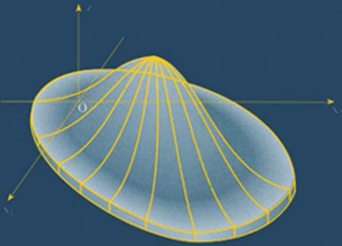
ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΓΡ. ΡΟΥΣΣΑ

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ



Επιμέλεια - Μετάφραση

Δημήτριος Α. Ιωαννίδης

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το σύγγραμμα αυτό αποτελεί μετάφραση των πρώτων δέκα κεφαλαίων του βιβλίου "A First Course in Mathematical Statistics" του συγγραφέα που εκδόθηκε το 1973 από τον εκδοτικό οίκο Addison - Wesley των Η.Π.Α. Η αρχή της μετάφρασης έγινε πριν από δέκα περίπου χρόνια, αλλά διεκόπη εξαιτίας απροσδοκήτων γεγονότων. Ο μεταφραστής συνέχισε το έργο τούτο και τελικά το συμπλήρωσε. Η συγγραφή, αλλά και η δόκιμη μετάφραση ενός συγγράμματος, αποτελούν μνημειώδες έργο και είναι σχεδόν αναπόφευκτο να μην περιέχουν ατέλειες. Το ίδιο αναμφισβήτητα συμβαίνει και με το βιβλίο τούτο. Ο συγγραφέας και ο μεταφραστής είναι υπεύθυνοι, αντίστοιχα, για την ορθότητα των αποτελεσμάτων και την ακριβή απόδοσή τους στην Ελληνική γλώσσα.

Σε ό,τι αφορά το επίπεδο και το περιεχόμενο του βιβλίου αυτού, θα πρέπει να σημειωθεί ότι, στην διεθνή βιβλιογραφία και ειδικότερα στην Αγγλική γλώσσα, υπάρχουν πολυάριθμα εγχειρίδια Θεωρίας Πιθανοτήτων, τα οποία χωρίζονται αδρά στις επόμενες δύο κατηγορίες: Εκείνα που απαιτούν υψηλό επίπεδο μαθηματικής προπαρασκευής, όπως θεωρία πραγματικών και μιγαδικών συναρτήσεων και θεωρίας μέτρου και ολοκληρώματος, και συγγράμματα μάλλον χαμηλού μαθηματικού επιπέδου. Σε βιβλία της δεύτερης αυτής κατηγορίας, αυστηρές αποδείξεις αντικαθίστανται από επιχειρηματολογία διαισθητικού χαρακτήρα. Η συγγραφή του βιβλίου τούτο είχε σαν σκοπό το γεφύρωμα του πιο πάνω χάσματος μεταξύ προχωρημένων και στοιχειωδών εγχειριδίων Θεωρίας Πιθανοτήτων. Το απαιτούμενο μαθηματικό υπόβαθρο είναι μία πρώτη, αλλά πλήρης σειρά μαθημάτων σε Μαθηματικό Λογισμό και στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας. Δεν προϋποθέτει γνώση Πιθανοθεωρίας σε οποιοδήποτε επίπεδο.

Το σύγγραμμα τούτο χωρίζεται σε δώδεκα κεφάλαια και περιλαμβάνει διάφορα παραρτήματα. Ένα από τα χαρακτηριστικά του βιβλίου είναι η εισαγωγή και εκτενής χρησιμοποίηση της έννοιας της μετρησιμότητας. Η κατανόηση της έννοιας αυτή είναι απόλυτα εφικτή με τη μαθηματική ωριμότητα που αναφέρθηκε πιο πάνω σαν προϋπόθεση μελέτης του τόμου αυτού. Στο βιβλίο τούτο γίνεται εκτενής και λεπτομερής συζήτηση πιθανοθεωρητικών εφαρμογών συνδυαστικής ανάλυσης, παρουσιάζονται σχεδόν όλες οι κοινές κατανομές και μελετώνται οριακές σχέσεις μεταξύ μερικών απ' αυτές. Επίσης συζητούνται διεξοδικά πολλά βασικά οριακά θεωρήματα, όπως επίσης και πολυάριθμες περιπτώσεις μετασχηματισμού τυχαίων μεταβλητών.

Η Θεωρία Πιθανοτήτων, σε οποιοδήποτε επίπεδο, είναι άκρως ενδιαφέρον και εκτενές αντικείμενο. Η επιλογή των θεμάτων του τόμου τούτου έγινε με κριτήριο την άμεσο εφαρμογή τους στην Στατιστική. Υπάρχουν ήδη σε κυκλοφορία δύο τόμοι Στατιστικής Συμπερασματολογίας, Εκτιμητική, Τόμος I, και Έλεγχος Υποθέσεων, Τόμος II, που αποτελούν μεταγλώττιση (από τον Δρ. Γεώργιο Σταματέλο) στην ομιλούμενη απλή δημοτική των αρχικών συγγραμμάτων γραμμένων στην καθαρεύουσα. Έτσι με την έκδοση του τόμου αυτού, τίθεται στην διάθεση του Ελληνικού αναγνωστικού κοινού ένα πλήρες τρίτομο έργο στην Πιθανοθεωρία και Στατιστική Συμπερασματολογία, σύγχρονο σε διεθνές επίπεδο. Η κατανόηση της ύλης στα συγγράμματα αυτά θα προετοιμάσει τον Έλληνα φοιτητή ή φοιτήτρια για μεταπτυχιακές σπουδές σε οποιοδήποτε Πανεπιστήμιο, και θα δώσει το απαιτούμενο υπόβαθρο για εφαρμογή των αντικειμένων της Πιθανοθεωρίας και Στατιστικής στην δημόσια διοίκηση ή οργανισμούς και επιχειρήσεις.

Ο συγγραφέας
Γ.Γ.Ρ
Davis, California, Νοέμβριος 1992

Ο μεταφραστής
Δ.Α.Ι
Πάτρα, Νοέμβριος 1992

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΣΥΝΤΜΗΣΕΙΣ

$\mathcal{F}$, $\mathcal{A}$	(συνήθως) σώμα και σ-σώμα, αντίστοιχα
$\mathcal{F}(\mathcal{C})$, $\sigma(\mathcal{C})$	σώμα και σ-σώμα, αντίστοιχα, που παράγεται από την κλάσση $\mathcal{C}$.
$\mathcal{A}_\Gamma$	σ-σώμα μελών του $\mathcal{A}$ που είναι υποσύνολα του Γ.
$(\mathcal{S}, \mathcal{A})$	μετρήσιμος χώρος
$\mathbb{R}^k$, $\mathcal{B}^k$, $\kappa \geq 1$	κ-διάστατος Ευκλείδιος χώρος και σ-σώμα Borel, αντίστοιχα.
$(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$	πραγματική ευθεία του Borel
P, $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, P)$	μέτρο πιθανότητας και πιθανοθεωρητικός χώρος, αντίστοιχα.
$\uparrow$, $\downarrow$	αύξουσα (μη-φθίνουσα) και φθίνουσα (μη-αύξουσα), αντίστοιχα
I_A	Δείκτρια συνάρτηση του συνόλου Α.
τ.π. ή π.τ.	τυχαίο πείραμα ή πείραμα τύχης.
τ.μ.	τυχαία μεταβλητή
τ.δ.	τυχαίο διάνυσμα
π.π.	πυκνότητα πιθανότητας
σ.κ.	συνάρτηση κατανομής
$X(\mathcal{S})$	εικόνα του Χ.
$X_{(j)}$ ή Y_j	η j-οστή διατεταγμένη στατιστική συνάρτηση
B(n, p)	Διωνυμική κατανομή (ή τ.μ.) με παραμέτρους n και p
P(λ)	Poisson κατανομή (ή τ.μ.) με παράμετρο λ
$N(\mu, \sigma^2)$	Κανονική κατανομή (ή τ.μ.) με παραμέτρους μ και σ^2.
Φ	συνάρτηση κατανομής της $N(\mu, \sigma^2)$.
$\mathcal{X}_r^2$	X_i–τετράγωνο κατανομή (ή τ.μ.) με r βαθμούς ελευθερίας (β.ε.).
U(α, β) ή R(α, β)	Ομοιόμορφη ή ορθογωνική κατανομή (ή τ.μ.) με παραμέτρους α και β.
t_r	(Student) t κατανομή (ή τ.μ.) με r β.ε.

