Ευάγγελος Ψωμόπουλος

Γραμμική Άλγεβρα

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Πρόλογος

Η χρησιμότητα της Γραμμικής Άλγεβρας είναι σχεδόν αυταπόδεικτη. Αρκεί μια ματιά στο πρόγραμμα σπουδών, σχεδόν κάθε πανεπιστημιακού τμήματος θετικών επιστημών, για να διαπιστώσει κανείς την παρουσία της. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το μάθημα αυτό καλείται να βοηθήσει πολλούς κλάδους επιστημών, ώστε να γίνουν περισσότερο κατανοητοί, και ευκολότερα διαχειρίσιμοι.

Σε σχετικά σύντομο χρονικό διάστημα η Γραμμική Άλγεβρα έγινε όχι μόνον απαραίτητη, αλλά και χρήσιμη, και πάνω από όλα εφαρμόσιμη. Όλο και περισσότεροι, από διάφορες επιστήμες όπως Φυσική, Μηχανική, Στατιστική, Πληροφορική, Οικονομικά, αλλά και Βιολογία, χρησιμοποιούν τεχνικές και μεθόδους από τη Γραμμική Άλγεβρα για να επιλύσουν προβλήματα που τους απασχολούν. Οι ανάγκες όμως της κάθε επιστήμης δεν είναι ίδιες. Άλλες φορές, όπως για παράδειγμα σε ένα Τμήμα Μαθηματικών, είναι απαραίτητη μια αυστηρά μαθηματική προσέγγιση, και άλλες φορές χρειάζεται μια περισσότερο απλή προσέγγιση, χωρίς όμως να χάνεται ο στόχος της Γραμμικής Άλγεβρας.

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται κυρίως στους φοιτητές του Τμήματος Πληροφορικής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, και περιέχει τη διδακτέα ύλη του εξαμηνιαίου μαθήματος «Γραμμική Άλγεβρα». Έγινε προσπάθεια ώστε η παρουσίαση να είναι απλή και κατανοητή, κυρίως μέσα από παραδείγματα, και λιγότερο μέσα από αποδείξεις θεωρημάτων. Αυτό δεν σημαίνει ότι οι αποδείξεις απουσιάζουν. Υπάρχουν για όλα τα θεωρήματα και καλούν τον κάθε ενδιαφερόμενο για μια περισσότερο αυστηρή μελέτη. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφέρουμε ότι οι πολλές αποδείξεις εισάγουν ταυτόχρονα και μια μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων, γεγονός που τις κάνει απαραίτητες. Έτσι, η παρουσίασή τους είναι κατά το δυνατόν απλή, ώστε να γίνεται ευκολότερα κατανοητή.

Το βιβλίο «Γραμμική Άλγεβρα» περιέχει επτά κεφάλαια. Στο πρώτο εισάγεται η έννοια του πίνακα, μια θεμελιώδης έννοια για πολλούς κλάδους, μέσα από την επίλυση γραμμικών συστημάτων. Στο δεύτερο κεφάλαιο ορίζεται η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα, και ολοκληρώνεται η μελέτη των γραμμικών συστημάτων. Παράλληλα, ορίζεται ο αντιστρέψιμος πίνακας, και αναπτύσσονται μέθοδοι εύρεσης του αντίστροφου ενός τέτοιου πίνακα. Στο τρίτο κεφάλαιο δίνεται για πρώτη φορά η έννοια του διανυσματικού χώρου, και μελετώνται απλές ιδιότητες που τους αφορούν. Οι διανυσματικοί χώροι με εσωτερικό γινόμενο εισάγονται στο επόμενο κεφάλαιο, ενώ στο πέμπτο κεφάλαιο αντιμετωπίζεται το πρόβλημα της αλλαγής βάσης σε ένα διανυσματικό χώρο. Στα δύο τελευταία κεφάλαια, όπου χρησιμοποιούνται όλα όσα προαναφέρονται, μελετώνται οι γραμμικοί μετασχηματισμοί, σε συνδυασμό με τους πίνακες. Έτσι, αντιμετωπίζεται εύκολα, και σχεδόν με φυσικό τρόπο, το πρόβλημα της διαγωνιοποίησης ενός πίνακα. Η θεωρία εμπλουτίζεται με πολλά παραδείγματα, τα οποία αποσκοπούν στην καλύτερη κατανόηση των εννοιών της Γραμμικής Άλγεβρας. Κάθε παράγραφος συνοδεύεται από ασκήσεις, πολλές από τις οποίες είναι απλή εφαρμογή της θεωρίας, ενώ άλλες την επεκτείνουν.

