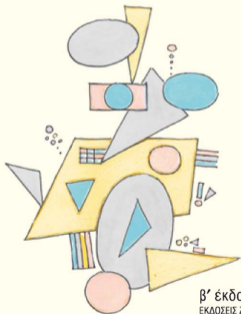


Δ. Ρωσσικόπουλος

Τοπογραφικά δίκτυα και υπολογισμοί



β' έκδοση
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Πρόλογος

Τα σύγχρονα γεωδαιτικά όργανα και οι ραγδαίες εξελίξεις στον τομέα της πληροφορικής, δεν δικαιολογούν πλέον, αλλά και δεν επιτρέπουν, το διαχωρισμό “της θεωρίας από την τοπογραφική πράξη”, διαχωρισμός που υπάρχει δυστυχώς ακόμη, όχι μόνο στην αντίληψη των συναδέλφων Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών που είχαν αποφοιτήσει σε παλιότερα χρόνια, αλλά και στην “τοπογραφική” βιβλιογραφία, κυρίως την Ελληνική. Με την επιθυμία να δοθεί ένα σύγγραμμα για το μάθημα “*Τοπογραφικά Δίκτυα και Υπολογισμοί*”, που να καλύπτει τις σύγχρονες απαιτήσεις της πράξης, και να συνδέεται μέσα από ένα αυστηρό πλαίσιο με άλλα μαθήματα που διδάσκονται οι φοιτητές σε προηγούμενα έτη, όπως π.χ. “*Αρχές Ανάλυσης Δεδομένων*” και “*Συνορθώσεις Παρατηρήσεων και Θεωρία Εκτίμησης*”, γράφτηκαν το 1987 οι σημειώσεις, από τις οποίες, με το συνεχή εμπλουτισμό τους και την παραπέρα ανάπτυξη προέκυψε το βιβλίο αυτό. Το βιβλίο χωρίζεται σε τέσσερα μέρη:

Στο πρώτο μέρος, ξεκινώντας από τη θεμελίωση των εννοιών “*παρατήρηση ή μέτρηση*” και “*μαθηματικό μοντέλο*” γίνεται η σύνδεση της τοπογραφίας και των τοπογραφικών δικτύων με άλλες περιοχές της γεωδαιτικής επιστήμης, όπως π.χ. η Ελλειψοειδής Γεωδαισία, η Φυσική Γεωδαισία κλπ. Το μέρος αυτό ολοκληρώνεται με τις εργασίες ίδρυσης των δικτύων, την επιλογή των θέσεων των κορυφών του, την κατασκευή της μόνιμης σήμανσής τους, τον τρόπο εξασφάλισής τους ώστε να μπορούν να κατασκευασθούν αν καταστραφούν οι σημάσεις τους, κλπ.

Το δεύτερο μέρος αποτελεί μια ανασκόπηση της θεωρίας των συνορθώσεων. Θεμελιώνεται η ανάγκη της συνόρθωσης των δικτύων και δίνονται οι βασικές μέθοδοι συνόρθωσης, καθώς και οι μέθοδοι ερμηνείας και στατιστικής αξιολόγησης των αποτελεσμάτων.

Στο βιβλίο δεν αναπτύσσονται οι τεχνικές μέτρησης και δεν γίνονται περιγραφές των οργάνων που χρησιμοποιούνται. Το τρίτο μέρος ασχολείται με την ανάλυση της ακρίβειας και με την προεπεξεργασία των παρατηρήσεων. Ο όρος “*προεπεξεργασία των παρατηρήσεων*” περιλαμβάνει την αρχική συνόρθωση των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων, τις αναγωγές των παρατηρήσεων

και τις διορθώσεις τους για γνωστά συστηματικά σφάλματα. Ο έλεγχος και η βαθμονόμηση των ηλεκτρονικών οργάνων μέτρησης αποστάσεων συμπεριλαμβάνεται στο μέρος αυτό επειδή είναι μια απαραίτητη διαδικασία που πρέπει να ακολουθείται περιοδικά, ιδίως όταν με το όργανο αυτό παρατηρούνται οι αποστάσεις ενός δικτύου.

Στο τέταρτο μέρος αντιμετωπίζονται τα προβλήματα που σχετίζονται με το σχεδιασμό, τη συνόρθωση, ή τη βελτιστοποίηση των οριζόντιων και κατακόρυφων δικτύων και που πηγάζουν από τη σύγχρονη επαγγελματική εμπειρία. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην αξιολόγηση της ποιότητας των δικτύων αυτών τόσο στη συνόρθωση, όσο και κατά το σχεδιασμό ή τη βελτιστοποίηση.

Ευχαριστίες οφείλονται στους φίλους και συνεργάτες Α. Δερμάνη και Α. Φωτίου. Πολλά θέματα αντιμετωπίστηκαν κατά τη συνεργασία μας στη συγγραφή του βιβλίου “*Τοπογραφικοί υπολογισμοί και συνορθώσεις δικτύων*” (έκδοση του Συλλόγου Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών Βόρειας Ελλάδας, 1988). Η Βάσω Δερμάνη διάβασε και διόρθωσε τα κείμενα όλου του βιβλίου. Η Μαίρη Σταματέλου και ο Τάσος Χρίστογλου επιμελήθηκαν ορισμένα από τα σχήματα. Η φωτογραφία της Χάλκης είναι του Κώστα Τοκμακίδη.

Περιεχόμενα

Μέρος Ι. ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΔΙΚΤΥΩΝ

1. Εισαγωγή

1.1 Βασικές έννοιες, ορισμοί.....	3
1.2 Το Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς.....	6
1.3 Από το Γήινο Χώρο, στο Γεωδαιτικό και στο Τοπογραφικό Μοντέλο των παρατηρήσεων	11
1.4 Ο προσδιορισμός της οριζόντιας θέσης των σημείων.....	16
1.4.1 Προσδιορισμός της θέσης των σημείων στο ελλειψοειδές αναφοράς.....	17
1.4.2 Προσδιορισμός της θέσης των σημείων στο τοπογραφικό ή στο προβολικό επίπεδο.....	19
1.5 Ο προσδιορισμός της κατακόρυφης θέσης των σημείων.....	20
1.6 Η διάσταση και τα είδη των δικτύων.....	24

2. Η εγκατάσταση και η μέτρηση των δικτύων

2.1 Γενικά.....	31
2.2 Αναγνώριση της περιοχής και επιλογή της θέσης των σημείων.....	32
2.3 Σήμανση, εξασφάλιση και επισήμανση των κορυφών του δικτύου.....	40
2.4 Η μέτρηση των δικτύων.....	49
2.3.1 Οι παρατηρήσεις των οριζοντίων γωνιών ή διευθύνσεων.....	50
2.3.2 Οι παρατηρήσεις των αποστάσεων	51
2.3.3 Οι παρατηρήσεις των υψομετρικών διαφορών	53
2.4 Ο παραμετρικός βαθμός του δικτύου.....	55
<i>Βιβλιογραφία</i>	57

Μέρος ΙΙ. ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΟΡΘΩΣΕΩΝ

3. Η συνόρθωση των παρατηρήσεων με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων

3.1 Τα σφάλματα των παρατηρήσεων.....	61
3.2 Η έννοια της συνόρθωσης των δικτύων	63
3.3 Ο νόμος μετάδοσης των (συμ)μεταβλητοτήτων.....	73

3.4	Η συνόρθωση με τη μέθοδο των εξισώσεων παρατηρήσεων.....	74
3.5	Η συνόρθωση με τη μέθοδο των εξισώσεων συνθηκών.....	80
4.	Η αξιολόγηση της ποιότητας των αποτελεσμάτων της συνόρθωσης	
4.1	Η έννοια της ποιότητας των δικτύων.....	83
4.2	Η συνόρθωση με εσωτερικές δεσμεύσεις.....	85
4.3	Τα κριτήρια για τη μέτρηση της ακρίβειας	87
4.3.1	Διαστήματα και περιοχές εμπιστοσύνης των αγνώστων.....	87
4.3.2	Η ακρίβεια του χρήστη.....	90
4.3.3	Σύγκριση της ακρίβειας δύο διαφορετικών λύσεων.....	90
4.4	Ο έλεγχος της αξιοπιστίας.....	91
4.4.1	Ο Έλεγχος των σφαλμάτων κλεισίματος των εξισώσεων.....	93
4.4.2	Ο ολικός έλεγχος της αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων.....	94
4.4.3	Εντοπισμός χονδροειδών ή συστηματικών σφαλμάτων.....	95
4.4.4	Ο έλεγχος της γενικής υπόθεσης στις συντεταγμένες και στις άλλες παραμέτρους.....	99
4.5	Η εκτίμηση και ο έλεγχος των συνιστωσών.....	101
4.4.1	Η εκτίμηση των συνιστωσών της μεταβλητότητας αναφοράς.....	103
4.4.2	Ο έλεγχος των συνιστωσών της μεταβλητότητας αναφοράς.....	105
	<i>Βιβλιογραφία</i>	107

Μέρος III. Η ΠΡΟΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

5. Οι παρατηρήσεις των οριζοντίων γωνιών και διευθύνσεων

5.1	Η ακρίβεια των γωνιομετρήσεων.....	111
5.1.1	Οι συνιστώσες της μεταβλητότητας μιας μέτρησης οριζόντιας διεύθυνσης ή γωνίας.....	112
5.1.2	Οι μεταβλητότητες των παρατηρήσεων των διευθύνσεων.....	117
5.1.3	Οι μεταβλητότητες των παρατηρήσεων των ανεξάρτητων γωνιών.....	120
5.1.4	Οι μεταβλητότητες των γωνιών που προκύπτουν από παρατηρήσεις διευθύνσεων.....	120
5.2	Η συνόρθωση σταθμού.....	121
5.2.1	Η συνόρθωση σταθμού για μετρήσεις ανεξάρτητων γωνιών.....	122
5.2.2	Η συνόρθωση σταθμού των διευθύνσεων.....	123
5.2.3	Η συνόρθωση σταθμού για παρατηρήσεις διευθύνσεων με τη μέθοδο των τομέων.....	142
5.3	Έγκεντρες στάσεις.....	145
5.4	Η αναγωγή των γωνιομετρήσεων στο προβολικό επίπεδο.....	149