F_{r_1, r_2}	F κατανομή (ή τ.μ.) με r_1 και r_2 β.ε.
$\mathscr{X}'^{2}_{r;\delta}$	μη κεντρική X_i-τετράγωνο κατανομή με r β.ε. και μη κεντρική παράμετρο δ.
$t'_{r;\delta}$	μη κεντρική t κατανομή με r β.ε. και μη κεντρική παράμετρο δ.
$F'_{r_1, r_2;\delta}$	μη κεντρική F κατανομή με r_1, r_2 β.ε. και μη κεντρική παράμετρο δ.
$E(X)$ ή EX ή $\mu(X)$ ή μ_X ή απλά μ	μαθηματική ελπίδα ή μέση τιμή ή μέσος της X.
$\sigma^2(X)\,(\sigma(X))$ ή $\sigma^2_X\,(\sigma_X)$ ή απλά $\sigma^2(\sigma)$	διασπορά (τυπική απόκλιση) της X
$C(X, Y), \varrho(X, Y)$	Συνδιασπορά και συντελεστής συσχέτισης, αντίστοιχα, των X και Y.
$\phi_{\mathbf{X}}$ ή $\phi_{X_1,\ldots,X_n}$ ϕ_X ή απλά ϕ	χαρακτηριστική συνάρτηση (χ.σ.)
$M_{\mathbf{X}}$ ή $M_{X_1,\ldots,X_n}$ M_X ή απλά M	ροπογεννήτρια
η_X	παραγοντική ροπογεννήτρια
$\xrightarrow{\sigma.\beta.}$	σχεδόν βεβαία (σ.β.) σύγκλιση ή σύγκλιση με πιθανότητα 1.
$\xrightarrow{P}, \xrightarrow{\kappa}, \xrightarrow{\tau.\mu.}$	σύγκλιση με την έννοια της πιθανότητας, κατανομής, τετραγωνικού μέσου, αντίστοιχα
Κ.Ο.Θ.	Κεντρικό Οριακό Θεώρημα
Ν.Μ.Α.	Νόμοι Μεγάλων Αριθμών
Α.Ν.Μ.Α.	Ασθενής Νόμος Μεγάλων Αριθμών
Ι.Ν.Μ.Α.	Ισχυρός Νόμος Μεγάλων Αριθμών

1

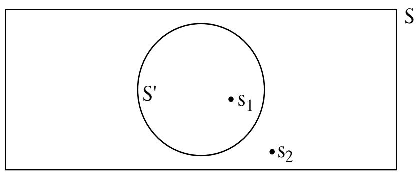
ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΟΛΟΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΦΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

1.1. Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό καταρχήν εισάγονται οι βασικές έννοιες της θεωρίας συνόλων με αντικειμενικό σκοπό την υιοθέτηση συγκεκριμένης ορολογίας και συμβολισμού. Στην συνέχεια ορίζονται οι έννοιες του σώματος, του σ-σώματος, όπου διατυπώνονται και αποδεικνύονται ορισμένα σχετικά θεωρήματα. Τέλος, ορίζεται η έννοια του μετρήσιμου χώρου και μελετώνται μερικές ενδιαφέρουσες συγκεκριμμένες περιπτώσεις.

1.2. Ορισμοί και συμβολισμοί

Ένα **σύνολο** S είναι μία (καλώς ορισμένη) συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων, τα οποία συμβολίζουμε με το s. Το γεγονός ότι το s είναι **μέλος** του S ή **στοιχείο** του S ή ότι **ανήκει** στο S συμβολίζεται με $s \in S$. Η άρνηση του γεγονότος αυτού συμβολίζεται με $s \notin S$. Λέμε ότι το σύνολο S' είναι **υποσύνολο** του S ή ότι **ανήκει** στο S, και γράφουμε $S' \subseteq S$, αν για κάθε $s \in S'$ ισχύει $s \in S$. Λέμε ότι το S' είναι **γνήσιο υποσύνολο** του S, και γράφουμε $S' \subset S$, αν $S' \subseteq S$ και αν υπάρχει $s \in S$ τέτοιο ώστε $s \notin S'$. Τα σύνολα συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα της αλφαβήτου ενώ τα στοιχεία των συνόλων με μικρά γράμματα.



Εικ. 1.1.
$S' \subseteq S$. Πράγματι, $S' \subset S$, επειδή $s_2 \in S$, και $s_2 \notin S'$

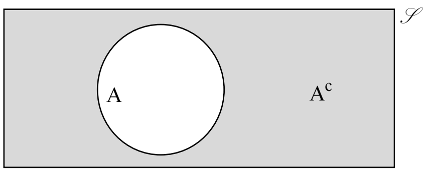
Οι έννοιες που αναφέρθηκαν παραπάνω επεξηγούνται γραφικά με την βοήθεια των διαγραμμάτων **του Venn** (βλ. Εικόνες 1.1–1.7).

Σε ό,τι ακολουθεί θα θεωρούμε ένα **βασικό σύνολο** ή **χώρο** που θα συμβολίζουμε με το $\mathscr{S}$ και που θα είναι, εν γένει, διαφορετικό για τα διάφορα προβλήματα που θα μας απασχολούν. Όλα τα υπόλοιπα σύνολα, θα είναι υποσύνολα του $\mathscr{S}$. Δύο υποσύνολα του $\mathscr{S}$, S' και S, $\mathscr{S}$ λέγονται **ίσα** και γράφουμε $S'=S$, αν $S'\subseteq S$ και $S\subseteq S'$.

Συνολοθεωρητικές πράξεις

1. Το συμπλήρωμα αναφορικά με το $\mathscr{S}$ του συνόλου A, συμβολιζόμενο με A^c ορίζεται από την σχέση (βλ. επίσης Εικόνα 1.2)

$$A^c = \{s\in S;\ s\notin A\}$$



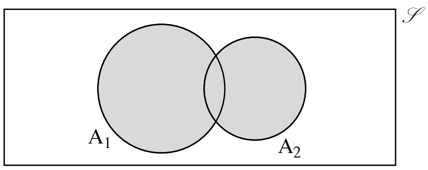
Εικ. 1.2.
Το A^c είναι το γραμμοσκιασμένο χωρίο.

