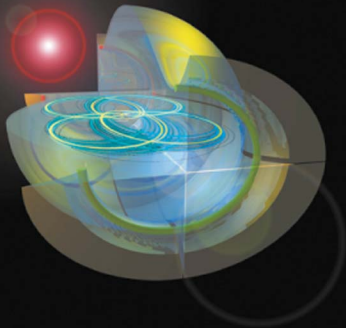


Καραμπετάκης
Νικόλαος

Σταματάκης
Στυλιανός

Ψωμόπουλος
Ευάγγελος

Μαθηματικά & Προγραμματισμός στο Mathematica



 ΕΚΘΕΣΕΙΣ
ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τα Μαθηματικά αποτελούν έναν κλάδο ο οποίος είναι στενά συνυφασμένος με την εκτέλεση πράξεων. Από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού μέχρι και το Πανεπιστήμιο μεγάλο μέρος του χρόνου μας στα Μαθηματικά έχει να κάνει με πράξεις. Η αντικατάσταση του λογαριθμικού κανόνα με την είσοδο των αριθμομηχανών έφερε επανάσταση πριν από χρόνια. Πολλοί ήταν εκείνοι που έλεγαν ότι η χρήση των αριθμομηχανών θα έκανε την σκέψη των μαθητών να αδρανήσει. Σήμερα δεν νοείται να μην γνωρίζει κάποιος να χειριστεί μια αριθμομηχανή. Η αριθμομηχανή έχει γίνει ένα απαραίτητο εργαλείο στην καθημερινή μας ζωή. Μια αριθμομηχανή, όμως, λύνει περιορισμένα αριθμητικά προβλήματα. Τι γίνεται αν θελήσουμε να λύσουμε πιο πολύπλοκα προβλήματα, όπως η αριθμητική επίλυση μιας εξίσωσης ή ενός συστήματος εξισώσεων, ή μιας διαφορικής εξίσωσης κ.λ.π. ; Οι γλώσσες προγραμματισμού, που δημιουργήθηκαν ταυτόχρονα με την ανάπτυξη των υπολογιστών, καθώς και οι γνώσεις μας στην Αριθμητική Ανάλυση, βοήθησαν στην δημιουργία βιβλιοθηκών από συναρτήσεις, οι οποίες μπορούν σήμερα να επιλύσουν πολλά αριθμητικά προβλήματα. Για παράδειγμα, είναι πλέον πολύ εύκολο σήμερα με τη βοήθεια της βιβλιοθήκης *Lahey* να υπολογίσεις προσεγγιστικά στη Fortran 95 την ρίζα μιας εξίσωσης. Τι γίνεται, όμως, αν θέλεις να υπολογίσεις όχι προσεγγιστικά, αλλά *ακριβώς* την λύση της εξίσωσης ή ενός συστήματος εξισώσεων ; Η ραγδαία ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών σε συνδυασμό με τις γνώσεις που προϋπήρχαν στην αλγοριθμική άλγεβρα από τον 19^ο αιώνα βοήθησαν στη δημιουργία ενός νέου κλάδου μεταξύ των δύο επιστημών (Υπολογιστών – Μαθηματικών) που ονομάστηκε υπολογιστική άλγεβρα (Computer Algebra). Η υπολογιστική άλγεβρα αφιερώθηκε στις μεθόδους επίλυσης μαθηματικά διατυπωμένων προβλημάτων με την βοήθεια συμβολικών αλγορίθμων και στην υλοποίηση των αλγορίθμων αυτών σε κατάλληλο υλικό και λογισμικό. Με τη βοήθεια της υπολογιστικής άλγεβρας δημιουργήθηκαν προγράμματα H-Y τα οποία πλέον μπορούσαν να κάνουν συμβολικούς υπολογισμούς όπως για παράδειγμα να υπολογίσουν την παράγωγο μιας συνάρτησης δίνοντας ως αποτέλεσμα συνάρτηση, να υπολογίσουν ένα ολοκλήρωμα κ.λ.π.. Τα προγράμματα αυτά ονομάστηκαν *υπολογιστικά συστήματα άλγεβρας* (Computer Algebra Systems). Πολλά μάλιστα από τα συστήματα αυτά σήμερα έχουν ενσωματωθεί και σε επιστημονικές αριθμομηχανές (όπως αυτές των εταιρειών CASIO και Texas Instruments).

Τα κύρια πλεονεκτήματα των υπολογιστικών συστημάτων άλγεβρας (Computer Algebra Systems) είναι : α) έχουν την δυνατότητα αναπαράστασης των αριθμών με πλήρη ακρίβεια, και κατά συνέπεια δεν δημιουργούνται λάθη κατά την εκτέλεση πράξεων, πράγμα το οποίο θα γινόταν αν η αναπαράσταση αριθμών γινόταν με την χρήση πεπερασμένου αριθμού σημαντικών ψηφίων (για παράδειγμα οι αριθμητικές τιμές αποθηκεύονται ως ρητοί αριθμοί και όλες οι πράξεις γίνονται μεταξύ ρητών αριθμών), β) δουλεύουν συμβολικά, έχουν δηλαδή τη δυνατότητα χειρισμού μαθηματικών συμβόλων και αναπαραστάσεων σύμφωνα με συγκεκριμένους μαθηματικούς κανόνες, γ) είναι γρήγορα, αποτελεσματικά και αξιόπιστα εργαλεία για την εκτέλεση πολύπλοκων υπολογισμών, οι οποίοι δεν θα ήταν δυνατό να εκτελεστούν διαφορετικά, δ) μας προσφέρουν τεράστιο κέρδος σε χρόνο και προσπάθεια, ε) συνήθως διαθέτουν τη δικιά τους γλώσσα προγραμματισμού που μας δίνει τη δυνατότητα να υλοποιούμε τους δικούς μας συμβολικούς αλγορίθμους. Μερικά από τα μειονεκτήματα των υπολογιστικών συστημάτων άλγεβρας είναι : α) οι απαιτήσεις τους σε μνήμη και ταχύτητα (αν και οι σημερινοί Η/Υ μας δίνουν τεράστιες δυνατότητες), β) υπάρχουν ειδικοί τομείς της επιστήμης στους οποίους δεν έχουν δημιουργηθεί ακόμα κατάλληλα πακέτα συναρτήσεων (αν και με την πάροδο του χρόνου όλο και μειώνονται οι τομείς αυτοί), γ) υπάρχει κάποια δυσκολία ως προς τον ορισμό του πεδίου λύσης για το οποίο ενδιαφερόμαστε, δ) η δυσκολία διασύνδεσής τους με άλλες εφαρμογές αλλά και μεταξύ τους, ε) η μη επίλυση του προβλήματος από το υπολογιστικό σύστημα δεν συνεπάγεται πάντα και τη μη ύπαρξη λύσης στο πρόβλημα που θέλουμε να λύσουμε, ή ακόμα δεν γνωρίζουμε με απόλυτη ακρίβεια αν το αποτέλεσμα που πήραμε είναι σωστό.

Τα υπολογιστικά συστήματα άλγεβρας έχουν βρει σήμερα πολλές εφαρμογές σε όλες τις περιοχές των φυσικών επιστημών και των μηχανικών, στην οικονομία αλλά και σε τομείς όπως η ανάπτυξη, η παραγωγή, η βιομηχανία, το εμπόριο, η τραπεζική λειτουργία σε ασφαλιστικές εφαρμογές κ.λ.π.. Τα συμβολικά συστήματα άλγεβρας έχουν παίξει καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη της έρευνας, αλλά και στη βελτίωση της διδακτικής διαδικασίας στο μάθημα των μαθηματικών σε όλα τα επίπεδα της εκπαίδευσης. Ο ρόλος των υπολογιστικών συστημάτων άλγεβρας στην έρευνα μπορεί να χωριστεί κυρίως σε τρεις κατηγορίες : α) στην απευθείας χρήση των συστημάτων αυτών για υπολογισμούς, έλεγχο εικασιών, ή απλά για την βήμα προς βήμα επίλυση ενός προβλήματος με την αποφυγή λαθών που θα προέκυπταν αν το πρόβλημα λυνόταν με το χέρι, β) στη δυνατότητα που δίνουν στους επιστήμονες για την δημιουργία νέων πακέτων τα οποία θα αφορούν επιμέρους τομείς της επιστήμης, και γ) στην ανάπτυξη νέων βελτιωμένων αλγορίθμων για τις υπάρχουσες συναρτήσεις των πακέτων συμβολικής άλγεβρας. Στην εκπαίδευση από την άλλη πλευρά, ένα υπολογιστικό σύστημα άλγεβρας μπορεί να χρησιμοποιηθεί με ποικίλους τρόπους, όπως : α) τη δυνατότητα επίλυσης πραγματικών προβλημάτων όπου οι πραγματικές παράμετροι του προβλήματος αυξάνουν και την πολυπλοκότητα επίλυσης, β) την

ενεργοποίηση των μαθητών στη διαδικασία απόκτησης της γνώσης, γ) στον πειραματισμό ως μέσο κατανόησης των μαθηματικών εννοιών, δ) στην οπτικοποίηση της μαθηματικής διαδικασίας. Με κανέναν τρόπο όμως δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα υπολογιστικά συστήματα άλγεβρας ήρθαν να αντικαταστήσουν τη δημιουργικότητα και τις μαθηματικές γνώσεις που θα πρέπει να έχει ένας επιστήμονας που εργάζεται στις παραπάνω περιοχές. Με τα συστήματα αυτά πλέον έχουμε περισσότερο χρόνο να ασχοληθούμε με την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, την αποδείξη βασικών θεωρημάτων, τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος και όχι τόσο με το χειρισμό των συμβόλων. Ένα συμβολικό σύστημα άλγεβρας δεν θα αποδείξει ποτέ ένα θεώρημα, αλλά εάν εμείς έχουμε διατυπώσει τα βήματα επίλυσης ενός προβλήματος, θα μας βοηθήσει στη γρήγορη επίλυσή του.

Τα υπολογιστικά συστήματα άλγεβρας χωρίζονται σε δύο κατηγορίες σε σχέση με το εύρος των εφαρμογών τους : α) *Υπολογιστικά Συστήματα Άλγεβρας Γενικού Σκοπού*, αυτά δηλαδή που λύνουν προβλήματα από τις περισσότερες περιοχές των μαθηματικών (άλγεβρα, ανάλυση, στατιστική κ.λ.π.). Τέτοια συστήματα είναι το Mathematica, το Maple, το Reduce, το Macsyma, το Axiom κ.λ.π.. β) *Υπολογιστικά Συστήματα Άλγεβρας Ειδικού Σκοπού*, αυτά δηλαδή που λύνουν προβλήματα σε έναν ειδικό τομέα των μαθηματικών. Τέτοια συστήματα είναι το ACE (για αλγεβρική συνδυαστική), το Albert (για μη αντιμεταθετική άλγεβρα), το Algeb (για άλγεβρα και θεωρία αριθμών), το AMoRE (για θεωρία αυτομάτων, πεπερασμένα μονοειδή και κανονικές εκφράσεις), το CoCoA (για μεταθετική άλγεβρα), το Macaulay 2 (για αλγεβρική γεωμετρία και μεταθετική άλγεβρα), το PARI (για τη Θεωρία Αριθμών), το SINGULAR (για πολυωνυμικούς υπολογισμούς), DELiA (για διαφορικές εξισώσεις) κ.λ.π.. Η σύγκριση γενικά των υπολογιστικών συστημάτων γίνεται σε τομείς όπως : α) το πλήθος των συναρτήσεων που υποστηρίζουν ανά τομέα κατεύθυνσης των Μαθηματικών, β) οι δυνατότητες που μας προσφέρουν σε γραφικά, γ) η υποστήριξη προγραμματιστικού περιβάλλοντος, δ) η δυνατότητα χειρισμού δεδομένων που προέρχονται από άλλα προγράμματα, ε) το πλήθος των λειτουργικών συστημάτων στα οποία μπορεί να λειτουργήσουν και στ) η απόδοση των συναρτήσεων που υποστηρίζουν σε ταχύτητα και μνήμη. Τα πλέον διαδεδομένα υπολογιστικά συστήματα άλγεβρας γενικού σκοπού που χρησιμοποιούνται σήμερα σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης είναι το Mathematica και το Maple. Δεν θα προχωρήσουμε σε παράθεση των πλεονεκτημάτων και μειονεκτημάτων μεταξύ των δύο πακέτων. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παρόλα αυτά, μπορεί να βρει μια αναλυτική σύγκριση υπολογιστικών συστημάτων άλγεβρας στο διαδίκτυο (<http://www.scientificweb.de/ncrunch/>), η οποία παρουσιάζεται από τον Stefan Steinhilber.