6. Η ηλεκτρονική μέτρηση των αποστάσεων

6.1	Εισαγωγή.....	153
-----	---------------	-----

6.2 Τα σφάλματα και οι διορθώσεις της ηλεκτρονικής μέτρησης των αποστάσεων	157
6.2.1 Τα εσωτερικά σφάλματα του οργάνου.....	158
6.2.2 Οι διορθώσεις εξαιτίας της ατμοσφαιρικής διάθλασης.....	163
6.2.3 Τα υπόλοιπα συστηματικά σφάλματα του περιβάλλοντος	168
6.3 Οι γεωμετρικές αναγωγές και οι επιδράσεις τους στην ακρίβεια της μέτρησης	170
6.3.1 Η αναγωγή στην "επιφάνεια της θάλασσας"	170
6.3.2 Η αναγωγή στο προβολικό επίπεδο	173
6.3.3 Η αναγωγή της έκκεντρης παρατήρησης στο κέντρο	174
6.4 Η μεταβλητότητα της παρατήρησης της απόστασης.....	175
7. Ο έλεγχος και η βαθμονόμηση των ηλεκτρονικών οργάνων μέτρησης αποστάσεων	
7.1 Εισαγωγή.....	179
7.2 Βαθμονόμηση κλίμακας	180
7.3 Ο έλεγχος του οργάνου από πολλαπλές παρατηρήσεις μιας απόστασης	181
7.4 Η εκτίμηση της προσθετικής σταθεράς και του κυκλικού σφάλματος.....	183
7.4.1 Η βάση ελέγχου.....	183
7.4.2 Η συνόρθωση των παρατηρήσεων.....	187
7.4.3 Ο έλεγχος της ποιότητας των παρατηρήσεων	193
7.4.4 Έλεγχος των εσωτερικών σφαλμάτων του οργάνου	197
8. Οι παρατηρήσεις της γεωμετρικής χωροστάθμησης	
8.1 Εισαγωγή.....	199
8.2 Η ακρίβεια της γεωμετρικής χωροστάθμησης	200
8.3 Αξιολόγηση της αξιοπιστίας κάθε παρατήρησης	203
8.4 Η επιλογή του χωροβάτη σύμφωνα με τους ελληνικούς κανονισμούς και τα κριτήρια της αξιοπιστίας.....	206
9. Οι παρατηρήσεις των ζενιθίων γωνιών	
9.1 Εισαγωγή.....	209
9.2 Τα σφάλματα και οι αναγωγές των ζενιθίων γωνιών.....	210
9.2.1 Τα εσωτερικά σφάλματα του θεοδολίχου.....	210
9.2.2 Η επίδραση της διάθλασης	212
9.2.3 Η επίδραση των συνιστωσών απόκλισης της κατακορύφου.....	217
9.3 Η συνόρθωση σταθμού των ζενιθίων γωνιών.....	218
9.4 Η αναγωγή των παρατηρήσεων των ζενιθίων γωνιών από "σημείο στάσης σε σημείο σκόπευσης".....	222
9.5 Οι υψομετρικές διαφορές που προκύπτουν από ζενιθίες γωνίες.....	225

9.5.1	Ο υπολογισμός των υψομετρικών διαφορών από μη αμοιβαίες ζενίθιες γωνίες.....	226
9.5.2	Η ακρίβεια της υψομετρικής διαφοράς από μη αμοιβαίες ζενίθιες γωνίες.....	228
9.5.3	Ο υπολογισμός των υψομετρικών διαφορών από αμοιβαίες ζενίθιες γωνίες.....	231
9.5.4	Υπολογισμός των υψομετρικών διαφορών από παρατηρήσεις "εκ του τρίτου σημείου".....	232
9.6	Οι παρατηρήσεις της τριγωνομετρικής χωροσταθμικής όδευσης.....	232
9.6.1	Μη αμοιβαίες ζενίθιες γωνίες.....	233
9.6.2	Αμοιβαίες ζενίθιες γωνίες.....	236
9.6.3	Μετρήσεις εκ του μέσου.....	239
	<i>Βιβλιογραφία</i>	243

Μέρος IV. Η ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΚΑΙ Ο ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ

10. Η συνόρθωση των οριζοντίων δικτύων με τη μέθοδο των εξισώσεων παρατηρήσεων

10.1	Οι εξισώσεις παρατηρήσεων.....	247
10.1.1	Η εξίσωση παρατήρησης της οριζόντιας διεύθυνσης	249
10.1.2	Η εξίσωση παρατήρησης της οριζόντιας γωνίας.....	252
10.1.3	Η εξίσωση παρατήρησης της απόστασης	254
10.2	Ο σχηματισμός των κανονικών εξισώσεων.....	257
10.3	Η αδυναμία βαθμού και ο ρόλος του συστήματος αναφοράς.....	260
10.4	Ο ορισμός του συστήματος αναφοράς στα ανεξάρτητα δίκτυα.....	263
10.5	Ελεύθερα δίκτυα.....	274
10.6	Η συνόρθωση των ενταγμένων δικτύων.....	281
10.6.1	Η συνόρθωση των δικτύων με πλεονάζουσες δεσμεύσεις	282
10.6.2	Σταθερά σημεία με συμμεταβλητότητες	284
10.6.3	Προβλήματα ένταξης αστικών δικτύων.....	286
10.7	Η συνόρθωση της πολλαπλής οπισθοτομίας και της πολλαπλής εμπροσθοτομίας.....	290
10.7.1	Το πρόβλημα της πολλαπλής οπισθοτομίας.....	290
10.7.2	Το πρόβλημα της πολλαπλής εμπροσθοτομίας.....	296

11. Η συνόρθωση των οριζοντίων δικτύων με τη μέθοδο των εξισώσεων συνθηκών

11.1	Εισαγωγή.....	303
11.2	Ανεξάρτητα δίκτυα.....	304
11.2.1	Οι συνθήκες στα ανεξάρτητα τριγωνομετρικά δίκτυα.....	304
11.2.2	Ο αριθμός των εξισώσεων συνθηκών στα ανεξάρτητα τριγωνομετρικά δίκτυα.....	307
11.2.3	Οι συνθήκες στα ανεξάρτητα μικτά δίκτυα.....	314

11.3	Η ένταξη των δικτύων με τη μέθοδο των εξισώσεων συνθηκών.....	316
11.4	Η συνόρθωση των οδεύσεων με τη μέθοδο των εξισώσεων συνθηκών.....	319

12. Η αξιολόγηση της ποιότητας των οριζοντίων δικτύων

12.1	Ο έλεγχος της αξιοπιστίας.....	329
12.2	Η εκτίμηση της ακρίβειας.....	337
12.2.1	Η απόλυτη έλλειψη σφάλματος ενός σημείου.....	338
12.2.2	Η σχετική έλλειψη σφάλματος δύο σημείων.....	346
12.3	Ο έλεγχος της ένταξης των δικτύων.....	349
12.4	Στατιστικοί έλεγχοι σχετικοί με τα εσωτερικά σφάλματα των οργάνων.....	354
12.5	Ο έλεγχος της ποιότητας των οδεύσεων.....	358

13. Η συνόρθωση και ο έλεγχος της ποιότητας των κατακόρυφων δικτύων

13.1	Εισαγωγή.....	363
13.2	Η συνόρθωση των υψομετρικών διαφορών με την μέθοδο των εξισώσεων παρατηρήσεων.....	365
13.3	Η συνόρθωση των υψομετρικών διαφορών με τη μέθοδο των εξισώσεων συνθηκών.....	376
13.4	Ο έλεγχος της ακρίβειας και της αξιοπιστίας.....	383
13.5	Η συνόρθωση των υψομετρικών διαφορών με ταυτόχρονο υπολογισμό του συντελεστή διάθλασης.....	390
13.6	Η συνόρθωση των υψομετρικών διαφορών με ταυτόχρονο υπολογισμό των συνιστωσών απόκλισης της κατακορύφου.....	396

14. Ο σχεδιασμός και η βελτιστοποίηση των δικτύων με κριτήρια ποιότητας

14.1	Γενικά.....	401
14.2	Τα μέτρα ακρίβειας για το σχεδιασμό ενός δικτύου.....	404
14.3	Η έννοια της αξιοπιστίας στο σχεδιασμό.....	406
14.4	Ο βαθμός ελέγχου της κάθε παρατήρησης.....	408
14.5	Η εσωτερική και εξωτερική αξιοπιστία των δικτύων.....	410
14.5.1	Η εσωτερική αξιοπιστία.....	410
14.5.2	Η εξωτερική αξιοπιστία.....	414
14.6	Η επιλογή των στατιστικών παραμέτρων.....	418
14.7	Η αξιοπιστία του ελέγχου της γενικής υπόθεσης.....	421
	<i>Βιβλιογραφία</i>	429

Παράρτημα Α

Μετασχηματισμοί συντεταγμένων μεταξύ λύσεων διαφορικών δεσμεύσεων	433
---	-----

Παράρτημα Β

Βασικές σχέσεις υπολογισμού των συντεταγμένων ενός σημείου στο επίπεδο	441
--	-----

Παράρτημα Γ

Αναλυτικοί τύποι των κατανομών.....	445
1 Η τυπική κανονική κατανομή	445
2 Η κατανομή χ^2	446
3 Η κατανομή F	449
4 Η κατανομή t.....	452

Μέρος I
Γενικά περί των δικτύων

Δ. Ρωσσικόπουλος: “Τοπογραφικά δίκτυα και υπολογισμοί”

1

Εισαγωγή

1.1 Βασικές έννοιες, ορισμοί

Αντικείμενο της γεωδαισίας και της τοπογραφίας, ως εφαρμοσμένων επιστημών, είναι κυρίως η εξαγωγή πληροφοριών, σχετικών με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του γήινου χώρου σε μεγάλη ή μικρή έκταση αντίστοιχα, ή σχετικών με το γήινο πεδίο βαρύτητας, από σχετικές παρατηρήσεις ή μετρήσεις.

Οι δύο όροι, **μέτρηση** και **παρατήρηση**, έχουν την ίδια έννοια. Και οι δύο, χρησιμοποιούνται στην πράξη και αναφέρονται στη διαδικασία που ακολουθείται, στη σύγκριση δηλαδή κάποιων ποσοτήτων της φύσης με τις λεγόμενες "σταθερές μέτρησης", αλλά και στο αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής, που είναι ένας αριθμός.

