή τεχνολογία να βοηθήσει να ξανασκεφτούμε την σχολική άλγεβρα; είναι απαραίτητη μια αλλαγή στα ΠΣ που να λαμβάνουν υπόψη τους το νέο τεχνολογικό περιβάλλον; Στο δεύτερο άρθρο ο συγγραφέας έχει στόχο να αναδείξει πτυχές αξιοποίησης της τεχνολογίας μέσα στον χώρο της διδασκαλίας της άλγεβρας στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Αναδεικνύει δραστηριότητες, που δεν υλοποιούνται στην διδακτική πρακτική του σχολείου, καθώς η έλλειψη ψηφιακών μέσων τις καθιστά εξαιρετικά δυσπρόσιτες. Βασικό στοιχείο του άρθρου είναι το παράδειγμα ώστε να μπορεί ο εκπαιδευτικός να αντλήσει ιδέες για την εφαρμογή των προτεινόμενων δραστηριοτήτων στην τάξη.

Πέτρος Βερύκιος

Γιάννης Θωμαΐδης

Συναρτησιακή προσέγγιση βασικών εννοιών της Σχολικής Άλγεβρας σε ένα πλαίσιο επίλυσης προβλήματος

Πέτρος Γ. Βερύκιος

Περίληψη

Η παρούσα εργασία αποτελεί συνοπτική περιγραφή μιας ευρύτερης μελέτης με αντικείμενό της τη διδασκαλία και τη μάθηση της σχολικής άλγεβρας στο γυμνάσιο. Ο βασικός σκοπός της μελέτης ήταν ο σχεδιασμός, η υλοποίηση και η αξιολόγηση μιας διδακτικής προσέγγισης βασικών εννοιών της σχολικής άλγεβρας, όπως η συνάρτηση, η εξίσωση και η ανίσωση, βασισμένη στις πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης σε ένα πλαίσιο επίλυσης προβλήματος. Οι στόχοι της μελέτης είναι η εξέταση του τρόπου με τον οποίο μαθητές Γυμνασίου κατασκευάζουν τη μαθηματική τους γνώση, όσον αφορά τις γραμμικές συναρτήσεις, εξισώσεις και ανισώσεις, μέσω μιας συναρτησιακής προσέγγισης σε ένα πλαίσιο επίλυσης προβλήματος, τα πιθανά πλεονεκτήματα και τις ενδεχόμενες δυσκολίες που αναδύονται με αυτή τη διδακτική προσέγγιση. Η αξιολόγηση της διδακτικής προσέγγισης έγινε μέσω γραπτών δοκιμασιών, αλλά κυρίως ποιοτικά μέσω ατομικών συνεντεύξεων με επιλεγμένους μαθητές από την τάξη, στην οποία πραγματοποιήθηκε η διδακτική προσέγγιση. Τα αποτελέσματα κρίνονται πολύ ενθαρρυντικά και φαίνεται ότι μια τέτοια διδακτική προσέγγιση μπορεί να αποτελέσει ένα εποικοδομητικό τρόπο εισαγωγής στην αλγεβρική σκέψη.

1. Η διαδικασία της μάθησης και της διδασκαλίας

Πίσω από αυτό τον παραδοσιακό τρόπο σκέψης για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών βρίσκεται η άποψη που θεωρεί ότι η ανάπτυξη της γνώσης είναι η μετάδοση πληροφοριών από το δάσκαλο στους μαθητές, από το δάσκαλο που γνωρίζει στους μαθητές που δεν γνωρίζουν. Αυτό είναι το μεταδοτικό μοντέλο διδασκαλίας και μάθησης και βασίζεται στην αντίληψη ότι η γνώση είναι ένα σύνολο ιδεών έξω από την ανθρώπινη ερμηνεία και οι μαθητές είναι παθητικά δοχεία που πρέπει να γεμίσουν μ' αυτές τις ιδέες. Πολλοί εκπαιδευτικοί απορρίπτουν αυτή την άποψη υπέρ μιας άποψης που βασίζεται στην δράση και την ερμηνεία του μαθητή.

Η εργασία μας υιοθετεί μια κοινωνικοπολιτιστική κατασκευαστική προοπτική, μια *νέα προοπτική* (Cobb 2000) για τη διδασκαλία και τη μάθηση, που απεικονίζει μια προσπάθεια εναρμόνισης ψυχολογικών και κοινωνικών απόψεων. Η *νέα προοπτική* θεωρεί ότι οι ατομικές κατασκευαστικές δραστηριότητες και οι κοινωνικές διαδικασίες της τάξης είναι αμοιβαία συμπληρωματικές για να κατανοήσουμε με ποιο τρόπο μαθαίνουν οι μαθητές. Από μια Πιαζετιανή ψυχολογική προοπτική η συζήτηση τάξης υπηρετεί το σκοπό διέγερσης της ανισορροπίας και της αναστοχαστικής αφαίρεσης. Από μια κοινωνιολογική προοπτική η γνώση είναι κυρίως μια κοινωνική κατασκευή και η μάθηση καταδεικνύεται από την ικανότητα του μαθητή να συμμετέχει σε κατάλληλη διαπραγμάτευση. Η γνώση του μαθητή θεωρείται μια ενεργητική κατασκευή και όχι κάτι που προσλαμβάνει παθητικά και η φύση της διαπραγμάτευσης στην τάξη επιδρά στην ανάπτυξη της μαθηματική γνώσης. Επειδή η *νέα προοπτική* υποστηρίζει ότι η έρευνα για την ανάπτυξη της γνώσης πρέπει να δίνει προσοχή και στην ψυχολογική και στην κοινωνική προοπτική, ο δάσκαλος προσπαθώντας να ενισχύσει και να υποστηρίξει την ανάπτυξη της γνώσης, πρέπει να μεριμνά ο ίδιος και για τις δύο αυτές πλευρές.