Έστω τώρα I ένα οποιοδήποτε σύνολο δεικτών. Τότε:

2. Η **ένωση** των συνόλων A_j, $j\in I$, συμβολιζόμενη με $\bigcup\limits_{j\in I} A_j$, ορίζεται από την σχέση

$$\bigcup_{j\in I} A_j = \{s\in S\ ;\ s\in A_j \text{ για } \textbf{ένα τουλάχιστο } j\in I\}$$

Για $I=\{1, 2\}$ η ένωση $\bigcup\limits_{j\in I} A_j = A_1\cup A_2$ παριστάνεται γραφικά στην Εικόνα 1.3.

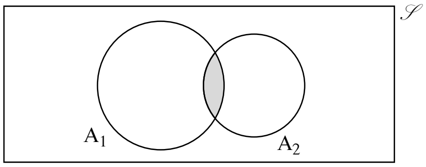


Εικ. 1.3.
Η ένωση $A_1\cup A_2$ είναι το γραμμοσκιασμένο χωρίο.

3. Η **τομή** των συνόλων A_j, $j\in I$ συμβολιζόμενη με $\bigcap_{j\in I} A_j$, ορίζεται από την σχέση

$$\bigcap_{j\in I} A = \{s\in S\ ;\ s\in A \ \textbf{για όλα} \text{ τα } j\in I\}.$$

Για $I=\{1, 2\}$ η τομή $\bigcap_{j\in I} A_j = A_1\cap A_2$ παριστάνεται γραφικά στην Εικόνα 1.4.



Εικ. 1.4.
Η τομή είναι το γραμμοσκιασμένο χωρίο.

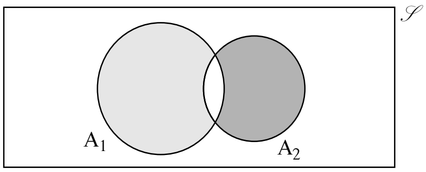
4. Η **διαφορά** $A_1–A_2$ ορίζεται από την σχέση

$$A_1–A_2 = \{s\in S\ ;\ s\in A_1,\ \ s\notin A_2\}.$$

Συμμετρικά

$$A_2–A_1 = \{s\in S\ ;\ s\in A_2,\ \ s\notin A_1\}.$$

και, εν γένει, $A_1–A_2 \neq A_2–A_1$ (βλ. σχετικά την Εικόνα 1.5).

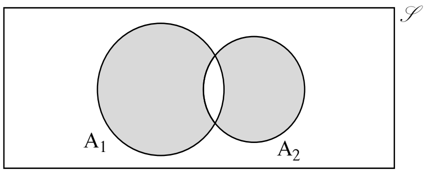


Εικ. 1.5.
Η διαφορά $A_1–A_2$ είναι το γραμμοσκιασμένο χωρίο ▒, ενώ η $A_2–A_1$ είναι το γραμμοσκιασμένο χωρίο ▓.

5. Η **συμμετρική διαφορά** $A_1\Delta A_2$ ορίζεται από τη σχέση

$$A_1\Delta A_2 = (A_1–A_2)\cup(A_2–A_1)$$

(βλ. σχετικά την Εικόνα 1.6).



Εικ. 1.6.
Η συμμετρική διαφορά είναι το γραμμοσκιασμένο χωρίο.

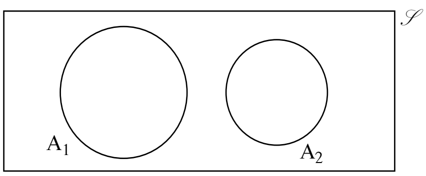
Διαπιστώνεται εύκολα ότι

$$A_1 - A_2 = A_1 \cap A_2^c \quad A_2 - A_1 = A_2 \cap A_1^c \quad \text{και} \quad A_1 \Delta A_2 = (A_1 \cup A_2) - (A_1 \cap A_2).$$

Έτσι οι πράξεις (4) και (5) μπορούν να εκφρασθούν με την βοήθεια των πράξεων (1) –(3).

Περαιτέρω ορισμοί και συμβολισμοί

Ένα σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο καλείται το **κενό σύνολο** και συμβολίζεται με $\varnothing$. Δύο σύνολα A_1 και A_2 λέγονται ξένα μεταξύ τους, αν $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Τα σύνολα A_j, $j \in I$, λέγονται **ανά δύο** ή **αμοιβαία ξένα,** αν $A_i \cap A_j = \varnothing$ για όλα τα $i, j \in I$ με $i \neq j$ (βλ. Εικόνα 1.7.).



Εικ. 1.7.
Τα σύνολα A_1 και A_2 είναι ξένα, δηλ. $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.
Για τον λόγο αυτό γράφουμε τότε $A_1 \cup A_2 = A_1 + A_2$.

Σε μια τέτοια περίπτωση συνήθως γράφουμε

$$A_1 + A_2 \ \text{ή}\ A_1 + \ldots + A_n = \sum_{j=1}^{n} A_j \quad \text{ή, γενικότερα,} \quad \sum_{j \in I} A_j,$$

αντί για

$$A_1 \cup A_2 \quad \text{ή} \quad A_1 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \quad \text{ή} \quad \bigcup_{j \in I} A_j, \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Όταν δεν επιθυμούμε να καθορίσουμε τα σύνολα δεικτών I (το οποίο συνήθως θα είναι το σύνολο $\{1, 2, \ldots n\}$ ή το σύνολο $\{1, 2, \ldots\}$ θα γράφουμε απλώς

$$\bigcup_j A_j, \quad \sum_j A_j, \quad \bigcap A_j.$$

Μερικές βασικές ιδιότητες των συνολοθεωρητικών πράξεων

1. $\mathscr{S}^c=\varnothing$, $\varnothing^c=\mathscr{S}$, $(A^c)^c=A$.

2. $\mathscr{S}\cup A=\mathscr{S}$, $\varnothing\cup A=A$, $A\cup A^c=\mathscr{S}$, $A\cup A^c=A$

3. $\mathscr{S}\cap A=A$, $\varnothing\cap A=\varnothing$, $A\cap A^c=\varnothing$, $A\cap A=A$.

Οι ανωτέρω ιδιότητες είναι προφανείς όπως επίσης είναι και η ιδιότητα: $\varnothing\subseteq A$ για κάθε υποσύνολο A του $\mathscr{S}$. Επίσης έχουμε

4. $\left.\begin{array}{l} A_1\cup A_2=A_2\cup A_1 \\ A_1\cap A_2=A_2\cap A_1 \end{array}\right\}$ (Αντιμεταθετικοί νόμοι)

5. $\left.\begin{array}{l} A_1\cup(A_2\cup A_3)=(A_1\cup A_2)\cup A_3 \\ A_1\cap(A_2\cap A_3)=(A_1\cap A_2)\cap A_3 \end{array}\right\}$ (Προσεταιριστικοί νόμοι)

6. $\left.\begin{array}{l} A\cap(\bigcup_j A_j)=\bigcup_j (A\cap A_j) \\ A\cup(\bigcap_j A_j)=\bigcap_j (A\cup A_j) \end{array}\right\}$ (Επιμεριστικοί νόμοι)

όπως είναι εύκολο να διαπιστωθεί.

Στην επόμενη ταυτότητα η ένωση συνόλων γράφεται ως άθροισμα (αμοιβαία ξένων) συνόλων, πράγμα το οποίον είναι πολλές φορές χρήσιμο.