Οι ποσότητες που παρατηρούνται, ονομάζονται παρατηρούμενες ποσότητες. Οι πιο κλασσικές παρατηρούμενες ποσότητες στη γεωδαισία και στην τοπογραφία είναι οι οριζόντιες γωνίες ανάμεσα σε τρία σημεία στην επιφάνεια της γης, οι κατακόρυφες γωνίες, οι διευθύνσεις, τα αζιμούθια, οι οριζόντιες ή κεκλιμένες αποστάσεις και οι υψομετρικές διαφορές ανάμεσα σε δύο σημεία στην επιφάνεια της γης.

Αν και σκεφτόμαστε συνήθως την παρατήρηση σαν μία απλή πράξη, στην πραγματικότητα η γεωδαιτική ή τοπογραφική παρατήρηση περιλαμβάνει πολλούς επιμέρους χειρισμούς, όπως, π.χ., στη μέτρηση μιας απλής γωνίας με θεοδόλιχο έχουμε την κέντρωση του θεοδολίχου πάνω στο σημείο στάσης, την οριζοντίωσή του, την εστίαση του τηλεσκοπίου, την αποκατάσταση των συνθηκών του συστήματος ανάγνωσης, τη σκόπευση των σημείων και τέλος την ανάγνωση της τιμής της γωνίας.

Για την εξαγωγή πληροφοριών από τις παρατηρήσεις απαιτείται η δημιουργία ενός **μαθηματικού μοντέλου**, που να περιγράφει, με ένα ιδεατό μαθηματικό τρόπο, τη φυσική πραγματικότητα και να συνδέει τις πληροφο-

ρίες αυτές με τις παρατηρήσεις. Τα μαθηματικά μοντέλο που χρησιμοποιούνται στη Γεωδαισία και στην Τοπογραφία, για την εξαγωγή πληροφοριών από τις παρατηρήσεις, στηρίζονται στην Ευκλείδειο Γεωμετρία ή σε απλούς φυσικούς νόμους. Αποτελούνται από συναρτήσεις, οι οποίες συνδέουν τα μεγέθη που μπορούν να παρατηρηθούν απευθείας με κάποιες άλλες ποσότητες. Οι ποσότητες αυτές μπορεί να είναι απόλυτα γνωστές, ή σταθερές όπως λέγονται, ή να είναι τελείως άγνωστες. Παράδειγμα τέτοιας σταθερής ποσότητας που χρησιμοποιείται στην Τοπογραφία, είναι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου πάνω στο επίπεδο. Ένα μοντέλο που συνδέει τις ποσότητες που μπορούν να παρατηρηθούν απευθείας, με κάποιες σταθερές, ονομάζεται **μοντέλο εξισώσεων συνθηκών**.

Για τη δημιουργία των μαθηματικών μοντέλων και για την ευκολότερη αξιοποίηση της πληροφορίας που δίνουν οι παρατηρήσεις, χρησιμοποιούνται στη γεωδαιτική και τοπογραφική πρακτική, όχι τόσο οι σταθερές που αναφέρθηκαν παραπάνω, αλλά κάποιες άλλες *άγνωστες ποσότητες*, που ονομάζονται *άγνωστες παράμετροι*. Παραδείγματα αγνώστων παραμέτρων είναι οι συντεταγμένες των σημείων σε κάποιο σύστημα αναφοράς, οι μεταβολές των συντεταγμένων στο χρόνο, οι αποκλίσεις της κατακορύφου, τα υψόμετρα του γεωειδούς, οι διαταράξεις του πεδίου βαρύτητας γενικά, κλπ. Ένα μοντέλο που συνδέει την κάθε ποσότητα που μπορεί να παρατηρηθεί με τις άγνωστες παραμέτρους, ονομάζεται **μοντέλο εξισώσεων παρατηρήσεων**.

Το πρώτο στάδιο για τη δημιουργία ενός μαθηματικού μοντέλου είναι το ξεχώρισμα ενός μέρους του φυσικού κόσμου, που το ονομάζουμε φυσικό σύστημα. Ένα φυσικό σύστημα στη γεωδαισία ή στην τοπογραφία είναι το σύνολο των κορυφών ενός γεωδαιτικού ή τοπογραφικού δικτύου. *Γεωδαιτικό ή τοπογραφικό δίκτυο ονομάζουμε ένα σύνολο σημείων, με συγκεκριμένες θέσεις πάνω στην επιφάνεια της γης, τα οποία ενώνονται μεταξύ τους με παρατηρήσεις και χρησιμεύουν για την εξαγωγή πληροφοριών σχετικών με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του γήινου χώρου ή με το γήινο πεδίο βαρύτητας, από τις συγκεκριμένες παρατηρήσεις.*

Στην περίπτωση της τοπογραφίας, οι άγνωστες παράμετροι του μαθηματικού μοντέλου είναι οι συντεταγμένες των κορυφών του δικτύου, που αναφέρονται σε κάποιο σύστημα αναφοράς. Οι εργασίες του δικτύου στις συνηθισμένες τοπογραφικές εφαρμογές, θα μπορούσαν να χαρακτηρισθούν σαν εργασίες δημιουργίας ενός συστήματος αναφοράς στην περιοχή.

Το τοπογραφικό δίκτυο, δηλαδή, παρέχει ένα πλαίσιο "γνωστών σημείων", με βάση τα οποία θα γίνει κάποια αποτύπωση λεπτομερειών ή θα χρησιμοποιηθούν σαν σημεία αναφοράς, για παράδειγμα, στις εργασίες χάραξης ενός τεχνικού έργου ή ενός ρυμοτομικού σχεδίου. Το πλεονέκτημα της χρησιμοποίησης του δικτύου για τη δημιουργία ενός τέτοιου πλαισίου, κατ' αρχήν,

είναι ο εκ των προτέρων καθορισμός του συστήματος αναφοράς των συντεταγμένων της οποιασδήποτε τοπογραφικής εργασίας (αποτύπωση, χάραξη, κλπ.), και η σύνδεση με τον τρόπο αυτό των τοπογραφικών εργασιών που γίνονται ανεξάρτητα η μία από την άλλη και σε διαφορετικές περιοχές. Το σημαντικότερο όμως είναι ότι κατορθώνεται ο έλεγχος της ποιότητας (της ακρίβειας και της αξιοπιστίας) των τοπογραφικών εργασιών, και η ομοιογένεια και ισοτροπία στην ακρίβειά τους (το τελικό τοπογραφικό διάγραμμα που θα προκύψει, για παράδειγμα, έχει την ίδια περίπου ακρίβεια σε κάθε του περιοχή, ή η χάραξη του νέου ρυμοτομικού σχεδίου θα γίνει παντού με την ίδια περίπου ακρίβεια).

Στην τοπογραφία, όπως είναι γνωστό, για την επίτευξη ενιαίας ακρίβειας στο τελικό αποτέλεσμα, ακολουθούμε τον κανόνα "από το γενικό προς το ειδικό". Έτσι, πριν από την αποτύπωση μιας περιοχής, πριν δηλαδή να οριστεί η θέση των σημείων λεπτομερειών με τη βοήθεια των αντίστοιχων παρατηρήσεων, δημιουργείται ένα δίκτυο που καλύπτει την περιοχή εργασίας και που αποτελεί τον σκελετό της αποτύπωσης. Ανάλογα με το αν η αποτύπωση πρέπει να είναι ανεξάρτητη, να μην εντάσσεται δηλαδή σ' ένα γενικότερο διάγραμμα, ή εξαρτημένη (ή ενταγμένη), χαρακτηρίζουμε και το δίκτυο, που θα αποτελέσει την αναφορά των τοπογραφικών εργασιών, αντίστοιχα σαν **ανεξάρτητο** ή σαν **ενταγμένο** σ' ένα προκαθορισμένο σύστημα αναφοράς.

Σκοπός της εγκατάστασης ενός ενταγμένου δικτύου είναι ο προσδιορισμός όχι μόνο του σχήματος και του μεγέθους του, αλλά και της θέσης του σε σχέση με ένα προκαθορισμένο σύστημα αναφοράς, το οποίο λέγεται Εθνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς και στο οποίο αναφέρονται όλες οι γεωδαιτικές εργασίες της χώρας. Το Εθνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς υλοποιείται από τις κορυφές των κρατικών δικτύων πρώτης (υψηλότερης), δεύτερης, τρίτης και τέταρτης τάξης. Επομένως, η δημιουργία ενός ενταγμένου δικτύου προϋποθέτει την ύπαρξη στην περιοχή κορυφών ενός άλλου δικτύου, **ανώτερης τάξης**.

Υπεύθυνη για την εγκατάσταση, τη μέτρηση, τον υπολογισμό και τη συντήρηση των κρατικών δικτύων, μέχρι πριν από λίγο καιρό, ήταν η Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού (ΓΥΣ). Μετά την ίδρυση του Οργανισμού Κτηματολογίου και Χαρτογραφίσεων της Ελλάδας (ΟΚΧΕ), η ευθύνη των κρατικών δικτύων μεταβιβάστηκε στον Οργανισμό.

1.2 Το Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς

Η δημιουργία των συστημάτων στα οποία αναφέρονται οι συντεταγμένες των κορυφών των δικτύων, και γενικότερα η ένταξη των τοπογραφικών απο-

τυπώσεων σε γενικότερους χάρτες (στο Γεωδαιτικό και Χαρτογραφικό σύστημα της χώρας), απαιτεί τη δημιουργία του γεωδαιτικού υπόβαθρου (των δικτύων ανώτερης τάξης), κι αυτό με τη σειρά του τη γνώση των μαθηματικών σχέσεων που να περιγράφουν όσο γίνεται καλύτερα το σχήμα της γης.