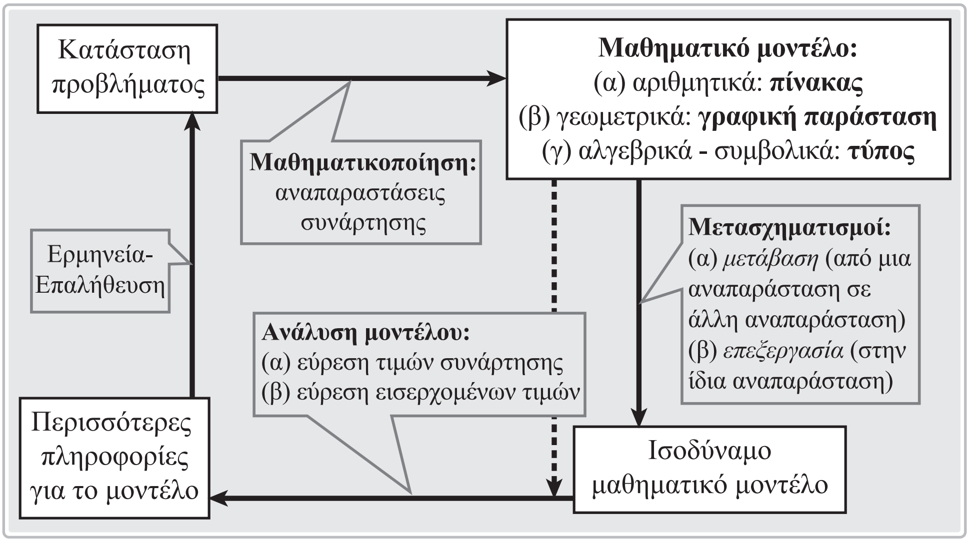
Ποιος είναι ο ρόλος του δασκάλου με βάση τις αρχές της *νέας προοπτικής*; Η απάντηση στο ερώτημα «αν ο δάσκαλος εγκαταλείψει την παρουσίαση και την αφήγηση, δηλαδή τα βασικά μέσα για να υποστηρίξει την μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών, τότε με τι μπορεί να τα αντικαταστήσει;» είναι ότι «οι δάσκαλοι πρέπει να καταπιαστούν με δύο δραστηριότητες στην τάξη:

α) να θέτουν *προβλήματα* και
β) να διευκολύνουν τη *συζήτηση*» (Simon 1997), και προσδιορίζει τον ρόλο του δασκάλου από τη σκοπιά της *νέας προοπτικής*.

Όταν οι δάσκαλοι επιλέγουν και θέτουν προβλήματα αντιμετωπίζουν τη μαθησιακή διαδικασία από μια γνωστική προοπτική και όταν διευκολύνουν τη συζήτηση με ολόκληρη την τάξη αντιμετωπίζουν τη μαθησιακή διαδικασία από μια κοινωνική προοπτική. Η υιοθέτηση αυτών των απόψεων για τη διδασκαλία και για το δάσκαλο ως εισηγητή προβλημάτων και διευκολυντή διαπραγμάτευσης ήταν συνεπής με την επιθυμία μας να δημιουργήσουμε μια *διερευνητική τάξη μαθηματικών* (Cobb, Wood, Yackel, and McNeal, 1992). Σε μια διερευνητική τάξη οι μαθητές εξερευνούν προβλήματα, κάνουν και ελέγχουν εικασίες, εξηγούν και δικαιολογούν τις ιδέες τους και προσπαθούν να κατασκευάσουν νόημα και να εκτιμήσουν τις ιδέες άλλων. Οι δάσκαλοι καταπιάνονται με διδασκαλία που έχει ερευνητικό προσανατολισμό δίνοντας έμφαση στην κατανόηση και την σύνδεση μεταξύ εννοιών, δεν εξηγούν στους μαθητές ένα σύνολο κανόνων που πρέπει να ακολουθηθούν, αλλά αντίθετα εμπλέκουν τους μαθητές σε διαδικασίες ανάπτυξης μεθόδων επίλυσης προβλημάτων. Σε ερευνητικά προσανατολισμένες τάξεις η μαθηματική γνώση προσδιορίζεται από την ικανότητα εμπλοκής σε διαδικασίες επίλυσης προβλήματος, εξήγησης και δικαιολόγησης ιδεών και την συζήτηση και αξιολόγηση των ιδεών άλλων. Η μαθηματική αλήθεια δεν είναι πια κτήμα του δασκάλου, αλλά είναι συνδυασμένη κατασκευή δασκάλου και μαθητών (Cobb et al, 1992).

2. Συναρτησιακή Προσέγγιση σε ένα πλαίσιο Επίλυσης Προβλήματος (ΣΠΕΠ)

Η διδασκαλία των μαθηματικών με επίκεντρο την έννοια της συνάρτησης έχει προταθεί από τις αρχές του εικοστού αιώνα από τον F. Klein (1945) και ακολούθως από άλλους ερευνητές και εκπαιδευτικούς οργανισμούς (Fehr 1951, van Barneveld & Krabbendam 1982, Schwartz & Yerushalmy 1993, Bednarz, N., Kieran, C. & Lee 1996, Kieran 1994, NCTM 2000). Λαμβάνοντας υπόψη τις τεκμηριωμένες δυσκολίες από την ερευνητική βιβλιογραφία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη μάθηση της άλγεβρας με τον παραδοσιακό τρόπο προσέγγισής της (Kieran 1981, 1989, 1992, 1996, Filloy & Rojano 1989, Sfard 1991, Sfard & Linchevski 1994, Herscovics & Linchevski 1994, Linchevski & Herscovics 1996, Stacey & MacGregor 1997, Βερύκιος 2003, Farmaki, Klaoudatos, Verikios 2004, 2005, Verikios, Farmaki 2006, 2008) και θεωρώντας ότι οι έννοιες της μεταβλητής, της αλγεβρικής παράστασης, της συνάρτησης της εξίσωσης και της ανίσωσης είναι θεμελιώδεις και απαραίτητες για τη μελέτη ανώτερων μαθηματικών και ότι οι μαθητές από το Γυμνάσιο πρέπει να αναπτύξουν ένα *νόημα* για τις έννοιες αυτές και τις διαδικασίες της σχολικής άλγεβρας από την αρχή σχεδιάσαμε και υλοποιήσαμε μια διδακτική πρόταση σε μια ενότητα (26 διδακτικών ωρών) σε μια σχολική τάξη της Β′ Γυμνασίου όπου οι μαθητές προσέγγισαν βασικές μαθηματικές έννοιες με μια *συναρτησιακή προσέγγιση σε ένα πλαίσιο επίλυσης προβλήματος* (Βερύκιος 2010). Οι συναρτησιακές προσεγγίσεις που έχουν αναπτυχθεί (χρησιμοποιώντας οι περισσότερες και Η/Υ) δεν είχαν τα αναμενόμενα αποτελέσματα (Kieran 2004). Δόθηκε έμφαση στα τεχνολογικά περιβάλλοντα εις βάρος του συμβολισμού με αποτέλεσμα οι μαθητές να κάνουν μόλις και μετά βίας οποιοδήποτε συμβολικό χειρισμό (Sutherland 1990). Στην διδακτική μας πρόταση υιοθετήσαμε μια συναρτησιακή προσέγγιση στην σχολική άλγεβρα σε ένα πλαίσιο επίλυσης προβλήματος, λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι η διδασκαλία των μαθηματικών μέσω διαδικασιών επίλυσης προβλήματος βρίσκεται στο επίκεντρο της έρευνας στη μαθηματική εκπαίδευση (Schenfeld 1992, Bednarz, Kieran, & Lee 1996, Simon 1997, NCTM 2000). Το παρακάτω σχήμα διευκρινίζει την διδακτική μας προσέγγιση και ως προς το σχεδιασμό των δραστηριοτήτων και ως προς την υλοποίηση τους στην τάξη.