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχει μια συλλογή ασκήσεων, οι οποίες στηρίζονται σε όλα τα θέματα που αναπτύσσονται στη θεωρία. Για κάθε μια από αυτές δίνεται αναλυτική υπόδειξη.

Θεσσαλονίκη – Δεκέμβριος 2003 Ευάγγελος Ψωμόπουλος

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1
Γραμμικά Συστήματα και Πίνακες

Οι πίνακες είναι μια χρήσιμη μαθηματική οντότητα, η οποία εμφανίζεται πολύ συχνά, και όχι μόνο σε μαθήματα Γραμμικής Άλγεβρας. Στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε μια πρώτη επαφή με την έννοια αυτή, χρησιμοποιώντας τα γραμμικά συστήματα.

1.1 Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Είναι γνωστό ότι μια ευθεία του επιπέδου μπορεί να παρασταθεί αλγεβρικά με τη μορφή

$$a_1x + a_2y = b.$$

Μια τέτοια εξίσωση λέγεται γραμμική ως προς τις μεταβλητές x και y. Γενικότερα, μια εξίσωση λέγεται ***γραμμική*** ως προς τις μεταβλητές x_1, x_2, …, x_n, όταν είναι της μορφής

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \tag{1.1}$$

όπου a_1, a_2, …, a_n είναι οι συντελεστές, και b ο σταθερός όρος της εξίσωσης. Συνήθως οι a_1, a_2, …, a_n, b είναι πραγματικοί αριθμοί, χωρίς να απαγορεύται να είναι ακέραιοι, ρητοί, μιγαδικοί, ή κάτι άλλο. Για παράδειγμα, οι εξισώσεις

$$x = 4y + 7,\ x - 3y + 6z = 9, \text{ και } x_1 + x_2 - \tfrac{3}{4}x_3 + x_4 = 10,$$

είναι γραμμικές, ενώ οι εξισώσεις

$$x^2 = 4y + 7,\ x - 3\sqrt{y} + 6z = 9, \text{ και } x_1 + x_2x_3 - \tfrac{3}{4}x_3 + x_4 = 10,$$

δεν είναι γραμμικές.

Λύση της γραμμικής εξίσωσης (1.1) λέγεται μια ακολουθία n αριθμών $t_1, t_2, \ldots$, t_n, έτσι ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση, δηλαδή να ισχύει

$$a_1 t_1 + a_2 t_2 + \cdots + a_n t_n = b.$$

Ένας πεπερασμένος αριθμός γραμμικών εξισώσεων λέγεται ***σύστημα γραμμικών εξισώσεων*** ή ***γραμμικό σύστημα***. Για παράδειγμα, ένα γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n μεταβλητές θα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1.2}$$

Λύση του συστήματος (1.2) λέγεται μια ακολουθία n αριθμών t_1, t_2, …, t_n, η οποία ικανοποιεί ***όλες*** τις εξισώσεις του συστήματος.

Δεν είναι βέβαιο ότι ένα γραμμικό σύστημα έχει λύση. Για παράδειγμα, το σύστημα

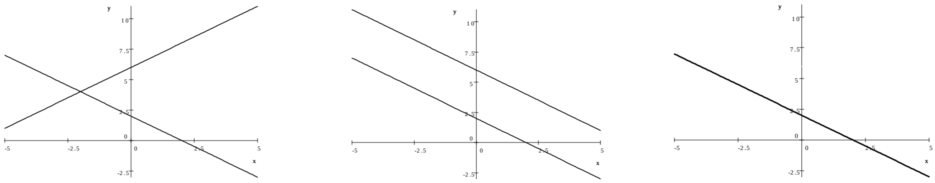
$$\begin{aligned} x - 3y &= 6 \\ 2x - 6y &= 8 \end{aligned}$$

δεν έχει λύση, διότι η δεύτερη εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή $x - 3y = 4$, και προφανώς έρχεται σε αντίθεση με την πρώτη εξίσωση του συστήματος.

Μπορούμε να έχουμε μια εποπτική εικόνα της λύσης ενός γραμμικού συστήματος, αν χρησιμοποιήσουμε σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Όπως γνωρίζουμε μια εξίσωση της μορφής $ax + by = c$ παριστά μια ευθεία στο επίπεδο. Έτσι, το σύστημα

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y &= a_3 \\ b_1x + b_2y &= b_3 \end{aligned}$$

είναι ουσιαστικά δύο ευθείες στο επίπεδο. Οι ευθείες αυτές μπορεί να τέμνονται, οπότε το σημείο τομής είναι η μοναδική λύση του συστήματος, μπορεί να είναι παράλληλες, οπότε το σύστημα δεν έχει λύση, ή μπορεί να ταυτίζονται, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.