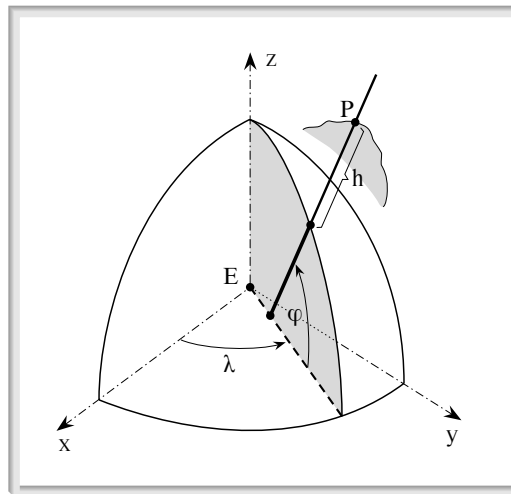
Όταν μιλάμε για το σχήμα της γης, δεν εννοούμε το σχήμα της φυσικής της επιφάνειας, αλλά αγνοούμε τη γεωμορφολογική διαμόρφωση του εδάφους (π.χ., βουνά, πεδιάδες, λίμνες, ποτάμια, φαράγγια, κλπ.) και αναφερόμαστε στο σχήμα μιας ιδεατής "οριζόντιας" επιφάνειας, που προσεγγίζει καλύτερα τη μέση στάθμη της θάλασσας. Την επιφάνεια αυτή την ονομάζουμε **γεωειδές**, ενώ τις ιδεατές στάθμες νερού, οι οποίες δεν συμπίπτουν αναγκαστικά με τη μέση στάθμη της θάλασσας, τις ονομάζουμε **ισοδυναμικές επιφάνειες**. Επομένως, το γεωειδές είναι μια ισοδυναμική επιφάνεια (ή χωροσταθμική επιφάνεια), που προσεγγίζεται καλύτερα από τη μέση στάθμη, και είναι τέτοια ώστε σε κάθε της σημείο η κατακόρυφος να είναι κάθετη στην επιφάνεια αυτή.

Από μαθηματική άποψη το γεωειδές είναι μια πολύπλοκη επιφάνεια, η οποία δεν μπορεί να περιγραφεί με απλές εξισώσεις. Για να απλουστευθούν οι σχετικοί υπολογισμοί, στις γεωδαιτικές εφαρμογές το γεωειδές προσεγγίζεται από ένα **ελλειψοειδές εκ περιστροφής** (ΕΕΠ), το οποίο έχει το σχήμα μιας πεπλατυσμένης στους πόλους σφαίρας και προκύπτει αν περιστρέψουμε μια έλλειψη γύρω από το μικρό της ημιάξονα. Το ελλειψοειδές αυτό έχει τέτοιες διαστάσεις, και "τοποθετείται" σε σχέση με τη γη έτσι, ώστε η προσέγγιση του γεωειδούς να είναι η καλύτερη δυνατή.

Το ελλειψοειδές ορίζεται από δύο παραμέτρους, π.χ., από τα μήκη των δύο ημιαξόνων a και b , από τον μεγάλο ημιάξονα b και την επιπλάτνυση $f = (a - b)/a$, από τον μεγάλο ημιάξονα b και την εκκεντρότητα $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$ ή $e^2 = (a^2 - b^2)/b^2$. Συνήθως, κάθε χώρα χρησιμοποιεί το ελλειψοειδές εκείνο που προσαρμόζεται καλύτερα στο χώρο της, και οι παράμετροί του υπολογίζονται ταυτόχρονα με τη συνόρθωση του δικτύου 1ης τάξης. Οι παράμετροι που ορίζουν τη θέση του κέντρου του ελλειψοειδούς, τον προσανατολισμό του, το σχήμα και το μέγεθος του αποτελούν το **γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς** μιας χώρας (**γεωδαιτικό datum**). Στον πίνακα (1) δίνονται τα στοιχεία των ελλειψοειδών που έχουν χρησιμοποιηθεί, ή χρησιμοποιούνται στην Ελλάδα.

Πίνακας 1. Τα στοιχεία των ελλειψοειδών που έχουν χρησιμοποιηθεί στην Ελλάδα

	a	b	f	e^2	e^2
Bessel	6 377 397	6 356 079	1/299.150.00667437220.0067192188		
Hayford	6 378 388	6 356 912	1/2970.00672265320.0067681531		
GRS 67	6 378 160	6 356 775	1/298.250.00669445410.0067395719		
GRS 80	6 378 137	6 356 732	1/298.260.00670072860.0067459312		



Σχήμα 2. Οι γεωδαιτικές συντεταγμένες λ , φ και h .

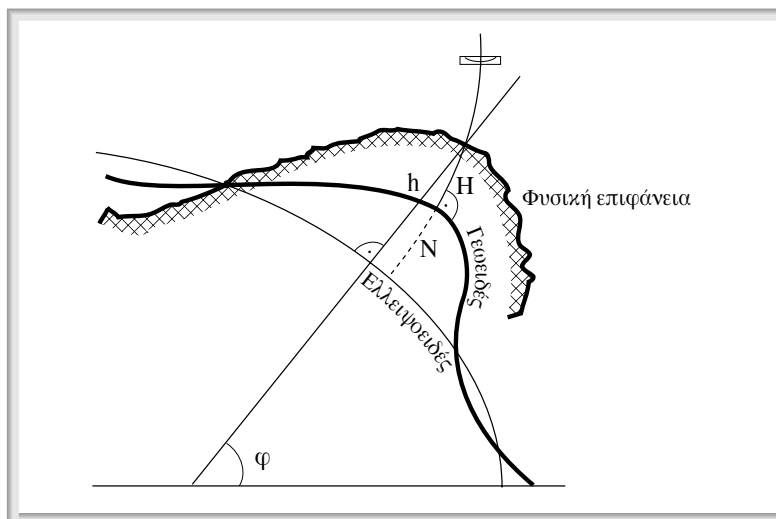
Το κύριο σύστημα αναφοράς μιας χώρας υλοποιείται με το κρατικό δίκτυο πρώτης τάξης, το οποίο υπολογίζεται με βάση τις γεωδαιτικές συντεταγμένες: το γεωδαιτικό μήκος λ και πλάτος φ , και το γεωδαιτικό υψόμετρο h . Το μήκος από το ελλειψοειδές έως το σημείο στην επιφάνεια του εδάφους, πάνω στη κάθετη στο ελλειψοειδές διεύθυνση, λέγεται ελλειψοειδές ή γεωδαιτικό υψόμετρο του σημείου. Η γωνία που σχηματίζεται από την κάθετη διεύθυνση και το επίπεδο του ισημερινού είναι το γεωδαιτικό πλάτος, ενώ η γωνία που σχηματίζει ο μεσημβρινός του Greenwich με το μεσημβρινό που διέρχεται από το σημείο είναι το γεωδαιτικό μήκος.

Πίνακας 2. Τα κρατικά δίκτυα 1ης, 2ης, 3ης και 4ης τάξης

τάξη δικτύου	Απόσταση σημείων (σε km)	Αντικείμενο της
I	> 30	Γεωδαισίας
II	15 30	Γεωδαισίας
III	5 15	Τοπογραφίας
IV	< 5	Τοπογραφίας

Η επιφάνεια του γεωειδούς, σαν μία ισοδυναμική επιφάνεια, τέμνεται από τις διευθύνσεις της κατακορύφου κάθετα σε όλα της τα σημεία. Αλλά η διεύθυνση της κατακορύφου, λόγω της ακανόνιστης κατανομής των μαζών στο εσωτερικό, και ιδίως στο φλοιό της Γης, παρουσιάζει τοπικές ανωμαλίες και

διαφέρει κάθε φορά από τη "θεωρητική κατακόρυφο", τη διεύθυνση δηλαδή την κάθετη στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς. Οι διαφορές αυτές ονομάζονται **αποκλίσεις της κατακορύφου**. Επομένως, και η επιφάνεια του Γεωειδούς δεν είναι ομαλή, αλλά είναι ασθενώς κυματοειδής. Οι αποκλίσεις του γεωειδούς από το ελλειψοειδές εκ περιστροφής ονομάζονται **υψόμετρα του γεωειδούς**. Το μήκος από το γεωειδές ως το σημείο στην επιφάνεια του εδάφους, πάνω στη γραμμή της ελεύθερης πτώσης των σωμάτων, λέγεται **ορθομετρικό υψόμετρο**.



Σχήμα 3. Το γεωδαιτικό υψόμετρο (h), το ορθομετρικό (H) και το υψόμετρο του γεωειδούς (N).

Οι τύποι όμως του ελλειψοειδούς είναι πολύπλοκοι και δύσκολοι στην επεξεργασία, έτσι ώστε για εργασίες στην περιοχή των τοπογραφικών αποτυπώσεων, όπου τα μήκη δεν είναι μεγάλα, είναι απλούστερο να εργάζεται κανείς με βάση τις επίπεδες ορθογώνιες συντεταγμένες, όπου ισχύουν οι απλοί κανόνες της αναλυτικής επίπεδης γεωμετρίας.

Επειδή συνήθως μας ενδιαφέρει η απεικόνιση της γήινης επιφάνειας με τη μορφή χαρτών, καταφεύγουμε στη χρήση αντίστοιχων επιπέδων προβολικών συντεταγμένων (x, y), μέσω μιας κατάλληλα επιλεγμένης απεικόνισης (προβολής). Ο χάρτης αποτελεί ένα προβολικό επίπεδο, του οποίου κάθε σημείο αντιστοιχεί αμφιμονοσήμαντα σε σημείο του ελλειψοειδούς. Δηλαδή υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των καρτεσιανών συντεταγμένων x, y και των γεωδαιτικών φ, λ . Θα μπορούσαμε να πούμε λοιπόν ότι η χαρτογραφική προβολή είναι γενικά μια μετατροπή της καμπύλης επι-

φάνειας του ελλειψοειδούς σε προβολικό επίπεδο.

Στη χώρα μας εφαρμόζονται τέσσερα προβολικά συστήματα: η πλάγια ισαπέχουσα αζιμουθιακή απεικόνιση (Προβολή Hatt), η εγκάρσια Μερχατορική απεικόνιση 3 μοιρών (προβολή TM3°), η Παγκόσμια Εγκάρσια Μερχατορική απεικόνιση (προβολή UTM) και η Εγκάρσια Μερχατορική απεικόνιση μιας ζώνης.

Η προβολή Hatt χρησιμοποιείται στην Ελλάδα σε συνδυασμό με το Ελληνικό Datum (GR-D, ελλειψοειδές Bessel, με σημείο αφετηρίας το βάθρο του Αστεροσκοπείου Αθηνών όπου ο μεσημβρινός του θεωρείται ως ο μηδενικός μεσημβρινός). Στην προβολή αυτή αναφέρονται τα φύλλα 1:5000 της ΓΥΣ.

Η προβολή UTM εφαρμόζεται στην Ελλάδα από τη Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού (φύλλα 1:50000 της ΓΥΣ) με αναφορά το Ευρωπαϊκό Datum (ED 50, ΕΕΠ του Hayford) και όχι από πολιτικές Υπηρεσίες. Ο Ελληνικός χώρος περιλαμβάνεται σε 2 ζώνες UTM, με κεντρικούς μεσημβρινούς $\lambda_0 = 21^\circ$ και $\lambda_0 = 27^\circ$.