Η συναρτησιακή προσέγγιση σε ένα πλαίσιο επίλυσης προβλήματος.

3. Μεθοδολογία

Η μελέτη μας είναι κυρίως μια ποιοτική έρευνα. Στο πρώτο μέρος, στο σχεδιασμό και την υλοποίηση, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο έρευνα-δράση, επειδή κάνουμε μια εκτενή διδακτική παρέμβαση στην τάξη και ο ερευνητής εμπλέκεται ενεργά σ’ αυτή τη διαδικασία. Σο δεύτερο μέρος χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της πολλαπλής μελέτης περίπτωσης μέσω ατομικών συνεντεύξεων με συγκεκριμένους μαθητές, που συμμετείχαν στις πειραματικές διδασκαλίες. Στην προέρευνα χρησιμοποιήσαμε μια ποσοτική προσέγγιση με τον έλεγχο ενός πληθυσμού με ένα test. Στις παραδοσιακές προοπτικές τα tests αξιολογούν απλή, απομονωμένη γνώση και δεξιότητες που μεταφέρονται από τον δάσκαλο μέσω της διδασκαλίας (Ginsburg 1997) και εστιάζουν στο αν ο μαθητής δίνει σωστή ή λανθασμένη απάντηση. Ο αριθμός των σωστών απαντήσεων είναι ένας δείκτης για τις γνώσεις του μαθητή ή για το πόσο καλά μπορεί να κάνει μια συγκεκριμένη διαδικασία. Στην κοινωνικοπολιτιστική κατασκευαστική προοπτική επίκεντρο της μάθησης είναι η σκέψη και οι στρατηγικές των μαθητών. Η χρησιμοποίηση πιο «ανοικτών» εργασιών επίλυσης προβλήματος καθώς επίσης και η ενθάρρυνση των μαθητών να σκέφτονται πάνω στην εργασία τους έχουν γίνει πλέον συνήθης πρακτική στην προσπάθεια των ερευνητών για να διαπιστώσουν τις γνώσεις των μαθητών στα μαθηματικά (Ginsburg 1997). Έχει γίνει πλέον συνείδηση ότι μια σωστή απάντηση δεν σημαίνει απαραιτήτως ότι ο μαθητής κατανοεί πραγματικά τα μαθηματικά που κρύβονται πίσω από αυτή την απάντηση. Επομένως, έχει αρχίσει να δίνεται περισσότερη προσοχή στις διαδικασίες σκέψης που κρύβονται πίσω από τις σωστές και κυρίως τις λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών. Στο κοινωνικοπολιτιστικό κατασκευαστικό μοντέλο οι διαδικασίες σκέψης των μαθητών αποτελούν ένα σημαντικό μέρος της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών και οι κλινικές συνεντεύξεις, που αναπτύχθηκαν αρχικά από τον Piaget, γίνονται ένα βασικό εργαλείο για αυτές τις διαδικασίες στα μαθηματικά και μπορούν να χρησιμοποιηθούν ερευνητικά για την ανακάλυψη και τον προσδιορισμό γνωστικών διαδικασιών (Ginsburg 1997). Οι συνεντεύξεις θεωρούνται ως η καλύτερη τεχνική για τις μελέτες περίπτωσης λίγων επιλεγμένων μαθητών (Merriam 1998). Με τη μέθοδο της κλινικής συνέντευξης μπορούμε να καταλάβουμε «με ποιο τρόπο τα παιδιά κατασκευάζουν τον προσωπικό τους κόσμο, πώς σκέφτονται, πώς λειτουργούν οι γνωστικές τους διαδικασίες (τουλάχιστον μερικές από αυτές), πώς λειτουργεί ο νους τους» (Ginsburg 1997). Η χρησιμοποίηση αυτής της μεθόδου και η παρότρυνση των μαθητών να σκέφτονται μεγαλοφώνως όταν εργάζονται στην επίλυση προβλήματος μας παρέχουν μια ευκαιρία να αποκαλύψουμε τις διαδικασίες σκέψης, τις αντιλήψεις, τις δυσκολίες και τα γνωστικά εμπόδια που αντιμετωπίζουν.

Πριν από την κύρια έρευνα πραγματοποιήσαμε *προέρευνα* (Βερύκιος 2003), με στόχο τη διαπίστωση των προϋπαρχουσών γνώσεων των μαθητών του Γυμνασίου. Στην προέρευνα διαπιστώθηκαν σημαντικές δυσκολίες των μαθητών σε βασικές έννοιες, πολλές από τις οποίες αναφέρονται και στην σχετική διεθνή ερευνητική βιβλιογραφία.