Γεωμετρική ερμηνεία επίλυσης γραμμικού συστήματος.

Όπως αναφέραμε ένα γραμμικό σύστημα μπορεί να μην έχει λύση, οπότε το λέμε ***ασύμβατο***. Ένα συμβατό γραμμικό σύστημα μπορεί να έχει περισσότερες από μία λύσεις, όπως στην περίπτωση δύο ευθειών που ταυτίζονται.

Αν στο σύστημα (1.2) θεωρήσουμε μόνον τους συντελεστές, και αγνοήσουμε τους αγνώστους, θα πάρουμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

ο οποίος λέγεται ***πίνακας του συστήματος***. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας αυτός έχει m γραμμές, όσες και οι εξισώσεις του συστήματος, και n στήλες, όσοι και οι άγνωστοι του συστήματος. Αν συμπεριλάβουμε και τους σταθερούς όρους του συστήματος, τότε θα έχουμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

ο οποίος λέγεται ***επαυξημένος πίνακας του συστήματος*** (1.2). Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - x_4 &= 0 \\ 2x_2 - 3x_3 - x_4 &= 12 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= -2 \end{aligned}$$

τότε ο πίνακας του συστήματος θα είναι

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

ενώ ο επαυξημένος πίνακας θα είναι

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 12 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Φυσικά, το ζητούμενο είναι να βρούμε τη λύση του συστήματος που μας ενδιαφέρει. Η πλέον γνωστή μέθοδος επίλυσης του γραμμικού συστήματος (1.2) είναι η αντικατάστασή του με ένα άλλο γραμμικό σύστημα, το οποίο έχει τις ίδιες λύσεις με το αρχικό, αλλά μπορεί να επιλυθεί ευκολότερα. Το νέο αυτό σύστημα προκύπτει από το αρχικό με κάποιες από τις παρακάτω πράξεις.

1. Πολλαπλασιασμός μιας εξίσωσης με ένα μη μηδενικό αριθμό.
2. Εναλλαγή δύο εξισώσεων.
3. Πρόσθεση σε μια εξίσωση του πολλαπλασίου μιας άλλης εξίσωσης.

Οι πράξεις αυτές είναι γνωστές σαν ***στοιχειώδεις πράξεις***, και είναι προφανές ότι δεν μεταβάλλουν τις λύσεις του γραμμικού συστήματος (1.2). Ανάλογες πράξεις μπορούν να γίνουν στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του συστήματος, εφόσον κάθε γραμμή του πίνακα αυτού παριστά ουσιαστικά μια εξίσωση του συστήματος. Έτσι, οι στοιχειώδεις πράξεις στους πίνακες είναι:

1. Πολλαπλασιασμός μιας γραμμής του πίνακα με ένα μη μηδενικό αριθμό.
2. Εναλλαγή δύο γραμμών του πίνακα.
3. Πρόσθεση σε μια γραμμή του πίνακα του πολλαπλασίου μιας άλλης γραμμής.

Χρησιμοποιώντας τις πράξεις αυτές, μπορούμε να μετασχηματίσουμε ένα γραμμικό σύστημα σε ένα άλλο ισοδύναμο με αυτό. Δηλαδή, σε ένα άλλο γραμμικό σύστημα που έχει τις ίδιες λύσεις με το αρχικό. Στο παράδειγμα που ακολουθεί φαίνεται η όλη διαδικασία μετασχηματισμού του συστήματος, και ταυτόχρονα φαίνεται η αντίστοιχη αλλαγή του επαυξημένου πίνακα του συστήματος.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.1.1 Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Στη συνέχεια εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις.

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί -1 και προσθέτουμε το αποτέλεσμα στη δεύτερη εξίσωση

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή του πίνακα επί -1 και προσθέτουμε το αποτέλεσμα στη δεύτερη γραμμή

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί -2 και προσθέτουμε το αποτέλεσμα στην τρίτη εξίσωση

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_2 + 2x_3 &= -4 \\ -5x_2 - 3x_3 &= -7 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή του πίνακα επί -2 και προσθέτουμε το αποτέλεσμα στην τρίτη γραμμή

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -5 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη εξίσωση επί -5 και προσθέτουμε το αποτέλεσμα στην τρίτη εξίσωση

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_2 + 2x_3 &= -4 \\ -13x_3 &= 13 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη γραμμή του πίνακα επί -5 και προσθέτουμε το αποτέλεσμα στην τρίτη γραμμή