Η σύμμορφη προβολή TM3° χρησιμοποιείται στην Ελλάδα από το 1982, στα πλαίσια της Επιχείρησης Πολεοδομικής Ανασυγκρότησης (ΕΠΑ) του ΥΠΕΧΩΔΕ, με αναφορά το Ελληνικό Datum όπως και η προβολή Hatt. Το ελλειψοειδές αναφοράς του εθνικού δικτύου χωρίζεται σε τρεις ζώνες: την κεντρική ζώνη με κεντρικό της μεσημβρινό $\lambda_0 = 0^\circ$, την ανατολική ζώνη με $\lambda_0 = 3^\circ$ και τη δυτική ζώνη με $\lambda_0 = -3^\circ$.

Το νέο Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς (ΕΓΣΑ 87) χρησιμοποιεί, για προβολικό σύστημα αναφερόμενο στο ελλειψοειδές GRS 80, την Εγκάρσια Μερχατορική απεικόνιση μιας ζώνης για όλη την Ελλάδα, με κεντρικό της μεσημβρινό $\lambda_0 = 24^\circ$.

Για να ενταχθεί η τοπογραφική αποτύπωση στο χαρτογραφικό σύστημα της χώρας, πρέπει να δοθεί πληροφορία σχετικά με το πού βρίσκεται το προβολικό επίπεδο σε σχέση με την περιοχή της αποτύπωσης. Την πληροφορία αυτή την παρέχουν οι ήδη γνωστές συντεταγμένες των κορυφών του κρατικού δικτύου που βρίσκονται στην περιοχή, όταν αυτές αναφέρονται στο επιθυμητό προβολικό επίπεδο.

Πολλές φορές χρειάζεται να γίνει μετατροπή των συντεταγμένων από τη μια προβολή σε άλλη, όπως π.χ., η μετατροπή από ένα φύλλο Hatt σε άλλο, η μετατροπή από μια ζώνη TM3 σε άλλη, η μετατροπή από φύλλο Hatt σε ζώνη TM3 (μετατροπή από ένα προβολικό σύστημα σε άλλο με αναφορά στο ίδιο ΕΕΠ), η μετατροπή από ένα φύλλο Hatt, ζώνη TM3, στη ζώνη του ΕΓΣΑ 87 (η χειρότερη περίπτωση, οι διαφορετικές προβολές αναφέρονται και σε ελλειψοειδή διαφορετικής θέσης, μεγέθους και σχήματος). Στην τελευταία αυτή περίπτωση, για να γίνει ο μετασχηματισμός πρέπει να είναι γνωστές οι παράμετροι “βέλτιστης προσαρμογής” των δύο ελλειψοειδών. Οι παράμετροι αυτές

μπορούν να υπολογισθούν με ικανοποιητική ακρίβεια μόνο όταν υπάρχουν πολλά κοινά σημεία, γνωστά στα δύο συστήματα.

Όπως οι οριζόντιες αποτυπώσεις αναφέρονται στο Οριζόντιο Γεωδαιτικό Σύστημα, έτσι και οι χωροσταθμίσεις αναφέρονται στο **Χωροσταθμικό Γεωδαιτικό Σύστημα**. Το Εθνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς περιλαμβάνει το χάρτη του γεωειδούς της χώρας, που αναφέρεται στο ΕΕΠ που χρησιμοποιείται, καθώς και την ενιαία για όλη τη χώρα αφετηρία των χωροσταθμίσεων. Η τιμή της μέσης στάθμης της θάλασσας αναφέρεται σε μια συγκεκριμένη εποχή, όπως προκύπτει από την ανάλυση δεδομένων των παλιροοιογραφικών σταθμών της χώρας και την αναγωγή τους στην ενιαία χωροσταθμική αφετηρία. Το χωροσταθμικό σύστημα αναφοράς συμπληρώνεται από τα δίκτυα πρώτης, δεύτερης και τρίτης τάξης. Η διάρθρωση του χωροσταθμικού δικτύου δεύτερης τάξης αποτελείται από πολύγωνα με μήκος κάθε πλευράς 5 - 10 km, του δε τρίτης τάξης από χωροσταθμικές οδεύσεις που εξαρτώνται από τα σημεία του δικτύου της δεύτερης τάξης. Οι κορυφές του κρατικού χωροσταθμικού δικτύου αποτελούν τις αφετηρίες (repères) ένταξης των νέων χωροσταθμικών δικτύων.

1.3 Από το Γήινο Χώρο, στο Γεωδαιτικό και στο Τοπογραφικό Μοντέλο των παρατηρήσεων

Τα μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση των παρατηρήσεων δεν μπορούν να περιγράψουν την πραγματικότητα τέλεια. Αφήνουν πάντοτε κάποιες διαφορές ανάμεσα στις τιμές που μπορούν να προκύψουν από αυτά και στις ίδιες τις παρατηρήσεις. Οι διαφορές αυτές οφείλονται: από τη μια μεριά στα σφάλματα του παρατηρητή και του οργάνου που χρησιμοποιείται, κι από την άλλη στις λεπτομέρειες της πραγματικότητας τις οποίες δεν μπορεί να περιγράψει το μοντέλο. Το δεύτερο αυτό μέρος των διαφορών ονομάζεται **σφάλμα μοντέλου**. Γενικά, η επιλογή ενός μοντέλου είναι ικανοποιητική, όταν οι τιμές των σφαλμάτων μοντέλου είναι πολύ μικρές σε σχέση με τα σφάλματα οργάνου-παρατηρητή.

Ένα παράδειγμα απλού μοντέλου είναι αυτό που χρησιμοποιείται στην τοπογραφία, όπου ο υπολογισμός των οριζόντιων δικτύων διαχωρίζεται από τον υπολογισμό των κατακόρυφων δικτύων (ο γνωστός "δυσασμός"). Ο διαχωρισμός αυτός ξεκινά από το γεγονός ότι στα μικρά δίκτυα οι παρατηρήσεις των οριζοντίων γωνιών ορίζουν ένα σύστημα αναφοράς, επειδή οι διευθύνσεις της κατακόρυφου στην περιοχή συνηθίζεται να θεωρούνται παράλληλες μεταξύ τους, και επιπλέον διαφορετικού τύπου παρατηρήσεις περιέχουν

πληροφορίες σχετικές με διαφορετικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά του δικτύου. Οι οριζόντιες γωνίες και αποστάσεις περιέχουν πληροφορίες για τη διδιάστατη (οριζόντια) γεωμετρία του δικτύου, ενώ οι παρατηρήσεις της γεωμετρικής χωροστάθμησης περιέχουν πληροφορίες κυρίως για την τρίτη διάσταση (κατά ύψος).

Στην πραγματικότητα όμως, οι τοπογραφικές παρατηρήσεις που γίνονται στην επιφάνεια της γης επηρεάζονται κυρίαρχα από το γήινο πεδίο βαρύτητας. Αναλυτικότερα, το θεοδόλιχο που χρησιμοποιείται για τις παρατηρήσεις των οριζοντίων διευθύνσεων και γωνιών προσανατολίζεται προς τη διεύθυνση της κατακορύφου στο σημείο στάσης. Επίσης, ο χωροβάτης και οι σταδίες, που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση των υψομετρικών διαφορών, προσανατολίζονται κατά τις διευθύνσεις των κατακορύφων που διέρχονται από τα σημεία στάσης στα οποία στέκονται διαδοχικά όταν γίνεται η χωροστάθμηση. Επομένως, οι παρατηρήσεις που φαίνονται ότι έχουν καθαρά γεωμετρικό χαρακτήρα, δέχονται στην πραγματικότητα την επίδραση του γήινου πεδίου βαρύτητας, μια και η διεύθυνση της κατακορύφου που διέρχεται από ένα σημείο είναι η διεύθυνση του διανύσματος της έντασης του πεδίου βαρύτητας στο σημείο αυτό.

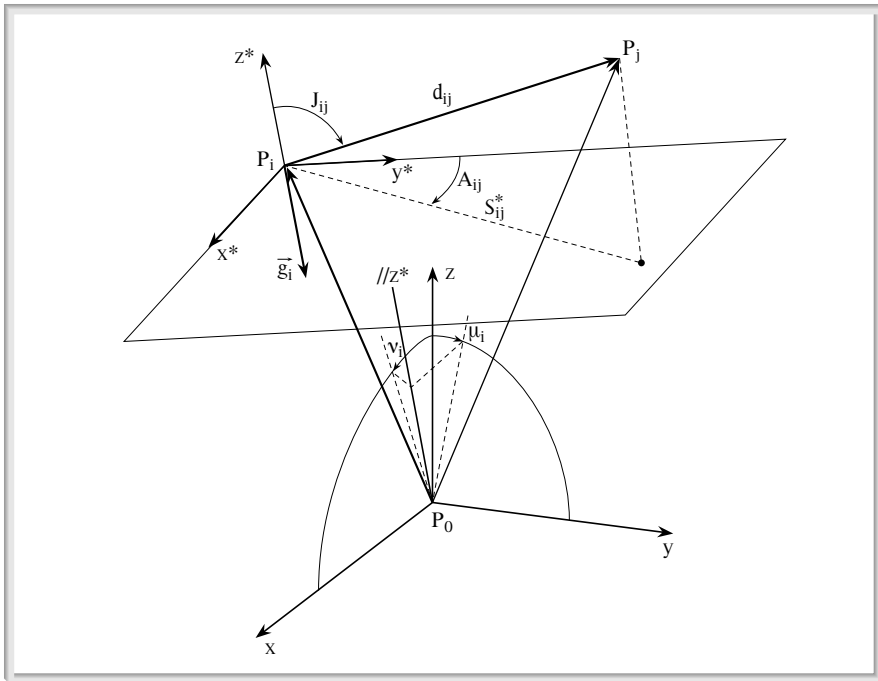
Τα τοπογραφικά όργανα που χρησιμοποιούνται για τις μετρήσεις (θεοδόλιχα, χωροβάτες, κλπ.) ορίζουν από μόνα τους ειδικά συστήματα αναφοράς των συντεταγμένων. Ένα τέτοιο σύστημα είναι το **τοπικό-σημειακό** ή **τοποκεντρικό αστρονομικό** σύστημα. Το τοποκεντρικό αστρονομικό σύστημα (x^*, y^*, z^*) ορίζεται έτσι, ώστε η αρχή του να ταυτίζεται με το σημείο στάσης P_i του οργάνου που εκτελεί την παρατήρηση, ο άξονας z^* να ταυτίζεται με τον πρωτεύοντα άξονα του οργάνου που συμπίπτει με τη διεύθυνση του διανύσματος της έντασης του γήινου πεδίου βαρύτητας στο σημείο P_i (διεύθυνση της κατακορύφου) και με θετική φορά αντίθετη από τη φορά του διανύσματος της βαρύτητας, ο άξονας y^* να κατευθύνεται προς βορρά και ο άξονας x^* να είναι τέτοιος, ώστε το σύστημα να είναι δεξιόστροφο.