Ο σχεδιασμός διδακτικού μαθηματικού υλικού με έμφαση στην κατανόηση και η εφαρμογή αυτού του υλικού στην τάξη δεν ήταν εύκολη υπόθεση. Η μετάβαση από τη θεωρία στην πράξη δεν είναι μια αυτονόητη και εύκολη διαδικασία. Το διδακτικό υλικό που σχεδιάσαμε δίνει έμφαση στην κατασκευή *συνδέσεων:*

α) μεταξύ διαφορετικών *αναπαραστάσεων* της έννοιας της συνάρτησης,

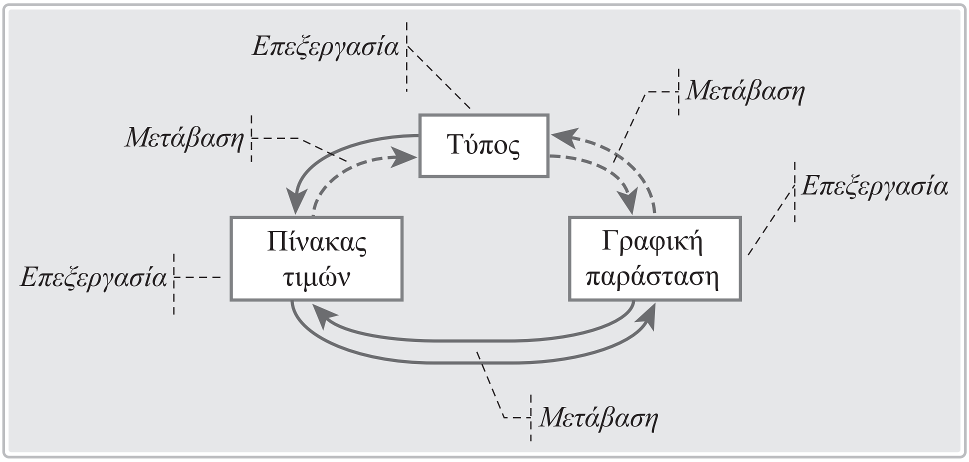
β) μεταξύ των *εννοιών* μεταβλητή, αλγεβρική παράσταση, συνάρτηση, εξίσωση, ανίσωση,
γ) μεταξύ μαθηματικών και επίλυσης «πραγματικών» προβλημάτων και
δ) στην κατανόηση εννοιών και διαδικασιών.

Οι δραστηριότητες που σχεδιάσαμε μας οδηγούν στην ανάπτυξη μιας υποθετικής μαθησιακής τροχιάς, δηλαδή την πρόβλεψη που κάναμε για τον τρόπο που θα θέλαμε να αναπτυχθεί η μάθηση. Συγκεκριμένα, σχεδιάσαμε και υλοποιήσαμε την διδακτική παρέμβαση στην τάξη, στις θεματικές ενότητες «εξισώσεις - ανισώσεις» και «συναρτήσεις» (δύο διαφορετικά κεφάλαια του διδακτικού εγχειριδίου), για 26 διδακτικές ώρες, όσες ακριβώς προβλέπονται από το αναλυτικό πρόγραμμα. Αντίθετα με το αναλυτικό πρόγραμμα, διδάχθηκε πρώτα η έννοια της συνάρτησης, κατόπιν, σε σύνδεση με την έννοια της συνάρτησης, η εξίσωση και τέλος η ανίσωση.

Η διδακτική προσέγγιση, που σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε, είχε ως στόχο να οδηγήσει τους μαθητές σε ενεργητική μάθηση μέσω *διαδικασιών επίλυσης προβλήματος*. Κατά τη διάρκεια των μαθημάτων δόθηκαν στους μαθητές τρεις γραπτές δοκιμασίες (*ενδιάμεσα tests*), που αφορούσαν τις διδαχθείσες έννοιες και ένα μήνα περίπου μετά το πέρας των μαθημάτων δόθηκε μία τελική γραπτή δοκιμασία (*post test*). Κατόπιν επιλέξαμε αρχικά 8 και στη συνέχεια 6 μαθητές από το πειραματικό τμήμα, οι οποίοι έδωσαν από 4 ατομικές ωριαίες συνεντεύξεις. Ο μαθητής σε κάθε συνέντευξη έπρεπε να διαπραγματευθεί ένα πρόβλημα εξισώσεων και ανισώσεων. Οι γραπτές εργασίες, αλλά κυρίως οι συνεντεύξεις των μαθητών της μελέτης αποτέλεσαν την βασική πηγή δεδομένων για την αξιολόγηση της διδακτικής προσέγγισης. Με τις συνεντεύξεις στοχεύαμε στη διερεύνηση συγκεκριμένων ερωτημάτων που αφορούσαν στην κατανόηση των διδασκομένων εννοιών από τους μαθητές της πειραματικής τάξης.

4. Το διδακτικό μοντέλο: δείγματα διαπραγμάτευσης δραστηριοτήτων στην τάξη

Οι μαθητές προσέγγισαν την έννοια της συνάρτησης μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα και την εξερεύνηση κανονικοτήτων. Χρησιμοποιήθηκε ο ορισμός του διδακτικού εγχειρίδιου και ολόκληρος ο «*κύκλος*» *της συνάρτησης* (Βερύκιος, 2010).

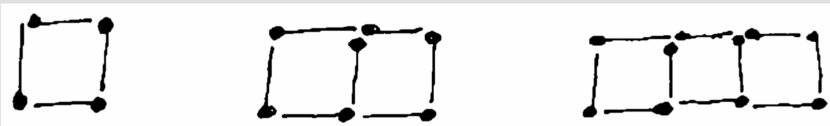


Ο «κύκλος» της συνάρτησης (Βερύκιος 2010)

Θα παρουσιάσουμε επεισόδια από την διαπραγμάτευση τριών δραστηριοτήτων στην τάξη και από την ανάλυσή τους για να αναδειχθεί το διδακτικό μοντέλο που χρησιμοποίησε ο διδάσκων στην τάξη.

Δραστηριότητα 1: Τα σπίρτα

Χρησιμοποιώντας σπίρτα κατασκευάζουμε ορθογώνια σχήματα αποτελούμενα από τετράγωνα όπως φαίνεται παρακάτω.