Το Mathematica, του οποίου η πρώτη έκδοση έγινε το 1988, είναι ένα υπολογιστικό σύστημα άλγεβρας γενικού σκοπού το οποίο υποστηρίζεται από ένα *διαδραστικό περιβάλλον* (δίνεις ερωτήσεις και παίρνεις πίσω απαντήσεις) που

μας δίνει τη δυνατότητα αριθμητικών υπολογισμών, συμβολικού χειρισμού μαθηματικών συμβόλων και εκφράσεων, δημιουργίας δισδιάστατων αλλά και τρισδιάστατων γραφικών, αλλά και προγραμματισμού. Μάλιστα ένας από τους κύριους λόγους της επιτυχίας του *Mathematica* είναι η *υψηλή γλώσσα προγραμματισμού* που διαθέτει, η οποία δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να επεκτείνει τις δυνατότητες του ίδιου του συστήματος. Η γλώσσα που διαθέτει του δίνει την δυνατότητα να προγραμματίζει με πολλά και διαφορετικά στυλ, όπως με τη μέθοδο του *διαδικασιακού προγραμματισμού* (procedural programming, παρόμοια δηλαδή με τον προγραμματισμό σε γλώσσες υψηλού επιπέδου όπως η Fortan 95 και η C++), του *συναρτησιακού προγραμματισμού* (functional programming, όπως στην Lisp), και *κανονοκεντρικού προγραμματισμού* (rule based programming). Τέλος υπάρχει πλήρης συμφωνία μεταξύ της αγγλικής ορολογίας των μαθηματικών συναρτήσεων και των ονομάτων των συναρτήσεων του *Mathematica*, γεγονός που μας βοηθάει ιδιαίτερα, αν φανταστούμε ότι το *Mathematica* περιέχει περί τις 2000 συναρτήσεις.

Το βιβλίο αυτό δε θα μπορούσε με κανέναν τρόπο να καλύψει όλες τις εντολές που περιέχει το *Mathematica*, το manual του οποίου αποτελείται από 1447 σελίδες. Αντίθετα ο στόχος του βιβλίου είναι διττός : α) η εξοικείωση του αναγνώστη με βασικές εντολές του *Mathematica* που αφορούν τους τομείς της Άλγεβρας και της Ανάλυσης, και β) η εξοικείωση του αναγνώστη με τις διαφορετικές μεθόδους προγραμματισμού που υποστηρίζει το *Mathematica*. Αυτός είναι και ο λόγος του διαχωρισμού του βιβλίου σε δύο μέρη.

Πιο αναλυτικά, στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται προσπάθεια εξοικείωσης του αναγνώστη με το περιβάλλον του *Mathematica*. Τα κεφάλαια 2-5 αφορούν εφαρμογές του *Mathematica* σε τομείς της Άλγεβρας. Πιο συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο 2 προσπαθούμε να δώσουμε ορισμένες προκαταρκτικές έννοιες που έχουν σχέση με βασικές πράξεις, συναρτήσεις και σταθερές που χρησιμοποιούμε στο *Mathematica*. Στη συνέχεια γίνεται μια εισαγωγή στον τρόπο κατασκευής δικών μας συναρτήσεων, ο οποίος και χρησιμοποιείται σε όλα τα επόμενα κεφάλαια. Στο κεφάλαιο 3 περιγράφουμε τον τρόπο με τον οποίο δημιουργούμε και χειριζόμαστε έναν πίνακα ή ένα πολυώνυμο στο *Mathematica*. Μια νέα δομή δεδομένων, αυτή της λίστας, παρουσιάζεται στο κεφάλαιο αυτό και δίνονται διάφορες εντολές δημιουργίας της αλλά και χειρισμού της. Οι λίστες παίζουν σημαντικό ρόλο στη χρήση των συναρτήσεων όπως βλέπουμε στα επόμενα κεφάλαια. Το κεφάλαιο 4 ασχολείται με εφαρμογές του *Mathematica* στη μελέτη των φυσικών και ακέραιων αριθμών. Τέτοιες εφαρμογές είναι η εύρεση του ΜΚΔ ακεραίων αριθμών, η επίλυση της διοφαντικής εξίσωσης πάνω στο δακτύλιο των ακεραίων, η υλοποίηση της εικασίας του Goldbbach και τέλος η ανάπτυξη μεθόδων κρυπτογραφίας. Το κεφάλαιο 5 ασχολείται με επιμέρους τομείς της Γραμμικής Άλγεβρας, όπως οι γραμμικές συναρτήσεις, η αλλαγή βάσης, η διαγωνιοποίηση πίνακα και η επίλυση γραμμικών συστημάτων. Το κεφάλαιο 6 έχει ως αντικείμενο την επίλυση εξισώσεων ή και συστήματος εξισώσεων. Τα

κεφάλαια 7-11 αφορούν εφαρμογές του *Mathematica* σε τομείς της Ανάλυσης. Πιο συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο 7 μελετούνται τα όρια ακολουθιών αλλά και συναρτήσεων μιας ή και δύο μεταβλητών. Το κεφάλαιο 8 αφορά την παραγωγή και ολοκλήρωση συναρτήσεων μιας ή και δύο μεταβλητών. Το κεφάλαιο 9 μελετά τη συμβολική επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων, διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, αλλά και συστημάτων διαφορικών εξισώσεων. Στο κεφάλαιο 10 δείχνουμε τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζουμε πεπερασμένα αλλά και άπειρα αθροίσματα και γινόμενα, ενώ δίνεται ο τρόπος με τον οποίο θα υπολογίσουμε τη σειρά *Taylor* μιας συνάρτησης. Η γραφική παράσταση συναρτήσεων μιας ή και δύο μεταβλητών οι οποίες μπορούν να οριστούν ακόμα και παραμετρικά ή με τη μορφή πεπλεγμένων συναρτήσεων δίνεται στο κεφάλαιο 11. Το δεύτερο μέρος του βιβλίου είναι αφιερωμένο στον προγραμματισμό στο *Mathematica*. Στο κεφάλαιο 2.1 γίνεται μια εισαγωγή στην έννοια του προγραμματισμού και δίνεται μια μικρή εισαγωγή για τα κεφάλαια που ακολουθούν. Στα κεφάλαια 2.2, 2.3 και 2.4 αναπτύσσονται οι μεθοδολογίες του διαδικασιακού, συναρτησιακού και κανονοκεντρικού προγραμματισμού αντίστοιχα. Τέλος, στο κεφάλαιο 2.5 δείχνουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα δικό μας πακέτο συναρτήσεων.

Το μέρος της Άλγεβρας (κεφάλαια 1-5) έχει επιμεληθεί ο Επικ. Καθηγητής Ε. Ψωμόπουλος ο οποίος εργάζεται στον Τομέα Άλγεβρας του Τμήματος Μαθηματικών του Α.Π.Θ., ενώ τα κεφάλαια 6-11 που αποτελούν μέρος της Ανάλυσης ο Επικ. Καθηγητής Σ. Σταματάκης ο οποίος και εργάζεται στον Τομέα Γεωμετρίας του ίδιου Τμήματος. Το δεύτερο μέρος του βιβλίου έχει επιμεληθεί ο Επικ. Καθ. Ν. Καραμπετάκης που εργάζεται στον Τομέα Επιστήμης Η/Υ & Αριθμητικής Ανάλυσης του ίδιου Τμήματος. Αρχικός στόχος του βιβλίου ήταν η κάλυψη των αναγκών του μαθήματος «Συμβολικές Γλώσσες Προγραμματισμού» που διδάσκεται στο Τμήμα Μαθηματικών του Α.Π.Θ.. Στη συνέχεια όμως, προστέθηκαν επιμέρους κεφάλαια και ενότητες με στόχο την ολοκλήρωση της ύλης. Σήμερα το *Mathematica* είναι ένα βασικό εργαλείο του επιστήμονα που ασχολείται με τα Μαθηματικά, την Πληροφορική, τις φυσικές επιστήμες, τη μηχανική και τεχνολογία και συνεπώς, το βιβλίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί από άτομα που ασχολούνται με τους παραπάνω τομείς σπουδών. Εδώ θα μπορούσαμε να προσθέσουμε ότι το βιβλίο αυτό αφορά και εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που θα ήθελαν να εφαρμόσουν όλες αυτές τις δυνατότητες που δίνει το *Mathematica* στην τάξη. Τέλος θα θέλαμε να μας συγχωρέσετε για τα λάθη που μπορεί να έχει η πρώτη έκδοση ενός βιβλίου. Σας ευχόμαστε καλή και αποδοτική ανάγνωση.

Περιεχόμενα

σελίδα

ΜΕΡΟΣ 1^ο. Μαθηματικά μέσω Mathematica

Κεφάλαιο I. Βασικά Χαρακτηριστικά

§ 1.1. Περιγραφή περιβάλλοντος	3
§ 1.2. Το σύστημα βοήθειας (Help Browser)	15
§ 1.3. Οι συναρτήσεις του Mathematica	17
§ 1.4. Ασκήσεις	22

Κεφάλαιο II. Προκαταρκτικές έννοιες

§ 2.1. Συνήθεις πράξεις	25
§ 2.2. Κατασκευή συναρτήσεων	36
§ 2.3. Ασκήσεις	42

Κεφάλαιο III. Λίστες, Πίνακες, Πολυώνυμα

§ 3.1. Ορισμένα στοιχεία για πίνακες	45
§ 3.2. Ορισμός και διαχείριση λιστών	50
§ 3.3. Πολυώνυμα	72
§ 3.4. Ασκήσεις	87

Κεφάλαιο IV. Οι φυσικοί και οι ακέραιοι αριθμοί

§ 4.1 Μαθηματική επαγωγή και διαιρετότητα	91
§ 4.2. Επίλυση διοφαντικών εξισώσεων	99
§ 4.3. Η εικασία του Goldbach	103
§ 4.4. Κρυπτογραφία	106
§ 4.5. Ασκήσεις	119

Κεφάλαιο V. Γραμμική Άλγεβρα

§ 5.1. Βαθμίδα διανυσμάτων και πίνακα	122
§ 5.2. Γραμμικές συναρτήσεις και πίνακες	126
§ 5.3. Αλλαγή βάσης	130
§ 5.4. Μεταβολή του πίνακα μιας γραμμικής συνάρτησης	134
§ 5.5. Γραμμικά συστήματα	139
§ 5.6. Η διαγωνιοποίηση πίνακα	148
§ 5.7. Κατασκευή σχετικών συναρτήσεων	155
§ 5.8. Ασκήσεις	162

Κεφάλαιο VI. Επίλυση εξισώσεων και συστημάτων

§ 6.1. Γενικά	165
§ 6.2. Ακριβής επίλυση εξισώσεων	166
§ 6.3. Αριθμητικές λύσεις εξισώσεων	174
§ 6.4. Ασκήσεις	177
§ 6.5. Επίλυση συστημάτων	178
§ 6.6. Ασκήσεις	185

Κεφάλαιο VII. Όρια ακολουθιών και συναρτήσεων

§ 7.1. Όρια ακολουθιών	187
§ 7.2. Ασκήσεις	189

§ 7.3. Όρια συναρτήσεων μιας μεταβλητής	190
§ 7.4. Ασκήσεις	191
§ 7.5. Διπλά όρια συναρτήσεων δυο μεταβλητών	193
§ 7.6. Ασκήσεις	194

Κεφάλαιο VIII. Παραγωγή και ολοκλήρωση

§ 8.1. Παραγωγή συναρτήσεων μιας μεταβλητής	196
§ 8.2. Παραγωγή συναρτήσεων περισσότερων μεταβλητών	199
§ 8.3. Ασκήσεις	202
§ 8.4. Ακρότατα συναρτήσεων	203
§ 8.5. Ασκήσεις	206
§ 8.6. Απλά ολοκληρώματα	207
§ 8.7. Ασκήσεις	212
§ 8.8. Πολλαπλά ολοκληρώματα	213
§ 8.9. Ασκήσεις	217

Κεφάλαιο IX. Διαφορικές εξισώσεις

§ 9.1. Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις	219
§ 9.2. Ασκήσεις	226
§ 9.3. Διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους	226
§ 9.4. Ασκήσεις	228
§ 9.5. Συστήματα διαφορικών εξισώσεων	228
§ 9.6. Ασκήσεις	230
§ 9.7. Η εντολή NDSolve	230
§ 9.8. Ασκήσεις	232

Κεφάλαιο X. Αθροίσματα, Γινόμενα, Σειρές, Σειρές δυνάμεων

§ 10.1. Αθροίσματα και γινόμενα	234
§ 10.2. Ασκήσεις	237
§ 10.3. Σειρές	237

§ 10.4. Ασκήσεις	240
§ 10.5. Σειρές δυνάμεων	240
§ 10.6. Ασκήσεις	245

Κεφάλαιο XI. Γραφικές παραστάσεις

§ 11.1. Γραφικές παραστάσεις καμπυλών	247
§ 11.2. Επιλογές των διδιάστατων γραφικών	253
§ 11.3. Γραφικές παραστάσεις δυο ή περισσότερων καμπυλών στο επίπεδο	264
§ 11.4. Άλλες δυνατότητες των διδιάστατων γραφικών	270
§ 11.5. Ασκήσεις	277
§ 11.6. Τρισδιάστατα γραφικά	281
§ 11.7. Επιλογές των τρισδιάστατων γραφικών	285
§ 11.8. Άλλες δυνατότητες των τρισδιάστατων γραφικών	291
§ 11.9. Ασκήσεις	298