Το αξιμώθιο A_{ij} , η ζενίθια γωνία ζ_{ij} και το μήκος της κεκλιμένης απόστασης d_{ij} ανάμεσα στα σημεία P_i και P_j συνδέονται με τις συντεταγμένες $\mathbf{x}_j^* = [x_j^* \ y_j^* \ z_j^*]^T$ του σημείου P_j στο τοποκεντρικό αστρονομικό σύστημα (με κέντρο το σημείο P_i), με τη βοήθεια της σχέσης

$$\mathbf{x}_j^* = \begin{pmatrix} x_j^* \\ y_j^* \\ z_j^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{ij} \sin \zeta_{ij} \sin A_{ij} \\ d_{ij} \sin \zeta_{ij} \cos A_{ij} \\ d_{ij} \cos \zeta_{ij} \end{pmatrix} . \quad (1)$$

Για να είναι δυνατή η ταυτόχρονη επεξεργασία όλων των παρατηρήσεων,

οι συντεταγμένες των σημείων θα πρέπει να αναφέρονται όλες στο ίδιο σύστημα αναφοράς. Το σύστημα αυτό, όταν οι παρατηρήσεις είναι οι κλασσικές τοπογραφικές, μπορεί να είναι ένα τυχαίο στην περιοχή του δικτύου. Για λόγους απλοποίησης όμως των υπολογισμών ορίζεται έτσι, ώστε η αρχή του να βρίσκεται πάνω στο γεωειδές, ο άξονας z να ταυτίζεται με την κατακόρυφη και να έχει θετική φορά προς τα πάνω, ο άξονας y να κατευθύνεται προς τον αστρονομικό βορρά και ο άξονας x να είναι τέτοιος ώστε το σύστημα να είναι δεξιόστροφο. Το σύστημα αυτό το ονομάζουμε **Τοπογραφικό Σύστημα**.



Σχήμα 4. Το τοποκεντρικό και το τοπογραφικό σύστημα αναφοράς των συντεταγμένων.

Οι τοπογραφικές συντεταγμένες $\mathbf{x}_i = [x_i \ y_i \ z_i]^T$ (ή $\mathbf{x}_i = [x_i \ y_i \ H_i]^T$) και $\mathbf{x}_j = [x_j \ y_j \ z_j]^T$ (ή $\mathbf{x}_j = [x_j \ y_j \ H_j]^T$) των σημείων P_i και P_j αντίστοιχα, συνδέονται με τις τοποκεντρικές συντεταγμένες \mathbf{x}_j^* του σημείου P_j (με κέντρο το σημείο P_i), με τη βοήθεια της σχέσης

$$\mathbf{x}_j^* = \mathbf{R}(\nu_i, \mu_i) (\mathbf{x}_j \ \mathbf{x}_i) = \begin{array}{cccc} \cos \nu_i & 0 & \sin \nu_i & x_j \ x_i \\ \sin \nu_i \sin \mu_i & \cos \mu_i & \cos \nu_i \sin \mu_i & y_j \ y_i \\ \sin \nu_i \cos \mu_i & \sin \mu_i & \cos \nu_i \cos \mu_i & z_j \ z_i \end{array} \quad (2)$$

όπου $\nu_i = \nu(\mathbf{x}_i)$, $\mu_i = \mu(\mathbf{x}_i)$ είναι οι παράμετροι απόκλισης του άξονα Z^* του τοποκεντρικού αστρονομικού συστήματος, από τον άξονα Z του τοπογραφικού, στα επίπεδα (x, z) και (y, z) αντίστοιχα (βλ. σχήμα 4). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι το αξιμούθιο A_{ij} και η ζενίθια γωνία ζ_{ij} συνδέονται με τις συντεταγμένες των σημείων P_i και P_j στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων, με τη βοήθεια των σχέσεων

$$A_{ij} = \arctan \frac{\cos \nu_i (x_j - x_i) + \sin \mu_i (z_j - z_i)}{\sin \nu_i \sin \mu_i (x_j - x_i) + \cos \mu_i (y_j - y_i) + \cos \nu_i \sin \mu_i (z_j - z_i)} \quad (3)$$

$$\zeta_{ij} = \arctan \frac{\sin \nu_i \cos \mu_i (x_j - x_i) - \sin \mu_i (y_j - y_i) + \cos \nu_i \cos \mu_i (z_j - z_i)}{\div (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (4)$$

Αναπτύσσοντας τις παραπάνω σχέσεις σε σειρές Taylor και διατηρώντας μόνο όρους πρώτης τάξης, έχουμε

$$A_{ij} = \bar{A}_{ij}^0 \quad \mathbf{a}^T \mathbf{R}(\nu_i, \mu_i) \delta \mathbf{x}_i + \mathbf{a}^T \mathbf{R}(\nu_i, \mu_i) \delta \mathbf{x}_j + \mathbf{a}^T \mathbf{R}_\nu(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \delta \nu_i + \mathbf{a}^T \mathbf{R}_\mu(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \delta \mu_i \quad (5)$$

και

$$\zeta_{ij} = \bar{\zeta}_{ij}^0 \quad \mathbf{b}^T \mathbf{R}(\nu_i, \mu_i) \delta \mathbf{x}_i + \mathbf{b}^T \mathbf{R}(\nu_i, \mu_i) \delta \mathbf{x}_j + \mathbf{b}^T \mathbf{R}_\nu(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \delta \nu_i + \mathbf{b}^T \mathbf{R}_\mu(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \delta \mu_i \quad (6)$$

όπου

$$S_{ij}^* = \div (x_j^*)^2 + (y_j^*)^2 = d_{ij} \cos \zeta_{ij} \quad (7)$$

είναι η απόσταση ανάμεσα στα σημεία P_i και P_j πάνω στο επίπεδο (x^*, y^*) ,

$$\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} \frac{y_j^*}{(S_{ij}^*)^2} & \frac{x_j^*}{(S_{ij}^*)^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} \frac{x_j^* z_j^*}{S_{ij}^* d_{ij}^2} & \frac{y_j^* z_j^*}{S_{ij}^* d_{ij}^2} & \frac{S_{ij}^*}{d_{ij}} & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

είναι οι συντελεστές των αγνώστων διορθώσεων $\delta \mathbf{x}_i = [\delta x_i \delta y_i \delta z_i]^T$, $\delta \mathbf{x}_j = [\delta x_j \delta y_j \delta z_j]^T$, των προσεγγιστικών τιμών των τοπογραφικών συντεταγμένων στις εξισώσεις παρατηρήσεων,

$$\mathbf{R}_v = \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sin v_i^0 & 0 & \cos v_i^0 \\ \cos v_i^0 \sin \mu_i^0 & 0 & \sin v_i^0 \sin \mu_i^0 \\ \cos v_i^0 \cos \mu_i^0 & 0 & \sin v_i^0 \cos \mu_i^0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{R}_\mu = \frac{\partial}{\partial \mu} \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sin v_i^0 \cos \mu_i^0 & \sin \mu_i^0 & \cos v_i^0 \cos \mu_i^0 \\ \sin v_i^0 \cos \mu_i^0 & \cos \mu_i^0 & \cos v_i^0 \sin \mu_i^0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

είναι οι παράγωγοι πίνακες του \mathbf{R} ως προς v_i και μ_i αντίστοιχα, υπολογισμένες στις γνωστές τιμές v_i^0 , μ_i^0 .

Οι σχέσεις (5) και (6) εκφράζουν τις μεταβολές του αξιμουθίου από A_{ij} σε A_{ij}^0 και της ζενίθια γωνία από ζ_{ij} σε ζ_{ij}^0 , όταν μεταβληθούν οι συντεταγμένες \mathbf{x}_i , \mathbf{x}_j κατά πολύ μικρές ποσότητες $\delta \mathbf{x}_i$ και $\delta \mathbf{x}_j$ και οι γωνίες v_i και μ_i κατά δv_i ($= v_i - v_i^0$) και $\delta \mu_i$ ($= \mu_i - \mu_i^0$). Οι όροι

$$\delta A_{ij} = \mathbf{a}^T \mathbf{R}_v(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \delta v_i + \mathbf{a}^T \mathbf{R}_\mu(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \delta \mu_i \quad (12)$$

και

$$\delta \zeta_{ij} = \mathbf{b}^T \mathbf{R}_v(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \delta v_i + \mathbf{b}^T \mathbf{R}_\mu(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \delta \mu_i \quad (13)$$

εκφράζουν τις επιδράσεις του γήινου πεδίου βαρύτητας στο αξιμουθίο A_{ij} και στη ζενίθια γωνία ζ_{ij} αντίστοιχα. Αν οι τιμές v_i^0 , μ_i^0 δεν είναι αυθαίρετες, αλλά προκύπτουν μετά από την επιλογή ενός **κανονικού πεδίου βαρύτητας**, τότε οι τιμές v_i^0 , μ_i^0 ονομάζονται **κανονικές τιμές**, και οι ποσότητες δv_i , $\delta \mu_i$, που προκύπτουν από τη γραμμικοποίηση, σχετίζονται με τις **διαταράξεις του πεδίου βαρύτητας** και συνδέονται με τις συνιστώσες απόκλισης της κατακορύφου κατά παράλληλο ξ_i και κατά μεσημβρινό η_i , με τη βοήθεια των σχέσεων

$$\delta v_i = \frac{\eta_i}{\cos \mu_i^0} \quad (14)$$

$$\delta \mu_i = \xi_i \quad (15)$$

Οι εξισώσεις (5) και (6) αποτελούν τη βάση για την **ολοκληρωμένη γεωδαισία**, όπου στο μαθηματικό μοντέλο των παρατηρήσεων, εκτός από τις άγνωστες συντεταγμένες των κορυφών του δικτύου, συμμετέχουν και παράμετροι που προέρχονται από το γήινο πεδίο βαρύτητας. Στην περίπτωση των παρατηρήσεων γωνιών (οριζοντίων ή κατακορύφων) ή διευθύνσεων, οι παρά-