1. *Πόσα σπίρτα θα χρειαστούν για να κατασκευάσουμε το 4^ο^ σχήμα;*
2. *Πόσα σπίρτα θα χρειαστούν για να κατασκευάσουμε το 10^ο^ σχήμα;*
3. *Πόσα σπίρτα θα χρειαστούν για να κατασκευάσουμε το 100^ο^ σχήμα;*
4. *Πόσα σπίρτα θα χρειαστούν για να κατασκευάσουμε το 500^ο^ σχήμα;*

Η πορεία για να γίνει αντιληπτή μια κανονικότητα ή μια σχέση σε ένα πίνακα και να γραφτεί ο αλγεβρικός κανόνας, δεν είναι απερίφραστα άμεση. Η εξέταση της σκέψης των μαθητών έχει δείξει ότι υπάρχουν πολλά κρίσιμα βήματα σ’ αυτή τη πορεία [...] η φάση της προφορικής περιγραφής είναι ένα σημαντικό και αναγκαίο τμήμα της διαδικασίας αναγνώρισης μιας συνάρτησης και της παράστασής της αλγεβρικά (Stacey & MacGregor 2001). Επιχειρήσαμε ακριβώς να μην παρακάμψουμε αυτό το μέρος της μαθησιακής διαδικασίας. Οι μαθητές εργάζονταν σε μικρές ομάδες. Κατασκεύασαν ένα πίνακα με μια στήλη τη σειρά του ορθογώνιου και την άλλη με τον αριθμό των αντίστοιχων σπίρτων. Παρατήρησαν ότι για κάθε νέο ορθογώνιο *προσθέτουμε 3* σπίρτα στο προηγούμενο. Έτσι συμπλήρωσαν τον πίνακα μέχρι το $10^{ο}$ ορθογώνιο.

Σειρά	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Σπίρτα	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31

Η επόμενη ερώτηση απαιτούσε άλλη προσέγγιση. Μερικοί μαθητές αντιμετώπισαν το *γνωστικό εμπόδιο της αναλογίας* προτείνοντας ως απάντηση το 310:

Μ: αφού το $10^{ο}$ σχήμα αποτελείται από 31 σπίρτα το $100^{ο}$ θα αποτελείται από $31{\cdot}10=310$.

Δ: αν ήταν έτσι πόσα σπίρτα θα έπρεπε να έχει το $2^{ο}$ ορθογώνιο;

Μ: 8 ... όχι διπλάσια, διπλάσια πλην 1, άρα το $10^{ο}$ θα έχει διπλάσια δηλαδή 62, πλην 1, 61

Δ: πώς τον έβγαλες αυτόν το κανόνα; Δηλαδή το $11^{ο}$ σχήμα πόσα σπίρτα θα έχει;

Έπρεπε να διατυπωθεί, προφορικά στην αρχή, ένας κανόνας. Απαιτήθηκε συζήτηση με ολόκληρη την τάξη για το τι σημαίνει *κανόνας* (: *παράγει κάθε ζεύγος και όχι μόνο ένα ή δύο*) για την εύρεση κάποιου όρου. Όμως η παρατήρηση που έκαναν «*προσθέτω 3*» δεν μπόρεσε να οδηγήσει σε κανόνα από μόνη της. Μετά από επαρκή χρόνο που δόθηκε για να σκεφτούν, μερικές ομάδες μαθητών άρχισαν να διατυπώνουν διαφορετικούς κανόνες, στην αρχή προφορικά, για παράδειγμα *3×(αριθμός ορθογωνίου)+1* και κατόπιν με χρήση συμβόλων προσπαθώντας να απαντήσουν στο ερώτημα: *αν x είναι η σειρά του ορθογωνίου και ψ ο αριθμός των σπίρτων που απαιτούνται πως συνδέονται τα x και ψ;* Οι μαθητές κατάφεραν να βρουν διαφορετικούς κανόνες για να περιγράψουν το πρότυπο: $ψ=3x+1$, $ψ=4+(x–1)\cdot 3$, $ψ=4x–(x+1)$. Αυτό το μέρος του μαθήματος ήταν μια *γενεσιουργός δραστηριότητα* (Kieran 2004). Εδώ προέκυψαν με φυσικό τρόπο ερωτήματα όπως:

$Μ_1$: κάνουν και οι τρεις κανόνες γι αυτό το παιγνίδι;

Αφού διαπιστώθηκε ότι και οι τρεις είναι κατάλληλοι νέες ερωτήσεις προέκυψαν:

M_2: πώς και γιατί είναι όλοι ίδιοι;

M_3: μπορώ να πάω από τη μια μορφή στην άλλη;

Το τελευταίο ερώτημα είναι ισοδύναμο με το πιο τυπικό:

Δ: πώς μπορώ να δικαιολογήσω την ισοδυναμία των τριών παραστάσεων;

Αυτό ήταν ένα κίνητρο για *μετασχηματιστική δραστηριότητα* (Kieran 2004). Οι μαθητές φάνηκε να κατανόησαν ότι οι παραστάσεις πρέπει να είναι «ίδιες» με κάποια έννοια. Το κρίσιμο σημείο είναι να συνειδητοποιηθεί ότι «ο αλγεβρικός συμβολισμός [...] εισάγεται σε καταστάσεις, όπου οι μαθητές μπορούν να εκτιμήσουν με ποιο τρόπο τα σύμβολα [υπηρετούν] την παράσταση γενικότητας και την αιτιολόγηση αριθμητικών φαινομένων. Σε εργασίες αυτής της φύσης οι χειρισμοί είναι στην υπηρεσία της δομής και του νοήματος» (Arcavi, 1994). «Η επισήμανση του Arcavi δεν ισχύει μόνο στα αριθμητικά φαινόμενα, αλλά και στα φαινόμενα των αντικειμένων και των σχέσεων μεταξύ τους (όπως στην περίπτωσή μας). Τα διάφορα πλαίσια που προτείνονται για να καθορίσουν την ουσία της άλγεβρας, μπορούν να δώσουν μια προοπτική στην αλγεβρική δραστηριότητα. Μερικές φορές αυτές οι δραστηριότητες θα είναι γενεσιουργές, μερικές φορές μετασχηματιστικές, μερικές φορές συναρτησιακές και μερικές φορές θα περιλαμβάνουν γενικευμένη αριθμητική, αλλά όλες καλύπτονται από σφαιρικές δραστηριότητες που δίνουν *σκοπό* και *νόημα* στην άλγεβρα» (Brown 2004).

