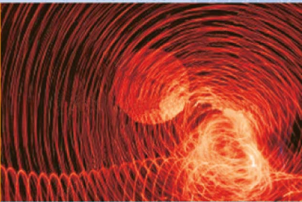
ΑΝΔΡΕΑ Κ. ΡΩΜΑΝΙΔΗ
Φυσικού-Μαθηματικού-Ηλεκτρονικού

ΔΙΑΔΟΣΗ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ



(Θεωρητική θεμελίωση και πρακτικές εφαρμογές)

ΡΑΔΙΟΦΩΝΙΑ – ΤΗΛΕΟΡΑΣΗ – ΚΙΝΗΤΗ ΤΗΛΕΦΩΝΙΑ
ΕΠΙΓΕΙΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΗΜΙΚΕΣ ΡΑΔΙΟΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

ISBN 960-456-005-0

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσ/νίκης-Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229
e-mail: info@ziti.gr

Βιβλιοπωλείο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
Αρμενοπούλου 27 • 546 35 Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310.203.720, Fax 2310.211.305
e-mail: sales@ziti.gr

www.ziti.gr

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό γράφτηκε με την ελπίδα πως θα φανεί χρήσιμο στους φοιτητές και σπουδαστές των ΤΕΙ και ΑΕΙ, καθώς και σε κάθε επαγγελματία που σχετίζεται με το αντικείμενο.

Η πολύχρονη θητεία μου ως επαγγελματία επισκευαστή ηλεκτρικών και ηλεκτρονικών συσκευών και ως καθηγητή στο ΤΕΙ της Θεσσαλονίκης, που επί δεκαετίες δίδαξε το μάθημα της διάδοσης των Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων, ήταν αποφασιστικός παράγοντας που με οδήγησε στο να γράψω αυτό το βιβλίο. Προσπάθησα να αποφύγω, όσο μου ήταν μπορετό, τα δυσνόητα και πολλές φορές ακατανόητα μαθηματικά που χρησιμοποιούνται στο μάθημα αυτό για τη θεωρητική του θεμελίωση και να δώσω πολλά παραδείγματα εφαρμογών, που να έχουν πρακτικό ενδιαφέρον. Επιδίωξή μου είναι ο φοιτητής διαβάζοντας το βιβλίο αυτό να πάρει μια γενική ιδέα περί του θέματος της διάδοσης των ΗΜΚ και αν ποτέ του χρειαστεί να ασχοληθεί εκτενέστερα, να έχει τις προκαταρκτικές γνώσεις για την πραγματοποίηση του σκοπού αυτού.

Θα χρωστούσα μεγάλη χάρη σ’ όποιον, διαβάζοντας αυτό το βιβλίο, έκανε υποδείξεις βελτίωσής του ή υποδείκνυε λάθη και ασάφειες που ενδεχόμενα υπάρχουν σ’ αυτό.

Ανδρέας Κ. Ρωμανίδης

Θεσσαλονίκη, Μάιος 2006

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Κεφάλαιο 2

Ανυσματικές κυματικές εξισώσεις του Maxwel μερικές εφαρμογές τους

Κεφάλαιο 3

Ανάκλαση και διάθλαση σε αγώγιμα και μονωτικά μέσα

Κεφάλαιο 4

Περίθλαση ραδιοκυμάτων και διάδοση με περίθλαση

Κεφάλαιο 5

Διάδοση ΗΜΚ πάνω από την επιφάνεια της Γης

Κεφάλαιο 6

Σκέδαση ραδιοκυμάτων και διάδοση με σκέδαση

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Διάδοση κυμάτων κινητής τηλεφωνίας

Κεφάλαιο 11

Διάδοση Ραδιοκυμάτων σε κλειστούς χώρους

Κεφάλαιο 12

Διαστημικές επικοινωνίες

Κεφάλαιο 13

Ραδιοθόρυβοι

Κεφάλαιο 14

Ηλεκτρομαγνητική συμβατότητα και μετρήσεις

Κεφάλαιο 15

Πρακτικός υπολογισμός κυκλώματος ραδιοζεύξης

Κεφάλαιο 16

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Φυσική σημασία των παραστάσεων: $\nabla\Phi = \mathrm{grad}\Phi,\ \nabla\cdot\vec{A} = \mathrm{div}\vec{A},\ \nabla\times\vec{A} = \mathrm{curl}\vec{A} = \mathrm{rot}\vec{A}$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Σχέσεις της Απόκλισης, Περιστροφής, Κλίσης και Λαπλασιανής σε διάφορα Συστήματα Συντεταγμένων

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Ανάκλαση και Διάθλαση του φωτός

1ο Κεφάλαιο
Εισαγωγή

1.1. Γενικά

Γενικά μπορούμε να πούμε ότι η ύλη δηλώνει όχι μόνο την απλή παρουσία της στο περιβάλλον που βρίσκεται, αλλά και την κατάσταση στην οποία βρίσκεται, με μορφή δυνάμεων (πεδίων). Η ύπαρξη ύλης στο χώρο συνεπάγεται και την ύπαρξη βαρυτικού πεδίου γύρω από αυτήν. Ειδικά αν η ύλη βρίσκεται σε μορφή ηλεκτρικού φορτίου, τότε επιπλέον δημιουργεί γύρω της και άλλα πεδία, ανάλογα με την κινητική της κατάσταση: στατικό ηλεκτρικό πεδίο, στατικό μαγνητικό πεδίο, ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Αν η ύλη είναι σε μορφή στατικού ηλεκτρικού φορτίου, τότε δημιουργείται γύρω από αυτή **στατικό ηλεκτρικό πεδίο**.

Αν πάλι η ύλη είναι σε μορφή ηλεκτρικού φορτίου που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς το χώρο που βρίσκεται, τότε δημιουργείται γύρω από αυτή **στατικό μαγνητικό πεδίο.**

Τέλος όταν ένα ηλεκτρικό φορτίο κινείται με μεταβαλλόμενη ταχύτητα, τότε δημιουργεί γύρω του **ηλεκτρομαγνητικό πεδίο**.

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο έχει μια καταπληκτική ιδιότητα που δεν την έχουν τα άλλα πεδία: **εκπέμπει ενέργεια**, που λέγεται **ηλεκτρομαγνητική ενέργεια**. Η ενέργεια αυτή φεύγει από την πηγή που την παράγει (μεταβαλλόμενο χρονικά πεδίο) και δεν ξαναγυρίζει πίσω σ' αυτήν. Π.χ. μια κεραία ενός οποιουδήποτε Ραδιοσυστήματος (Ραδιοφωνίας, Τηλεόρασης, Τηλεπικοινωνιών, κλπ.) που διαρρέεται συνήθως από εναλλασσόμενο ρεύμα, αλλά γενικά από χρονικά μεταβαλλόμενο ρεύμα, εκπέμπει ηλεκτρομαγνητική ενέργεια. Επίσης ένα ηλεκτρόνιο που βρίσκεται δεσμευμένο μέσα σ' ένα άτομο και περιφέρεται γύρω από τον πυρήνα του σε μια τροχιά που δεν είναι η δική του μόνιμη τροχιά, αλλά εξαναγκάστηκε να πάει σ' αυτήν, όταν επιστρέφει στην κανονική του τροχιά, επιστρέφει με μια επιταχυνόμενη ταχύτητα και εκπέμπει στο χώρο το μήνυμα της επιστροφής του, για απειροελάχιστο χρόνο, με τη μορφή φωτονίου. Το φωτόνιο θεωρείται ότι είναι μια μορφή ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας που ο άνθρωπος την αντιλαμβάνεται ως θερμότητα ή φως ή έχει ως αποτέλεσμα να «μαυρίσει» ή να πάθει το δέρμα του σοβαρές βλάβες από τις ακτίνες Χ ή γ του ήλιου, κλπ.

Η ηλεκτρομαγνητική ενέργεια λέγεται και ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Η ενέργεια όμως αυτή είναι πάρα πολύ παράξενη και ταλάνισε τους επιστήμονες εδώ και μερικούς αιώνες. Εμφανίζεται σε μορφή συχνότητας f ($f \in (0, \infty)$). Όσο πιο χαμηλή είναι η συχνότητα του ΗΜΚ, τόσο πιο εμφανής είναι ο κυματικός χαρακτήρας του και τόσο πιο ευδιάκριτα μεταξύ τους είναι το ηλεκτρικό του πεδίο $\vec{E}$ και το μαγνητικό του πεδίο $\vec{H}$. Στις πολύ υψηλές συχνότητες, στην περιοχή του φωτός και πέρα, δηλαδή στις ακτίνες Χ και γ, δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε τα δύο πεδία και δεν μπορούμε να μιλάμε πια για κύμα, αλλά μάλλον για ένα «πακέτο» (quantum) ενέργειας. Ανάμεσα σ’ αυτές τις δύο ακραίες περιοχές των συχνοτήτων, κάπου εκεί στην περιοχή των θερμικών ακτινοβολιών, πολλά φυσικά φαινόμενα εξηγούνται και με την ηλεκτρομαγνητική θεωρία και με την κβαντική θεωρία. Αυτός ο ***«δυϊσμός»,*** δηλαδή η διπλή συμπεριφορά της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας, άλλοτε μεν σαν κύμα και άλλοτε σαν πακέτο ενέργειας είναι ένα μυστήριο για την επιστήμη και μια διαρκής πρόκληση για τους επιστήμονες να εξηγήσουν αυτήν τη διπλή συμπεριφορά (βλ. και σελ.19).