Μία ταυτότητα

$$\bigcup_j A_j = A_1+A_1^c\cap A_2+A_1^c\cap A_2^c\cap A_3+\ldots$$

Υπάρχουν δύο ακόμη ενδιαφέρουσες ιδιότητες των συνολοθεωρητικών πράξεων, οι οποίες συνδέουν το συμπλήρωμα με την ένωση και την τομή. Οι ιδιότητες αυτές είναι γνωστές σαν **Νόμοι του De Morgan**

i) $(\bigcup_j A_j)^c=\bigcap_j A_j^c$

ii) $\left(\bigcap_j A_j\right)^c = \bigcup_j A_j^c$.

Σαν ένα παράδειγμα απόδειξης μιας συνολοθεωρητικής σχέσης αποδεικνύουμε την ιδιότητα (i).

Απόδειξη της ιδιότητας (i)

Σύμφωνα με τον ορισμό της ισότητας συνόλων πρέπει να δειχθεί ότι

$$\text{α) } \left(\bigcup_j A_j\right)^c \subseteq \bigcap_j A_j^c \quad \text{και} \quad \text{β) } \bigcap_j A_j^c \subseteq \left(\bigcup_j A_j\right)^c .$$

Πράγματι:

α) Έστω $s \in \left(\bigcup_j A_j\right)^c$. Τότε $s \notin \bigcup_j A_j$, έτσι ώστε $s \notin A_j$ για κανένα j. Άρα $s \in A_j^c$ για κάθε j, συνεπώς $s \in \bigcap_j A_j^c$

β) Έστω $s \in \bigcap_j A_j^c$. Τότε $s \in A_j^c$ για κάθε j έτσι ώστε $s \notin A_j$ για κανένα j. Άρα $s \notin \bigcup_j A_j$ και επομένως $s \in \left(\bigcup_j A_j\right)^c$. ■

1.3. Η έννοια του σώματος και σχετικές ιδιότητες

Όπως θα δούμε αργότερα στο σύγγραμμα αυτό, η έννοια του σώματος, όπως και εκείνη του σ-σώματος που ορίζεται στο επόμενο εδάφιο, είναι απαραίτητες για την διατύπωση σε γενική μορφή ορισμένων ιδιοτήτων και την απόδειξη μερικών θεωρημάτων. Για τους λόγους αυτούς και το γεγονός ότι οι έννοιες αυτές δεν είναι απρόσιτες για δευτεροετείς φοιτητές των Μαθηματικών· κρίναμε απαραίτητη την εισαγωγή και στοιχειώδη μελέτη τους.

Ορισμός 1.1.

Μία κλάση υποσυνόλων του $\mathscr{S}$ καλείται **σώμα** και συνήθως συμβολίζεται με το $\mathcal{F}$ αν :

($\mathcal{F}_1$) Η $\mathcal{F}$ είναι μία μη κενή κλάση.

($\mathcal{F}_2$) Το γεγονός ότι $A \in \mathcal{F}$ συνεπάγεται ότι $A^c \in \mathcal{F}$ (δηλ. η $\mathcal{F}$ είναι κλειστή για την πράξη του σχηματισμού του συμπληρώματος).

($\mathcal{F}_3$) Το γεγονός ότι $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ συνεπάγεται ότι $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$ (δηλ. η $\mathcal{F}$ είναι κλειστή για την πράξη της ενώσεως δύο συνόλων).

Συνέπειες του ορισμού ενός σώματος

1. $\mathscr{S}$, $\varnothing \in \mathcal{F}$.

2. Αν $A_j \in \mathcal{F}$, j=1, 2, …, n, τότε $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{F}$ και $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{F}$ για κάθε πεπερασμένο n (δηλ. ένα σώμα είναι κλειστό για την ένωση και την τομή πεπερασμένου πλήθους συνόλων).

Απόδειξη των (1) και (2)

1) Η ιδιότητα ($\mathcal{F}_1$) συνεπάγεται την ύπαρξη ενός συνόλου $A \in \mathcal{F}$, και η ($\mathcal{F}_2$) συνεπάγεται ότι $A^c \in \mathcal{F}$. Κατά την ($\mathcal{F}_3$) $A \cup A^c = \mathscr{S} \in \mathcal{F}$ και κατά την ($\mathcal{F}_2$) $\mathscr{S}^c = \varnothing \in \mathcal{F}$.

2) Η απόδειξη θα γίνει με την επαγωγική μέθοδο και τη χρήση των νόμων του De Morgan. Κατά την ($\mathcal{F}_3$), $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, τότε $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$. Άρα η ιδιότητα για την ένωση είναι αληθής για n=2. Δεχόμαστε τώρα ότι είναι αληθής για n=k−1, δηλ. δεχόμαστε ότι

$$\text{αν } A_1, A_2, \ldots, A_{k-1} \in \mathcal{F}, \text{ τότε } \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \in \mathcal{F}.$$

Έστω τώρα ότι $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{F}$. Τότε από την προσεταιριστική ιδιότητα έχουμε

$$\bigcup_{j=1}^{k} A_j = \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right) \cup A_k.$$

Αλλά από την επαγωγική υπόθεση $\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \in \mathcal{F}$. Άρα η ($\mathcal{F}_3$) συνεπάγεται ότι

$$\left(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right) \cup A_k = \bigcup_{j=1}^{k} A_j \in \mathcal{F}.$$

Η επαγωγική μέθοδος, λοιπόν, συνεπάγεται ότι $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{F}$ για οποιοδήποτε πεπερασμένο n. Τέλος, από το γεγονός ότι

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j = \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j^c\right)^c$$

έχουμε ότι, αν $A_1\ A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, τότε $A_1^c, A_2^c, \ldots, A_n^c \in \mathcal{F}_c$ από την $(\mathcal{F}_2)$ και $\bigcup_{j=1}^{n} A_j^c \in \mathcal{F}$ όπως μόλις αποδείχθηκε. Πάλι $\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j^c\right) \in \mathcal{F}$ από την $(\mathcal{F}_2)$, έτσι ώστε $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{F}$. ■

Παραδείγματα σωμάτων

1. Η κλάση $\mathscr{C}_1 = \{\varnothing, \mathscr{S}\}$ είναι ένα σώμα (**το τετριμμένο** σώμα).
2. Η κλάση $\mathscr{C}_2 = \{$όλα τα υποσύνολα του $\mathscr{S}\}$ είναι ένα σώμα (το **διακριτό σώμα).**
3. Η κλάση $\mathscr{C}_3 = \{\varnothing, \mathscr{S}, A, A^c\}$ για οποιοδήποτε A με $\varnothing \subset \mathscr{S}$ είναι ένα σώμα.
4. Έστω το (αριθμησίμως ή μη) άπειρο σύνολο $\mathscr{S}$ και έστω η κλάση $\mathscr{C}_4$ που ορίζεται ως ακολούθως

$$\mathscr{C}_4 = \{A \subset \mathscr{S};\ A \text{ ή } A^c \text{ είναι πεπερασμένο}\}.$$

Τότε η $\mathscr{C}_4$ είναι ένα σώμα.

Υπό μορφή παραδειγμάτων αποδεικνύουμε ότι η κλάση $\mathscr{C}_4$ είναι σώμα. Πράγματι:

i) Αφού $\mathscr{S}^c = \varnothing$ είναι πεπερασμένο, $\mathscr{S} \in \mathscr{C}_4$ και συνεπώς η κλάση $\mathscr{C}_4$ δεν είναι κενή.

ii) Υποθέτουμε ότι $A \in \mathscr{C}_4$. Τότε ή το A ή το A^c είναι πεπερασμένο. Έστω ότι το A^c είναι πεπερασμένο. Τότε $A^c \in \mathscr{C}_4$. Αν το A είναι πεπερασμένο, τότε πάλι $A^c \in \mathscr{C}_4$, διότι $(A^c)^c = A$.

iii) Υποθέτουμε ότι $A_1, A_2 \in \mathscr{C}_4$. Τότε ή το A_1 ή το A_1^c είναι πεπερασμένο και παρομοίως ή το A_2 ή το A_2^c είναι πεπερασμένο.