Στη συνέχεια του μαθήματος ακολούθησε ο *μετασχηματισμός* των δύο τελευταίων παραστάσεων $4+(x-1)\cdot 3$ και $4x-(x+1)$, που παίρνουν τη μορφή της πρώτης $3x+1$. Αυτή η *δομική* δραστηριότητα δεν πρέπει να θεωρηθεί μικρής σημασίας γιατί δεν έγινε ούτε πολύ εύκολα, ούτε από όλους τους μαθητές. Στη συνέχεια οι μαθητές προσπάθησαν να κατασκευάσουν μια γραφική παράσταση, που μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως στρατηγική επίλυσης του προβλήματος, αλλά ενώ αναπαρίσταναν τα ζεύγη σε καρτεσιανό σύστημα, η ένωση μεταξύ τους ήταν για πολλούς ένα *εμπόδιο* (Leinhardt, Zaslavsky & Stein 1990). Σ' αυτό το σημείο χρησιμοποιήθηκε ο υπολογιστής για να διευκολύνει τη μετάβαση από την κατασκευή στην ερμηνεία της γραφικής παράστασης. Ο υπολογιστής διευκόλυνε επίσης και στο να δειχθεί έστω και εμπειρικά η ισοδυναμία των παραστάσεων. Κατασκευάστηκαν οι γραφικές παραστάσεις και των τριών τύπων και προέκυψε η ίδια ευθεία. Έτσι διαπίστωσαν την *ισοδυναμία των παραστάσεων μέσω μια άλλης αναπαράστασης*, έχοντας έτσι και ένα δεύτερο μηχανισμό ελέγχου στις διερευνήσεις τους.

Η διδασκαλία της λογικής και της απόδειξης στο Λύκειο

Γιάννης Θωμαΐδης

Περίληψη

Στην εργασία αυτή θα επιχειρήσω να δείξω ότι το διδακτικό πρόβλημα της μαθηματικής λογικής και της απόδειξης γενικά, δεν βρίσκεται στην ύπαρξη ή έλλειψη σχετικών παραγράφων στα σχολικά βιβλία, αλλά στην απουσία διδακτικών προτάσεων που λαμβάνουν υπόψη την πραγματική φύση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές. Τις δυσκολίες αυτές έχει αναδείξει τα τελευταία χρόνια μια σειρά ερευνών της Διδακτικής των Μαθηματικών που εξέτασαν λεπτομερώς ορισμένα σημεία αιχμής στην κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας. Πολύ δύσκολα όμως θα υποστήριζε κανείς ότι οι έρευνες αυτές έχουν διαμορφώσει παράλληλα κάποια συγκροτημένη πρόταση προς το χώρο της διδακτικής πράξης.

Στο πρώτο μέρος της εργασίας θα γίνει μια ανασκόπηση του ζητήματος και θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα ορισμένων ερευνών της Διδακτικής των Μαθηματικών που σχετίζονται άμεσα με αυτό. Το δεύτερο και τρίτο μέρος της εισήγησης θα επικεντρωθεί στην ανάλυση των κύριων σημείων μιας πρότασης για τη διδασκαλία των βασικών εννοιών της λογικής και της αποδεικτικής διαδικασίας, κυρίως στους μαθητές της Α′ Λυκείου.

1ο Μέρος — Οι δυσκολίες των μαθητών με την έννοια της απόδειξης: Διάγνωση, έκταση και αιτίες του προβλήματος

Έχουν γίνει αρκετές απόπειρες στο παρελθόν για τη διδασκαλία βασικών στοιχείων της μαθηματικής λογικής στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, με στόχο φυσικά να κατανοηθούν από τους μαθητές έννοιες-κλειδιά, όπως η συνεπαγωγή και η ισοδυναμία, που βρίσκονται στον πυρήνα της αποδεικτικής διαδικασίας στα Μαθηματικά. Η τελευταία συστηματική απόπειρα αυτού του είδους έλαβε χώρα στα τέλη της δεκαετίας του 1970 με την ένταξη στο νέο (τότε) βιβλίο Άλγεβρας της Α′ Λυκείου ενός κεφαλαίου 25 σελίδων που είχε τίτλο «Στοιχεία από τη μαθηματική λογική και εφαρμογές». Αντί όμως να υπάρξει μια ομαλή συνέχεια και εξέλιξη, με βάση τη διδακτική εμπειρία που είχε αποκτηθεί, το συγκεκριμένο κεφάλαιο καταργήθηκε το 1990 μέσα στο γενικότερο κλίμα αποκαθήλωσης των λεγόμενων «Νέων Μαθηματικών». Το νέο βιβλίο που εκδόθηκε τότε (και διατηρείται μέχρι σήμερα) δεν περιείχε κανένα στοιχείο μαθηματικής λογικής και το μόνο σχετικό σύμβολο που επιτρέπονταν να χρησιμοποιηθεί ήταν αυτό της ισοδυναμίας.

Η ολοένα και διευρυνόμενη όμως αδυναμία των περισσότερων μαθητών να κατανοήσουν τις βασικές αρχές της αποδεικτικής διαδικασίας (αδυναμία που εκδηλώνεται με τον πιο οδυνηρό για τους μαθητές τρόπο στις πανελλαδικές εξετάσεις) οδήγησε σε μια απόπειρα μερικής επαναφοράς. Στην αναθεωρημένη έκδοση της Άλγεβρας Α′ Λυκείου που κυκλοφόρησε το 2010, οι συγγραφείς συμπεριέλαβαν ένα εισαγωγικό κεφάλαιο στο οποίο γίνεται μια νέα απόπειρα να παρουσιαστούν στους μαθητές οι βασικές έννοιες της μαθηματικής λογικής.[1]

Μερικές ευρέως διαδεδομένες όψεις των παρανοήσεων που αποκτούν οι μαθητές για την έννοια της απόδειξης μας αποκαλύπτουν κάθε χρόνο τα γραπτά των πανελλαδικών εξετάσεων της Γ′ Λυκείου. Θα χρησιμοποιήσω ως χαρακτηριστικό παράδειγμα ορισμένες «αποδείξεις» που δόθηκαν από μαθητές στο Θέμα Δ των Μαθηματικών Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης του Μαΐου 2010:

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ η οποία για κάθε $x \in R$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) \neq x \quad \text{και} \quad f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t)-t}\,d$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)-x}, \quad x \in R.$$ (Μονάδες 5)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \left(f(x)\right)^2 - 2xf(x), \ x \in R$, είναι σταθερή. (Μονάδες 7)