Είναι γνωστό ότι εδώ και αρκετές δεκάδες χρόνια πολλοί επιστήμονες και πολλά ερευνητικά κέντρα προσπαθούν να ενοποιήσουν τη θεωρία των πεδίων που εκπέμπει η ύλη στις διάφορες μορφές της και καταστάσεις της. Ουσιαστικά δηλαδή προσπαθούν να βρουν μια θεωρία, που να δείχνει ότι αυτές οι βαρυτικές, ηλεκτρικές, μαγνητικές, ηλεκτρομαγνητικές, φωτονιακές (κβαντικές), ενδοπυρηνικές κλπ. παρεμφερείς δυνάμεις είναι διαφορετικές μορφές μιας και της μοναδικής δύναμης (οντότητας), που εκδηλώνεται με διαφορετικό τρόπο κάτω από ορισμένες συνθήκες. Δηλαδή να θεμελιώσουν μια ενιαία θεωρία πεδίων που παράγονται από την ύλη.

Η διάδοση των Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων είναι ένα πολύ ενδιαφέρον θέμα για τους ειδικούς που ασχολούνται με τις Ραδιοζεύξεις. Γι’ αυτούς που ασχολούνται γενικά με τα Ηλεκτρονικά, ορισμένες γνώσεις που διέπουν τη διάδοση των ΗΜΚ είναι απαραίτητες.

Το φάσμα των ΗΜΚ δεν έχει σαφή όρια. Μπορούμε να πούμε θεωρητικά ότι το κατώτερο όριό του τείνει στη συχνότητα 0 Hz και το ανώτατο όριό του είναι μια συχνότητα απείρως μεγάλη. Για τα Ραδιοκύματα, που είναι ένα μέρος των ΗΜΚ, μπορούμε να πούμε συμβατικά ότι το φάσμα τους είναι από $0{,}001 \sim 10^{16}$ Hz (10.000 THz). Ραδιοκύματα εξαιρετικά χαμηλών συχνοτήτων, της τάξης μερικών χιλιοστών του Hz, προκαλούνται ακόμα και από φυσικά φαινόμενα, όπως π.χ. αυτά που δημιουργούνται από τις διακυμάνσεις του ηλιακού ρεύματος ηλεκτρονίων-πρωτονίων, καθώς αυτό διεισδύει στην ατμόσφαιρα της Γης και οι συχνότητες που παράγονται από τις αστραπές και τους κεραυνούς, που κινούνται κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών του γεωμαγνητικού πεδίου, κλπ. Το κατώτατο όριο των 0,001 Hz προφανώς είναι ένα αυθαίρετο όριο, το οποίο μελλοντικά μπορεί η πρόοδος της επιστήμης να επεκτείνει προοδευτικά προς ακόμα πιο χαμηλές συχνότητες. Το ανώτατο όριο των 10.000 THz είναι ένα αυθαίρετο όριο συχνοτήτων που παράγονται από Laser υπεριωδών ακτίνων. Με την αναμενόμενη πρόοδο της Επιστήμης και της Τεχνολογίας είναι φυσικό να περιμένει κανείς την επέκταση των συχνοτήτων των Ραδιοκυμάτων και πέρα από το όριο των 10.000 THz.

Η ITU (International Telecommunication Union, Διεθνής Ένωση Τηλεπικοινωνιών) επίσημα εκχωρεί τις συχνότητες από 10 KHz έως 275 GHz στους Ραδιοκανονισμούς (Radio Regulations) που εκδίδει.

Θα ασχοληθούμε μόνο με τη **μη οδηγούμενη** διάδοση των Ραδιοκυμάτων μέσα στην ατμόσφαιρα της Γης, πάνω στην επιφάνειά της, μέσα σ' αυτήν, καθώς και στο εξωτερικό διάστημα. Δεν θα ασχοληθούμε με την κατευθυνόμενη διάδοση που πραγματοποιείται με τη βοήθεια τεχνικών κατασκευών, όπως π.χ. γραμμές μεταφοράς, κυματοδηγούς, κλπ. Θα ασχοληθούμε όμως με την κατευθυνόμενη διάδοση που γίνεται κάτω από φυσικές συνθήκες, όπως π.χ. είναι οι ατμοσφαιρικοί κυματοδηγοί, οι ιονοσφαιρικοί κυματοδηγοί, κλπ.

Για πλήρη κατανόηση των ΗΜΚ απαιτούνται πολύ καλές γνώσεις Μαθηματικών. Όμως γι' αυτούς που ασχολούνται γενικά με τα Ηλεκτρονικά απαιτούνται ορισμένες μόνο γνώσεις Μαθηματικών. Θα προσπαθήσουμε να δώσουμε, με όσο μπορούμε λιγότερα Μαθηματικά, ορισμένες δύσκολες έννοιες της διάδοσης των ΗΜΚ.

Η θεωρητική θεμελίωση της διάδοσης των ΗΜΚ στηρίζεται στις εξισώσεις του James Clerk Maxwell.

Πριν ασχοληθούμε με τις εξισώσεις του Maxwell, χρήσιμο είναι να ξεδιαλύνουμε πρώτα μερικές έννοιες που θα χρησιμοποιήσουμε.

1.2. Ανυσματικά μεγέθη των ΗΜΚ

Στη Θεωρία Κυκλωμάτων αναφερόμαστε πάντα σε μιγαδική διαφορά δυναμικού $\dot{V}$ και σε μιγαδική ένταση ρεύματος $\dot{I}$. Στη Διάδοση των ΗΜΚ τα αντίστοιχα μεγέθη είναι ανυσματικά, αλλά με τη μορφή ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων. Το μιγαδικό μέγεθος $\dot{V}$ θα το αντιστοιχίσουμε στο ανυσματικό μέγεθος **ένταση ηλεκτρικού πεδίου** $\vec{E}$ και το μιγαδικό μέγεθος $\dot{I}$ στο ανυσματικό μέγεθος **ένταση μαγνητικού πεδίου** $\vec{H}$**.** Όλες οι μελέτες μας και όλοι οι λογαριασμοί μας θα αναφέρονται πάντα σ' αυτά τα ανυσματικά μεγέθη $\vec{E}$ και $\vec{H}$.

Εκτός από αυτά τα δύο βασικά ανυσματικά μεγέθη θα χρησιμοποιήσουμε και άλλα 4 παράγωγα από αυτά ανυσματικά μεγέθη, τη **διηλεκτρική μετατόπιση** $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, τη **μαγνητική επαγωγή** $\vec{B} = \mu \vec{H}$**,** την **πυκνότητα ρεύματος αγωγιμότητας** $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ και το **άνυσμα Poynting** $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$**.** (Βλέπε σχέσεις (1.5)).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΗΣ ΣΧΕΣΗΣ: $\vec{J} = \sigma \vec{E}$:

Έστω ένας ευθύγραμμος αγωγός μήκους l και σταθερής διατομής S (Σχ. 1.1). Ισχύει:

$$\Delta\vec{V} = R\vec{I}$$

$$\vec{E} = \frac{\Delta\vec{V}}{l} \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{V} = l\,\vec{E} \quad \Rightarrow \quad R\vec{I} = l\,\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \rho\frac{l}{S}\vec{I} = l\,\vec{E} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\vec{I}}{S} = \frac{1}{\rho}\vec{E}} \tag{1.1}$$

Είναι όμως:

$$\boxed{\frac{\vec{I}}{S} = \vec{J}} \tag{1.2}$$

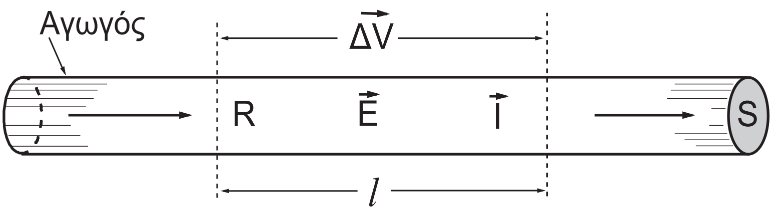
όπου: $\vec{J}$ ανυσματικό μέγεθος «**πυκνότητα ρεύματος**», σε A/m^2.

Επίσης ισχύει:

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \sigma} \tag{1.3}$$

όπου: ρ η ειδική αντίσταση του αγωγού σε, Ω·m

σ η ειδική αγωγιμότητα σε, 1/Ω·m ή ℧/m ή mho/m ή Siemens/m (S/m).



Σχ. 1.1. Για την απόδειξη της σχέσης $\vec{J} = \sigma\vec{E}$.

Με αντικατάσταση των (1.2) και (1.3) στην (1.1) έχουμε :

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \tag{1.4}$$

Χρήσιμες σχέσεις που πρέπει να έχουμε υπόψη μας είναι :

$$\begin{aligned} &\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_r\varepsilon_o\vec{E} \\ &\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_r\mu_o\vec{H} \\ &\vec{J} = \sigma\vec{E} \\ &\vec{P} = \vec{E}\times\vec{H} \end{aligned} \tag{1.5}$$

όπου: $\vec{D}$ η διηλεκτρική μετατόπιση, σε Coulomb/m^2 (Cb/m^2)

ε η διηλεκτρική σταθερά του υλικού, σε F/m

ε_r η σχετική διηλεκτρική σταθερά του υλικού, καθαρός αριθμός

ε_o η διηλεκτρική σταθερά του κενού $\dfrac{1}{36\pi\cdot 10^9}$ F/m

$\vec{E}$ η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, σε V/m

$\vec{B}$ η μαγνητική επαγωγή, σε Tesla (T) ή Weber/m^2 (Wb/m^2) ή Gauss (Gs), 1 T = 10.000 Gs

μ η μαγνητική διαπερατότητα του υλικού, σε H/m

μ_r η σχετική μαγνητική διαπερατότητα, καθαρός αριθμός

μ_o η μαγνητική διαπερατότητα του κενού $4\pi\cdot 10^{-7}$ H/m

$\vec{H}$ η ένταση του μαγνητικού πεδίου, σε A/m

$\vec{J}$ η πυκνότητα του ρεύματος αγωγιμότητας, σε A/m^2

Η διηλεκτρική μετατόπιση $\vec{D}$ δίνει την πυκνότητα **της ηλεκτρικής ροής** (Cb/m^2). Από τη διηλεκτρική σταθερά του υλικού $\varepsilon=\varepsilon_o\varepsilon_r$ εξαρτάται κατά πόσο αυξάνεται η ηλεκτρική ροή μέσα στην ύλη. Προφανώς ηλεκτρική ροή υπάρχει και στο κενό.