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -13 & 13 \end{pmatrix}$$

Το σύστημα στο οποίο καταλήξαμε είναι ισοδύμανο με το αρχικό, αλλά είναι ευκολότερο να επιλυθεί. Από την τρίτη εξίσωση προκύπτει $x_3 = -1$, οπότε με αντικατάσταση της τιμής αυτής στη δεύτερη εξίσωση θα πάρουμε $x_2 = 2$. Τέλος, από την πρώτη εξίσωση, γνωρίζοντας τις τιμές των x_3 και x_2, μπορούμε να βρούμε την τιμή του x_1, οπότε θα είναι $x_1 = 1$. Μπορεί εύκολα να επαληθευθεί ότι οι τιμές $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ και $x_3 = -1$, αποτελούν τη λύση του αρχικού συστήματος.

Η γεωμετρική ερμηνεία της λύσης του συστήματος αυτού είναι ότι τα τρία επίπεδα που παριστούν οι 3 διαφορετικές εξισώσεις του, διέρχονται ή τέμνονται στο σημείο $(1, 2, -1)$.▲

Στο προηγούμενο παράδειγμα, καταλήξαμε στο σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_2 + 2x_3 &= -4 \\ -13x_3 &= 13 \end{aligned}$$

από το οποίο πήραμε τη λύση του αρχικού συστήματος. Όμως, το σύστημα αυτό μπορεί να γίνει απλούστερο, ακολουθώντας μια ανάλογη διαδικασία. Για παράδειγμα, πολλαπλασιάζουμε την τρίτη εξίσωση επί $-\frac{1}{13}$, οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_2 + 2x_3 &= -4 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την τρίτη εξίσωση επί -2 και προσθέτουμε το αποτέλεσμα στη δεύτερη εξίσωση, οπότε προκύπτει

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_2 &= -2 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την τρίτη εξίσωση επί -1 και προσθέτουμε το αποτέλεσμα στην πρώτη εξίσωση, για να πάρουμε

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ -x_2 &= -2 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Τέλος, πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη εξίσωση επί 2 και προσθέτουμε το αποτέλεσμα στην πρώτη, οπότε καταλήγουμε στο σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ -x_2 &= -2 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

δηλαδή, ουσιαστικά στη λύση του συστήματος.

Εκτελώντας τις αντίστοιχες πράξεις στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -13 & 13 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

θα δούμε ότι ο τελικός επαυξημένος πίνακας θα γίνει

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

ή, αν πολλαπλασιάσουμε τη δεύτερη γραμμή επί -1,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

1.2 Ασκήσεις

Ά σ κ η σ η 1.2.1 Να επιλυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα.

$$\text{(i)} \quad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Ά σ κ η σ η 1.2.2 Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 9x_2 - x_3 + x_4 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= -2 \end{aligned}$$

Ά σ κ η σ η 1.2.3 Αν είναι γνωστό ότι η εξίσωση του επιπέδου στο χώρο $\mathbb{R}^3$ είναι της μορφής $ax + by + cz = d$, να βρεθεί το επίπεδο που ορίζουν τα σημεία $P_1(1, -1, 0)$, $P_2(-1, 2, 1)$ και $P_3(2, 1, 5)$.

Ά σ κ η σ η 1.2.4 Να βρεθεί η λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} &= 0 \\ \frac{2}{x} - \frac{2}{y} + \frac{1}{z} &= 3 \\ \frac{3}{x} - \frac{4}{y} + \frac{2}{z} &= 4 \end{aligned}$$

Ά σ κ η σ η 1.2.5 Σε μια εκλογή υπήρχαν δύο υποψήφιοι που έλαβαν ο πρώτος 52% και ο δεύτερος 48% των ψήφων. Αν ο νικητής των εκλογών έλαβε 1532 ψήφους περισσότερες από τον αντίπαλό του, να βρεθεί ο αριθμός των ψήφων που έλαβε έκαστος.

Ά σ κ η σ η 1.2.6 Ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν οι παράμετροι a, b, c ώστε το σύστημα

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= a \\ x + z &= b \\ 2x + y + 3z &= c \end{aligned}$$

να είναι συμβατό;

Ά σ κ η σ η 1.2.7 Δείξτε ότι, αν οι εξισώσεις $x_1 + kx_2 = a$ και $x_1 + \lambda x_2 = b$ έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων, τότε πρέπει να ταυτίζονται.