ΜΕΡΟΣ 2^ο. Προγραμματισμός στο Mathematica

Κεφάλαιο I. Προγραμματισμός

§ 1.1. Τι είναι γλώσσα προγραμματισμού ;	303
§ 1.2 Τι είναι προγραμματισμός και ποιες μεθοδολογίες προγραμματισμού εφαρμόζουμε στο Mathematica;	305

Κεφάλαιο II. Διαδικασιακός Προγραμματισμός

§ 2.1. Ανάθεση εκφράσεων σε μεταβλητές.	315
§ 2.2 Άλλοι τρόποι ανάθεσης τιμών σε μεταβλητές και εμφάνισης αποτελεσμάτων.	321

§ 2.3 Ένα απλό προβλήμα εισόδου-εξόδου.	323
§ 2.4 Εντολές συνθήκης και διακλάδωσης.	326
§ 2.4.1 Η εντολή If.	326
§ 2.4.2 Η εντολή Which.	332
§ 2.4.3 Η εντολή Switch.	334
§ 2.5 Εντολές επανάληψης.	336
§ 2.5.1 Η εντολή Do.	337
§ 2.5.2 Η εντολή For.	344
§ 2.5.3 Η εντολή While.	349
§ 2.6 Συναρτήσεις και τοπικές μεταβλητές.	354
§ 2.7 Άλλες χρήσιμες εντολές.	360
§ 2.7.1 Η εντολή With.	360
§ 2.7.2 Οι εντολές Abort και CheckAbort.	360
§ 2.7.3 Οι εντολές Goto και Label.	362
§ 2.7.4 Παρακολούθηση της ροής αλλά και του χρόνου εκτέλεσης των προγραμμάτων με τις εντολές Trace και Timing.	363
§ 2.8 Επαναληπτικές ασκήσεις.	367
§ 2.9 Απαντήσεις στις δραστηριότητες.	373

Κεφάλαιο III. Συναρτησιακός Προγραμματισμός

§ 3.1 Δενδροειδής μορφή εκφράσεων.	380
§ 3.2 Η εντολή Map.	382
§ 3.3 Η εντολή Apply.	388
§ 3.4 Οι εντολές Thread και MapThread.	390
§ 3.5 Η εντολή Inner.	395
§ 3.6 Η εντολή Outer.	396
§ 3.7 Επαναλήψεις μέσω των εντολών Nest, NestList, FixedPoint και FixedPointList.	399
§ 3.8 Επαναλήψεις μέσω των εντολών Fold και FoldList.	404
§ 3.9 Παραδείγματα.	405
§ 3.10 Επαναληπτικές ασκήσεις.	409
§ 3.11 Απάντηση στις δραστηριότητες.	412

Κεφάλαιο IV. Κανονοκεντρικός Προγραμματισμός

§ 4.1 Με ποιο τρόπο δημιουργούμε κανόνες (rules) ;	425
§ 4.1.1 Καθολικοί κανόνες.	427
§ 4.1.2 Τοπικοί κανόνες.	431
§ 4.1.3 Προτεραιότητα κανόνων.	434
§ 4.2 Πρότυπα.	437
§ 4.2.1 Πρότυπα με ή χωρίς όνομα.	438
§ 4.2.2 Πρότυπα με συγκεκριμένη επικεφαλίδα.	440
§ 4.2.3 Πρότυπα που ικανοποιούν κάποια λογική συνθήκη.	442
§ 4.2.4 Συνθήκες που αναφέρονται σε περισσότερα από ένα πρότυπα.	444
§ 4.2.5 Προαιρετικά ορίσματα και προεπιλεγμένες τιμές ορισμάτων.	445
§ 4.3 Αναδρομικές συναρτήσεις.	448
§ 4.4 Δυναμικός προγραμματισμός.	452
§ 4.5 Εφαρμογές.	454
§ 4.6 Ασκήσεις.	461
§ 4.7 Απαντήσεις στις Δραστηριότητες.	464

Κεφάλαιο V. Δημιουργία Πακέτων

§ 5.1 Πως καλούμε ένα πακέτο συναρτήσεων ;	473
§ 5.2 Πως δημιουργούμε ένα πακέτο συναρτήσεων ;	474
§ 5.2.1 Πως δημιουργούμε νέα Context και νέα ContextPath ;	479
§ 5.2.2 Πως δημιουργούμε το αρχείο που θα περιέχει το πακέτο μας ;	486
§ 5.2.3 Μπορούμε να κάνουμε χρήση άλλων πακέτων για την δημιουργία του δικού μας πακέτου ;	488
§ 5.3 Ασκήσεις	491
§ 5.4 Απάντηση στις δραστηριότητες	492

Παράρτημα Α. Λογικό Διάγραμμα	497
Βιβλιογραφία	499

Κεφάλαιο I

Βασικά χαρακτηριστικά

Η παρουσία προγραμμάτων, τα οποία βοηθούν σημαντικά στην εκτέλεση πράξεων, είναι σχεδόν ταυτόχρονη με την εμφάνιση των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Όσο η ισχύς και η μνήμη των υπολογιστών αυξάνεται, τόσο αυξάνεται και η δυνατότητα των προγραμματιστών να αναπτύξουν προγράμματα, που προσφέρουν αποτελεσματική βοήθεια σε χρονοβόρες κυρίως διαδικασίες. Το *Mathematica* είναι ένα τέτοιο πρόγραμμα. Επιλύει σε ελάχιστο χρόνο προβλήματα, τα οποία θα απαιτούσαν πολλές ώρες υπολογισμών.

Το *Mathematica* είναι μια γλώσσα προγραμματισμού περισσότερο άμεση από τις C, Fortran και Pascal. Δηλαδή μπορεί εύκολα να διαβάσει μια παράσταση, να υπολογίσει το αποτέλεσμα, και να το εμφανίσει αμέσως. Αντίθετα, στις υπόλοιπες γλώσσες προγραμματισμού, πρέπει το πρόγραμμα να περάσει τη διαδικασία της μεταγλώττισης, προτού να είναι σε θέση να εμφανίσει κάποιο αποτέλεσμα. Το χαρακτηριστικό αυτό την κάνει ασφαλώς πιο εύχρηστη και εύκολη από τις γλώσσες C, Fortran και Pascal.

1.1. Περιγραφή περιβάλλοντος

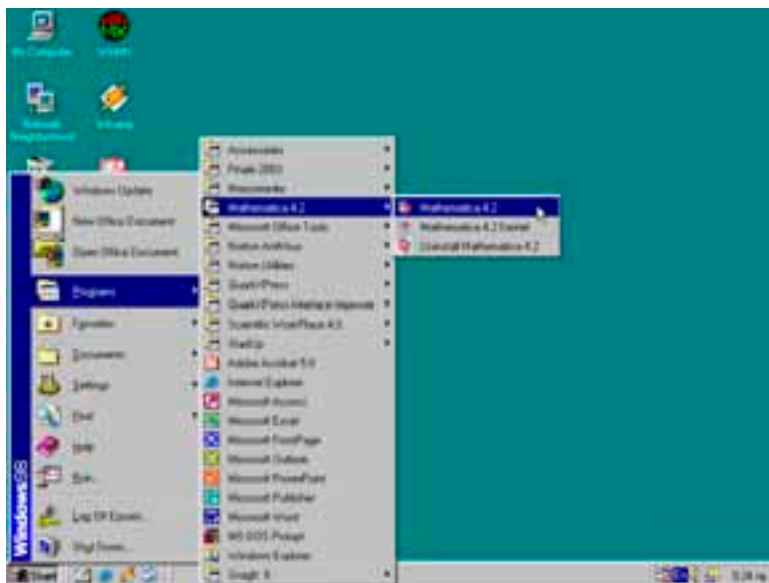
Το *Mathematica* μπορεί να λειτουργήσει σε αρκετές πλατφόρμες, μεταξύ των οποίων είναι το περιβάλλον DOS, και UNIX. Η περιγραφή, όμως, που ακολουθεί αφορά το περιβάλλον των Windows 95 και άνω.

Η εισαγωγή στο περιβάλλον εργασίας του *Mathematica* είναι απλή υπόθεση για ένα χρήστη, ο οποίος είναι εξοικειωμένος με το περιβάλλον των Windows. Είναι αρκετό να ακολουθήσουμε τη συνήθη διαδικασία των Windows, και να κάνουμε διπλό κλικ στο εικονίδιο του προγράμματος *Mathematica*. Αν ένα τέτοιο εικονίδιο δεν υπάρχει στην επιφάνεια εργασίας των Windows, τότε πρέπει να αναζητήσουμε το πρόγραμμα στο μενού Έναρξη (Start), κάτω από την κατηγορία Προγράμματα, ή όπου αλλού έγινε η αρχική εγκατάσταση του *Mathematica*.

στο εικονίδιο που μας ενδιαφέρει, και κάνουμε διπλό κλικ με το αριστερό πλήκτρο του ποντικιού. Διπλό κλικ σημαίνει να πατήσουμε δύο συνεχόμενες, και χωρίς διακοπή, φορές το αριστερό πλήκτρο του ποντικιού.

Στην Εικόνα 1 βλέπουμε το εικονίδιο που αντιστοιχεί στο πρόγραμμα *Mathematica*, οπότε ένα διπλό κλικ πάνω στο εικονίδιο αυτό θα ενεργοποιήσει το πρόγραμμα *Mathematica*.

Είναι πιθανό το εικονίδιο του *Mathematica* να μην εμφανίζεται στην οθόνη του υπολογιστή, διότι η εμφάνιση ή όχι του εικονιδίου εξαρτάται από τις επιλογές που κάνει ο χρήστης, ο οποίος εγκαθιστά το πρόγραμμα στον υπολογιστή. Στην περίπτωση αυτή, κάνουμε ένα κλικ πάνω στο μενού «Εναρξη» («Start»), οπότε αναδύεται το μενού «Εναρξη», το οποίο εμφανίζεται στην Εικόνα 2.



Εικόνα 2. Το μενού «Εναρξη» των Windows

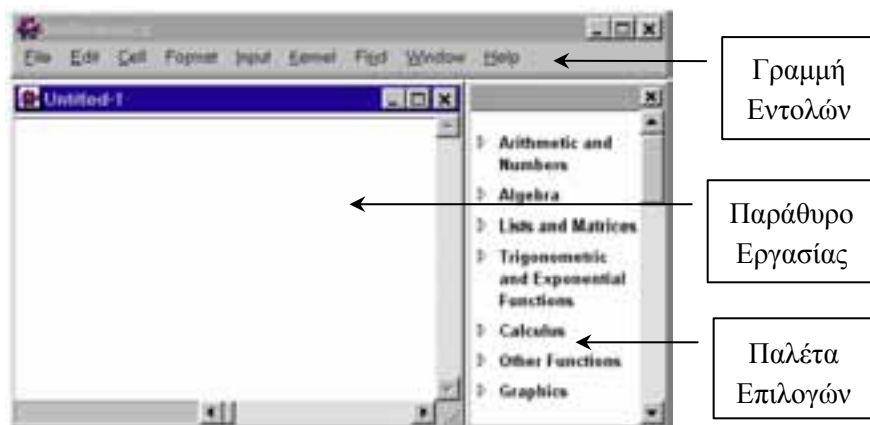
Παρατηρούμε ότι, όταν μετακινούμε το ποντίκι πάνω στο γραφείο, μια οριζόντια μπάρα μετακινείται προς τα πάνω ή προς τα κάτω, ανάλογα με την κίνηση του ποντικιού. Η μπάρα αυτή επιλέγει κάθε φορά ένα πρόγραμμα ή μια κατηγορία προγραμμάτων, τα οποία περιέχονται στο μενού έναρξης. Τα ονόματα που αντιστοιχούν σε κατηγορίες προγραμμάτων έχουν στα αριστερά του ονόματος ένα μικρό τρίγωνο. Όταν η μπάρα επιλέγει μια κατηγορία προγραμμάτων, τότε εμφανίζεται ένα νέο μενού, στο οποίο μπορούμε να μεταπηδήσουμε μετακινώντας κατάλληλα το ποντίκι, προς την κατεύθυνση του νέου μενού. Με τον τρόπο

αυτό μπορούμε να αναζητήσουμε οποιοδήποτε πρόγραμμα είναι εγκατεστημένο στον υπολογιστή, σε όποια κατηγορία και αν βρίσκεται.