Η σχετική διηλεκτρική σταθερά ε_r φανερώνει κατά πόσο ένα υλικό «πολώνεται» εύκολα ή παθαίνει «διηλεκτρική μετατόπιση». Π.χ. αν μέσα σ' ένα φορτισμένο πυκνωτή αέρος με τάση V βάλουμε ένα ορισμένο μονωτικό υλικό, τα δεσμευμένα ηλεκτρόνιά του καθώς περιστρέφονται γύρω από τους πυρήνες τους θα πλησιάζουν πιο πολύ προς το θετικό πόλο του πυκνωτή και θα απομακρύνονται από τον αρνητικό του πόλο. Γι' αυτόν το λόγο το κέντρο του αρνητικού φορτίου των ηλεκτρονίων των περιστρεφόμενων γύρω από τον πυρήνα «**μετατοπίζεται**» προς το θετικό πόλο του πυκνωτή. Όσο πιο εύκολα γίνεται αυτή η «**μετατόπιση»** των ηλεκτρονίων προς τη θετική πλάκα του πυκνωτή, τόσο πιο μεγάλη είναι η σχετική διηλεκτρική σταθερά ε_r του υλικού. Με άλλα λόγια τόσο πιο πολύ αυξάνεται η **ηλεκτρική ροή** $\vec{D}$ μέσα στο υλικό. Μάλιστα ένας ορισμός της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς δίνεται και από τις σχέσεις:

$$\varepsilon_r = \frac{C'}{C_o} = \frac{Q'}{Q_o}$$

όπου: C' η χωρητικότητα του πυκνωτή που έχει, όταν ανάμεσα στις πλάκες του υπάρχει το μονωτικό υλικό, σε F

Q' το φορτίο του πυκνωτή που έχει, όταν ανάμεσα στις πλάκες του υπάρχει το μονωτικό υλικό, σε Cb

C_o η χωρητικότητα του πυκνωτή, όταν ανάμεσα στις πλάκες του υπάρχει το κενό

Q_o το φορτίο του πυκνωτή, όταν ανάμεσα στις πλάκες του υπάρχει το κενό.

Δηλαδή η σχετική διηλεκτρική σταθερά ε_r ενός υλικού αριθμητικά είναι ίση με το πόσες φορές αυξάνεται η χωρητικότητα ή το φορτίο ενός πυκνωτή αέρος, όταν σ' αυτό εισαχθεί το υλικό.

Η μαγνητική επαγωγή $\vec{B}$ δίνει την πυκνότητα της μαγνητικής ροής (Wb/m^2). Από τη μαγνητική διαπερατότητα του υλικού $\mu=\mu_o\mu_r$ εξαρτάται κατά πόσο αυξάνεται η **μαγνητική ροή** μέσα στην ύλη. Προφανώς μαγνητική ροή υπάρχει και στο κενό.

Η σχετική μαγνητική διαπερατότητα μ_r φανερώνει κατά πόσο ένα μαγνητικό υλικό «μαγνητίζεται» εύκολα. Π.χ. αν μέσα σ' ένα πηνίο αέρος το οποίο διαρρέεται από ένα συνεχές ρεύμα I_o βάλουμε ένα ορισμένο μαγνητικό υλικό, τα ηλεκτρόνια του υλικού αναγκάζονται να κινηθούν μέσα στο μαγνητικό πεδίο που βρίσκονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ισχυροποιήσουν την επαγωγή $\vec{B}$. Όσο πιο εύκολα ισχυροποιείται η επαγωγή $\vec{B}$, τόσο πιο μεγάλη είναι η σχετική μαγνητική διαπερατότητα μ_r του υλικού. Με άλλα λόγια τόσο πιο πολύ αυξάνεται η **μαγνητική ροή** $\vec{B}$ μέσα στο υλικό. Μάλιστα ένας ορισμός της σχετικής μαγνητικής διαπερατότητας δίνεται και από τις σχέσεις:

$$\mu_r = \frac{L'}{L_o} = \frac{B'}{B_o}$$

όπου L' η αυτεπαγωγή του πηνίου, όταν μέσα του βρίσκεται το μαγνητικό υλικό, σε H

$\vec{B}$ η επαγωγή του πηνίου, όταν μέσα του βρίσκεται το μαγνητικό υλικό, σε T

L_o η αυτεπαγωγή του πηνίου όταν μέσα του υπάρχει το κενό

B_o η επαγωγή του πηνίου όταν μέσα του υπάρχει το κενό

Δηλαδή η σχετική μαγνητική διαπερατότητα μ_r ενός υλικού αριθμητικά είναι ίση με το πόσες φορές αυξάνεται η αυτεπαγωγή ή η επαγωγή ενός πηνίου αέρος, όταν σ' αυτό εισαχθεί το υλικό.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι οι τιμές ε_r και μ_r του αέρα είναι ελάχιστα μεγαλύτερες από τη μονάδα και επομένως πρακτικά ένας πυκνωτής αέρος ή ένα πηνίο αέρος είναι σαν να βρίσκονται μέσα σε κενό.

Από τα παραπάνω βγαίνει το συμπέρασμα ότι τόσο το ε_r όσο και το μ_r, φανερώνουν κατά πόσο το υλικό έχει ηλεκτρικές (μονωτικές) ή μαγνητικές ιδιότητες, αντίστοιχα.

1.3. Άνυσμα Poynting

Μια πάρα πολύ χρήσιμη έννοια στη διάδοση των ΗΜΚ είναι η έννοια του **ανύσματος Poynting**. Πριν ασχοληθούμε μ' αυτό, χρήσιμο είναι ν' αναφέρουμε τους παρακάτω βασικούς νόμους του ηλεκτρομαγνητισμού:

Στατικά φορτία δημιουργούν στο χώρο μόνο ηλεκτρικό πεδίο. Π.χ. η φορτισμένη σφαίρα και ο φορτισμένος πυκνωτής δημιουργούν στατικά ηλεκτρικά πεδία. Η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από μη κινούμενα φορτία δεν «**ταξιδεύει**», δεν «**μεταφέρεται**».

Φορτία κινούμενα με σταθερή ταχύτητα (συνεχές ρεύμα) δημιουργούν στο χώρο μαγνητικό πεδίο. Π.χ. αγωγός που διαρρέεται από συνεχές ρεύμα, δημιουργεί γύρω του μαγνητικό πεδίο. Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από τα κινούμενα με σταθερή ταχύτητα φορτία δεν «**ταξιδεύει**», δεν «**μεταφέρεται**».

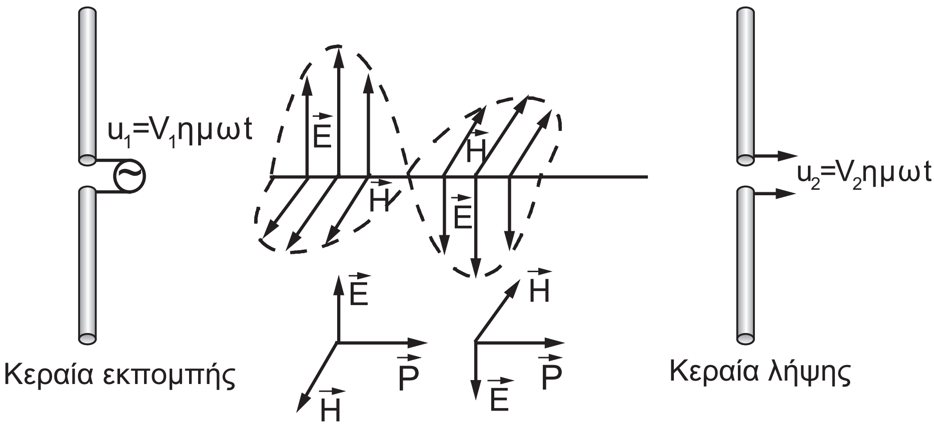
Κινούμενα φορτία με μεταβαλλόμενη ταχύτητα δημιουργούν γύρω τους *αλληλένδετο* ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Αυτό το πεδίο «**ταξιδεύει**» και η ενέργειά του «**μεταφέρεται**».