1.3 Μέθοδος απαλοιφής Gauss

Η μέθοδος που είδαμε στο Παράδειγμα 1.1.1 μπορεί να περιγραφεί με γενικότερο τρόπο. Ξεκινώντας με το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1.5}$$

κρατάμε την πρώτη εξίσωση, και εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις, απαλοίφουμε τον άγνωστο x_1 από τις υπόλοιπες εξισώσεις. Μετά, κρατάμε τις δύο πρώτες εξισώσεις που θα προκύψουν, και εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις, απαλοίφουμε τον άγνωστο x_2 από τις υπόλοιπες εξισώσεις. Στη συνέχεια, κρατάμε τις τρεις πρώτες εξισώσεις που θα προκύψουν, και εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις, απαλλοίφουμε τον άγνωστο x_3 από τις υπόλοιπες εξισώσεις. Συνεχίζοντας τη διαδικασία αυτή θα καταλήξουμε σε ένα ισοδύναμο με αρχικό σύστημα, το οποίο θα είναι ευκολότερο να επιλυθεί.

Είναι προφανές ότι μια ανάλογη διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και στον επαυξημένο πίνακα του γραμμικού συστήματος. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.3.1 Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Στη συνέχεια εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις.

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί -2 και προσθέτουμε το αποτέλεσμα στη δεύτερη εξίσωση

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 5x_2 - 3x_3 &= -3 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή του πίνακα επί -2 και προσθέτουμε το αποτέλεσμα στη δεύτερη γραμμή

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί 3 και προσθέτουμε το αποτέλεσμα στην τρίτη εξίσωση

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή του πίνακα επί 3 και προσθέτουμε το αποτέλεσμα στην τρίτη γραμμή

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 5x_2 - 3x_3 &= -3 \\ -5x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη εξίσωση επί 1 και προσθέτουμε το αποτέλεσμα στην τρίτη εξίσωση

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη γραμμή του πίνακα επί 1 και προσθέτουμε το αποτέλεσμα στην τρίτη γραμμή

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_2 + 2x_3 &= -4 \\ -2x_3 &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Το σύστημα στο οποίο καταλήξαμε είναι ισοδύμανο με το αρχικό, αλλά είναι ευκολότερο να επιλυθεί. Από την τρίτη εξίσωση προκύπτει $x_3 = 1$, οπότε με αντικατάσταση της τιμής αυτής στη δεύτερη εξίσωση θα πάρουμε $x_2 = 0$. Τέλος, από την πρώτη εξίσωση, γνωρίζοντας τις τιμές των x_3 και x_2, μπορούμε να βρούμε την τιμή του x_1, οπότε θα είναι $x_1 = 1$. Μπορεί εύκολα να επαληθευθεί ότι οι τιμές $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ και $x_3 = -1$, αποτελούν τη λύση του αρχικού συστήματος.▲

Φυσικά, μπορούμε να συνεχίσουμε τις πράξεις στον επαυξημένο πίνακα που βρήκαμε

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

οπότε θα πάρουμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

πολλαπλασιάζοντας την τρίτη γραμμή επί $-\frac{1}{2}$. Τώρα, πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή επί 3 και προσθέτουμε στην δεύτερη.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή επί -1 και προσθέτουμε το αποτέλεσμα στην πρώτη γραμμή.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη γραμμή επί $-\frac{1}{5}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Τέλος, πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη γραμμή επί -2, και προσθέτουμε στην πρώτη γραμμή.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Εφόσον κάθε γραμμή του πίνακα παριστά, όπως γνωρίζουμε, μια εξίσωση, έχουμε ουσιαστικά το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 1 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

του οποίου η λύση προκύπτει αμέσως. Είναι προφανές ότι το γεγονός αυτό οφείλεται στην ιδιαίτερη μορφή του επαυξημένου πίνακα στην οποία καταλήξαμε. Η μορφή αυτή λέγεται αυστηρά κλιμακωτή μορφή.

Ο ρ ι σ μ ό ς 1.3.2 Θα λέμε ότι ένας πίνακας είναι σε *αυστηρά κλιμακωτή μορφή* όταν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες.

(i) Όλες οι μηδενικές γραμμές βρίσκονται στο τέλος του πίνακα.

(ii) Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι 1. Το στοιχείο αυτό λέγεται *οδηγός γραμμής*.

(iii) Ο οδηγός κάθε γραμμής βρίσκεται δεξιότερα από τον οδηγό κάθε προηγούμενης γραμμής.

(iv) Τα στοιχεία μιας στήλης που περιέχει οδηγό γραμμής είναι όλα μηδέν, εκτός από τον οδηγό γραμμής.