Στην Εικόνα 2 βλέπουμε ότι ο δείκτης του ποντικιού έχει επιλέξει το πρόγραμμα *Mathematica*, το οποίο βρίσκεται στην κατηγορία «Mathematica 4.2». Η κατηγορία αυτή περιέχεται στην γενικότερη κατηγορία «Programs». Στο σημείο αυτό, δηλαδή όταν ο δείκτης του ποντικιού έχει επιλέξει το πρόγραμμα *Mathematica*, αν κάνουμε ένα κλικ με το αριστερό πλήκτρο του ποντικιού, θα βρεθούμε στο περιβάλλον του προγράμματος αυτού.

Το πρόγραμμα *Mathematica* αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο είναι το περιβάλλον (Front End) στο οποίο βρισκόμαστε, όταν εκτελέσουμε το πρόγραμμα, και το δεύτερο είναι ο πυρήνας (Kernel) του προγράμματος. Ο πυρήνας είναι το μέρος εκείνο του προγράμματος, το οποίο αναλαμβάνει να κάνει κάθε υπολογισμό που ζητά ο χρήστης. Το Front End του προγράμματος διευκολύνει την επικοινωνία του χρήστη με τον πυρήνα.

Το περιβάλλον του προγράμματος είναι σχετικά απλό, και αποτελείται από τη γραμμή εντολών, το παράθυρο εργασίας, και την παλέτα επιλογών. Στην Εικόνα 3 φαίνονται καθαρά τα τρία αυτά βασικά μέρη του περιβάλλοντος του *Mathematica*. Η παλέτα επιλογών είναι δυνατόν να μην εμφανιστεί μετά την εκτέλεση του προγράμματος. Όπως θα δούμε, όμως, είναι εύκολο να προκαλέσουμε την εμφάνιση οποιασδήποτε από τις διαθέσιμες παλέτες του *Mathematica*.



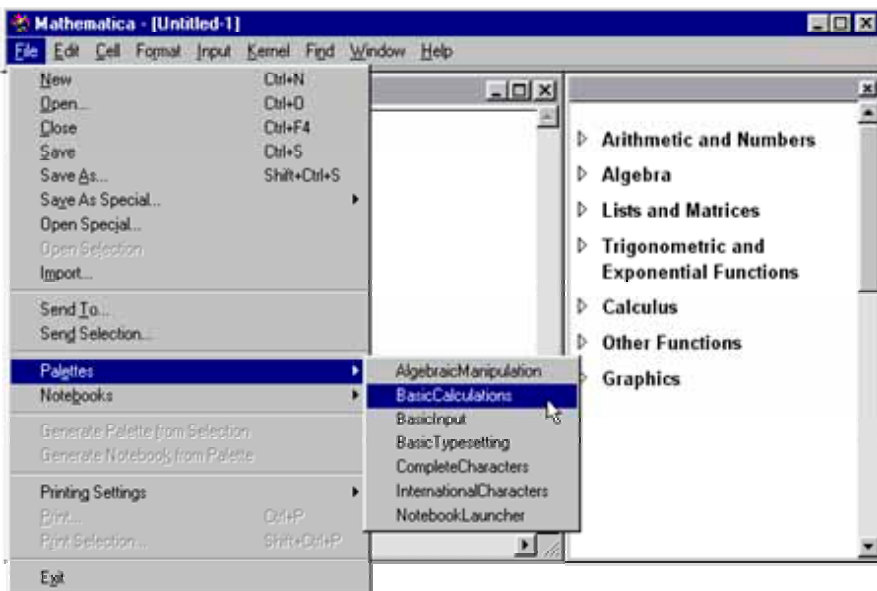
Εικόνα 3. Το περιβάλλον του *Mathematica*.

Στο παράθυρο εργασίας πληκτρολογούμε κάθε εντολή που θέλουμε να εκτελέσει ο πυρήνας του *Mathematica*. Στο ίδιο παράθυρο ο πυρήνας θα εμφανίσει

την απάντηση στην εντολή που δώσαμε. Πριν αρχίσουμε να πληκτρολογούμε εντολές στο παράθυρο εργασίας, θα πρέπει αυτό να είναι ενεργό.

Παρατηρούμε ότι η οριζόντια μπάρα, που βρίσκεται στο πάνω μέρος του παραθύρου εργασίας, έχει διαφορετικό χρώμα από τις δύο άλλες μπάρες της γραμμής εντολών, και της παλέτας επιλογών. Αυτό δείχνει ότι το παράθυρο εργασίας είναι ενεργό. Αν δεν είναι ενεργό, τότε δεν μπορούμε να πληκτρολογήσουμε εντολές μέσα σε αυτό. Η ενεργοποίηση του παραθύρου εργασίας γίνεται, αν μεταφέρουμε το δείκτη του ποντικιού μέσα στο παράθυρο αυτό, και κάνουμε ένα κλικ με τον αριστερό πλήκτρο του ποντικιού.

Παρατηρούμε, επίσης, ότι η μπάρα του παραθύρου εργασίας περιέχει το όνομα «Untitled-1» (Ανώνυμο-1). Το όνομα αυτό ορίζεται από το ίδιο το πρόγραμμα κάθε φορά που ξεκινάμε το *Mathematica*. Θα δούμε στη συνέχεια με ποιο τρόπο μπορούμε να αλλάξουμε το όνομα αυτό, και να θέσουμε ένα όνομα της αρεσκείας μας.

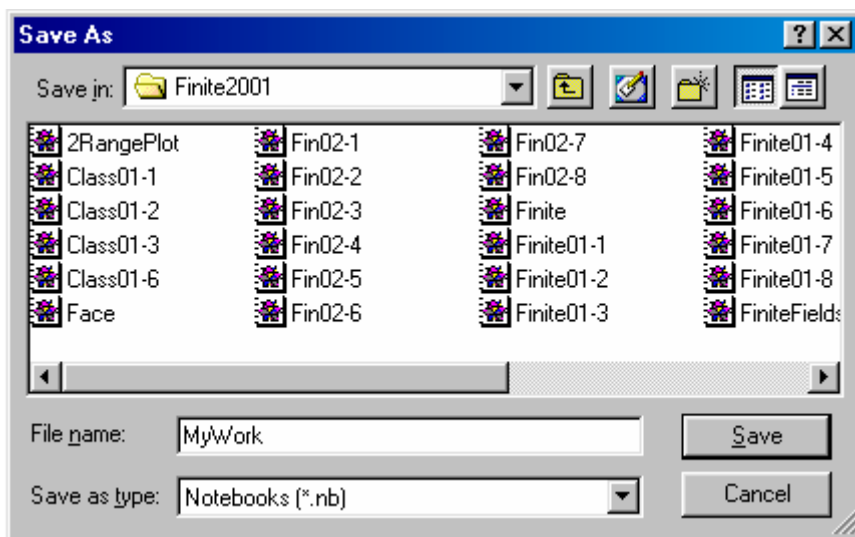


Εικόνα 4. Το μενού της ομάδας εντολών File.

Η γραμμή εντολών περιέχει ομαδοποιημένες εντολές που αφορούν είτε την εκτέλεση συναρτήσεων, είτε τη διαμόρφωση του περιβάλλοντος του προγράμματος. Αν μεταφέρουμε το δείκτη του ποντικιού στο όνομα κάποιας ομάδας, και κάνουμε ένα κλικ, εμφανίζεται το σύνολο των εντολών της ομάδας αυτής.

Στην Εικόνα 4 βλέπουμε τις διαθέσιμες εντολές του προγράμματος κάτω από την ομάδα File. Παρατηρούμε ότι η πέμπτη εντολή της ομάδας αυτής είναι η εντολή «Save As». Η εντολή αυτή μας επιτρέπει να κάνουμε δύο πράγματα. Το πρώτο είναι να αλλάξουμε το όνομα του παραθύρου εργασίας, και το δεύτερο είναι να αποθηκεύσουμε το αρχείο του *Mathematica* στο δίσκο του υπολογιστή.

Κάνοντας ένα κλικ πάνω στην εντολή Save As το *Mathematica* θα εμφανίσει ένα νέο παράθυρο με όνομα «Save As», το οποίο φαίνεται στην Εικόνα 5.



Εικόνα 5. Το παράθυρο Save As.

Στο παράθυρο αυτό υπάρχουν τρεις διαφορετικές περιοχές, των οποίων τα ονόματα, από πάνω προς τα κάτω, είναι «Save in», «File name», και «Save as type». Στην περιοχή «File name» πληκτρολογούμε ένα όνομα για το αρχείο που θέλουμε να αποθηκεύσουμε στο δίσκο του υπολογιστή. Για παράδειγμα, μπορούμε να δώσουμε το όνομα MyWork. Μια καλή τακτική είναι να χρησιμοποιούμε ονόματα, τα οποία θα μας θυμίζουν το περιεχόμενο του αρχείου που θέλουμε να αποθηκεύσουμε. Στην περιοχή «Save as type», στην οποία δεν χρειάζεται να κάνουμε τίποτε, εμφανίζεται η επέκταση την οποία θα επισυνάψει το *Mathematica* στο όνομα του αρχείου, πριν το αποθηκεύσει στο δίσκο. Αυτό σημαίνει ότι το αρχείο μας θα αποθηκευθεί με το όνομα MyWork.nb. Η επέκταση nb, η οποία εμφανίζεται στην περιοχή Save as type, προέρχεται από τη λέξη notebook. Το πρόγραμμα *Mathematica* ονομάζει notebook κάθε αρχείο που αποθηκεύουμε στο

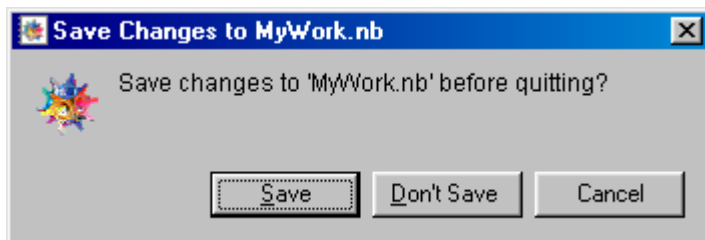
δίσκο του υπολογιστή. Τέλος, η περιοχή Save in δείχνει τον κατάλογο του δίσκου, στον οποίο θα αποθηκευθεί το αρχείο μας. Στην περίπτωση της Εικόνας 5, θα αποθηκευθεί στον κατάλογο με όνομα Finite2001.

Στο παράθυρο Save As, εκτός από τις τρεις αυτές περιοχές, υπάρχει και μία κεντρική, μεγαλύτερη από τις άλλες, στην οποία εμφανίζονται όλα τα αρχεία (notebooks) που περιέχονται στον κατάλογο Finite2001.

Εφόσον είμαστε ικανοποιημένοι με τις πληροφορίες που εισάγαμε στις τρεις αυτές περιοχές του παραθύρου Save As, κάνουμε ένα κλικ πάνω στο πλήκτρο Save, το οποίο υπάρχει στην κάτω δεξιά γωνία του παραθύρου αυτού. Η κίνηση αυτή θα αποθηκεύσει το αρχείο (notebook) MyWork.nb στον κατάλογο Finite2001 του δίσκου του υπολογιστή. Ταυτόχρονα το παράθυρο Save As θα εξαφανιστεί, οπότε θα επιστρέψουμε στο αρχικό περιβάλλον του *Mathematica*.

Μπορούμε, τώρα, να παρατηρήσουμε ότι η οριζόντια μπάρα, που υπάρχει στο πάνω μέρος του παραθύρου εργασίας, περιέχει το όνομα MyWork.nb, το οποίο εμείς δώσαμε, και όχι το όνομα Untitled-1, όπως προηγουμένως.

Αυτή τη στιγμή, λοιπόν, βρισκόμαστε μπροστά στο περιβάλλον του *Mathematica*, το οποίο παρουσιάζεται στην Εικόνα 3, με μοναδική διαφορά το διαφορετικό όνομα του παραθύρου εργασίας.