(α) Έστω ότι A_1 και A_2 είναι πεπερασμένα. Τότε το $A_1 \cup A_2$ είναι πεπερασμένο και συνεπώς ανήκει στην $\mathscr{C}_4$.

(β) Έστω ότι A_1^c και A_2 είναι πεπερασμένα. Τότε

$$(A_1 \cup A_2)^c = A_1^c \cap A_2^c \subseteq A_1^c$$

και συνεπώς το $(A_1 \cup A_2)^c$ είναι πεπερασμένο. Άρα $A_1 \cup A_2 \in \mathscr{C}_4$. Οι περιπτώσεις όπου τα A_1 και A_2^c ή τα A_1^c και A_2^c είναι πεπερασμένα ειναι της ίδιας μορφής με την (β). Άρα οι ιδιότητες $(\mathcal{F}_1)$–$(\mathcal{F}_3)$ ικανοποιούνται, και συνεπώς η κλάση $\mathcal{C}_4$ είναι σώμα .

Το εδάφιο αυτό κλείνει με δύο θεωρήματα που αφορούν σώματα.

Θεώρημα 1.1.

Έστω I *ένα μη κενό σύνολο δεικτών (πεπερασμένο, ή αριθμησίμως άπειρο ή μη αριθμήσιμο) και για κάθε* $j \in I$ *έστω* $\mathcal{F}_j$ *ένα σώμα (υποσυνόλων του* $\mathcal{S}$*). Ορίζουμε την κλάση* $\mathcal{F}$ *(υποσυνόλων του* $\mathcal{S}$*) ως ακολούθως:*

$$\mathcal{F} = \bigcap_{j\in I} \mathcal{F}_j = \{A \subseteq \mathcal{S}\ ;\ A \in \mathcal{F}_j \text{ για κάθε } j \in I\}.$$

Τότε το $\mathcal{F}$ *είναι σώμα. (Δηλ. η τομή οποιουδήποτε πλήθους σωμάτων είναι σώμα).*

Απόδειξη. i) $\mathcal{S}$, $\varnothing \in \mathcal{F}_j$ για κάθε $j \in I$ και συνεπώς $\mathcal{F}$ δεν είναι κενή κλάση.

ii) Αν $A \in \mathcal{F}$, τότε $A \in \mathcal{F}_j$ για κάθε $j \in I$ και συνεπώς $A^c \in \mathcal{F}_j$ για κάθε $j \in I$, έτσι ώστε $A^c \in \mathcal{F}$.

iii) $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, τότε $A_1, A_2 \in \mathcal{F}_j$ για κάθε $j \in I$ και συνεπώς $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}_j$ για κάθε $j \in I$ έτσι ώστε $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$. ■

Θεώρημα 1.2.

Έστω $\mathcal{C}$ *μία αυθαίρετη κλάση υποσυνόλων του* $\mathcal{S}$*. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό ελάχιστο σώμα* $\mathcal{F}$ *που περιέχει την* $\mathcal{C}$*. (Λέμε ότι το* $\mathcal{F}$ ***παράγεται*** *ή* ***γεννιέται*** *από την* $\mathcal{C}$ *και γράφουμε* $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{C})$*).*

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι υπάρχει ένα τουλαχιστο σώμα που περιέχει την $\mathcal{C}$, δηλ. το διακριτό σώμα. Έστω $\{\mathcal{F}_j,\ j \in I\}$ η συλλογή όλων των σωμάτων (υποσυνόλων του $\mathcal{S}$) που περιέχουν την $\mathcal{C}$ και έστω

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}) = \bigcap_{j\in I} \mathcal{F}_j.$$

Τότε, από το Θεώρημα *1.1,* $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ είναι σώμα, ενώ είναι προφανές ότι τούτο περιέχει την $\mathcal{F}$. Είναι το ελάχιστο τέτοιο σώμα, διότι κάθε άλλο σώμα που περιέχει την $\mathcal{C}$ θα είναι ένα από την $\mathcal{F}_j$, $j \in I$, και συνεπώς περιέχει το $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ που είναι η τομή τους. Για τους ίδιους λόγους $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{C})$. ■

Παρατήρηση 1.1. Αν $\mathscr{C}$ και $\mathscr{C}'$ είναι δύο κλάσεις υποσυνόλων του $\mathscr{S}$ τέτοιες ώστε $\mathscr{C}\subseteq\mathscr{C}'$, τότε $\mathcal{F}(\mathscr{C})\subseteq\mathcal{F}(\mathscr{C}')$ (βλ. επίσης Άσκηση 1.9).

1.4. Η έννοια του σ-σώματος και σχετικές ιδιότητες

Ορισμός 1.2.

Μία κλάση υποσυνόλων του $\mathscr{S}$ καλείται **σ-σώμα** και συμβολίζεται συνήθως με το $\mathcal{A}$, αν είναι σώμα (δηλ. έχει τις ιδιότητες $(\mathcal{F}_1)$–$(\mathcal{F}_3)$) και επί πλέον η ιδιότητα $(\mathcal{F}_3)$ αντικαθίσταται από την ιδιότητα

$(\mathcal{A}_3)$. Το γεγονός ότι $A_j \in \mathcal{A}$, j=1, 2… συνεπάγεται ότι $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\in \mathcal{A}$ (δηλ η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή για την πράξη της ενώσεως αριθμήσιμου πλήθους συνόλων).

Συνέπειες του ορισμού ενός σ-σώματος

1. Αν $A_j\in \mathcal{A}$, j=1, 2,…, τότε $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\in \mathcal{A}$ (δηλ, το $\mathcal{A}$ είναι κλειστό για την τομή αριθμήσιμου πλήθους συνόλων).

Τούτο είναι άμεση συνέπεια της σχέσης $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j= (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c)^c$ και των ιδιοτήτων $(\mathcal{F}_2)$ και $(\mathcal{A}_3)$.

2. Από τον ορισμό του ένα σ-σώμα είναι σώμα. Το ανίστροφο δεν είναι αναγκαστικά αληθές. Πράγματι, στο Παράδειγμα 4 ανωτέρω ας πάρουμε $\mathscr{S} = (-\infty, \infty)$, και ας ορίσουμε τα σύνολα A_j, j=1, 2, … ως εξής:

A_j = {όλοι οι ακέραιοι στο διάστημα [–j, j]}.

Τότε $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ είναι το σύνολο Z όλων των ακεραίων.

Το Z είναι άπειρο όπως επίσης και το Z^c. Άρα $Z\notin \mathscr{C}_4$, ενώ, προφανώς $A_j\in \mathscr{C}_4$ για κάθε j=1, 2…

Παραδείγματα σ-σωμάτων

1. Η κλάση $\mathscr{C}_1 = \{\varnothing, \mathscr{S}\}$ είναι ένα σ-σώμα (το τετριμμένο **σ-σώμα**).

2. Η κλάση $\mathscr{C}_2$ = {όλα τα υποσύνολα του $\mathscr{S}$} είναι ένα σώμα (το **διακρι-**

τό σ-σώμα).