► **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:** Οι πρώτοι δύο νόμοι είναι σύμφωνοι με το νόμο της διατήρησης της ενέργειας. Ακίνητο υλικό σώμα ή κινούμενο με σταθερή ταχύτητα δεν απορροφά από το περιβάλλον, ούτε αποδίδει σ' αυτό, ενέργεια. Και ο τρίτος νόμος είναι σύμφωνος με το νόμο της αρχής της διατήρησης της ενέργειας. Μεταβολή της κινητικής κατάστασης των φορτίων σημαίνει προσφορά ή απορρόφηση ενέργειας. Σημαίνει ανταλλαγή ενέργειας. Ένα υλικό σώμα για να το επιταχύνουμε του δίνουμε ενέργεια. Όταν το επιβραδύνουμε αποδίδει ενέργεια στο σύστημα που το επιβραδύνει.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Για να έχουμε *εκπομπή* ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων πρέπει να υπάρχουν φορτία κινούμενα με μεταβαλλόμενη ταχύτητα. Το **πεδίο** που εκπέμπεται από αυτά είναι σύνθετο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο (αλληλένδετο ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε μια κεραία εκπομπής κατακόρυφη, όπως στο Σχ. 1.2, που διαρρέεται από εναλλασσόμενο ημιτονικό ρεύμα.

Παρατηρούμε ότι η ενέργεια του ηλεκτρομαγνητικού κύματος φεύγει από την κεραία εκπομπής και μπορεί να ληφθεί από την κεραία λήψης. Το ηλεκτρικό πεδίο μεταβαλλόμενο ημιτονικά σκορπά στο γύρω χώρο. Το άνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ στην περίπτωση του Σχ. 1.2 είναι παράλληλο προς την κεραία εκπομπής και το άνυσμα του μαγνητικού πεδίου $\vec{H}$ είναι κάθετο προς αυτήν. Τα δύο ανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους και το επίπεδο που σχηματίζουν είναι κάθετο προς τη διεύθυνση που διαδίδεται το κύμα. Δηλαδή τα ανύσματα $\vec{E}$ και $\vec{H}$ είναι κάθετα στη διεύθυνση $\vec{P}$.



Σχ. 1.2. Κατανομή ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου από κατακόρυφη κεραία εκπομπής.

Γενικά ονομάζουμε **άνυσμα Poynting** $\vec{P}$ το εξωτερικό γινόμενο των ανυσμάτων $\vec{E}$ και $\vec{H}$. Ισχύει δηλαδή:

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{1.6}$$

Αν πάρουμε το μέτρο του $\vec{P}$, το οποίο για απλότητα θα συμβολίζουμε με P, τότε ισχύει :

$$P = EHημφ \tag{1.7}$$

όπου: φ η γωνία που σχηματίζουν τα ανύσματα $\vec{E}$ και $\vec{H}$ σε μοίρες (deg) ή σε ακτίνια (rad).

Για ημφ = ημ90° = 1, όπως στο Σχ. 1.2, ισχύει:

$$[P] = [EH] = \left[\frac{V}{m}\cdot\frac{A}{m}\right] = \left[\frac{VA}{m^2}\right] = \left[\frac{Watts}{m^2}\right].$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι το μέτρο P του ανύσματος $\vec{P}$ παριστάνει την ισχύ που ταξιδεύει, που μεταφέρεται, που περνά μέσα από κάθε τετραγωνικό μέτρο στο χώρο.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Το μέτρο P του ανύσματος Poynting $\vec{P}$ μας δίνει την ισχύ ανά μονάδα επιφάνειας (πυκνότητα ισχύος) που μεταφέρεται στο χώρο και η κατεύθυνση του ανύσματος $\vec{P}$ μας δίνει την κατεύθυνση προς την οποία ταξιδεύει αυτή.

Στο Σχ.1.2 τα ανύσματα $\vec{E}$ και $\vec{H}$ είναι **συμφασικά** και σχηματίζουν γωνία 90° μεταξύ τους. Κατά τη διάδοσή του το ΗΜΚ όταν μεταβαίνει από ένα υλικό μέσο σ' ένα άλλο διαφορετικό, παρατηρούνται μεταβολές στις θέσεις των πεδίων $\vec{E}$ και $\vec{H}$ στο χώρο, με συνέπεια τη μεταβολή της κατεύθυνσης διάδοσης του $\vec{P}$, δηλαδή του ΗΜΚ. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το φαινόμενο της ανάκλασης των ΗΜΚ όταν προσπίπτουν πάνω σε τέλεια αγώγιμες επιφάνειες. Τότε, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 3, το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ μετατοπίζεται ακριβώς κατά 180° (αναστρέφεται). Εύκολα διαπιστώνουμε από το Σχ. 1.2 ότι σ' αυτήν την περίπτωση και η κατεύθυνση του νέου ανύσματος Poynting αναστρέφεται, δηλαδή η ενέργεια του ΗΜΚ γυρίζει προς τα πίσω, **ανακλάται**. Δηλαδή έχουμε: $\vec{P} = \vec{E}\times\vec{H} = -\vec{H}\times\vec{E}$. Το μέτρο P παραμένει το ίδιο.

Πάρα πολλά άλλα ενδιαφέροντα φαινόμενα των ΗΜΚ εξηγούνται με την ύπαρξη του διανύσματος Poynting, όπως θα δούμε αργότερα.

► **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:** Πρέπει να σημειώσουμε με έμφαση το γεγονός ότι όσο πιο χαμηλή είναι η συχνότητα του ΗΜΚ, τόσο πιο ευδιάκριτα είναι τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{H}$. Όσο μεγαλώνει η συχνότητα, τόσο πιο δυσδιάκριτα γίνονται τα πεδία αυτά. Π.χ. στις έρευνες που γίνονται για τη βλαπτικότητά τους οι έρευνες στις χαμηλές συχνότητες αναφέρονται στα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία και μάλιστα ξεχωριστά αναφέρουν τη βλαπτικότητα του καθενός. Για υψηλότερες συχνότητες μιλάνε πλέον για πυκνότητα ισχύος, δηλαδή ουσιαστικά ενδιαφέρονται για το άνυσμα Poynting και για ακόμα πιο υψηλές συχνότητες θεωρούν ότι το ΗΜΚ συμπεριφέρεται πια ως φωτόνιο και μάλιστα μιλάνε για **«ιονίζουσα»** ακτινοβολία. Π.χ. ήδη στην περιοχή του φωτός ελάχιστες φορές ενδιαφερόμαστε για τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{H}$. Μιλάμε για **«ακτίνες φωτός»** και την πορεία τους στα υλικά μέσα την εξετάζουμε μόνο σαν άνυσμα Poynting. Λέμε π.χ. ότι η ακτίνα ανακλάται, διαθλάται, περιθλάται κ.λπ. (βλ. και σελ. 12).

1.4. Οι εξισώσεις του Maxwell

Οι εξισώσεις του Maxwell για οποιοδήποτε χώρο είναι:

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ		ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ		
1. $\nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\dfrac{V}{m^2}$	$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \left(-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$	V	
2. $\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$	$\dfrac{A}{m^2}$	$\oint \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \left(\vec{J} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$	A	(1.8)
3. $\nabla\cdot\vec{D} = \rho$	$\dfrac{Cb}{m^3}$	$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$	Cb	
4. $\nabla\cdot\vec{B} = 0$	$\dfrac{Wb}{m^3}$	$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$	Wb	

όπου ρ η πυκνότητα των φορτίων του χώρου, σε Cb/m^3.

Παρατηρούμε ότι στη $2^η$ εξίσωση του Maxwell η περιστροφή του μαγνητικού πεδίου $\left(\nabla\times\vec{H} = \text{curl}\vec{H} = \text{rot}\vec{H}\right)$ προκαλεί δύο είδη πυκνοτήτων ρευμάτων στο υλικό μέσο διάδοσης: Την πυκνότητα του ρεύματος που προέρχεται από ελεύθερα ηλεκτρόνια του υλικού και λέγεται **πυκνότητα ρεύματος αγωγιμότητας ή πυκνότητα ρεύματος μεταφοράς ($\vec{J}$)**, όταν ο χώρος έχει ελεύθερα ηλεκτρόνια, δηλαδή όταν $\sigma \neq 0$ S/m και την πυκνότητα του ρεύματος μετατόπισης $\left(\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$, που προέρχεται από τη μετατόπιση των δεσμευμένων ηλεκτρονίων του υλικού.

Θ' ασχοληθούμε με τις εξισώσεις του Maxwell κυρίως στη διαφορική τους μορφή.

Ίσως είναι χρήσιμο να διευκρινίσουμε τις έννοιες «χώρος με φορτία», δηλαδή χώρος στον οποίο ισχύει $\rho\neq 0$ και χώρος με «ελεύθερα ηλεκτρόνια», δηλαδή χώρος που παρουσιάζει αγωγιμότητα, δηλαδή $\sigma\neq 0$. Π.χ. για μια φορτισμένη μεταλλική σφαίρα ισχύει $\rho\neq 0$ και $\sigma\neq 0$, ενώ αν είναι φορτισμένη μονωτική σφαίρα ισχύει $\rho\neq 0$ και $\sigma=0$. Για ένα μη φορτισμένο αγωγό ισχύει $\rho=0$ και $\sigma\neq 0$.

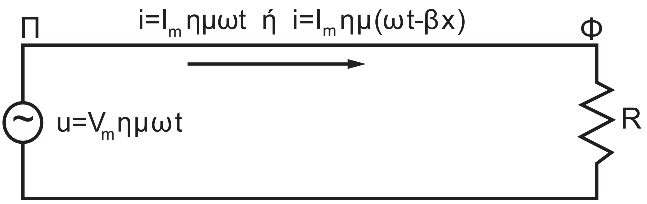
Εάν ο χώρος δεν έχει φορτία ($\rho=0$ Cb/m^3) και είναι τέλεια διηλεκτρικός (τέλειο μονωτικό $\sigma=0$ S/m), τότε οι εξισώσεις (1.8), σε διαφορική μορφή, γράφονται:

$$
\begin{aligned}
&\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{dt} \\
&\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
&\nabla \cdot \vec{D} = 0 \\
&\nabla \cdot \vec{B} = 0
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

♦ **Σημείωση:** Στο Παράρτημα Α στο τέλος του βιβλίου εξηγούνται λεπτομερώς οι έννοιες των μαθηματικών συμβόλων της σχέσης (1.9).