μετροι αυτές είναι οι συνιστώσες απόκλισης της κατακορύφου, οι οποίες συνδέουν όχι μόνο τα δύο μέρη της κλασσιικής γεωδαισίας, το διδιάστατο και το μονοδιάστατο δίκτυο σε ένα τρισδιάστατο, αλλά συνδέουν τα γεωμετρικά με τα δυναμικά χαρακτηριστικά του δικτύου, καθώς συνδέονται και με τις παρατηρήσεις τις σχετικές με το πεδίο βαρύτητας, πέρα από τις κλασσιικές γεωμετρικές. Τέτοια δίκτυα, όπου μπορούν να αναλυθούν ταυτόχρονα γεωμετρικές παρατηρήσεις (στις τρεις διαστάσεις) και παρατηρήσεις σχετικές με το πεδίο βαρύτητας (π.χ., αστρονομικό μήκος και πλάτος, δυναμική χωροστάθμιση, ένταση του πεδίου βαρύτητας κλπ.), ονομάζονται **ολοκληρωμένα γεωδαιτικά δίκτυα**. Σχετικά με το σύστημα αναφοράς των συντεταγμένων στα δίκτυα αυτά, η θέση του μπορεί να είναι αυθαίρετη όταν αναλύονται μόνο επίγειες παρατηρήσεις γωνιών ή αποστάσεων (π.χ. τοπογραφικό σύστημα συντεταγμένων). Όταν όμως συμπεριληφθούν και παρατηρήσεις αστρονομικού μήκους και πλάτους, τότε το σύστημα αναφοράς προσανατολίζεται έτσι, ώστε οι άξονές του να γίνουν παράλληλοι προς τους άξονες του παγκόσμιου συμβατικού γήινου συστήματος (Conventional Terrestrial System). Οι παρατηρήσεις της έντασης του γήινου πεδίου βαρύτητας δημιουργούν την απαίτηση για τον ορισμό της αρχής του παραπάνω συστήματος σε σχέση με το κέντρο μάζας της γης.

1.4 Ο προσδιορισμός της οριζόντιας θέσης των σημείων

Όταν οι επιμέρους αποτυπώσεις γίνονται ανεξάρτητα και για ειδικούς σκοπούς, και επιπλέον είναι περιορισμένη η έκταση των τοπογραφικών εργασιών, τότε το οριζόντιο επίπεδο αναφοράς, που ορίζεται έμμεσα στην πράξη από τις οριζοντιώσεις των οργάνων, μετατρέπεται σε επίπεδο του χάρτη ύστερα από σμίκρυνση ανάλογη με την τελική κλίμακα απόδοσης (τα τοποκεντρικά αστρονομικά συστήματα θεωρούνται παράλληλα μεταξύ τους και παράλληλα προς το τοπογραφικό σύστημα' το επίπεδο (x, y) ονομάζεται οριζόντιο ή τοπογραφικό επίπεδο). Η σχέση (3) γίνεται

$$A_{ij} = \arctan \frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i} \quad (16)$$

και η γραμμικοποιημένη της μορφή

$$A_{ij} = A_{ij}^0 + \frac{Y_j - Y_i}{S_{ij}^2} \delta x_i + \frac{X_j - X_i}{S_{ij}^2} \delta y_i + \frac{Y_j - Y_i}{S_{ij}^2} \delta x_j - \frac{X_j - X_i}{S_{ij}^2} \delta y_j \quad (17)$$

Όταν όμως οι επιμέρους αποτυπώσεις είναι ενταγμένες σε μια γενικότερη αποτύπωση της οποίας αποτελούν μέρος, ή όταν η έκταση είναι τόση ώστε να είναι σημαντική η επίδραση της γήινης καμπυλότητας και γενικότερα, οι επιδράσεις του πεδίου βαρύτητας, τότε, η τελική απόδοση πρέπει να γίνει στο επίπεδο του χάρτη σε συμφωνία με το είδος της χαρτογραφικής προβολής που χρησιμοποιείται για την απόδοση της ευρύτερης αποτύπωσης (χαρτογράφησης). Επειδή οι παρατηρήσεις αναφέρονται στο οριζόντιο (τοπογραφικό) επίπεδο, ενώ η αποτύπωση στο προβολικό επίπεδο, είναι απαραίτητο να λάβουμε υπόψη τη διαφορά ανάμεσα στα δύο αυτά επίπεδα. Τη διαφορά αυτή αντιμετωπίζουμε με τη βοήθεια κατάλληλων αναγωγών των παρατηρήσεων που μετατρέπουν τις πραγματικές παρατηρήσεις σε σχέση με το οριζόντιο επίπεδο, σε "ψευδοπαρατηρήσεις" σε σχέση με το προβολικό επίπεδο.

1.4.1 Προσδιορισμός της θέσης των σημείων στο ελλειψοειδές αναφοράς

Στις περιπτώσεις που οι τοπογραφικές εργασίες πρέπει να εντάσσονται σ' ένα γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς (π.χ. Ελληνικό Datum, Ευρωπαϊκό Datum), σε συνδυασμό με τη χρήση κάποιας απεικόνισης (προβολής), οι αρχικές παρατηρήσεις που γίνονται στη γήινη επιφάνεια πρέπει να ανάγονται σε δύο φάσεις: ανάγονται από τη γήινη επιφάνεια στο ελλειψοειδές και στη συνέχεια, ανάγονται από το ελλειψοειδές στο προβολικό επίπεδο.

Ας δούμε για παράδειγμα την αναγωγή ενός αζιμουθίου, από τη γήινη επιφάνεια στην επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς. Στην πράξη, ελάχιστες φορές μετρώνται αστρονομικά αζιμούθια σε τοπογραφικά δίκτυα και μάλιστα στις περιπτώσεις που δεν ορίζεται ο προσανατολισμός του δικτύου, δηλαδή όταν βρισκόμαστε σε περιοχή που δεν υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία του κρατικού δικτύου. Επειδή όμως, ένα αζιμούθιο μπορεί να προκύψει προσθέτοντας μία γωνία σ' ένα ήδη γνωστό αζιμούθιο, και αντίστροφα, μία γωνία μπορεί να προκύψει από τη διαφορά δύο γνωστών αζιμουθίων, στο κεφάλαιο αυτό θα περιορισθούμε μόνο σε αζιμούθια προκειμένου για γωνιακά μεγέθη.

Το αζιμούθιο A_{ij} από τη γήινη επιφάνεια, ανάγεται στο αζιμούθιο α_{ij}^E στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς με βάση τις σχέσεις:

α. Αναγωγή από το αστρονομικό αζιμούθιο A , στο γεωδαιτικό α (διόρθωση Laplace)

$$\alpha_{ij} = A_{ij} - \eta_i \tan \varphi_i - (\xi_i \sin A_{ij} - \eta_i \cos A_{ij}) \cot \zeta_{ij} \quad (17)$$

β. Αναγωγή λόγω υψομέτρου σκόπευσης

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij} + \frac{h_i}{2Q} e^2 \sin 2\alpha_{ij} \cos^2 \varphi_m \quad (18)$$

γ. Αναγωγή από την κάθετη τομή στη γεωδαισιακή γραμμή

$$\alpha_{ij}^E = \alpha_{ij} \frac{d_{ij}^2}{12a^2} e^2 \sin 2\alpha_{ij} \cos^2 \varphi_m \quad . \quad (19)$$

Από τις παραπάνω διορθώσεις, η σημαντικότερη, από άποψη μεγέθους, είναι η διόρθωση Laplace. Οι δύο επόμενες (β. και γ.), στα συνηθισμένα τοπογραφικά δίκτυα, είναι πρακτικά ασήμαντες. Γενικά, σε μια παρατήρηση, μια διόρθωση θεωρείται πρακτικά ασήμαντη όταν το μέγεθός της είναι αρκετά μικρότερο της ακρίβειας, που εκφράζεται από την τυπική απόκλιση της αντίστοιχης παρατήρησης.

Οι αναγωγές των οριζοντίων διευθύνσεων και των γωνιών προκύπτουν από τις παραπάνω αναγωγές του αζιμουθίου, και παρουσιάζονται αναλυτικά στο κεφάλαιο 5, ενώ οι αναγωγές των αποστάσεων στο κεφάλαιο 6.

Η αναγωγή των παρατηρήσεων των οριζοντίων διευθύνσεων και γωνιών σε μια επιφάνεια αναφοράς, προϋποθέτει τη γνώση των συνιστωσών της απόκλισης της κατακορύφου στο σημείο στάσης του θεοδολίχου. Οι τιμές αυτές δεν θεωρούνται άγνωστες όπως στην ολοκληρωμένη γεωδαισία, αλλά προκύπτουν από την επεξεργασία ξεχωριστών παρατηρήσεων, οι οποίες δεν έχουν σχέση μ' εκείνες που αναφέρονται στις μετρήσεις γεωμετρικών στοιχείων μεταξύ των κορυφών του δικτύου. Τέτοιες είναι οι παρατηρήσεις του αστρονομικού μήκους ή πλάτους, οι παρατηρήσεις της έντασης του γήινου πεδίου βαρύτητας ή, γενικότερα, οι παρατηρήσεις που γίνονται στην ευρύτερη περιοχή του δικτύου και έχουν σαν σκοπό τους το λεπτομερειακό υπολογισμό του γεωειδούς σε τοπική κλίμακα.

Προϋπόθεση για τις παραπάνω αναγωγές είναι ότι τα σφάλματα στις ανεξάρτητα υπολογισμένες συνιστώσες των αποκλίσεων της κατακορύφου, και επομένως και οι επιδράσεις τους στην ακρίβεια των ανηγμένων παρατηρήσεων, είναι μικρά σε σχέση με τα σφάλματα των παρατηρήσεων. Σε διαφορετική περίπτωση τα σφάλματα στις συνιστώσες εμφανίζονται σαν σφάλματα μοντέλου.