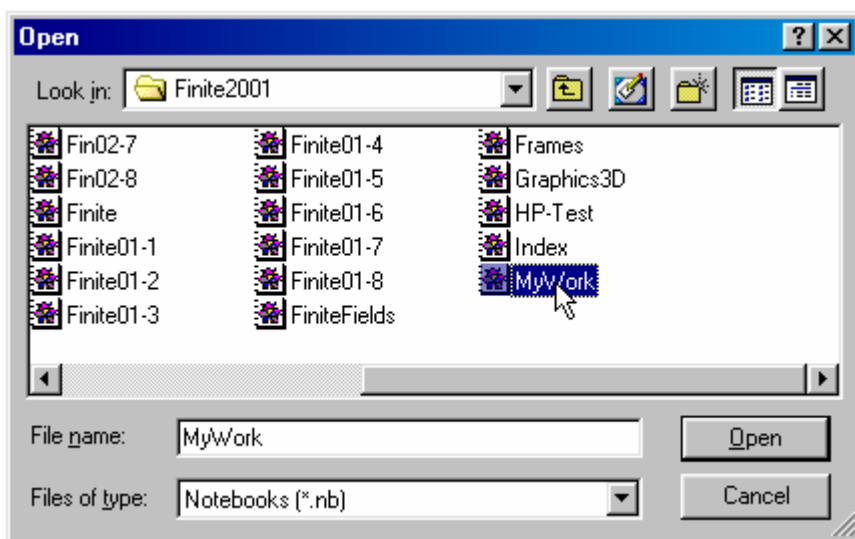
Εικόνα 6. Το παράθυρο «Save Changes»

Αν και δεν έχουμε μιλήσει ακόμη για τις συναρτήσεις του *Mathematica*, θα πληκτρολογήσουμε, τώρα, μια τέτοια συνάρτηση στο παράθυρο εργασίας. Προς το παρόν δεν έχει σημασία αν καταλαβαίνετε τι σημαίνει αυτή η συνάρτηση, ή ποια είναι η ερμηνεία της απάντησης που θα δώσει το *Mathematica*. Απλά, πληκτρολογήστε στο παράθυρο εργασίας `FactorInteger[1234567890]`, προσέχοντας να χρησιμοποιείτε πεζά ή κεφαλαία γράμματα, ακριβώς όπως τα βλέπετε. Όταν τελειώσετε με την πληκτρολόγηση πατήστε το πλήκτρο ENTER, το οποίο βρίσκεται στο κάτω δεξιό άκρο του πληκτρολογίου. Σε λίγο το *Mathematica* θα εμφανίσει τη απάντηση

$\{\{2, 1\}, \{3, 2\}, \{5, 1\}, \{3607, 1\}, \{3803, 1\}\}$.

Τώρα, κάνετε ένα κλικ στην εντολή «File» στις γραμμής εντολών, και στη συνέχεια ένα κλικ στην εντολή «Exit», που είναι η τελευταία εντολή της ομάδας «File». Με τις κινήσεις αυτές ζητάτε ουσιαστικά να κλείσει το πρόγραμμα *Mathematica*, διότι δεν θέλετε να συνεχίσετε προς το παρόν. Αμέσως το πρόγραμμα θα παρουσιάσει ένα παράθυρο, το οποίο εμφανίζεται στην Εικόνα 6.

Το *Mathematica* μας προειδοποιεί ότι έγιναν αλλαγές στο αρχείο με το όνομα *MyWork.nb*, και μας ρωτά αν θέλουμε να αποθηκεύσουμε τις αλλαγές αυτές ή όχι. Παρατηρούμε ότι στο παράθυρο που εμφανίστηκε υπάρχουν τρία πλήκτρα με ονόματα «Save», «Don't Save», και «Cancel». Αν κάνουμε ένα κλικ στο πλήκτρο «Save», το πρόγραμμα θα αποθηκεύσει τις αλλαγές στο αρχείο *MyWork.nb*, και θα κλείσει. Αν κάνουμε ένα κλικ στο πλήκτρο «Don't Save», το *Mathematica* θα

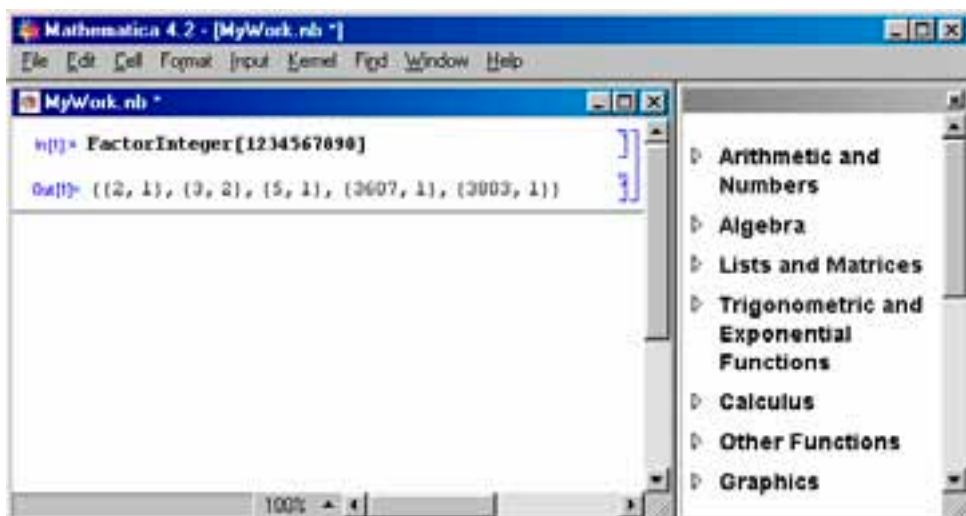


Εικόνα 7. Το παράθυρο «Open»

κλείσει χωρίς να αποθηκεύσει τις αλλαγές που έγιναν. Αυτό σημαίνει ότι στο αρχείο *MyWork.nb* δεν θα υπάρχει η συνάρτηση `FactorInteger`, εφόσον ζητήσαμε να μην αποθηκευτούν οι αλλαγές. Τέλος, αν κάνουμε ένα κλικ στο πλήκτρο «Cancel», ουσιαστικά ματαιώνουμε την τελευταία εντολή, δηλαδή την εντολή `Exit`, οπότε επανερχόμαστε στο περιβάλλον του *Mathematica*. Φυσικά, θα κάνουμε ένα κλικ στο πλήκτρο «Save», οπότε το αρχείο *MyWork.nb* θα περιέχει τη συνάρτηση `FactorInteger`, και το πρόγραμμα θα κλείσει.

Αργότερα ή την επόμενη ίσως μέρα είναι πιθανό να θέλουμε να συνεχίσουμε με το ίδιο αρχείο που αποθηκεύσαμε προηγουμένως. Πρώτα, θα ενεργοποιήσουμε το *Mathematica*, κάνοντας διπλό κλικ πάνω στο εικονίδιο του προγράμματος. Στη συνέχεια θα κάνουμε ένα κλικ στην εντολή File, και αμέσως μετά ένα κλικ στην εντολή Open της ομάδας File. Τότε θα παρουσιαστεί ένα παράθυρο με όνομα «Open», το οποίο εμφανίζεται στην Εικόνα 7.

Το παράθυρο αυτό είναι ίδιο με το παράθυρο Save As, με τη διαφορά ότι το όνομα της πάνω περιοχής είναι «Look in» και όχι «Save in». Στη μεγάλη κεντρική περιοχή του παραθύρου Open εμφανίζονται όλα τα αρχεία που περιέχονται στον κατάλογο, του οποίου το όνομα παρουσιάζεται στην περιοχή «Look in». Παρατηρούμε ότι το όνομα του καταλόγου είναι Finite2001, δηλαδή πρόκειται για τον κατάλογο στον οποίο αποθηκεύσαμε προηγουμένως το πρώτο μας αρχείο με όνομα MyWork.nb. Αυτό σημαίνει ότι το όνομα του αρχείου αυτού θα πρέπει να βρίσκεται μέσα στην κεντρική, μεγάλη περιοχή του παραθύρου Open. Πράγματι, με λίγη αναζήτηση μπορούμε να βρούμε το αρχείο αυτό. Αν κάνουμε ένα κλικ πάνω στο όνομα του αρχείου MyWork, θα παρατηρήσουμε ότι το όνομα αυτό μεταφέρεται στην περιοχή «File name». Ας κάνουμε, τώρα, ένα κλικ στο πλήκτρο «Open» που βρίσκεται στο κάτω δεξιό τμήμα του παραθύρου της Εικόνας 7. Αμέσως το αρχείο MyWork θα εμφανιστεί στο περιβάλλον του *Mathematica*, οπότε θα έχουμε την Εικόνα 8.

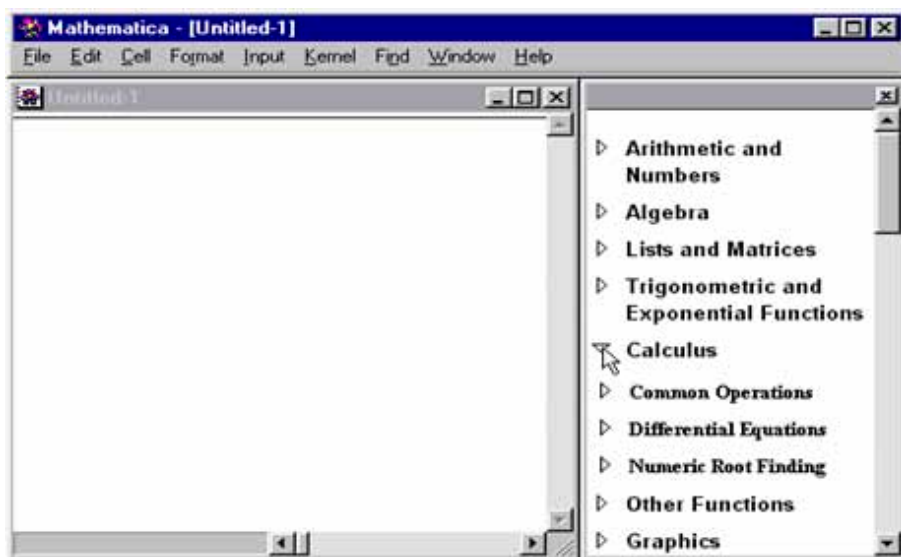


Εικόνα 8. Το πρώτο μας αρχείο στο *Mathematica*.

Παρατηρούμε ότι το αρχείο MyWork περιέχει την εντολή FactorInteger, την οποία πληκτρολογήσαμε πριν αποθηκεύσουμε το αρχείο στο δίσκο.

Με όλες τις προηγούμενες κινήσεις είδαμε με ποιο τρόπο μπορούμε να ενεργοποιήσουμε, και να κλείσουμε το Mathematica, να δημιουργήσουμε ένα αρχείο, και να το αποθηκεύσουμε στο δίσκο, και τέλος, είδαμε πως μπορούμε να ανοίξουμε ένα αποθηκευμένο αρχείο, για να συνεχίσουμε την εργασία, που ενδεχόμενα αφήσαμε ημιτελή. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε άλλο πρόγραμμα στο περιβάλλον των Windows.

Όπως φαίνεται και στην Εικόνα 4, η ομάδα εντολών «File» δεν περιέχει μόνον τις εντολές «Save As», «Open» και «Exit», τις οποίες χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως. Μια άλλη εντολή της ομάδας αυτής είναι και η εντολή «Print». Αν κάνουμε ένα κλικ πάνω στην εντολή αυτή, το Mathematica θα εκτυπώσει στον εκτυπωτή οτιδήποτε υπάρχει στο ενεργό παράθυρο εργασίας του προγράμματος.

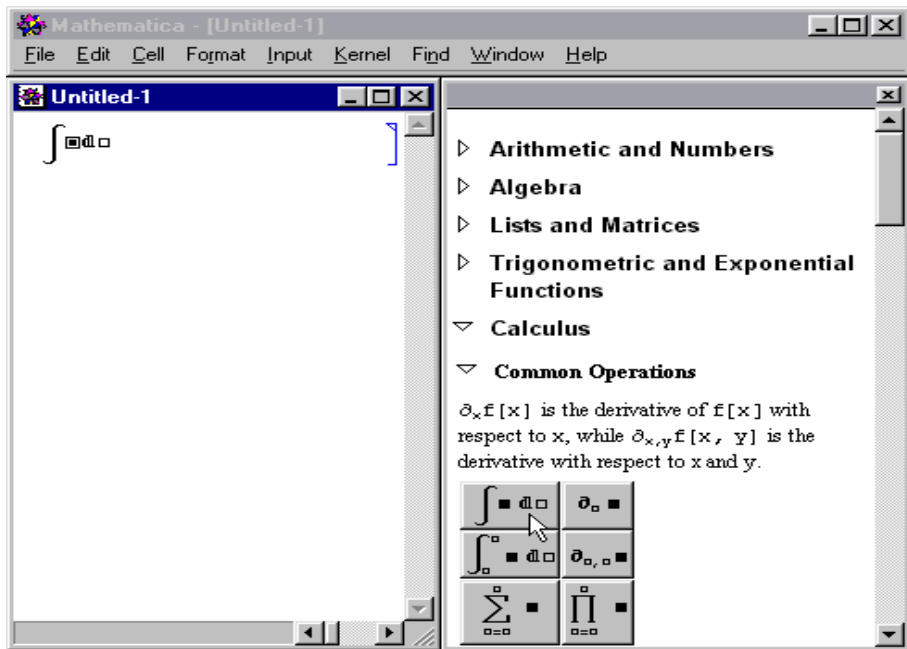


Εικόνα 9. Το σύστημα Παλετών.