Για παράδειγμα, οι παρακάτω πίνακες σε αυστηρά κλιμακωτή μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ενώ οι πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

δεν είναι σε αυστηρά κλιμακωτή μορφή. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι στους πίνακες της δεύτερης κατηγορίας κάθε στοιχείο κάτω από τον κάθε οδηγό γραμμής είναι μηδέν. Η μορφή αυτή του πίνακα λέγεται ***κλιμακωτή μορφή***, και η διαφορά με την αυστηρά κλιμακωτή μορφή είναι εμφανής.

Από τα παραδείγματα επίλυσης γραμμικών συστημάτων που είδαμε, προκύπτει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος, αντί του ίδιου του γραμμικού συστήματος. Μάλιστα, πολλές φορές προτιμάται ο επαυξημένος πίνακας, γιατί είναι ευκολότερα. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.3.3 Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

και τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του πίνακα αυτού, με στόχο να τον φέρουμε σε αυστηρά κλιμακωτή μορφή. Σαν πρώτο βήμα εναλλάσσουμε την πρώτη και την τρίτη γραμμή.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή επί -1 και μετά επί -2, και προσθέτουμε το αποτέλεσμα στη δεύτερη και τρίτη γραμμή, αντίστοιχα.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη γραμμή επί $-\frac{1}{3}$, οπότε θα πάρουμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη γραμμή του πίνακα επί 3, και προσθέτουμε στην τρίτη γραμμή.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Ο πίνακας αυτός είναι σε κλιμακωτή μορφή, αλλά όχι σε αυστηρά κλιμακωτή μορφή. Χρησιμοποιώντας αυτόν τον πίνακα, μπορούμε να βρούμε τη λύση του συστήματος. Πράγματι, ο πίνακας αυτός αντιπροσωπεύει το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 4 \\ x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

και είναι, όπως γνωρίζουμε, ισοδύναμο με το αρχικό. Για την επίλυσή του θεωρούμε τον άγνωστο x_3 σαν παράμετρο, οπότε θα έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 + 2x_3 \\ x_2 &= 1 + x_3 \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι η λύση του συστήματος είναι $x_1 = 2$ και $x_2 = 1 + x_3$.

Για να βρούμε την αυστηρά κλιμακωτή μορφή του πίνακα (1.6), εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις αρχίζοντας από κάτω προς τα πάνω. Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη γραμμή επί -2, και προσθέτουμε το αποτέλεσμα στην πρώτη γραμμή.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας αυτός είναι σε κλιμακωτή μορφή, και αντιστοιχεί στο γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Φυσικά, η λύση αυτή δεν διαφέρει από τη λύση που βρήκαμε προηγουμένως.▲

1.4 Ασκήσεις

Ά σ κ η σ η 1.4.1 Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6 \end{aligned}$$

Ά σ κ η σ η 1.4.2 Να επιλυθούν τα παρακάτω συστήματα.

$$\text{(i)} \quad \begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{aligned} 4x - 8y &= 12 \\ 3x - 6y &= 9 \\ -2x + 4y &= -6 \end{aligned}$$

Ά σ κ η σ η 1.4.3 Να επιλυθούν τα παρακάτω συστήματα.

$$\text{(i)} \quad \begin{aligned} x - y + 2z - t &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2t &= -2 \\ -x + 2y - 4z + t &= 1 \\ 3x - 3t &= -3 \end{aligned} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{aligned} 3x + 2y - z &= -52 \\ 5x + 3y + 2z &= 0 \\ 3x + y + 3z &= 11 \\ 11x + 7y &= -30 \end{aligned}$$

Ά σ κ η σ η 1.4.4 Αν a, b, και c είναι πραγματικοί αριθμοί, να επιλυθούν τα παρακάτω συστήματα.

$$\text{(i)} \quad \begin{aligned} 2x + y &= a \\ 3x + 6y &= b \end{aligned} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{aligned} x + y + z &= a \\ 2x + 2z &= b \\ 3y + 3z &= c \end{aligned}$$

Ά σ κ η σ η 1.4.5 Να διερευνυθεί και να επιλυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$$

1.5 Πράξεις πινάκων

Στο τελευταίο παράδειγμα, ενώ θέλαμε την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος, ασχοληθήκαμε ουσιαστικά με ένα πίνακα. Αυτό δείχνει ότι οι πίνακες παίζουν ένα σημαντικό ρόλο, για αυτό θα τους μελετήσουμε λίγο περισσότερο.