1.5. Η έννοια της εξίσωσης του κύματος

Έστω ότι έχουμε το κύκλωμα του Σχ. 1.3 και θέλουμε να βρούμε το ρεύμα που κυκλοφορεί μέσα στους αγωγούς που συνδέουν την πηγή με το φορτίο R.



Σχ. 1.3. Κύκλωμα στο οποίο κυκλοφορεί **ηλεκτρικό ρεύμα** ή ίσως **ηλεκτρικό κύμα**.

Στη Θεωρία Κυκλωμάτων λέμε ότι ισχύει:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{V_m \eta\mu\omega t}{R}.$$

Δηλαδή θεωρούμε ότι το ρεύμα που κυκλοφορεί στους αγωγούς εξαρτάται μόνο από το χρόνο t. Στην προηγούμενη σχέση υποθέσαμε ότι το ρεύμα σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t έχει την ίδια τιμή σε οποιαδήποτε θέση του αγωγού. Αυτό θα συνέβαινε μόνο αν η πηγή ήταν συνεχούς ρεύματος (DC). Σε περίπτωση που η πηγή είναι εναλλασσομένου ρεύματος, στους αγωγούς η τιμή του ρεύματος εξαρτάται όχι μόνο από το χρόνο t, αλλά και από την απόσταση x του σημείου του αγωγού από την πηγή. Το ρεύμα στα διάφορα σημεία του αγωγού που συνδέει την πηγή με το φορτίο την ίδια χρονική στιγμή έχει διαφορετικές τιμές.

Για να είναι πρακτικά (όχι θεωρητικά) το ρεύμα ανεξάρτητο από την απόσταση x της πηγής και να εξαρτάται μόνο από το χρόνο t, δηλαδή για να ισχύει η σχέση

$$i = \frac{V_m ημωt}{R}$$

θα πρέπει να ισχύει **ΠΦ << λ**, δηλαδή η απόσταση μεταξύ πηγής και φορτίου να είναι κατά πολύ μικρότερη από το μήκος κύματος του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα. Πόσο όμως μικρότερη; Αυτό εξαρτάται από την ακρίβεια με την οποία θεωρούμε ότι το εναλλασσόμενο ρεύμα αποκλίνει από το συνεχές.

Για πρακτικές εφαρμογές αν σ' ένα ορισμένο μήκος καλωδίου, κατά κάποια χρονική στιγμή t_1, η θεωρητική διαφορά ρεύματος που υπάρχει σ' αυτό μεταξύ μέγιστης και ελάχιστης τιμής του, είναι το πολύ 10%, τότε μπορούμε να πούμε ότι σ' αυτό το μήκος του καλωδίου το ρεύμα έχει την ίδια τιμή παντού. Επειδή η τιμή του ρεύματος μεταβάλλεται ημιτονικά και όχι γραμμικά, για ίσες διαφορές χρόνου δεν έχουμε και ίσες διαφορές ρευμάτων. Από τη μορφή της ημιτονικής καμπύλης εύκολα μπορεί κανείς να διαπιστώσει, παρατηρώντας την, ότι όταν το ρεύμα είναι μέγιστο, έχουμε την ελάχιστη ταχύτητα μεταβολής και μάλιστα αυτή είναι μηδενική, ενώ τη μέγιστη ταχύτητα μεταβολής έχουμε κατά τις χρονικές στιγμές που το ρεύμα μηδενίζεται. Αυτό αποδεικνύεται και ως εξής: Το εναλλασσόμενο ρεύμα i μεταβάλλεται μέσα στους αγωγούς σύμφωνα με τη σχέση

$$i = \frac{V}{R} ημωt = I_m ημωt .$$

Η ταχύτητα μεταβολής του ρεύματος δίνεται από τη σχέση

$$\frac{di}{dt} = \frac{dI_m ημωt}{dt} = ωI_m συνωt .$$

Βλέπουμε ότι η ταχύτητα μεταβολής του ρεύματος εξαρτάται από την κυκλική συχνότητα $ω$ και το χρόνο t. Αυτή η ταχύτητα μεταβολής του ρεύματος γίνεται μέγιστη όταν ισχύει η σχέση:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = \frac{dωI_m συνωt}{dt} = -ω^2 I_m ημωt = 0.$$

Δηλαδή έχουμε μέγιστη ταχύτητα μεταβολής του ρεύματος όταν έχουμε $ωt = κπ$, όπου $κ = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Η μεταβολή του 10% του ρεύματος θα πρέπει να αναζητηθεί στην περιοχή που γίνεται μέγιστη η ταχύτητα μεταβολής του. Επομένως αν $κ = 0$, αρκεί να ισχύει:

$$i_2 - i_1 = I_m ημωt - I_m ημ0^0 = I_m ημωt = I_m \cdot 0{,}1 \Rightarrow ημωt = 0{,}1 \quad \text{και} \quad ωt = τοξημ(0{,}1) \approx 5{,}7^0.$$

Επειδή σε 360° αντιστοιχούν λ m, η απόσταση ΠΦ, που αντιστοιχεί σε 5,7° δίνεται από τη σχέση:

$$\Pi\Phi = \lambda\frac{5,7}{360}$$

όπου ΠΦ η απόσταση μεταξύ πηγής και φορτίου, σε m και λ το μήκος κύματος του ηλεκτρικού κύματος **μέσα** στον αγωγό, σε m.

♦ **ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Το μήκος κύματος λ γενικά εξαρτάται και από τη φύση του υλικού μέσου στο οποίο διαδίδεται το ΗΜΚ ή μεταφέρεται το ηλεκτρικό κύμα υπό μορφή ελεύθερων ηλεκτρονίων. Για τους χάλκινους αγωγούς συνήθως το μήκος κύματος θεωρείται ότι είναι το ίδιο με αυτό που έχει το κύμα στο κενό. Όταν όμως απαιτούνται ακριβείς υπολογισμοί, όπως π.χ. κατά την κατασκευή των κεραιών, τότε λαμβάνεται υπόψη το πραγματικό μήκος κύματος που δημιουργείται μέσα στον αγωγό και όχι αυτό που θα είχε στο κενό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

α) Το ρεύμα των 50 Hz της ΔΕΗ έχει μήκος κύματος

$$\lambda = \frac{3\cdot 10^8}{50} = 6.000.000\,\text{m} = 6.000\,\text{Km} \quad \text{και} \quad \Pi\Phi = 6.000\cdot\frac{5,7}{360} = 95\ \text{Km}.$$

Δηλαδή για έναν αγωγό της ΔΕΗ που έχει μήκος μέχρι και 95 Km μπορούμε να πούμε ότι πρακτικά ισχύει $i=I_m\eta\mu\omega t$, αντί του πραγματικού $i=I_m\eta\mu(\omega t-\beta x)$, όπου β η σταθερά μετάδοσης φάσης, σε rad/m.

β) Για τη μέγιστη ακουστική συχνότητα των 20.000 Hz ισχύει:

$$\Pi\Phi = \frac{3\cdot 10^8}{20.000}\cdot\frac{5,7}{360} = 238\ \text{m}.$$

Δηλαδή για να συνδέσουμε ένα μεγάφωνο στον ενισχυτή του μπορούμε να συνδέσουμε ένα μήκος καλωδίου το πολύ 238 m, χωρίς να θεωρηθεί ότι ο ήχος διαδίδεται μέσα στο καλώδιο ως **ηλεκτρικό κύμα**, αλλά να θεωρείται ότι μεταφέρεται το ρεύμα του ακουστικού σήματος ως **ηλεκτρικό ρεύμα**. Δηλαδή μπορούμε να συνδέσουμε ένα μεγάφωνο στον ενισχυτή του με απλό πλακέ καλώδιο, όταν αυτό απέχει από αυτόν το πολύ μέχρι 238 m. Για μεγαλύτερες αποστάσεις απαιτείται ομοαξονικό καλώδιο ή γραμμή μεταφοράς παραλλήλων αγωγών.

γ) Αν λάβουμε ως μέγιστη συχνότητα της οπτικής πληροφορίας στην τηλεόραση τα 5 MHz, τότε έχουμε:

$$\Pi\Phi = \frac{3\cdot 10^8}{5.10^6}\cdot\frac{5,7}{360} = 95\ \text{cm}.$$

▲

ΠΡΟΣΟΧΗ: Όσο μεγαλώνει η συχνότητα που χρησιμοποιούμε, κατά την κατασκευή των κυκλωμάτων, τόσο η ανοχή των 10% που επιτρέπεται σ' αυτές πρέπει να μικραίνει, διότι αυξάνεται η ακτινοβολία του ΗΜΚ από τα καλώδια ή τα τυπωμένα κυκλώματα. Π.χ. αν στο παράδειγμά μας συνδέσουμε μεταξύ πηγής και φορτίου ένα κοινό καλώδιο μήκους 1 m, μπορεί να δημιουργηθούν σοβαρά προβλήματα ακτινοβολίας και κίνδυνος ανασύζευξης και αστάθειας στη λειτουργία των οπτικών ενισχυτών των δεκτών τηλεόρασης (ακούσια μετατροπή τους σε ταλαντωτές).