Στην Τοπογραφία, κατά την αποτύπωση μιας περιοχής, και συγκεκριμένα κατά τη μέτρηση των "σημείων λεπτομερειών", υποθέτουμε ότι, επειδή κάνουμε μετρήσεις σε μια περιορισμένη περιοχή, οι διευθύνσεις των κατακορύφων αξόνων των οριζοντιωμένων θεοδολίχων στα διάφορα σημεία στάσης, και γενικότερα οι διευθύνσεις της κατακορύφου (του νήματος της στάθμης) σε όλα τα σημεία της περιοχής, είναι παράλληλες μεταξύ τους. Άμεση συνέπεια της υπόθεσης αυτής, είναι η σχετική έννοια των οριζόντιων επιπέδων, των επιπέδων δηλαδή που είναι παράλληλα μεταξύ τους και κάθετα στις κοινές διευθύνσεις των κατακορύφων. Τα οριζόντια επίπεδα αντιστοιχούν

στις διάφορες "στάθμες του νερού". Με τη βοήθειά τους είναι δυνατή η προβολή των γεωμετρικών σχημάτων πάνω σ' ένα οποιοδήποτε από αυτά, με την οποία προκύπτει ο γνωστός διαχωρισμός της αποτύπωσης σε οριζοντιογραφία και υψομετρία. Ένα από τα επίπεδα αυτά, που προσεγγίζει καλύτερα τη μέση στάθμη της θάλασσας, αποτελεί το επίπεδο αναφοράς για την υψομετρική αποτύπωση. Επειδή η γη έχει στην πραγματικότητα σχήμα που σε πρώτη προσέγγιση είναι σφαιρικό, η υπόθεση ότι οι διευθύνσεις της κατακορύφου είναι παράλληλες αποκλίνει σημαντικά από την πραγματικότητα όταν αναφερόμαστε σε ευρύτερες περιοχές. Για το λόγο αυτό, στην περίπτωση των δικτύων, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα τυχαίο "οριζόντιο" επίπεδο σαν επιφάνεια αναφοράς όπως στις αποτυπώσεις, αν και το δίκτυο αυτό δημιουργείται για τον έλεγχο αυτής της συγκεκριμένης αποτύπωσης.

Πρέπει να σημειώσουμε, σχετικά με τα δίκτυα, ότι δεν υπάρχει σαφής διαχωρισμός ανάμεσα στο "τοπογραφικό" και στο "γεωδαιτικό". Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η βασική υπόθεση που γίνεται στα τοπογραφικά δίκτυα, και τα διαχωρίζει από τα γεωδαιτικά, είναι ότι το γήινο πεδίο βαρύτητας ταυτίζεται απόλυτα με κάποιο κανονικό πεδίο, που επιλέγεται για τους σκοπούς της γραμμικοποίησης, και κατά συνέπεια οι επιδράσεις του στον καθορισμό της θέσης των σημείων να θεωρούνται αμελητέες, επειδή οι διευθύνσεις της κατακορύφου στα σημεία του δικτύου θεωρούνται κάθετες στην επιφάνεια που προσεγγίζει τη γήινη επιφάνεια. Δηλαδή, οι διαταράξεις dn_i και dm_i , που αναφέρονται στη συγκεκριμένη επιλογή κανονικού πεδίου, θεωρούνται αμελητέες σε σχέση με τα σφάλματα των παρατηρήσεων, κι έχουν σ' όλα τα σημεία πρακτικά μηδενική τιμή. Η παραπάνω υπόθεση δεν σημαίνει ότι η αναγωγή Laplace είναι πρακτικά ασήμαντη.

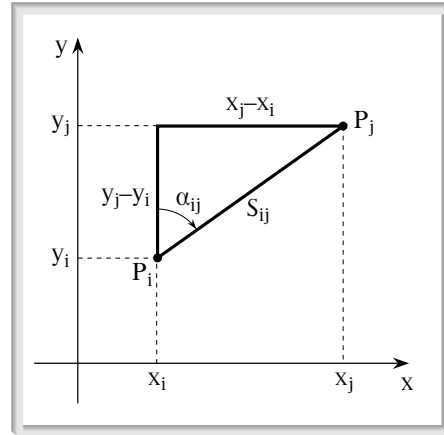
Συμπερασματικά λοιπόν, ακόμη και στα τοπογραφικά δίκτυα, ο πρώτος όρος της αναγωγής Laplace είναι συνήθως σημαντικός και δεν πρέπει να αγνοείται. Ο δεύτερος όρος γίνεται σημαντικός όταν μεταξύ των σημείων υπάρχει μεγάλη υψομετρική διαφορά. Η έλλειψη πληροφορίας για τις συνιστώσες απόκλισης της κατακορύφου έχει σαν αποτέλεσμα να αγνοείται η παραπάνω αναγωγή, με κίνδυνο παραμόρφωσης του δικτύου όταν υπάρχουν μεγάλες υψομετρικές διαφορές μεταξύ των κορυφών του. Στα συνηθισμένα τοπογραφικά δίκτυα μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια μέση τιμή η_0 , ξ_0 της περιοχής για όλα τα σημεία του δικτύου.

1.4.2 Προσδιορισμός της θέσης των σημείων στο τοπογραφικό ή στο προβολικό επίπεδο

Το ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς των συντεταγμένων (x, y) ορίζεται έτσι ώστε ο άξονας y να κατευθύνεται προς βορρά και ο άξονας x

προς την ανατολή. Η αρχή του συστήματος ή είναι αυθαίρετη, ή ορίζεται από το συγκεκριμένο προβολικό σύστημα.

Η θέση ενός νέου σημείου μπορεί να προσδιοριστεί από δύο ήδη γνωστά σημεία και από την τομή δύο γεωμετρικών τόπων που προκύπτουν από δύο παρατηρήσεις γωνιών, ή αποστάσεων, ή μιας γωνίας και μιας απόστασης, καθ' όλους τους δυνατούς συνδυασμούς (τοπογραφικά προβλήματα τομών, βλ. παράρτημα Β). Ο υπολογισμός των νέων συντεταγμένων προϋποθέτει την αναγωγή των παρατηρήσεων στο προβολικό επίπεδο που χρησιμοποιείται.



Σχήμα 5. Το μαθηματικό μοντέλο στο οριζόντιο και στο προβολικό επίπεδο.

Στο βιβλίο αυτό θα ασχοληθούμε με τον προσδιορισμό της θέσης ενός ή περισσότερων σημείων με μετρήσεις γωνιών, ή αποστάσεων, ή γωνιών και αποστάσεων, περισσότερες από τις άγνωστες συντεταγμένες. Τις βασικές συναρτήσεις του μαθηματικού μοντέλου για την ανάλυση τέτοιων πλεοναζουσών παρατηρήσεων, αποτελούν οι σχέσεις του αντίστροφου γεωδαιτικού προβλήματος: Από τις γνωστές συντεταγμένες x_i, y_i και x_j, y_j δύο γνωστών σημείων P_i και P_j αντίστοιχα, προσδιορίζονται το αξιμώθιο α_{ij} από το P_i προς το P_j και η μεταξύ τους απόσταση S_{ij}

$$\alpha_{ij} = \arctan \frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} \quad (20)$$

$$S_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (21)$$

1.5 Ο προσδιορισμός της κατακόρυφης θέσης των σημείων

Ο προσδιορισμός της κατακόρυφης θέσης των σημείων σχετίζεται με τον υπολογισμό των υψομέτρων των σημείων από τις υψομετρικές διαφορές που είτε παρατηρούνται απευθείας, π.χ. με τη μέθοδο της γεωμετρικής χωροστάθμησης, με τη μέθοδο της υδροστατικής καθώς και με τη μέθοδο της υδροδυναμικής χωροστάθμησης, είτε προκύπτουν από συνδυασμό κατακορύφων γω-

νιών και αποστάσεων, με τη μέθοδο της τριγωνομετρικής χωροστάθμησης. Οι πιο συνηθισμένες μέθοδοι, στις οποίες θα αναφερθούμε στο βιβλίο αυτό, είναι η μέθοδος της γεωμετρικής και η μέθοδος της τριγωνομετρικής χωροστάθμησης.

Πριν από την ανάλυση των τεχνικών μέτρησης των υψομετρικών διαφορών είναι απαραίτητο να συζητήσουμε το πρόβλημα του ορισμού των υψών και των υψομετρικών συστημάτων. Θα μπορούσε κανείς να εκμεταλλευτεί όλη την πληροφορία σχετικά με τις υψομετρικές διαφορές που διαθέτουν οι παρατηρήσεις μόνο τότε, όταν οι πληροφορίες αυτές αναφέρονται στο ίδιο υψομετρικό σύστημα ή όταν είναι γνωστές οι σχέσεις μετασχηματισμού από ένα σύστημα σε άλλο. Για το λόγο αυτό ακολουθεί στη συνέχεια μία σύντομη αναφορά στα υψομετρικά συστήματα και στις μεταξύ τους σχέσεις.

Η βασική εξίσωση για τον ορισμό των γεωδαιτικών υψομέτρων (ορθομετρικό, δυναμικό, κανονικό κλπ.) είναι η

$$dW = g dz^* \quad (22)$$

όπου dz^* είναι η μεταβολή κατά τη διεύθυνση της κατακορύφου στο σημείο που μετρήθηκε η βαρύτητα g και dW είναι η αντίστοιχη μεταβολή του δυναμικού.

Αν θεωρήσουμε το γεωειδές (με δυναμικό W_0) σαν επιφάνεια αναφοράς, τότε η διαφορά δυναμικού μεταξύ του σημείου P στην επιφάνεια του εδάφους και του γεωειδούς είναι γνωστή σαν **γεωδυναμικός αριθμός** του σημείου P . Συμβολίζεται με το C_p και ορίζεται με τη βοήθεια της εξίσωσης

$$C_p = \frac{P}{\text{γεωειδές}} g dz^* \quad (23)$$

Ο γεωδυναμικός αριθμός μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η φυσική έκφραση της έννοιας του ύψους, αλλά επειδή δεν έχει τη διάσταση του μήκους δεν αποδίδει τη γεωμετρική έκφραση που αντιλαμβάνεται κανείς εύκολα στις καθημερινές πρακτικές εφαρμογές. Για να μετατραπούν οι γεωδυναμικοί αριθμοί σε μονάδες μήκους, θα πρέπει να διαιρεθούν με μία τιμή βαρύτητας.

Για τις συνηθισμένες τοπογραφικές εργασίες μπορούμε να πούμε ότι από τη γεωμετρική χωροστάθμηση προκύπτουν απευθείας οι ορθομετρικές υψομετρικές διαφορές των σημείων. **Ορθομετρικό υψόμετρο** ενός σημείου P είναι το μήκος της απόστασης του σημείου αυτού από το γεωειδές που μετρείται πάνω στη γραμμή πτώσης που περνάει από το σημείο. Ορίζεται με τη βοήθεια της σχέσης