Μπορούμε ακόμη να παρατηρήσουμε ότι, στην Εικόνα 4, ορισμένα ονόματα της ομάδας «File», όπως για παράδειγμα τα Palettes, και Notebooks, συνοδεύονται από ένα μικρό μαύρο τρίγωνο, που βρίσκεται δεξιά του ονόματος. Αυτό δείχνει ότι το όνομα αυτό δεν αντιπροσωπεύει μια συγκεκριμένη εντολή, αλλά είναι το όνομα μιας ομάδας εντολών, οι οποίες θα εμφανιστούν όταν επιλεγεί το όνομα της ομάδας αυτής. Στην Εικόνα 4 εμφανίζονται όλες οι εντολές, που βρί-

σκονται κάτω από το όνομα Palettes. Δηλαδή εμφανίζονται όλες οι παλέτες, τις οποίες διαθέτει το πρόγραμμα *Mathematica*. Από τον κατάλογο αυτό μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε παλέτα θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε. Στην Εικόνα 4 εμφανίζεται η παλέτα με τίτλο BasicCalculations. Επομένως όταν ενεργοποιήσουμε το *Mathematica*, και δεν εμφανιστεί καμιά από τις διαθέσιμες παλέτες, μπορούμε από το μενού αυτό να επιλέξουμε οποιαδήποτε από τις παλέτες που διαθέτει το πρόγραμμα.

Οι παλέτες επιλογών περιέχουν ομαδοποιημένες πολλές από τις συναρτήσεις, που είναι ενσωματωμένες στον πυρήνα του προγράμματος. Κάθε παλέτα, όπως βλέπουμε στην Εικόνα 9, περιέχει κάποια ονόματα ή φράσεις, οι οποίες αντιπροσωπεύουν τις διάφορες ομάδες της παλέτας. Αριστερά του κάθε ονόματος



Εικόνα 10. Διαθέσιμες συναρτήσεις.

ομάδας υπάρχει το περίγραμμα ενός μικρού τριγώνου. Το περιεχόμενο της κάθε ομάδας εμφανίζεται με ένα κλικ πάνω στο τρίγωνο αυτό. Μερικές από τις ομάδες περιέχουν ονόματα άλλων ομάδων, οπότε η εμφάνιση του περιεχομένου της αρχικής ομάδας οδηγεί σε νέες επιλογές. Στην Εικόνα 9 βλέπουμε το περιεχόμενο της αρχικής ομάδας Calculus. Παρατηρείστε ότι το περίγραμμα του τριγώνου που αντιστοιχεί στην ομάδα Calculus έχει αλλάξει προσανατολισμό, για να μας δείξει

ότι η ομάδα αυτή είναι ανοικτή. Επίσης, στην Εικόνα 9, βλέπουμε ότι η ομάδα Calculus περιέχει τρεις νέες ομάδες: Common Operations, Differential Equations, και Numeric Root Finding. Μπορούμε να δούμε το περιεχόμενο των νέων αυτών ομάδων με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή με ένα κλικ πάνω στο τρίγωνο της υποομάδας που μας ενδιαφέρει.

Οι νέες υποομάδες είναι δυνατόν να περιέχουν και αυτές άλλες υποομάδες. Συνήθως, όμως, περιέχουν ονόματα συναρτήσεων, οι οποίες είναι σχετικές με τον τίτλο της υποομάδας στην οποία περιέχονται. Στην Εικόνα 10, για παράδειγμα, βλέπουμε ορισμένες συναρτήσεις που περιέχονται στην υποομάδα Common Operations. Οι συναρτήσεις αυτές είναι σχετικές με το διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό, εφόσον βρίσκονται κάτω από την αρχική ομάδα Calculus, και ταυτόχρονα εκτελούν συνηθισμένες πράξεις που συναντάμε στο διαφορικό λογισμό, εφόσον περιέχονται στην υποομάδα Common Operations. Όπως βλέπουμε στην Εικόνα 10, οι πρώτες συναρτήσεις είναι αυτές που αφορούν την ολοκλήρωση, και την παραγωγή, δηλαδή οι πλέον συνηθισμένες πράξεις του διαφορικού λογισμού. Με τον τρόπο αυτό μπορεί κανείς να προσεγγίσει εύκολα και γρήγορα τη συνάρτηση για την οποία ενδιαφέρεται.

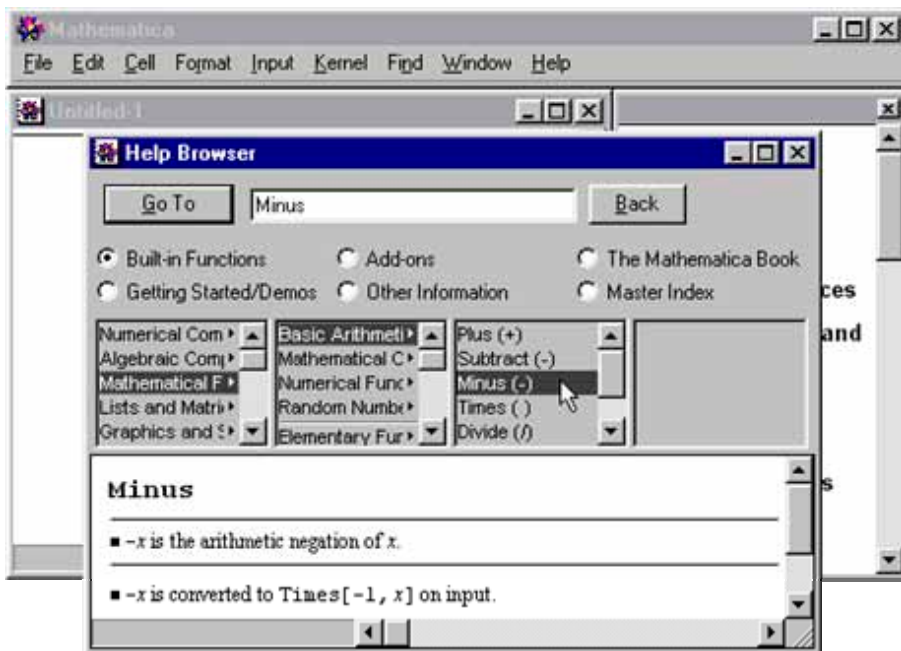
Παρατηρούμε ότι στην Εικόνα 10, οι συναρτήσεις εμφανίζονται με διαφορετικό τρόπο από το επεξηγηματικό κείμενο. Δηλαδή φαίνεται σαν να βρίσκονται πάνω σε ένα πλήκτρο, που περιμένει να πατηθεί. Αρκεί ένα απλό κλικ πάνω σε αυτό και η αντίστοιχη συνάρτηση θα μεταφερθεί στο παράθυρο εργασίας, έτοιμη να τη χρησιμοποιήσουμε. Το μόνο που χρειάζεται, πλέον, είναι να συμπληρωθούν τα κενά που εμφανίζονται. Στην Εικόνα 10, βλέπουμε ότι στο παράθυρο εργασίας έχει μεταφερθεί η συνάρτηση που αφορά την ολοκλήρωση, οπότε το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε είναι να συμπληρώσουμε την προς ολοκλήρωση συνάρτηση, και τη μεταβλητή ως προς την οποία θέλουμε να γίνει η ολοκλήρωση.

Χωρίς αμφιβολία το σύστημα παλετών αποτελεί μια σημαντική βοήθεια για τον αρχάριο χρήστη, διότι του επιτρέπει να εντοπίσει τις συναρτήσεις, οι οποίες τον ενδιαφέρουν, μέσα από ένα γραφικό περιβάλλον, δηλαδή ένα περιβάλλον με εικόνες, όπως είναι η παλέτας. Είναι, όμως, πάντοτε δυνατόν να πληκτρολογηθούν οι εντολές απευθείας στο παράθυρο εργασίας, χωρίς να γίνει καθόλου χρήση της παλέτας επιλογών. Μάλιστα, με την πάροδο του χρόνου, ο χρήστης συνήθως εξοικειώνεται με το περιβάλλον του προγράμματος, αποκτά κάποια εμπειρία στη χρήση του, και ταυτόχρονα μαθαίνει πολλές από τις συναρτήσεις, τις οποίες χρησιμοποιεί συχνότερα. Τότε ίσως διαπιστώσει ότι είναι ευκολότερο να πληκτρολογήσει τις εντολές απευθείας στο παράθυρο εργασίας, παρά να κάνει χρήση κάποιας παλέτας.

1.2. Το σύστημα βοήθειας (Help Browser)

Ένα από τα πρώτα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε στην εκμάθηση ενός νέου προγράμματος είναι η αναζήτηση απαντήσεων σε απορίες ή ερωτήματα που προκύπτουν από τη χρήση του. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να ζητήσουμε βοήθεια από το *Mathematica*. Προς το παρόν θα επικεντρωθούμε μόνο σε έναν από αυτούς.

Όπως κάθε πρόγραμμα των Windows έτσι και το *Mathematica* εμφανίζει ένα πίνακα βοήθειας με τη χρήση του πλήκτρου F1, το οποίο βρίσκεται στην αρχή της πάνω σειράς πλήκτρων του πληκτρολογίου. Τον ίδιο πίνακα βοήθειας μπορούμε να προσεγγίσουμε και από τη γραμμή εντολών. Όπως είδαμε στην Εικόνα 3, η τελευταία εντολή της γραμμής εντολών είναι η εντολή «Help». Ένα κλικ πάνω στην εντολή αυτή θα εμφανίσει όλη την ομάδα του συστήματος βοήθειας. Η πρώτη από αυτές αφορά τον πίνακα βοήθειας, δηλαδή τον Help Browser.



Εικόνα 11. Το σύστημα βοήθειας του *Mathematica*.

Η Εικόνα 11 δείχνει τον πίνακα αυτό. Παρατηρούμε ότι στο πάνω μέρος του πίνακα αυτού υπάρχει μια λευκή λωρίδα, όπου μπορούμε να πληκτρολογήσουμε

το όνομα της συνάρτησης, για την οποία χρειαζόμαστε βοήθεια. Όταν τελειώσουμε με την πληκτρολόγηση, κάνουμε ένα κλικ πάνω στο πλήκτρο «Go To», το οποίο βρίσκεται στα αριστερά της λευκής λωρίδας, οπότε θα εμφανιστεί ένα επεξηγηματικό κείμενο που αφορά τη συνάρτηση που μας ενδιαφέρει. Μπορούμε, ακόμη, να παρατηρήσουμε ότι, καθώς πληκτρολογούμε διάφορους χαρακτήρες στη λευκή λωρίδα, το σύστημα βοήθειας προσπαθεί να ταιριάσει τους χαρακτήρες, που έχουμε ήδη πληκτρολογήσει, με τα ονόματα των συναρτήσεων τις οποίες διαθέτει. Μάλιστα, τις περισσότερες φορές, ο Help Browser θα επιλέξει το όνομα της συνάρτησης, ακόμη και αν δεν έχουμε τελειώσει την πληκτρολόγηση. Αν, τώρα, κάνουμε ένα κλικ είτε στο πλήκτρο «Go To», είτε στο όνομα της συνάρτησης αυτής, θα εμφανιστεί το επεξηγηματικό κείμενο που αναζητούμε.

Ακριβώς κάτω από αυτή τη λευκή λωρίδα υπάρχουν έξι διαφορετικές κατηγορίες από τις οποίες μπορούμε να επιλέξουμε, με ονόματα: Built-in Functions, Getting Started/Demos, Add-ons, Other Information, The Mathematica Book, και Master Index. Συνήθως η αναζήτηση βοήθειας γίνεται στην κατηγορία Built-in Functions, οπότε η κατηγορία αυτή επιλέγεται εξαρχής.

Η κατηγορία The Mathematica Book περιέχει ολόκληρο το βιβλίο που συνοδεύει το πρόγραμμα *Mathematica*. Πρόκειται για την ηλεκτρονική έκδοση ενός βιβλίου με 1500 περίπου σελίδες, η οποία περιέχει ακόμη και τα εξώφυλλα του βιβλίου.

Στην Εικόνα 11 βλέπουμε ότι κάτω από τις έξι αυτές κατηγορίες του πίνακα βοήθειας υπάρχουν τέσσερα μικρά παράθυρα χρώματος γκρι, και ένα μεγάλο λευκό παράθυρο από κάτω. Το πρώτο προς τα αριστερά γκρι παράθυρο περιέχει τα ονόματα κάποιων μεγάλων ομάδων συναρτήσεων, που είναι ενσωματωμένες στον πυρήνα του προγράμματος. Αν με ένα κλικ επιλέξουμε μια από τις ομάδες αυτές, το πρόγραμμα εμφανίζει στο αμέσως επόμενο γκρι παράθυρο τα ονόματα των υποομάδων που περιέχει η ομάδα που επιλέξαμε. Οι υποομάδες αυτές μπορούν να περιέχουν είτε ονόματα άλλων υποομάδων, είτε ονόματα συναρτήσεων του προγράμματος. Αν επιλέξουμε μια από τις υποομάδες αυτές, τότε στο αμέσως επόμενο γκρι παράθυρο θα εμφανιστούν είτε τα ονόματα των υποομάδων, αν περιέχει υποομάδες, είτε τα ονόματα των συναρτήσεων που περιέχονται σε αυτήν. Επομένως κάθε φορά που επιλέγουμε μια ομάδα συναρτήσεων, τα περιεχόμενα της ομάδας αυτής εμφανίζονται στο επόμενο προς τα δεξιά γκρι παράθυρο.