Αν το μήκος του καλωδίου είναι της τάξης του λ/4 του μήκους κύματος, τότε το καλώδιο συμπεριφέρεται σαν **κεραία**, το ηλεκτρικό ρεύμα παράγει ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα, δηλαδή το καλώδιο ακτινοβολεί ενέργεια στο περιβάλλον.

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{5{,}7}{360} = 0{,}016 \approx 0{,}02.$$

Συμπερασματικά από τα προηγούμενα μπορούμε να πούμε ότι *κατά κανόνα* στο Σχ. 1.3 αν είναι $\Pi\Phi < 0{,}02\lambda$, τότε ισχύει η σχέση $I = I_m \eta\mu\omega t$ και αν είναι $\Pi\Phi \geq 0{,}02\lambda$, τότε ισχύει η σχέση:

$$i = I_m \eta\mu(\omega t - \beta x).$$

Στην περίπτωση που ισχύει $i = I_m \eta\mu(\omega t - \beta x)$, τότε έχουμε μια εξίσωση κύματος της μορφής $i = f(x, t)$, δηλαδή μια **χωρο-χρονική** εξίσωση σε μονοδιάστατο χώρο. Σε περίπτωση που το **ηλεκτρικό κύμα** διαδίδεται προς 2 ή 3 διαστάσεις του χώρου, τότε η χωρο-χρονική εξίσωση του κύματος θα είναι της μορφής: $i = f(x, \psi, t)$ και $i = f(x, \psi, z, t)$, αντίστοιχα. Δηλαδή για να είναι μια εξίσωση, **εξίσωση κύματος,** πρέπει το ρεύμα i, η τάση u, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$, η ένταση του μαγνητικού πεδίου $\vec{H}$, κλπ, να είναι εξίσωση χωροχρόνου. Η τιμή ενός χαρακτηριστικού μεγέθους του κύματος μεταβάλλεται περιοδικά και με το χρόνο t και με το σημείο (x,ψ,z) του χώρου.

1.6. Η έννοια της πόλωσης του ΗΜΚ

Όταν λέμε **πόλωση** του ΗΜΚ (ραδιοκύματος, φωτός, κλπ.) δεν εννοούμε το ίδιο το κύμα, αλλά το ηλεκτρικό του πεδίο $\vec{E}$. Όταν λέμε π.χ. ότι το φως του ήλιου ή το φως ενός λαμπτήρα πυράκτωσης είναι απόλωτο (μη πολωμένο), εννοούμε ότι το ηλεκτρικό του πεδίο δεν έχει σταθερό προσανατολισμό στο χώρο, αλλά έχει τυχαίες κατευθύνσεις. Αν αυτό το φως πέσει σε μια επιφάνεια και ανακλαστεί, τότε θα είναι πολωμένο, δηλαδή το ηλεκτρικό του πεδίο στο χώρο θα έχει σταθερή διεύθυνση. Πράγματι επειδή το ηλεκτρικό πεδίο πέφτοντας πάνω σε μια επιφάνεια μπορεί να κινήσει ελεύθερα ή δεσμευμένα ηλεκτρόνια μόνο πάνω στην επιφάνεια και παράλληλα προς αυτήν, το ανακλώμενο φως θα έχει ηλεκτρικό πεδίο σταθερά προσανατολισμένο παράλληλα προς την ανακλούσα επιφάνεια.

Αν το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$, καθώς διαδίδεται το κύμα, βρίσκεται συνεχώς πάνω σ΄ ένα επίπεδο κάθετο προς τη διεύθυνση διάδοσής του, τότε λέμε ότι το κύμα είναι **γραμμικά** ή **επίπεδα πολωμένο** (linear or plane polarized wave). Γενικά μπορούμε να διακρίνουμε δύο κατηγορίες επίπεδων κυμάτων:

α) Αυτά που το ηλεκτρικό τους πεδίο παραμένει σταθερά σε μια διεύθυνση του χώρου πάνω στο επίπεδο (οριζόντια πολωμένο, κάθετα πολωμένο, κλπ.).

β) Αυτά που το ηλεκτρικό τους πεδίο περιστρέφεται πάνω στο επίπεδο (κυκλικά δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα πολωμένο, ελλειπτικά δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα πολωμένο, κλπ.).

Γενικά στην τεχνολογία της διακίνησης πληροφοριών με ραδιοηλεκτρικά μέσα χαρακτηρίζουμε ως πόλωση του κύματος τη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου στο χώρο σε σχέση με κάποια επιφάνεια αναφοράς. Ειδικά όμως για κεραίες εκπομπής ως πόλωση του κύματος θεωρούμε τη διευθέτηση της κεραίας ως προς την επιφάνεια της Γης και όχι τη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου του ως προς την επιφάνειά της. Στην περίπτωση αυτή το ηλεκτρικό πεδίο μιας οριζόντιας κεραίας είναι παράλληλο με την επιφάνεια της Γης, ενώ το ηλεκτρικό πεδίο μιας κάθετης κεραίας δεν είναι πάντα κάθετο με την επιφάνειά της. Στην πραγματικότητα δεν είναι το κύμα κάθετα πολωμένο, αλλά η κεραία είναι κάθετη ως προς κάποιο σημείο αναφοράς, που συνήθως είναι η επιφάνεια της Γης. Στην περίπτωση αυτή **καταχρηστικά** θεωρούμε ότι το κύμα που προέρχεται από μια **κατακόρυφη κεραία,** είναι και αυτό **κατακόρυφα πολωμένο** (Βλ. Σχ. 1.5 και Σχ. 3.5).

Για να έχουμε **δεξιόστροφα κυκλικά πολωμένο κύμα** θα πρέπει τα ηλεκτρικά πεδία δύο κυμάτων να βρίσκονται πάνω σ' ένα επίπεδο και επιπλέον να έχουν ίσα μέγιστα πλάτη και διαφορά φάσης μεταξύ τους 90°. Η εξίσωσή του δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{E} = E_m \eta\mu\left(\omega t - \beta x\right)\vec{\psi}_o + E_m \sigma\upsilon\nu\left(\omega t - \beta x\right)\vec{z}_o \tag{1.10}$$

Για να έχουμε **αριστερόστροφα κυκλικά πολωμένο κύμα** πρέπει τα ηλεκτρικά πεδία της σχέσης (1.10) να έχουν διαφορά φάσης 270°, οπότε αυτή γράφεται:

$$\vec{E} = E_m \eta\mu\left(\omega t - \beta x\right)\vec{\psi}_o - E_m \sigma\upsilon\nu\left(\omega t - \beta x\right)\vec{z}_o \tag{1.11}$$

Αν οι συνιστώσες έχουν τυχαία μέγιστα πλάτη και τυχαίες διαφορές φάσεων, τότε λέμε ότι είναι **ελλειπτικά πολωμένο κύμα** (elliptically polarized wave) και η γενική μορφή της εξίσωσής του είναι:

$$\vec{E} = E_m \eta\mu(\omega t - \beta x)\vec{\psi}_o + \kappa E_m \eta\mu(\omega t - \beta x + \Phi)\vec{z}_o \quad (1.12)$$

όπου $\kappa \neq 1$ και Φ τυχαία διαφορά φάσης.

Παρακάτω δίνονται μερικά λυμένα προβλήματα, για να εξοικειωθεί ο αναγνώστης με τις εξισώσεις του Maxwell.

1.7. Λυμένα προβλήματα

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.1. *Στον κενό χώρο δίνεται η εξίσωση της μεταβολής της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου:* $\vec{E} = E_m \eta\mu(\omega t - \beta\psi)\vec{z}_o$.

α) Να σχολιασθεί η εξίσωση.

β) Να σχεδιασθεί το πεδίο $\vec{E}$, για $t=0$ sec.

γ) Να βρεθούν τα ανύσματα $\vec{D}$, $\vec{B}$ και $\vec{H}$.

δ) Να σχεδιασθούν τα πεδία $\vec{E}$ *και* $\vec{H}$, *για* $t=0$ sec.

Λύση:

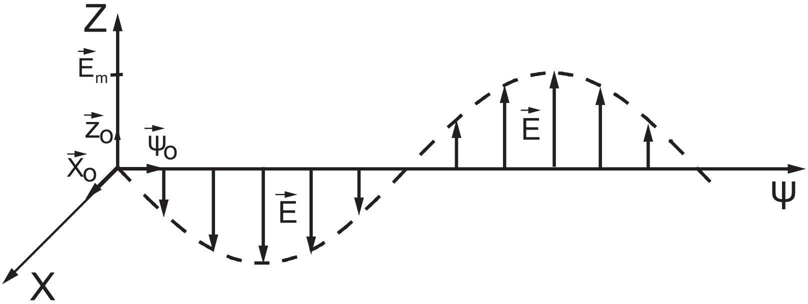
α) Είναι εξίσωση ηλεκτρομαγνητικού κύματος, διότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ είναι συνάρτηση του χωροχρόνου. Το κύμα διαδίδεται από την αρχή των αξόνων του τρισορθογωνίου συστήματος 0(0,0,0) προς τα θετικά του άξονα των ψ, διότι ο συντελεστής της σταθεράς μετάδοσης της φάσης β είναι αρνητικός αριθμός (Βλ. και § 2.2). Είναι επίπεδο κύμα, όπως μια ακτίνα Laser, που ούτε αποκλίνει ούτε συγκλίνει, κατά τη διάδοσή της. Κατά τη διάδοσή του δεν εξασθενεί, διότι το μέγιστο πλάτος του παραμένει σταθερό και ίσο με E_m. Αν ο χώρος προκαλούσε εξασθένηση, τότε θα έπρεπε να υπάρχει ο παράγοντας $e^{-\alpha\psi}$, όπου α ο συντελεστής εξασθένησης, σε N_p/m, και ψ η απόσταση του σημείου από την πηγή, σε m, στο οποίο εξετάζουμε την ένταση του πεδίου (Βλ. και § 2.2). Άλλωστε επειδή το κύμα διαδίδεται στον κενό χώρο, δεν απορροφάται. Το κύμα προέρχεται από κατακόρυφη κεραία, διότι η ένταση $\vec{E}$ του ηλεκτρικού πεδίου είναι παντού παράλληλη προς τη διανυσματική μονάδα $\vec{z}_o$.