3. Η κλάση $\mathscr{C}_3 = \{\varnothing, \mathscr{S}, A, A^c\}$ για οποιοδήποτε A με $\varnothing \subset A \subset \mathscr{S}$ είναι ένα σ-σώμα.

4. Έστω ότι το $\mathscr{S}$ είναι μη αριθμήσιμο και ας ορίσουμε την κλάση $\mathscr{C}_4$ ως εξής:

$$\mathscr{C}_4 = \{A \subset \mathscr{S}\,;\ A \text{ ή } A^c \text{ είναι αριθμήσιμο}\}$$

Τότε $\mathscr{C}_4$ είναι ένα σ-σώμα.
Υπό μορφή παραδείγματος αποδεικνύουμε ότι η κλάση $\mathscr{C}_4$ είναι σ-σώμα.

Πράγματι:

i) Το $\mathscr{S}^c = \varnothing$ είναι αριθμήσιμο και συνεπώς η κλάση $\mathscr{C}_4$ δεν είναι κενή.

ii) Έστω ότι $A \in \mathscr{C}_4$. Τότε ή το A ή το A^c είναι αριθμήσιμο. Αν το A^c είναι αριθμήσιμο, τότε $A^c \in \mathscr{C}_4$. Αν το A είναι αριθμήσιμο, τότε πάλι $A^c \in \mathscr{C}_4$, διότι $(A^c)^c = A$.

iii) Έστω ότι $A_j \in \mathscr{C}_4$, $j=1, 2, \ldots$, και υποθέτουμε ότι όλα τα σύνολα είναι αριθμήσιμα. Τότε, αφού η ένωση αριθμήσιμου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο, έχουμε ότι $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{C}_4$.

Η υπολειπόμενη περίπτωση είναι εκείνη όπου μερικά από τα σύνολα A_j, $j=1, 2, \ldots$, δεν είναι αριθμήσιμα.

Έστω A_{j_0} ένα τέτοιο σύνολο. Τότε

$$\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)^c = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j^c$$

και το σύνολο $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j^c$ είναι αριθμήσιμο, διότι είναι υποσύνολο ενός τουλάχιστο αριθμήσιμου συνόλου, π.χ. του $A_{j_0}^c$. Άρα πάλι $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathscr{C}_4$.

Και στο εδάφιο αυτό παρουσιάζουμε δύο θεωρήματα ανάλογα των Θεωρημάτων 1.1 και 1.2.

Θεώρημα 1.3.

Έστω I όπως στο Θεώρημα 1.1 και για κάθε $j \in I$ *έστω* $\mathcal{A}_j$ *ένα σ-σώμα (υποσυνόλων του* $\mathscr{S}$*). Ορίζουμε την κλάση* $\mathcal{A}$ *ως ακολούθως:*

$$\mathcal{A} = \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j = \{A\subseteq \mathcal{S}\ ;\ A\in \mathcal{A}_j \ \ \textit{για κάθε}\ \ j\in I\}$$

Τότε το $\mathcal{A}$ *είναι σ-σώμα. (Δηλ. η τομή οσωνδήποτε σ-σωμάτων είναι σ-σώμα).*

Απόδειξη. i) $\mathcal{S}, \varnothing\in \mathcal{A}_j$ για κάθε $j\in I$ και συνεπώς $\mathcal{S}, \varnothing\in \mathcal{A}$. Άρα η κλάση $\mathcal{A}$ δεν είναι κενή.

ii) Αν $A\in \mathcal{A}$, τότε $A\in \mathcal{A}_j$ για κάθε $j\in I$ και συνεπώς $A^c\in \mathcal{A}_j$ για κάθε $j\in I$, έτσι ώστε $A^c\in \mathcal{A}$.

iii) Αν $A_1, A_2,\ldots$ ανήκουν στο $\mathcal{A}$, τότε $A_1, A_2,\ldots$ ανήκουν στο $\mathcal{A}_j$ για κάθε $j\in I$, και συνεπώς $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\in \mathcal{A}_j$ για κάθε $j\in I$, έτσι ώστε $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\in \mathcal{A}$. ■

Θεώρημα 1.4.

Έστω $\mathcal{C}$ *μία αυθαίρετη κλάση υποσυνόλων του* $\mathcal{S}$*. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό ελάχιστο σ-σώμα* $\mathcal{A}$ *που περιέχει την* $\mathcal{C}$*. Λέμε ότι το* $\mathcal{A}$ ***παράγεται ή γεννιέται*** *από την* $\mathcal{C}$ *και γράφουμε* $\mathcal{A}=\sigma(\mathcal{C})$.

Απόδειξη. Έστω $\{\mathcal{A}_j, j\in I\}$ η συλλογή όλων των σ-σωμάτων (υποσυνόλων του $\mathcal{S}$) που περιέχουν την $\mathcal{C}$. Η συλλογή αυτή δεν είναι κενή, αφού περιέχει τουλάχιστο το διακριτό σ-σώμα. Στη συνέχεια θέτουμε

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{j\in I} \mathcal{A}_j.$$

Τότε, από το Θεώρημα 1. 3, το $\sigma(\mathcal{C})$ είναι σ-σώμα και είναι προφανές ότι περιέχει την $\mathcal{C}$. Είναι το ελάχιστο τέτοιο σ-σώμα, διότι κάθε άλλο σ-σώμα που περιέχει την $\mathcal{C}$ θα είναι ένα από τα $\mathcal{A}_j$, $j\in I$, και συνεπώς περιέχει το $\sigma(\mathcal{C})$ που είναι τη τομή τους. Για τους ίδιους λόγους $\sigma(\mathcal{C})$ είναι και μοναδικό. Άρα $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$. ■

Παρατήρηση 1.2. Αν $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ είναι δύο κλάσεις υποσυνόλων του $\mathcal{S}$ τέτοιες $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$, τότε $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{C}')$ (βλ. επίσης Άσκηση 1.11).

Το εδάφιο αυτό κλείνει με την ακόλουθη χρήσιμη παρατήρηση.

Παρατήρηση 1.3. Έστω $\mathcal{A}$ ένα σ-ώμα (υποσυνόλων του $\mathcal{S}$) και έστω Γ αυθαίρετο μέλος του $\mathcal{A}$. Ορίζουμε την κλάση $\mathcal{A}_\Gamma$ (περιεχόμενη στο $\mathcal{A}$) κατά τον ακόλουθο τρόπο:

$$\mathcal{A}_\Gamma = \mathcal{A}\cap\Gamma = \{B\subseteq\Gamma \; ; \; B=\Gamma\cap A \text{ για κάθε } A\in\mathcal{A}\}$$

Τότε η κλάση $\mathcal{A}_\Gamma$ είναι ένα σ-σώμα, όπου ο χώρος είναι Γ αντί του $\mathcal{S}$ και το συμπλήρωμα ενός μέλους της $\mathcal{A}_\Gamma$ σχηματίζεται αναφορικά με το χώρο Γ (βλ. επίσης Άσκηση 1.12).

1.5. Η έννοια του μετρήσιμου χώρου-Ειδικές περιπτώσεις

Ορισμός 1.3.

Έστω $\mathcal{S}$ ένας οποιοσδήποτε χώρος και έστω $\mathcal{A}$ ένα σ-σώμα υποσυνόλων του $\mathcal{S}$. Τότε το ζεύγος $(\mathcal{S}, \mathcal{A})$ καλείται **μετρήσιμος χώρος** και τα μέλη του $\mathcal{A}$ καλούνται **μετρήσιμα** σύνολα.