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2+9}, \ x \in R$. (Μονάδες 6)

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$, για κάθε $x \in R$.(Μονάδες 7)

[1] Για λεπτομερέστερη αναφορά στο συγκεκριμένο ζήτημα, βλέπε Γ. Θωμαΐδη: Λογική και Διδακτική στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου. *Ευκλείδης Γ΄* τεύχος 73, 102–121. (2010)

Παρατηρούμε ότι και στα τέσσερα ερωτήματα ζητείται από τους μαθητές μια απόδειξη, αλλά υπάρχει μεγάλη διαφορά στις «τεχνικές» απαιτήσεις κάθε περίπτωσης. Στο Δ1 αρκεί η παραγώγιση της συνάρτησης – ολοκλήρωμα και μια αλγεβρική πράξη, κάτι που εντάσσεται μέσα στα πολύ βασικά στοιχεία της διδασκαλίας της Ανάλυσης στην Γ΄ Λυκείου. Το ίδιο ισχύει και για το Δ2, επειδή η απόδειξη της σταθερότητας μέσω του μηδενισμού της παραγώγου ανήκει στον πυρήνα της σχετικής «μεθοδολογίας». Η ανατροπή όμως έρχεται με το Δ3, όπου χρειάζεται πλήρης αξιοποίηση και επέκταση του Δ2 καθώς και του φαινομενικά «αθώου» δεδομένου $f(x) \neq x$ για τη μελέτη του προσήμου της διαφοράς $f(x) - x$. Ο μαθητής που καλείται να αντιμετωπίσει το ερώτημα Δ3 πρέπει να έχει κατανοήσει, εκτός από τις σχετικές γνώσεις Ανάλυσης που διδάχθηκε στην Γ΄ Λυκείου, εκείνα τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα της αποδεικτικής διαδικασίας που διαφοροποιούν τα Μαθηματικά από άλλες επιστήμες. Δηλαδή την επαλήθευση ενός ισχυρισμού όχι με την εκτέλεση πραγματικών ή νοητικών πειραμάτων ή αλγορίθμων, αλλά με τη λογική παραγωγή του μέσα από το συνδυασμό υποθέσεων και προτάσεων που έχουν προηγουμένως επαληθευτεί.[2] Αυτή η συνθετική διαδικασία βλέπουμε να εκτυλίσσεται στην επίσημη λύση που έδωσε η Κεντρική Επιτροπή Εξετάσεων για το Δ3:

Από το ερώτημα **Δ2:** $g(x) = c \Leftrightarrow \left(f(x)\right)^2 - 2xf(x) = c$.

Για x = 0 προκύπτει: $\left(f(0)\right)^2 = c$.

Επειδή $f(0) = 3$, θα είναι $c = 9$ και άρα $g(x) = 9,\ x \in R$.

Η $\varphi(x) = f(x) - x$ είναι συνεχής στο R και $\varphi(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ (υπόθεση). Άρα η φ(x) διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R και επειδή $\varphi(0) = 3 > 0$, θα είναι $\varphi(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - x > 0$ για κάθε $x \in R$. Άρα για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$$g(x) = 9 \Leftrightarrow \left(f(x)\right)^2 - 2xf(x) = 9 \Leftrightarrow \left(f(x)\right)^2 - 2xf(x) + x^2 = 9 + x^2$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x) - x\right)^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow \left|f(x) - x\right| = \sqrt{x^2 + 9}$$

$$\Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2 + 9} \ \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$$

Ο συγκεκριμένος τρόπος εργασίας που οδηγεί στην απόδειξη της ζητούμενης ισότητας φαίνεται ότι υπερβαίνει κατά πολύ το γνωστικό επίπεδο της μεγάλης

[2] Οι παρατηρήσεις αυτές εγείρουν βέβαια πολλά ερωτηματικά για την εγκυρότητα της προτεινόμενης από την Κεντρική Επιτροπή Εξετάσεων μοριοδότησης των ερωτημάτων.

πλειοψηφίας των μαθητών της Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης στην Γ΄ Λυκείου. Οι επόμενες «αποδείξεις», τις οποίες παρουσιάζω όπως ακριβώς δόθηκαν από μαθητές στις πανελλαδικές εξετάσεις, είναι αντιπροσωπευτικές ενός πολύ μεγάλου αριθμού παρόμοιων απαντήσεων στο θέμα Δ3.[3]

1η περίπτωση: Η παρανόηση μεταξύ συνεπαγωγής και ισοδυναμίας:

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow f(x)-x=\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow \left(f(x)-x\right)^2=x^2+9$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+9 \Leftrightarrow 9=f^2(x)-2xf(x)$$

$$\overset{(\Delta 2)}{\Leftrightarrow} g(x)=f^2(x)-2xf(x) \quad (\text{ισχύει})$$

2η περίπτωση: Η παρανόηση σε ρόλο «μεθοδολογίας»:

Το ζητούμενο το παίρνω ως δεδομένο και πρέπει να καταλήξω σε κάτι που ισχύει:

$$f'(x)=1+\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+9}}\cancel{2}x=\frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}+x-x}=\frac{f(x)}{f(x)-x}$$

που ισχύει, άρα η $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$

Οι προηγούμενες «αποδείξεις», που ανήκουν σε γραπτά της κατηγορίας «πολύ καλά» ή «καλά», αποκαλύπτουν την άμεση επίδραση των διδακτικών βιβλίων και της συνακόλουθης διδακτικής μεθοδολογίας: Η μεγάλη πλειοψηφία των αλγεβρικών αποδείξεων που οι μαθητές αρχίζουν να μελετούν στην Α΄ Λυκείου είναι αποδείξεις στις οποίες το ζητούμενο αποδεικνύεται ισοδύναμο με«κάτι που ισχύει». Οι ισοδυναμίες του βιβλίου είναι βέβαια ορθές, αλλά η κατά κόρον εφαρμογή αυτής της διαδικασίας την έχει αναγάγει (τουλάχιστον στα μάτια των μαθητών) σε «αποδεικτική μεθοδολογία»: *Για να αποδείξω μια ισότητα αρκεί να ξεκινήσω από το ζητούμενο και να καταλήξω σε κάτι που ισχύει*. Ο μαθητής της περίπτωσης (1) εφαρμόζει τη «μεθοδολογία» σχεδόν με αλγοριθμικό τρόπο και για το λόγο αυτό «παραβλέπει» το στοιχειώδες γεγονός ότι ο τετραγωνισμός μιας ισότητας δεν παράγει ισοδύναμη ισότητα. Στην περίπτωση (2) έχουμε προφανώς έναν δε-

[3] Τα παραδείγματα προέρχονται από το 53ο Βαθμολογικό Κέντρο Δυτικής Θεσσαλονίκης, το οποίο συγκεντρώνει μεγάλο αριθμό γραπτών από πολλούς διαφορετικούς νομούς. Αντίστοιχη “συγκομιδή” γίνεται κάθε χρόνο εδώ και αρκετά χρόνια.