Όπως είδαμε ένας πίνακας A με m γραμμές και n στήλες είναι της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Τα στοιχεία a_{ij} λέγονται στοιχεία του πίνακα A, και συνήθως είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί. Μπορεί όμως να είναι και στοιχεία από ένα οποιοδήποτε άλλο σύνολο. Οι δείκτες του στοιχείου a_{ij} δείχνουν, ο πρώτος τη γραμμή στην οποία βρίσκεται το στοιχείο, ενώ ο δεύτερος τη στήλη στην οποία ανήκει το στοιχείο αυτό. Δηλαδή, το στοιχείο a_{32} βρίσκεται στη διασταύρωση της τρίτης γραμμής, και της δεύτερης στήλης. Για να δηλώσουμε το μέγεθος ενός πίνακα, δηλαδή το πλήθος των γραμμών και στηλών που έχει, λέμε ότι είναι ένας $m \times n$ πίνακας, οπότε ξέρουμε ότι έχει m γραμμές και n στήλες.

Το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το σύνολο των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Γενικότερα, ο συμβολισμός $M_{m\times n}(F)$ χρησιμοποιείται για το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το σύνολο F. Αν ένας πίνακας έχει τόσες γραμμές όσες και στήλες, δηλαδή είναι τύπου $n \times n$, τότε χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $M_n(F)$, για το σύνολο όλων των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το σύνολο F.

Πολλές φορές, για λόγους συντομίας, αντί του συμβολισμού (1.7) χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $A = (a_{ij})$ ή $A = (a_{ij})_{m\times n}$, αν θέλουμε να τονίσουμε ότι ο πίνακας είναι $m \times n$.

Δύο πίνακες $A = (a_{ij})_{m\times n}$ και $B = (b_{ij})_{r\times s}$, τύπου $m\times n$ και $r\times s$ αντίστοιχα, είναι ***ίσοι*** όταν $m = r$, $n = s$, και $a_{ij} = b_{ij}$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$, και κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$. Δηλαδή, οι πίνακες A και B είναι ίσοι όταν είναι του αυτού τύπου, και τα αντίστοιχα στοιχεία τους ταυτίζονται.

Αν σε ένα $m \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$ συμβεί να ισχύει $m = n$, τότε ο πίνακας A έχει τόσες γραμμές όσες και στήλες, και λέγεται ***τετραγωνικός*** $n \times n$ πίνακας. Στον τετραγωνικό αυτό πίνακα τα στοιχεία a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} αποτελούν την ***κύρια διαγώνιο*** του πίνακα αυτού.

Συχνά χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε πίνακες γραμμές

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix},$$

δηλαδή πίνακες τύπου $1 \times n$, ή πίνακες στήλες

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

δηλαδή πίνακες τύπου $m \times 1$. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι στις γραμμές ο δείκτης γραμμής των στοιχείων παραμένει σταθερός, ενώ στις στήλες ο δείκτης στήλης των στοιχείων διατηρείται σταθερός.

Θεωρούμε, τώρα, τους $m \times n$ πίνακες $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ και } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Το άθροισμα $A + B$ ορίζεται να είναι ο πίνακας

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή για να προσθέσουμε δύο πίνακες ***πρέπει να είναι του αυτού τύπου***, και τότε προσθέτουμε τα αντίστοιχα στοιχεία τους. Για παράδειγμα, θα έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 12 & -6 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -3 \\ 8 & -1 & 6 \end{pmatrix},$$

ενώ το άθροισμα των πινάκων

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 9 \\ 10 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ και } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

δεν ορίζεται, εφόσον οι πίνακες δεν είναι του αυτού τύπου.

Αν λ είναι ένας αριθμός, και A ο πίνακας (1.7), τότε το γινόμενο λA ορίζεται να είναι ο πίνακας

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix},$$

δηλαδή ο πίνακας που προκύπτει από τον A, αν όλα τα στοιχεία του πολλαπλασιαστούν επί λ. Για παράδειγμα, θα έχουμε

$$3\begin{pmatrix} 2 & 8 & 9 \\ 10 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 24 & 27 \\ 30 & 9 & 15 \end{pmatrix}.$$

Ίσως θα περίμενε κανείς, ο πολλαπλασιασμός πινάκων να ορίζεται όπως και το άθροισμα. Δηλαδή να πολλαπλασιάζουμε τα αντίστοιχα στοιχεία. Όμως, κάτι τέτοιο δεν θα ήταν χρήσιμο στα περισσότερα προβλήματα. Για αυτό, ο πολλαπλασιασμός πινάκων ορίζεται με διαφορετικό τρόπο.