Παρατήρηση 1.4. Μολονότι για δοθέντα χώρο $\mathcal{A}$ που είναι αριθμήσιμο σύνολο (πεπερασμένο ή αριθμησίμως άπειρο) υπάρχουν πολλά, εν γένει, σ-σώματα, εκείνο το οποίον επιλέγεται στην πράξη είναι το διακριτό σ-σώμα. Αντίθετα, όταν ο χώρος $\mathcal{S}$ είναι ένα μη αριθμήσιμο σύνολο, για καθαρά μαθηματικούς λόγους δεν χρησιμοποιούμε το διακριτό σ-σώμα ("ελάχιστο" σ-σώμα). Τούτο θα διασαφησθεί στις ειδικές περιπτώσεις που ακολουθούν.

Ειδικές περιπτώσεις μετρησίμων χώρων

1. Έστω $\mathcal{S}$ (δηλ. το σύνολο ή η ευθεία των πραγματικών αριθμών).
και ας ορίσουμε την κλάση $\mathcal{C}_0$ ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_0 &= \{\text{όλα τα διαστήματα στην } \mathbb{R}\}.\\ &= \{(-\infty, x), (-\infty, x], (x, \infty), [x, \infty), (x, y), (x, y], [x, y), [x, y] \; ; \; x, y\in R, x<y\}.\end{aligned}$$

Έστω $\mathcal{B}=\sigma(\mathcal{C}_0)$ το σ-σώμα που παράγεται από την κλαση $\mathcal{C}_0$ κατά το Θεώρημα 1.4.

Τότε:

Ορισμός 1.4.

Το σ-σώμα $\mathcal{B}$ καλείται **σ-σώμα του Borel** (στην ευθεία $\mathbb{R}$), τα μέλη του $\mathcal{B}$ καλούνται **σύνολα του Borel** και ο μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ καλείται **πραγματική ευθεία του Borel**.

Παρατήρηση 1.5. Μπορεί να δειχθεί ότι το σ-σώμα του Borel $\mathcal{B}$ είναι γνήσιο υπό-σ-σώμα σ-σώματος στην $\mathbb{R}$, δηλ. υπάρχουν υποσύνολα της $\mathbb{R}$ που δεν είναι σύνολα του Borel.

Ορίζουμε τώρα τις ακόλουθες κλάσεις διαστημάτων της $\mathbb{R}$:

$$\mathscr{C}_1 = \{(x, y]\ ;\ x, y \in \mathbb{R}, x<y\}, \qquad \mathscr{C}_2 = \{[x, y)\ ;\ x, y \in \mathbb{R}, x<y\},$$

$$\mathscr{C}_3 = \{[x, y]\ ;\ x, y \in \mathbb{R}, x<y\}, \qquad \mathscr{C}_4 = \{(x, y)\ ;\ x, y \in \mathbb{R}, x<y\},$$

$$\mathscr{C}_5 = \{(x, \infty)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}, \qquad \mathscr{C}_6 = \{[x, \infty)\ ;\ x \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathscr{C}_7 = \{(-\infty, x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}, \qquad \mathscr{C}_8 = \{(-\infty, x]\ ;\ x \in \mathbb{R}\}.$$

Επίσης θεωρούμε τις κλάσεις διαστημάτων $\mathscr{C}'_j$, j=1, 2, …, 8, οι οποίες ορίζονται κατά τον ίδιο τρόπο με τις αντίστοιχες κλάσεις $\mathscr{C}_j$, j=1, 2, …, 8 με μόνη τη διαφορά ότι οι αριθμοί $x, y \in \mathbb{R}$ με $x<y$ είναι ρητοί αριθμοί. Τότε, προφανώς $\mathscr{C}'_j \subset \mathscr{C}_j \subset \mathscr{C}_0$, j =1, 2,…8. Παρόλο τούτο όλες οι (δέκα έξη αυτές) κλάσεις παράγουν το ίδιο σ-σώμα του Borel $\mathcal{B}$. Δηλ.το ακόλουθο.

Θεώρημα 1.5.

Για τις κλάσεις διαστημάτων της $\mathbb{R}$ $\mathscr{C}_j$ *και* $\mathscr{C}'_j$, j=1, 2, …, 8 *όπως αυτές ορίστηκαν ανωτέρω, ισχύει*

$$\sigma(\mathscr{C}_j) = \sigma(\mathscr{C}'_j) = \mathcal{B} = (\sigma(\mathscr{C}_0)), \qquad j=1, 2, \ldots, 8.$$

Απόδειξη. Με βάση την Παρατήρηση 1.2. , αρκεί να δειχθεί ότι

$$\mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathscr{C}_j), \quad \mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathscr{C}'_j), \qquad j=1, 2, \ldots, 8.$$

Υπό μορφή παραδείγματος, θα δείξουμε ότι $\mathscr{C}_0 \subseteq \sigma(\mathscr{C}_7)$. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις αποδεικνύονται κατά παρόμοιο τρόπο. Αφού $(-\infty, x) \in \sigma(\mathscr{C}_7)$, αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι $(-\infty, x] \in \sigma(\mathscr{C}_7)$. Για το σκοπό αυτό $x_n \downarrow x$. Τότε $(-\infty, x_n) \in \sigma(\mathscr{C}_7)$ και συνεπώς

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n) \in \sigma(\mathscr{C}_7).$$

Αλλά, προφανώς

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n) = (-\infty, x]. \qquad \text{Άρα} \quad (-\infty, x] \in \sigma(\mathscr{C}_7).$$

Ακολούθως, $(x, \infty) = (-\infty, x]^c$, $[x, \infty) = (-\infty, x)^c$ και συνεπώς

$$(x, \infty),\ [x,\infty) \in \sigma(\mathscr{C}_7).$$

Στη συνέχεια

$$(x, y) = (-\infty, y) - (-\infty, x] = (-\infty, y) \cap (x, \infty) \in \sigma(\mathscr{C}_7),$$

$$(x, y] = (-\infty, y] \cap (x, \infty) \in \sigma(\mathscr{C}_7),$$

$$[x, y) = (-\infty, y) \cap [x, \infty) \in \sigma(\mathscr{C}_7) \quad \text{και}$$

$$[x, y) = (-\infty, y] \cap [x, \infty) \in \sigma(\mathscr{C}_7).$$

Άρα δείχθηκε ότι $\mathscr{C}_0 \subseteq \sigma(\mathscr{C}_7)$.

Για την περίπτωση των κλάσεων $\mathscr{C}'_j$, j=1, 2,…, 8 θεωρούμε μονότονες ακολουθίες ρητών αριθμών συγκλίνουσες προς άρρητους αριθμούς. ■

2. Έστω τώρα $\mathscr{S} = \mathbb{R}x\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ και ορίζουμε την κλάση $\mathscr{C}_0$ ως ακολούθως:

$\mathscr{C}_0$ = {όλα τα ορθογώνια στο επίπεδο με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες}.

$$= \Big\{ (-\infty, x) \times (-\infty, x'),\quad (-\infty, x) \times (-\infty, x'],$$
$$(-\infty, x] \times (-\infty, x'),\quad (-\infty, x] \times (-\infty, x'],$$
$$(x, \infty) \times (x',\infty),\ \ldots,\quad [x, \infty) \times [x', \infty),\ \ldots,$$
$$(x, y) \times (x', y'),\ \ldots,\quad [x, y) \times [x', y']\ ;$$
$$x, y, x', y' \in \mathbb{R},\quad x<y,\ x'<y' \Big\}.$$

Έστω $\mathcal{B}^2$ το σ-σώμα που παράγεται από την κλάση $\mathscr{C}_0$ κατά το Θεώρημα 1.4. Τότε

Ορισμός 1.5.