β) Ισχύει:

$$\vec{E} = E_m \eta\mu(\omega t - \beta\psi)\vec{z}_o = E_m \eta\mu(\omega \cdot 0 - \beta\psi)\vec{z}_o = E_m \eta\mu(-\beta\psi)\vec{z}_o = -E_m \eta\mu(\beta\psi)\vec{z}_o.$$

Στο Σχ. 1.4 δίνεται η γραφική παράσταση της σχέσης $\vec{E} = -E_m \eta\mu(\beta\psi)\vec{z}_o$.

γ) Επειδή το κύμα διαδίδεται στον κενό χώρο, ισχύουν οι εξισώσεις (1.9). Η 1^{η} από αυτές συνδέει το ηλεκτρικό πεδίο με το μαγνητικό πεδίο. Δηλαδή μας λέγει ότι εφόσον μεταβάλλεται το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$, θα υπάρχει και μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο $\vec{H}$.



Σχ. 1.4. Γραφική παράσταση της $\vec{E} = E_m ημ(ωt - βψ)\vec{z}_o$ για $t = 0$ sec.

Γράφουμε:

$$\nabla\times\vec{E} = \nabla\times E_m ημ(ωt-βψ)\vec{z}_o = \begin{vmatrix} \vec{x}_o & \vec{\psi}_o & \vec{z}_o \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial \psi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E_m ημ(ωt-βψ) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \psi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_m ημ(ωt-βψ) \end{vmatrix}\vec{x}_o - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_m ημ(ωt-βψ) \end{vmatrix}\vec{\psi}_o + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial \psi} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\vec{z}_0 =$$

$$= \frac{\partial E_m ημ(ωt-βψ)}{\partial \psi}\vec{x}_o = -β E_m συν(ωt-βψ)\vec{x}_o = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow β E_m συν(ωt-βψ)\vec{x}_o = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \partial\vec{B} = β E_m συν(ωt-βψ)\vec{x}_o \partial t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \partial\vec{B} = \int β E_m συν(ωt-βψ)\vec{x}_o \partial t \Rightarrow \vec{B} = \frac{β}{ω}E_m ημ(ωt-βψ)\vec{x}_o + \vec{C}.$$

Αν θεωρήσουμε ότι στον κενό χώρο δεν υπάρχει άλλο χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο, εκτός από αυτό που δημιουργείται από το μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο, τότε έχουμε αρχικές συνθήκες:

$$t_o = 0, \quad \psi_o = 0, \quad \vec{B}_{(0,0)} = \vec{0}, \quad \text{οπότε και} \quad \vec{C} = \vec{0}.$$

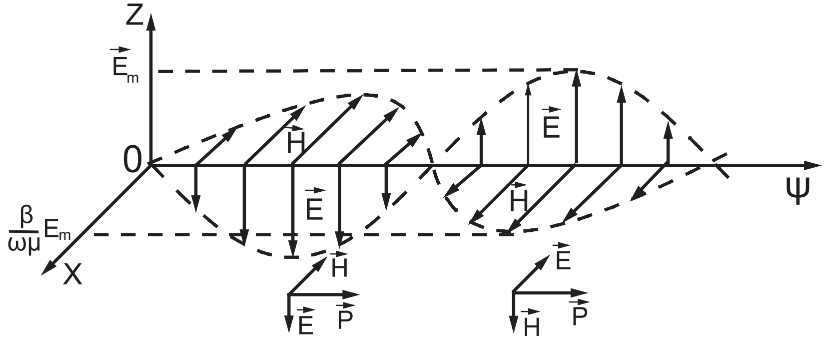
Τελικά έχουμε:

$$\vec{D} = ε\vec{E} = ε E_m ημ(ωt-βψ)\vec{z}_o$$

$$\vec{B} = \frac{β}{ω}E_m ημ(ωt-βψ)\vec{x}_o$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{\beta}{\omega\mu} E_m \eta\mu\left(\omega t - \beta\psi\right)\vec{x}_o \,.$$

δ) Στο Σχ.1.4 σχεδιάσαμε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$, για $t=0$ sec. Δεν έχουμε παρά να σχεδιάσουμε και το μαγνητικό πεδίο $\vec{H}$ για $t=0$ sec, λαμβάνοντας υπόψη την 3^{η} εξίσωση, από τις προηγούμενες εξισώσεις, οπότε προκύπτει το Σχ. 1.5.



Σχ. 1.5. Κατακόρυφα πολωμένο ΗΜΚ.

Από το Σχ. 1.5 εύκολα διαπιστώνουμε ότι το μαγνητικό πεδίο $\vec{H}$ είναι κάθετο παντού και πάντα στο ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ και το άνυσμα Poynting $\vec{P} = \vec{E}\times\vec{H}$ κατευθύνεται προς το θετικό άξονα των ψ. Η πυκνότητα ισχύος ταξιδεύει (οδεύει) προς το θετικό άξονα των ψ.

Τελικά μπορούμε να πούμε ότι έχουμε ένα επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα, κάθετα πολωμένο, που οδεύει στο κενό. ▲

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.2. *Γενικά χαρακτηριστική αντίσταση ενός μέσου διάδοσης ονομάζουμε το λόγο* $Z_c = E/H$. *Αν ένα ΗΜΚ διαδίδεται μέσα σε τέλειο μονωτικό και είναι επίπεδο και κάθετα πολωμένο, τότε ισχύει:* $\vec{E} = E_m \eta\mu\left(\omega t - \beta\psi\right)\vec{z}_o$.

α) Να αποδειχθεί ότι γενικά η ταχύτητα του ΗΜΚ δίνεται από τη σχέση $\upsilon_{HMK} = \omega/\beta$ *και να βρεθεί η τιμή της στα τέλεια μονωτικά και στο κενό. Εφαρμογή:* $\varepsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$.

β) Να βρεθεί η χαρακτηριστική αντίσταση των τέλειων μονωτικών Z_c *και του κενού* Z_v. *Εφαρμογή:* $\varepsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$.

Λύση:

α) Από την 1η εξίσωση του Maxwell συμπεραίνουμε ότι η περιστροφή του ηλεκτρικού πεδίου παράγει μαγνητικό πεδίο (στο πρώτο μέλος της εξίσωσης υπάρχει $\vec{E}$ και στο δεύτερο υπάρχει $\vec{B}$). Από τη 2η εξίσωση του Maxwell συμπεραίνουμε ότι η περιστροφή του μαγνητικού πεδίου παράγει ηλεκτρικό πεδίο (στο πρώτο μέλος της εξίσωσης υπάρχει $\vec{H}$ και στο δεύτερο υπάρχει $\vec{D}$). Το μαγνητικό πεδίο που παράγεται από το ηλεκτρικό, παράγει και αυτό με τη σειρά του ηλεκτρικό πεδίο.

Στο πρόβλημά μας επειδή το κύμα είναι επίπεδο (επομένως δεν σκορπάει στο χώρο) και το μέσο διάδοσης είναι τέλειο μονωτικό (επομένως δεν απορροφάται από το μέσο διάδοσης), το ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από την περιστροφή του μαγνητικού πεδίου πρέπει να έχει το ίδιο μέγιστο πλάτος με το αρχικό μέγιστο πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου.

Στο προηγούμενο πρόβλημα αποδείχθηκε ότι αν η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι $\vec{E} = E_m \eta\mu(\omega t - \beta\psi)\vec{z}_o$, τότε η ένταση του μαγνητικού πεδίου που παράγεται από την περιστροφή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{\beta}{\omega\mu}\eta\mu(\omega t - \beta\psi)\vec{x}_o .$$

Επομένως ισχύει:

$$\nabla\times\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{x}_o & \vec{\psi}_o & \vec{z}_o \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial \psi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\beta}{\omega\mu}E_m\eta\mu(\omega t-\beta\psi) & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-\frac{\partial\left(\dfrac{\beta}{\omega\mu}E_m\eta\mu(\omega t-\beta\psi)\right)}{\partial\psi}\vec{z}_o = \frac{\beta^2}{\omega\mu}E_m\sigma\upsilon\nu(\omega t-\beta\psi)\vec{z}_o$$

Επειδή ο χώρος είναι τέλειο μονωτικό ισχύει:

$$\nabla\times\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\beta^2}{\omega\mu}E_m\sigma\upsilon\nu(\omega t-\beta\psi)\vec{z}_o = \frac{\partial\varepsilon E_m\eta\mu(\omega t-\beta\psi)\vec{z}_o}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\beta^2}{\omega\mu}E_m\sigma\upsilon\nu(\omega t-\beta\psi)\vec{z}_o = \varepsilon\omega E_m\sigma\upsilon\nu(\omega t-\beta\psi)\vec{z}_o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\beta^2}{\omega\mu} = \varepsilon\omega \Rightarrow \frac{\omega}{\beta} = \pm\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} .$$

Η ποσότητα $\dfrac{\omega}{\beta}$ γενικά παριστάνει ταχύτητα, διότι

$$[\omega]=\left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right] \quad \text{και} \quad [\beta]=\left[\frac{\text{rad}}{\text{m}}\right] \Rightarrow \left[\frac{\omega}{\beta}\right]=\left[\frac{\text{m}}{\text{sec}}\right],$$

επομένως η ποσότητα $[\omega/\beta]$ έχει διαστάσεις ταχύτητας. (Βλ. και § 2.1).