Σε κάθε περίπτωση, αν επιλέξουμε το όνομα μιας συνάρτησης, τότε στο μεγάλο λευκό παράθυρο του Help Browser θα εμφανιστεί το όνομα της συνάρτησης αυτής, επεξηγήσεις για τον τρόπο χρήσης της, και πολλές φορές ορισμένα παραδείγματα. Επίσης, θα υπάρχουν παραπομπές σε άλλες συναρτήσεις, οι οποίες εί-

ναι σχετικές με αυτήν που αναζητούμε. Οι παραπομπές αυτές διακρίνονται από το υπόλοιπο κείμενο βοήθειας, διότι είναι υπογραμμισμένες και γραμμένες με διαφορετικό χρώμα. Αν κάνουμε ένα κλικ πάνω σε μια παραπομπή, τότε το σύστημα βοήθειας μας μεταφέρει στην συνάρτηση της παραπομπής αυτής. Αν τώρα θέλουμε να μεταφερθούμε πίσω στην αρχική συνάρτηση που αναζητούσαμε αρκεί να κάνουμε ένα κλικ στο πλήκτρο «Back», το οποίο βρίσκεται στο πάνω αριστερό μέρος του παραθύρου βοήθειας. Τέλος, τα παραδείγματα, που συνήθως υπάρχουν στα επεξηγηματικά κείμενα των συναρτήσεων, μπορούμε να τα μεταφέρουμε στο παράθυρο εργασίας με το συνήθη τρόπο της αντιγραφής και επικόλλησης (Copy, Paste), και να τα χρησιμοποιήσουμε είτε όπως είναι, είτε με αλλαγές της αρεσκείας μας.

Μπορούμε, επίσης, να παρατηρήσουμε ότι, όταν κάνουμε ένα κλικ πάνω στο όνομα μιας συνάρτησης, το όνομα αυτό μεταφέρεται στη λευκή λωρίδα, η οποία βρίσκεται στο πάνω μέρος του πίνακα βοήθειας.

Από την προηγούμενη περιγραφή είναι φανερό, ότι το σύστημα βοήθειας του *Mathematica* είναι αρκετά εύχρηστο και χρήσιμο, εφόσον, όχι μόνο μπορούμε να προσεγγίσουμε εύκολα και γρήγορα μια συνάρτηση, αλλά ταυτόχρονα να μελετήσουμε και να χρησιμοποιήσουμε παραδείγματα χρήσης των συναρτήσεων που μας ενδιαφέρουν, ή ακόμη να εξετάσουμε συναρτήσεις που είναι σχετικές με αυτήν που αναζητούμε.

1.3. Οι συναρτήσεις του *Mathematica*

Πολλές φορές μέχρι τώρα χρησιμοποιήσαμε τον όρο συνάρτηση του *Mathematica*. Το ίδιο το πρόγραμμα ονομάζει συναρτήσεις όλες τις εντολές που πληκτρολογούμε στο παράθυρο εργασίας, για να εκτελέσουμε διάφορους υπολογισμούς. Οι εντολές αυτές είναι συνήθως ενσωματωμένες στον πυρήνα (Kernel) του προγράμματος, και για το λόγο αυτό είναι ανά πάσα στιγμή διαθέσιμες.

Όπως κάθε γλώσσα προγραμματισμού, το *Mathematica* περιέχει στον πυρήνα του ένα σύνολο εντολών, που χρησιμοποιούνται με συγκεκριμένο τρόπο σύνταξης. Επομένως, για να μπορέσει κανείς να χρησιμοποιήσει το πρόγραμμα, πρέπει να ξέρει και τις εντολές, και το τρόπο σύνταξής τους, διαφορετικά το *Mathematica* δεν θα τις κατανοήσει. Ένα βασικό χαρακτηριστικό του προγράμματος είναι ότι κάνει διάκριση μεταξύ των κεφαλαίων και πεζών γραμμάτων. Δηλαδή το *Mathematica* θα καταλάβει την εντολή

Integrate[f(x), x],

αλλά δεν θα δώσει απάντηση στην εντολή

integrate[f(x), x],

διότι θεωρεί ότι τα ονόματα «Integrate» και «integrate» είναι διαφορετικά, εφόσον το ένα αρχίζει με κεφαλαίο γράμμα, και το άλλο με πεζό.

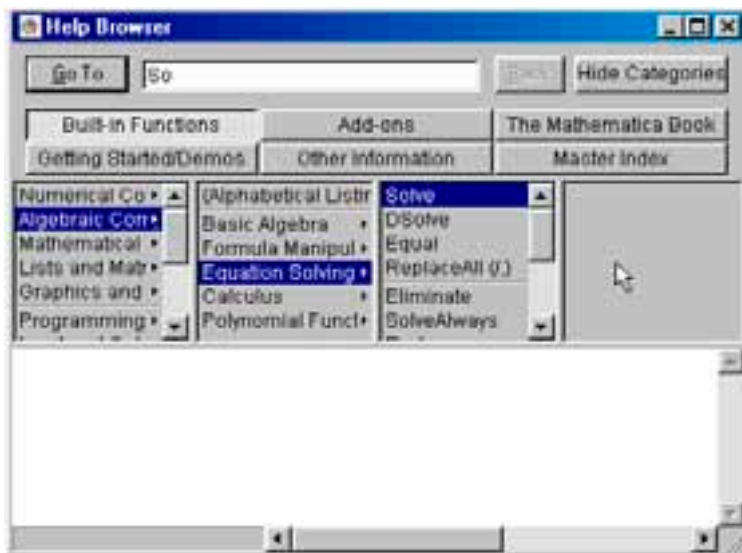
Τα ονόματα των προκαθορισμένων συναρτήσεων, μεταβλητών, επιλογών και σταθερών, που είναι ενσωματωμένες στον πυρήνα του *Mathematica*, αρχίζουν πάντοτε με κεφαλαίο γράμμα. Αν ένα όνομα αποτελείται από δύο ή περισσότερες λέξεις, το πρώτο γράμμα κάθε λέξης είναι κεφαλαίο, π.χ. FactorInteger, FindRoot, RowReduce. Γι' αυτό είναι μια καλή συνήθεια, τα ονόματα των συναρτήσεων, που ορίζονται από το χρήστη, να αρχίζουν με πεζό γράμμα. Έτσι, διαχωρίζονται αμέσως οι ενσωματωμένες στον πυρήνα του προγράμματος συναρτήσεις, από τις συναρτήσεις του χρήστη.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό που έχει το *Mathematica* είναι ότι τα ονόματα των συναρτήσεων του δείχνουν συνήθως και το σκοπό της συνάρτησης. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τα ονόματα κάποιων συναρτήσεων, καθώς και το σκοπό της καθεμιάς, οπότε φαίνεται αυτό το χαρακτηριστικό του προγράμματος.

Όνομα Συνάρτησης	Σκοπός Συνάρτησης
FactorInteger	Παραγοντοποίηση ακεραίου
FindRoot	Εύρεση ριζών
Integrate	Ολοκλήρωση

Το χαρακτηριστικό αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για δύο λόγους. Ασφαλώς είναι ευκολότερο να θυμόμαστε το όνομα μιας συνάρτησης, όταν αυτό συνδέεται με τη λειτουργία της συνάρτησης. Επίσης, αν δεν γνωρίζουμε το όνομα κάποιας συνάρτησης, την οποία χρειαζόμαστε, μπορούμε να πληκτρολογήσουμε, στον πίνακα βοήθειας του *Mathematica*, ένα πιθανό όνομα, καθοδηγούμενοι από την λειτουργία που θέλουμε να έχει, και να αφήσουμε το πρόγραμμα να μας δείξει όλες τις σχετικές συναρτήσεις. Φυσικά, δεν θα μπορούσαμε να κάνουμε κάτι τέτοιο, αν τα ονόματα των συναρτήσεων δεν είχαν σχέση με το σκοπό της κάθε συνάρτησης. Είναι πολύ πιθανό, ότι κάποια από τις συναρτήσεις που θα μας δείξει ο Help Browser, να είναι εκείνη ακριβώς που χρειαζόμαστε. Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να λύσουμε κάποια εξίσωση, αλλά δεν γνωρίζουμε το όνομα της συνάρτησης, η οποία θα μας βοηθήσει για το σκοπό αυτό. Επειδή, όμως, μας ενδιαφέρει η **λύση** της εξίσωσης, ένα πιθανό όνομα για τη συνάρτηση αυτή θα είναι **Solve**. Πράγματι, αν ανοίξουμε τον πίνακα βοήθειας του *Mathematica*, και αρχίσουμε να πληκτρολογούμε τη λέξη Solve, θα διαπιστώσουμε ότι το σύστημα βοήθειας θα μας μεταφέρει στη σχετική συνάρτηση, πριν ακόμη ολοκληρώσουμε την πληκτρολόγηση. Αυτό φαίνεται καθαρά στην Εικόνα 12. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το μεγάλο λευκό παράθυρο της Εικόνας 12 είναι κενό. Αν, όμως, κάνουμε ένα κλικ στο όνομα της συνάρτησης Solve, τότε θα εμφανιστεί το επεξηγηματικό κείμενο που αφορά τη συνάρτηση αυτή. Ασφαλώς το παράδειγμα αυτό είναι πολύ απλό, σύντομα όμως θα δούμε και άλλους τρόπους αναζήτησης συναρτήσεων του *Mathematica*.



Εικόνα 12. Αναζήτηση στον Help Browser

Ο καλύτερος τρόπος για να μάθει κανείς το *Mathematica* είναι να χρησιμοποιήσει το πρόγραμμα. Γι' αυτό εκτελέστε όλα τα παραδείγματα που θα βρείτε παρακάτω, προσέχοντας να πληκτρολογείτε τις εντολές ακριβώς όπως εμφανίζονται. Για να εκτελεστεί μια εντολή πατήστε και κρατήστε πατημένο το πλήκτρο *Shift*, και στη συνέχεια πιέστε το μεγάλο πλήκτρο *Enter*. Ένας άλλος τρόπος για να εκτελεστεί μια εντολή είναι να πατήσετε το πλήκτρο *Enter* που βρίσκεται στο κάτω δεξιό άκρο του αριθμητικού πληκτρολογίου.

Εκτέλεση Εντολής	Shift + Enter ή Enter (αριθμητικού πληκτρολογίου)
-------------------------	---

Από τη στιγμή που ο χρήστης δίνει την εντολή εκτέλεσης (Shift + Enter), το Front End του *Mathematica* μεταφέρει την εντολή στον πυρήνα του προγράμματος. Ο πυρήνας επεξεργάζεται την ερώτηση του χρήστη, αντιστοιχεί σε αυτή μια απάντηση, και στέλνει την απάντηση πίσω στο Front End του προγράμματος. Η απάντηση αυτή εμφανίζεται στο παράθυρο εργασίας του *Mathematica*, ακριβώς κάτω από την ερώτηση του χρήστη. Από την περιγραφή αυτή φαίνεται ότι ο χρήστης βρίσκεται σε διαρκή διάλογο με τον πυρήνα του προγράμματος, έχοντας σαν διαμεσολαβητή το Front End του *Mathematica*.

Το *Mathematica* αριθμεί αυτόματα κάθε εισαγόμενη στο παράθυρο εργασίας εντολή του χρήστη (Input), καθώς και την αντίστοιχη εξερχόμενη απάντηση (Output) με ένα αριθμό. Η αρίθμηση αυτή είναι συνεχής, και αρχίζει από την αρχή σε κάθε επανεκκίνηση του *Mathematica*.

In[n]	Εντολή (Input) αριθμός n.
Out[n]	Απάντηση (Output) αριθμός n.