Το σ-σώμα $\mathcal{B}^2$ καλείται **σ-σώμα του Borel** στο επίπεδο **ή 2-διάστατο σ-σώμα του Borel** και ο μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2)$ καλείται **2-διάστατος** χώρος του Borel. Τα μέλη του $\mathcal{B}^2$ καλούνται **σύνολα** του Borel στο επίπεδο.

Καταναλογία με τη μονοδιάστατη περίπτωση ορίζονται οι κλάσεις $\mathscr{C}_j$ και $\mathscr{C}'_j$, j=1, 2,…, 8 εδώ και αποδεικνύεται ένα θεώρημα, Θεώρημα 1.5′, ανάλογο του Θεωρήματος 1.5.

3. Τέλος, έστω $\mathscr{S} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ldots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^k$ $(k \geq 3)$ και έστω η κλάση $\mathscr{C}_0$ η ανάλογη της $\mathscr{C}_0$ για τη 2-διάστατη περίπτωση. Επίσης έστω $\mathscr{B}^k$ το σ-σώμα που ορίζεται καταναλογία με το $\mathscr{B}^2$. Το $\mathscr{B}^k$ **καλείται k-διάστατο σ-σώμα του Borel** και ο μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R}^k, \mathscr{B}^k)$ **k-διάστατος χώρος του Borel.** Τα μέλη του $\mathscr{B}^k$ καλούνται **σύνολα** του Borel στο χώρο $\mathbb{R}^k$.

Καταναλογία με τη 2-διάστατη περίπτωση ορίζονται και εδώ οι κλάσεις $\mathscr{C}_j$ και $\mathscr{C}'_j$, j=1, 2, …,8 και αποδεικνύεται ένα Θεώρημα, Θεώρημα 1.5", ανάλογο του Θεωρήματος 1.5 (ή του Θεωρήματος 1.5′).

1.6. Όριο ακολουθίας συνόλων

Το κεφάλαιο τούτο κλείνει με την εισαγωγή της έννοιας του ορίου, όπως επίσης και του κατώτερου και ανώτερου ορίου, μιας ακολουθίας συνόλων.

Ορισμός 1.7.

Έστω $\{A_n\}$, n=1, 2…, μία μονότονη ακολουθία συνόλων (δηλ. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ που συμβολίζεται και ως $A_n\uparrow$ ή $A_1 \supseteq A_2 \ldots$ που συμβολίζεται και ως $A_n\downarrow$). Τότε το **όριο** της, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ ορίζεται ως ακολούθως:

i) Αν $A_n\uparrow$, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, ii) Αν $A_n\downarrow$, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$,

Όπως και στην περίπτωση μιας ακολουθίας πραγματικών αριθμών, το όριο δεν ορίζεται για μια αυθαίρετη ακολουθία. Πάντως για μια τέτοια ακολουθία ορίζονται πάντοτε το ανώτερο και το κατώτερο όριο.

Συγκεκριμένα έχουμε.

Ορισμός 1.8.

Έστω $\{A_n\}$, n=1, 2… μία οποιαδήποτε ακολουθία συνόλων.

Τότε το **κατώτερο όριό** της, $\underline{A} = \lim\limits_{n\to\infty} \inf A_n$, και το **ανώτερο όριό της,** $\overline{A} = \lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n$, ορίζονται ως ακολούθως:

$$\underline{A} = \lim_{n\to\infty} \inf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} A_j$$

$$\overline{A} = \lim_{n\to\infty} \sup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j.$$

Οι ποσότητες του ορίου, κατωτέρου και ανωτέρου όριου μελετώνται λεπτομερέστερα στις Ασκήσεις (βλ. Άσκηση. 1.16).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1. Τα σύνολα A_1, A_2 και A_3 είναι αυθαίρετα υποσύνολα του $\mathscr{S}$. Να ελεχθεί η ορθότητα ή μη των ακολούθων σχέσεων:

i) $(A_1-A_2)\cup A_2=A_2$, ii) $(A_1\cup A_2)-A_1 = A_2$,

iii) $(A_1\cap A_2)\cap(A_1-A_2) = \varnothing$, iv) $(A_1\cup A_2)\cap(A_2\cup A_3)\cap(A_3\cup A_1) =$
$= (A_1\cup A_2)\cup(A_2\cup A_3)\cup(A_3\cup A_1)$

1.2. Έστω $\mathscr{S} = \{(x, y)'\in R^2; -5\leq x\leq 5,\ 0\leq y\leq 5,\ x, y=\text{ακέραιοι}\}$ και ας ορίσουμε τα υποσύνολα A_j, j=1, 2, …, 7 του $\mathscr{S}$ ως ακολούθως:

$A_1 = \{(x, y)'\in\mathscr{S}; x=y\}$, $A_2 = \{(x, y)'\in\mathscr{S}; x=-y\}$,

$A_3 = \{(x, y)'\in \mathbb{R}^2; x^2=y^2\}$, $A_4 = \{(x, y)'\in\mathbb{R}^2; x^2\leq y^2\}$,

$A_5 = \{(x, y)'\in \mathbb{R}^2; x^2+y^2\leq 4\}$, $A_6 = \{(x, y)'\in\mathbb{R}^2; x\leq y^2\}$,

$A_7 = \{(x, y)'\in \mathbb{R}^2; x^2\geq y\}$.

Να αναγραφούν τα στοιχεία καθενός από τα ως άνω σύνολα.

1.3. Αναφερθείτε στην Άσκηση 1.2 και αποδείξτε ότι

i) $A_1\cap(\bigcup_{j=2}^{7} A_j) = \bigcup_{j=2}^{7} (A_1\cap A_j)$, ii) $A_1\cup (\bigcap_{j=2}^{7} A_j) = \bigcap_{j=2}^{7} (A_1\cup A_j)$,

iii) $(\bigcup_{j=1}^{7} A_j)^c = \bigcap_{j=1}^{7} A_j^c$, iv) $(\bigcap_{j=1}^{7} A_j)^c = \bigcup_{j=1}^{7} A_j^c$,

αναγράφοντας τα στοιχεία καθενός από τα επτά σύνολα που εμφανίζονται στις παραπάνω τέσσερις σχέσεις.

1.4. Υποθέτουμε ότι τα υποσύνολα A, B, και Γ του $\mathscr{S}$ είναι τέτοια ώστε $A\subseteq B$ και $B\subseteq \Gamma$. Τότε να δειχθεί ότι $A\subseteq\Gamma$ (δηλ. η σχέση του "περίεχεσθαι" έχει τη μεταβατική ιδιότητα). Να διαπιστώσετε τούτο παίρνοντας $A=A_1$, $B=A_3$ και $\Gamma=A_3$ και $\Gamma=A_4$, όπου τα σύνολα A_1, A_3 και A_4 ορίζονται στην Άσκηση 1.2.

1.5. Δώστε λεπτομερή απόδειξη της δεύτερης ταυτότητας στους νόμους του De Morgan, δηλ. αποδείξτε ότι