ξιοτέχνη του είδους! Επιδεικνύοντας άριστη γνώση της παραγώγισης σύνθετων συναρτήσεων και μεγάλη άνεση στους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς κατορθώνει κυριολεκτικά να καταλήξει σε «κάτι που ισχύει», αν αγνοήσουμε τη «λεπτομέρεια» ότι υπάρχουν και άπειρες άλλες συναρτήσεις που έχουν την ίδια ακριβώς ιδιότητα. Με δυο λόγια, η τυφλή εφαρμογή της «μεθοδολογίας» δεν αφήνει κανένα περιθώριο στους μαθητές να ελέγξουν την εγκυρότητα αυτών που γράφουν.

Οι δυσκολίες των μαθητών με την έννοια της απόδειξης δεν παρατηρούνται βεβαίως μόνο στην Ελληνική εκπαίδευση. Από τις πολυάριθμες σχετικές έρευνες που έχουν δημοσιευτεί σε έγκυρα περιοδικά της Διδακτικής των Μαθηματικών θα αναφέρω ορισμένες που θεωρώ ότι παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Σε μια έρευνα που πραγματοποιήθηκε στο Ισραήλ με 249 πρωτοετείς φοιτητές θετικών επιστημών (Πληροφορικής, Βιολογίας κ.λπ.), που είχαν πολύ ισχυρό υπόβαθρο στα Μαθηματικά, δόθηκε μεταξύ άλλων το επόμενο ερώτημα:[4]

Να βρείτε για ποιες τιμές του x η εφαπτομένη του γραφήματος της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+4, & x<2 \\ 3x-6, & x\geq 2 \end{cases}$$

είναι παράλληλη προς την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(–3, f(–3)) και Β(4, f(4)).

Ένας μεγάλος αριθμός φοιτητών, αντί να υπολογίσει την παράγωγο της συνάρτησης, να τη θέσει ίση με το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ και να λύσει την αντίστοιχη εξίσωση, έκανε έναν έλεγχο της παραγωγισιμότητας στο σημείο $x=2$, και έδωσε την ακόλουθη απάντηση:

Επειδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x=2$, δεν θα ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα [–3, 4] και επομένως δεν θα υπάρχει εφαπτομένη παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ.

Η συγκεκριμένη συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα [–3, 4] και παραγωγίσιμη στο $(-3, 2)\cup(2, 4)$ με παράγωγο

$$f'(x)=\begin{cases} -2x, & x<2 \\ 3 & x>2 \end{cases}$$

Όπως βλέπουμε λοιπόν δεν ισχύει η μια από τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής (η παραγωγισιμότητα στο εσωτερικό του διαστήματος), αλλά για

---

[4] M. Amit & N. Movshovitz-Hadar: Applications of R-Rules as Exhibited in Calculus Problem Solving. Proceedings *of the 14th P.M.E. Conference*, vol. I, 57–64. (1991)

τον αριθμό

$$-\frac{11}{14} \in (-3,4) \quad \text{είναι} \quad f'\left(-\frac{11}{14}\right) = \frac{11}{7} = \frac{f(4) - f(-3)}{4 - (-3)} .$$

Δηλαδή, υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη προς τη χορδή με άκρα τα σημεία Α(–3, f(–3)), Β(4, f(4))

Η απάντηση των φοιτητών θα μπορούσε να αποδοθεί σε μια ευρύτατα διαδεδομένη παρανόηση για τη σχέση των υποθέσεων και των συμπερασμάτων ενός θεωρήματος, η οποία στην περίπτωση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής έχει την εξής πάνω – κάτω μορφή:

- Αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα, τότε υπάρχει μια τουλάχιστον εφαπτομένη παράλληλη προς τη χορδή της γραφικής παράστασης που αντιστοιχεί στα άκρα του διαστήματος. Άρα (εδώ εκδηλώνεται η παρανόηση):
- Αν η συνάρτηση **δεν είναι** παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο του διαστήματος, τότε **δεν υπάρχει** εφαπτομένη παράλληλη προς τη χορδή της γραφικής παράστασης που αντιστοιχεί στα άκρα του διαστήματος.

Μιλώντας με όρους της μαθηματικής λογικής θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι βασικές συνιστώσες της συγκεκριμένης παρανόησης είναι οι εξής:

α) Η ταύτιση μιας συνεπαγωγής με την αντίθετή της (αν δεν ισχύει η υπόθεση ενός θεωρήματος τότε δεν ισχύει και το συμπέρασμά του).

β) Η ταύτιση μιας συνεπαγωγής με ισοδυναμία (μετατροπή μιας ιδιότητας σε κριτήριο).

***

Σε μια άλλη έρευνα που πραγματοποιήθηκε στην Αγγλία με 2663 μαθητές υψηλής επίδοσης που τελείωναν τη Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου, εξετάστηκε η δυνατότητά τους να κατανοήσουν την έννοια της συνεπαγωγής μέσα από το ακόλουθο πρόβλημα:[5]

> Η Ελένη και ο Κώστας εξετάζουν μερικές ιδιότητες των αριθμών 3 και 11.
> Παρατηρούν ότι το ΑΘΡΟΙΣΜΑ (3 + 11) είναι ΑΡΤΙΟΣ
> Παρατηρούν ότι το ΓΙΝΟΜΕΝΟ (3 × 11) είναι ΠΕΡΙΤΤΟΣ

[5] C. Hoyles & D. Küchemann: Students' understanding of logical implication. *Educational Studies in Mathematics* 51, 193–223. (2002)