Η ταχύτητα παίρνει μόνο θετικές τιμές και επομένως ισχύει:

$$\upsilon_{\text{HMK}}=\frac{\omega}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o\varepsilon_r\mu_o\mu_r}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{36\pi.10^9}\cdot 4\pi.10^{-7}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}=\frac{3.10^8\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}$$

όπου c η ταχύτητα των ΗΜΚ και του φωτός στο κενό $3\cdot10^8$m/sec. Δηλαδή ισχύει:

$$\boxed{\upsilon_{\text{HMK}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}} \tag{1.13}$$

Εφαρμογή: Η ταχύτητα του ΗΜΚ στο μονωτικό υλικό είναι

$$\upsilon_{\text{HMK}}=\frac{c}{\sqrt{1\cdot 4}}=\frac{c}{2}=1{,}5\cdot10^8\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

και στο κενό $\upsilon_{\text{HMK}}=c$, διότι για το κενό ισχύει $\varepsilon_r=\mu_r=1$.

β) Η χαρακτηριστική αντίσταση των τέλειων μονωτικών είναι:

$$\frac{E}{H}=\frac{E_m\eta\mu(\omega t-\beta\psi)}{\frac{\beta}{\omega\mu}E_m\eta\mu(\omega t-\beta\psi)}=\frac{\omega}{\beta}\mu=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\mu=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}}\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}=$$

$$=\sqrt{\frac{4\pi.10^{-7}}{\frac{1}{36\pi.10^9}}}\cdot\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}=120\pi\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\,.$$

Η ποσότητα $\frac{E}{H}$ παριστάνει αντίσταση, διότι

$$\left[\frac{E}{H}\right]=\left[\frac{\frac{V}{m}}{\frac{A}{m}}\right]=\left[\frac{V}{A}\right]=[\Omega]\,.$$

Επομένως ισχύει:

$$Z_c = Z_v \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = 120\pi \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \ \Omega \qquad (1.14)$$

Εφαρμογή: Η χαρακτηριστική αντίσταση του τέλειου μονωτικού είναι

$$Z_c = \ = 120\pi \sqrt{\frac{1}{4}} = 60\pi = 188,5 \ \Omega,$$

ενώ η **χαρακτηριστική αντίσταση του κενού** (κατά προσέγγιση και του ατμοσφαιρικού αέρα) είναι

$$Z_v = 120\pi = 377 \ \Omega.$$

▲

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.3. *Σε τέλειο μονωτικό η ένταση του μαγνητικού πεδίου δίνεται από τη σχέση:*

$$\vec{H} = H_m e^{j(\omega t + \beta\psi)} \vec{x}_o \ \frac{A}{m}.$$

Να βρεθεί η Ε.

Λύση:

Είναι:

$$\nabla \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{x}_o & \vec{\psi}_o & \vec{z}_o \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial \psi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ H_m e^{j(\omega t + \beta\psi)} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial\left[H_m e^{j(\omega t + \beta\psi)}\right]}{\partial \psi} \vec{z}_o =$$

$$= -\left[j\beta H_m e^{j(\omega t + \beta\psi)}\right] \vec{z}_o = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial\vec{D} = -\left[j\beta H_m e^{j(\omega t + \beta\psi)}\right] \vec{z}_o \cdot \partial t \Rightarrow \int \partial\vec{D} = -j\beta H_m \vec{z}_o \int \left[e^{j(\omega t + \beta\psi)}\right] \partial t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{D} = -\frac{\beta}{\omega} H_m e^{j(\omega t + \beta\psi)} \vec{z}_o + \vec{C} \quad (\text{θεωρούμε } \vec{C} = \vec{0}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{D} = -\frac{\beta}{\omega} H_m e^{j(\omega t + \beta\psi)} \vec{z}_o \quad \text{και επειδή} \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = -\frac{\beta}{\varepsilon\omega} H_m e^{j(\omega t + \beta\psi)} \vec{z}_o.$$

▲

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.4. *Στο κενό δίνεται ότι για ένα ΗΜΚ ισχύουν οι σχέσεις:*

$$\vec{E} = 30\pi e^{j\left(10^8 t+\beta\psi\right)}\vec{z}_o \frac{V}{m} \quad \textit{και} \quad \vec{H} = \vec{H}_m e^{j\left(10^8 t+\beta\psi\right)}\vec{x}_o \frac{A}{m}.$$

Να βρεθούν:

α) Η σταθερά μετάδοσης φάσης β.

β) Η μέγιστη τιμή της έντασης του μαγνητικού πεδίου H_m.

Λύση:

α) Για το κενό ισχύει $\quad c = \dfrac{\omega}{\beta} \Rightarrow \beta = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{10^8}{3\cdot 10^8} = \dfrac{1}{3}\dfrac{rad}{m}.$

β) Ισχύει:

$$\nabla\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{x}_o & \vec{\psi}_o & \vec{z}_o \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial \psi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & 30\pi e^{j\left(10^8 t+\beta\psi\right)} \end{vmatrix} = \frac{\partial\left[30\pi e^{j\left(10^8 t+\beta\psi\right)}\right]}{\partial\psi}\vec{x}_o = j30\pi\beta e^{j\left(10^8 t+\beta\psi\right)}\vec{x}_o$$

και $\quad -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\dfrac{\partial\left(\mu_o\vec{H}\right)}{\partial t} = -\mu_o\dfrac{\partial\left[H_m e^{j\left(10^8 t+\beta\psi\right)}\right]}{\partial t}\vec{x}_o = -j10^8\mu_o H_m e^{j\left(10^8 t+\beta\psi\right)}\vec{x}_o \Rightarrow$

$$\Rightarrow j30\pi\beta e^{j\left(10^8 t+\beta\psi\right)}\vec{x}_o = -j10^8\mu_o H_m e^{j\left(10^8 t+\beta\psi\right)}\vec{x}_o \Rightarrow H_m = -\frac{30\pi\beta}{10^8\mu_o}$$

και τελικά $\quad H_m = -\dfrac{30\pi\dfrac{1}{3}}{10^8\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}} = -\dfrac{1}{4}\dfrac{A}{m}.$

Άλλη λύση: Ισχύει $\quad Z_v = \dfrac{E}{H} \Rightarrow H = \dfrac{E}{Z_v} = \dfrac{30\pi}{120\pi} = \dfrac{1}{4}\dfrac{A}{m}.$

► **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:** Με τη βοήθεια της $1^{ης}$ εξίσωσης του Maxwell βρήκαμε $H_m = -\dfrac{1}{4}\dfrac{A}{m}$, ενώ με τον ορισμό της χαρακτηριστικής αντίστασης βρήκαμε $H = \dfrac{1}{4}\dfrac{A}{m}$. Αυτό είναι λογικό, διότι με τη βοήθεια της $1^{ης}$ εξίσωσης του Maxwell το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι το άνυσμα Poynting κατευθύνεται προς την αρχή των συντεταγμένων (ισχύει $\vec{P} = \vec{E}\times\vec{H} = -\vec{H}\times\vec{E}$). Άλλωστε αυτό φαίνεται και από το γεγονός ότι το πρόσημο της σταθεράς μετάδοσης φάσης β είναι θετικό στις εξισώσεις που δόθηκαν (Βλ. και § 2.2). Με τον ορισμό της χαρακτηριστικής αντίστασης, επειδή παίρνουμε τα μέτρα των ανυσμάτων E και H και όχι τις κατευθύνσεις τους, η τιμή της H_m βρέθηκε θετική. ▲

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.5. *Δίνονται οι εξισώσεις:*

$$\vec{E} = 30\pi e^{j\left(\omega t - \frac{4}{3}\psi\right)} \vec{x}_o \ \frac{V}{m} \quad \textit{και} \quad \vec{H} = e^{j\left(\omega t - \frac{4}{3}\psi\right)} \vec{z}_o \ \frac{A}{m}.$$

Αν το μέσο διάδοσης είναι ομογενές διηλεκτρικό με $\mu_r = 1$, να βρεθούν:

α) Η σχετική διηλεκτρική σταθερά ε_r του μέσου διάδοσης.

β) Η συχνότητα f του κύματος.

Λύση:

α) Ισχύει:

$$Z_c = \frac{E}{H} = 120\pi\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \Rightarrow \frac{E}{H} = 120\pi\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \Rightarrow \frac{30\pi}{1} = 120\pi\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_r}} \Rightarrow \varepsilon_r = 16 .$$

β) Είναι

$$\upsilon_{HMK} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \Rightarrow \frac{2\pi f}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$$

και επειδή από τις εξισώσεις που δόθηκαν συνεπάγεται ότι $\beta = 4/3$, έπεται ότι

$$f = \frac{\beta c}{2\pi\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{\frac{4}{3}\cdot 3\cdot 10^8}{2\pi\sqrt{1\cdot 16}} = 16 \text{ MHz.}$$

▲