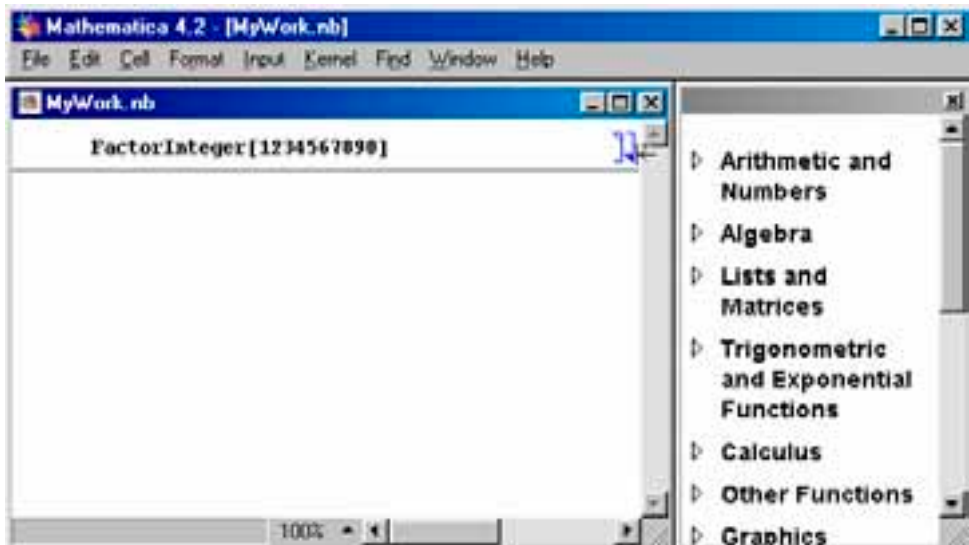
Αυτό σημαίνει ότι το πρόθεμα In [25], το οποίο τοποθετείται αυτόματα σε μια εντολή, αφενός δείχνει τη σειρά της εντολής, σε σχέση με τις υπόλοιπες, και αφετέρου σχηματίζει ζεύγος με το πρόθεμα Out [25], που αφορά την απάντηση του προγράμματος *Mathematica* στην εντολή In [25]. Με τον τρόπο αυτό ο κάθε χρήστης είναι σε θέση να ομαδοποιεί εντολές και απαντήσεις, χωρίς κανένα ιδιαίτερο πρόβλημα.

Καθώς ο χρήστης πληκτρολογεί διάφορες εντολές στο παράθυρο εργασίας, είναι προφανές ότι το παράθυρο αυτό γεμίζει, οπότε οι πρώτες εντολές χάνονται προς τα πάνω. Μπορεί κανείς να κινηθεί στο παράθυρο εργασίας, χρησιμοποιώντας το ποντίκι ή τα βελάκια του πληκτρολογίου, όπως ακριβώς κινείται σε ένα παράθυρο κάποιου επεξεργαστή κειμένου.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο δείκτης του ποντικιού αλλάζει μορφή, και γίνεται ένα μικρό, οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα, όταν βρεθεί μεταξύ δύο εντολών. Αν στο σημείο εκείνο κάνουμε ένα κλικ με το αριστερό πλήκτρο του ποντικιού, μπορούμε να παρεμβάλλουμε μια οποιαδήποτε άλλη εντολή. Πρέπει όμως να τονίσουμε το εξής. Ας υποθέσουμε ότι η τελευταία εντολή που έχουμε

πληκτρολογήσει έχει αριθμό 34 (In[34]). Κινούμαστε προς τα πάνω, και ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε μετά την απάντηση αριθμός 12 (Out[12]). Αν στο σημείο αυτό πληκτρολογήσουμε μια νέα εντολή, τότε ο αριθμός της εντολής αυτής θα είναι 35, και όχι 13. Δηλαδή το *Mathematica* αριθμεί τις εντολές με βάση το χρόνο πληκτρολόγησής τους, και όχι με τη σειρά εμφάνισής τους στο παράθυρο εργασίας.

Το *Mathematica* τοποθετεί κάθε εντολή, την οποία πληκτρολογεί ο χρήστης στο παράθυρο εργασίας, σε ένα ξεχωριστό κελί (cell). Στην Εικόνα 8, βλέπουμε ότι στο δεξιό άκρο του παραθύρου εργασίας, ακριβώς απέναντι από την εντολή «FactorInteger[1234567890]», υπάρχει μια αγκύλη που περικλείει την εντολή αυτή. Η αγκύλη αυτή συμβολίζει το κελί μέσα στο οποίο τοποθετήθηκε η εντολή FactorInteger. Μπορούμε, ακόμη, να παρατηρήσουμε ότι και η απάντηση που έδωσε το *Mathematica* περικλείεται σε ένα άλλο κελί. Τέλος, στην Εικόνα 8, βλέπουμε ότι λίγο δεξιότερα από τις δύο αυτές αγκύλες υπάρχει μια μεγαλύτερη, η οποία περικλείει τις δύο μικρότερες. Αυτό δείχνει ότι το *Mathematica* τοποθετεί κάθε ερώτηση του χρήστη, μαζί με την αντίστοιχη απάντηση σε ένα μεγαλύτερο κελί. Με τον τρόπο αυτό το πρόγραμμα ομαδοποιεί κάθε ερώτηση με την αντίστοιχη απάντηση.



Εικόνα 13. Το σύστημα κελιών του *Mathematica*.

Αν μεταφέρουμε το δείκτη του ποντικιού στην αγκύλη που συμβολίζει το μεγαλύτερο κελί, θα παρατηρήσουμε ότι ο δείκτης αλλάζει μορφή. Στο σημείο

αυτό, κάνοντας διπλό κλικ με το αριστερό πλήκτρο του ποντικιού, θα διαπιστώσουμε ότι η μεγάλη αγκύλη μεταβάλλεται, ενώ ταυτόχρονα η απάντηση (Output) που έδωσε το *Mathematica* εξαφανίζεται. Επομένως θα φαίνεται μόνον η ερώτηση του χρήστη. Στην Εικόνα 13 φαίνεται η αλλαγή στη μορφή του δείκτη του ποντικιού, καθώς και η νέα μορφή της μεγάλης αγκύλης. Αν, τώρα, κάνουμε πάλι διπλό κλικ πάνω στη μεγάλη αγκύλη, αυτή θα ανοίξει και θα αποκαλύψει την απάντηση, δηλαδή θα έχουμε την Εικόνα 8.

Όλα τα παραδείγματα που ακολουθούν έχουν σαν στόχο την εξάσκηση, και τελικά την εκμάθηση του προγράμματος *Mathematica*. Γι' αυτό οι αριθμοί που χρησιμοποιούνται είναι μικροί για δύο λόγους. Αφενός οι ίδιες πράξεις μπορούν να γίνουν με οποιουσδήποτε αριθμούς, αφετέρου τα αποτελέσματα πράξεων με μικρούς αριθμούς ελέγχονται εύκολα, και έτσι ο χρήστης είναι βέβαιος για τις απαντήσεις του *Mathematica*, οπότε με τον καιρό αποκτά την ευχέρεια που χρειάζεται.

Τα παραδείγματα είναι διαρθρωμένα σε μαθήματα, και φυσικά περιέχουν ερωτήσεις προς το *Mathematica*, μαζί με τις αντίστοιχες απαντήσεις. Συχνά, όμως, παρεμβάλλονται σχόλια και παρατηρήσεις, τα οποία διακόπτουν τη ροή των ερωτήσεων, και συμβάλλουν σημαντικά στην εκμάθηση του *Mathematica*. Για το λόγο αυτό, ο χρήστης θα πρέπει να παρακολουθεί τους αριθμούς ερωτήσεων και απαντήσεων του προγράμματος, ώστε να γνωρίζει πάντοτε την εξέλιξη του παραδείγματος.

Τέλος, υπάρχουν παραδείγματα τα οποία έχουν σαν στόχο τη μύηση σε κάποιες από τις συναρτήσεις του *Mathematica*, και το χειρισμό τους, και άλλα τα οποία επιλύουν ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Σε κάθε περίπτωση, ο στόχος είναι η εκμάθηση του προγράμματος.

1.4. Ασκήσεις

1.4.1. Καλέστε το πρόγραμμα *Mathematica*, και δημιουργήστε ένα αρχείο με όνομα MyFirstFile. Στο αρχείο αυτό πληκτρολογήστε την εντολή

$$\text{Plot}[x^2-3x+2, \{x, 0, 3\}],$$

όπως ακριβώς εμφανίζεται. Τοποθετείστε τον κέρσορα πάνω στη λέξη Plot, και πατήστε το πλήκτρο F1. Στον πίνακα βοήθειας που θα εμφανιστεί μελετήστε τη συνάρτηση Plot. Κλείστε τον πίνακα βοήθειας, πατώντας το πλήκτρο Σ, και

εκτελέστε την παραπάνω εντολή. Στο σημείο αυτό αποθηκεύστε το αρχείο MyFirstFile, και κλείστε το πρόγραμμα *Mathematica*.

1.4.2. Ενεργοποιήστε το πρόγραμμα *Mathematica*, και καλέστε το αρχείο MyFirstFile, το οποίο δημιουργήσατε στην προηγούμενη άσκηση. Προσθέστε και εκτελέστε στο αρχείο αυτό την εντολή

$$A = \{\{2, 3, 5\}, \{-2, 8, -11\}, \{5, 17, -23\}\},$$

και στη συνέχεια την εντολή

$$\text{MatrixForm}[A]$$

Παρατηρείστε ότι ο A είναι ένας 3×3 πίνακας, και η εντολή

$$\text{Det}[A]$$

Μας δίνει την ορίζουσα του πίνακα αυτού.

1.4.3. Ενεργοποιήστε το πρόγραμμα *Mathematica*, και καλέστε την παλέτα BasicInput. Κάντε ένα κλικ πάνω στο εικονίδιο του ορισμένου ολοκληρώματος, οπότε θα εμφανιστεί στο παράθυρο εργασίας. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης

$$f(x) = \eta \mu^2 x - 2 \sigma \nu x$$

από 0 έως $\frac{\pi}{2}$. (Ημίτονο \rightarrow Sin, Συνημίτονο \rightarrow Cos)

1.4.4. Χρησιμοποιήστε το σύστημα βοήθειας της *Mathematica*, για να βρείτε όλες τις συναρτήσεις, οι οποίες αρχίζουν με τα γράμματα El. Ανάμεσα σε αυτές είναι και η συνάρτηση Eliminate. Μάθετε περισσότερα για τη συνάρτηση αυτή, και προσπαθήστε να τη χρησιμοποιήσετε στο σύστημα

$$x^2 + y^2 + z = 3 \quad \text{και} \quad x \cdot \sigma \nu y = 7,$$

για να απαλείψετε τη μεταβλητή y .

1.4.5. Χρησιμοποιήστε το σύστημα βοήθειας της *Mathematica*, για να βρείτε

- (i) Όλες τις συναρτήσεις των οποίων το όνομα αρχίζει με το γράμμα O.
- (ii) Όλες τις συναρτήσεις των οποίων το όνομα περιέχει το όνομα List.
- (iii) Όλες τις συναρτήσεις των οποίων το όνομα τελειώνει με το γράμμα Q.

1.4.6. Στο παράθυρο εργασίας του προγράμματος *Mathematica* πληκτρολογήστε την παρακάτω εντολή

$$\text{Dt}[\text{Sin}[2x + a], \{x, 2\}],$$

η οποία επιστρέφει τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης $\eta\mu(2x + a)$ ως προς x . Επιλέξτε το κελί στο οποίο βρίσκεται η εντολή αυτή, και κάνετε ένα κλικ στην επιλογή `TraditionalForm`, ακολουθώντας τη διαδρομή

Μενού `Cell` → `Convert To` → `TraditionalForm`.

Παρατηρείστε την αλλαγή στην εμφάνιση της εντολής στο παράθυρο εργασίας.

1.4.7. Χρησιμοποιώντας το σύστημα βοήθειας της *Mathematica* μάθετε τη σύνταξη των συναρτήσεων `Sqrt` και `Integrate`. Στη συνέχεια πληκτρολογήστε στο παράθυρο εργασίας τις παρακάτω εντολές

$$(α) \quad \sqrt{\frac{a}{3} + \sqrt{\frac{b}{2} + \sqrt{c}}} \qquad (β) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} dx$$

χρησιμοποιώντας πρώτα το πληκτρολόγιο, και στη συνέχεια κάποια κατάλληλη παλέτα.

1.4.8. Από το μενού `Help` επιλέξτε *Mathematica Book...* Αυτό θα ανοίξει το παράθυρο του `Help Browser`. Στη θυρίδα `Go To` πληκτρολογήστε 1.4.5. Θα μεταφερθείτε στην παράγραφο 1.4.5 του ηλεκτρονικού βιβλίου της *Mathematica*. Μελετήστε την παράγραφο αυτή. Στη συνέχεια μετατρέψτε το γινόμενο $\eta\mu(3x) \cdot \sigma\upsilon\nu(5x)$ σε ισοδύναμη παράσταση, η οποία δεν θα περιέχει πολλαπλάσια του τόξου x .

1.4.9. Χρησιμοποιώντας τον `Help Browser` να βρείτε τη συνάρτηση `Expand`, και να μάθετε τον τρόπο με τον οποίο συντάσσεται. Στη συνέχεια να χρησιμοποιήσετε τη συνάρτηση αυτή για να βρείτε το ανάπτυγμα των παραστάσεων

$$(α) \quad (a + b)^{10} \qquad (β) \quad (\eta\mu(x) - \sigma\upsilon\nu(x))^8$$