Καταρχήν να πούμε ότι για να οριστεί το γινόμενο AB δύο πινάκων A και B, πρέπει ο A να έχει τόσες στήλες, όσες γραμμές έχει ο B. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι έχουμε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ και } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix},$$

τύπου $m \times n$ και $n \times k$ αντίστοιχα. Τότε το γινόμενο AB είναι ένας πίνακας C, ο οποίος θα είναι τύπου $m \times k$. Δηλαδή, σχηματικά θα έχουμε

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & B & = & C \\ m \times n & & n \times k & & m \times k \end{array}$$

Το ερώτημα βέβαια είναι πως μπορούμε να βρούμε τα στοιχεία του πίνακα C. Υποθέτουμε ότι ο πίνακας αυτός έχει στοιχεία c_{ij}, δηλαδή έχουμε $C = (c_{ij})$. Το στοιχείο c_{ts}, που βρίσκεται στη διασταύρωση της t-γραμμής και s-στήλης του πίνακα C, ορίζεται να είναι το γινόμενο της t-γραμμής του πίνακα A, επί την s-στήλη του πίνακα B. Το γινόμενο γραμμής επί στήλη ορίζεται με τον παρακάτω τρόπο.

$$\begin{pmatrix} a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1s} \\ b_{2s} \\ \vdots \\ b_{ns} \end{pmatrix} = a_{t1}b_{1s} + a_{t2}b_{2s} + \cdots + a_{tn}b_{ns}.$$

Επομένως το στοιχείο c_{ts} ορίζεται να είναι

$$c_{ts} = a_{t1}b_{1s} + a_{t2}b_{2s} + \cdots + a_{tn}b_{ns} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{t\lambda}b_{\lambda s}. \tag{1.8}$$

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.5.1 Θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Επειδή ο πρώτος είναι ένας 3×2 πίνακας και ο δεύτερος είναι 2×2, το γινόμενο AB ορίζεται και είναι ένας 3×2 πίνακας. Δηλαδή θα έχουμε

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}.$$

Το στοιχείο που βρίσκεται στη διασταύρωση της δεύτερης γραμμής και πρώτης στήλης, δηλαδή στη θέση $\square_{21}$, θα βρεθεί από το γινόμενο της δεύτερης γραμμής του A επί την πρώτη στήλη του B. Άρα θα είναι

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 5.$$

Με ανάλογο τρόπο, το στοιχείο $\Box_{32}$ θα δίνεται από τη σχέση

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) = 17.$$

Με αυτό τον τρόπο βρίσκουμε το γινόμενο AB.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 2 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}.$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ενώ βρήκαμε το γινόμενο AB, το γινόμενο BA δεν μπορεί να οριστεί, εφόσον ο B δεν έχει τόσες στήλες, όσες γραμμές έχει ο A.▲

Το προηγούμενο παράδειγμα δείχνει ότι δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στο γινόμενο πινάκων. Δηλαδή, γενικά έχουμε

$$AB \neq BA.$$

Ακόμη και όταν τα γινόμενα AB και BA ορίζονται, η αντιμετάθεση πινάκων δεν ισχύει γενικά. Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},$$

τότε θα έχουμε

$$AB = \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ -26 & 24 \end{pmatrix}, \text{ ενώ } BA = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 13 & 18 \end{pmatrix}.$$

Αποδεικνύεται ότι οι πίνακες ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες.

Θ ε ώ ρ η μ α 1.5.2 Με την προϋπόθεση ότι το μέγεθος των πινάκων A, B, C είναι κατάλληλο, ώστε να ορίζονται οι πράξεις, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

(i)	$A + B = B + A$,	**(ii)**	$A + (B + C) = (A + B) + C$,
(iii)	$A(BC) = (AB)C$,	**(iv)**	$A(B + C) = AB + AC$,
(v)	$(B + C)A = BA + CA$,	**(vi)**	$A(B - C) = AB - AC$,
(vii)	$(B - C)A = BA - CA$,	**(viii)**	$\lambda(B + C) = \lambda B + \lambda C$,
(ix)	$\lambda(B - C) = \lambda B - \lambda C$,	**(x)**	$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,
(xi)	$(\lambda - \mu)A = \lambda A - \mu A$,	**(xii)**	$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$,

(xiii) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Α π ό δ ε ι ξ η. Κάθε μια από τις ιδιότητες αυτές είναι μια ισότητα μεταξύ πινάκων. Για να αποδειχθεί, θα πρέπει να δείξουμε δύο πράγματα. Πρώτα, ότι ο πίνακας του πρώτου μέλους έχει το ίδιο μέγεθος με τον πίνακα του δευτέρου μέλους. Δεύτερο, κάθε στοιχείο του πίνακα του πρώτου μέλους ταυτίζεται με το αντίστοιχο στοιχείο του πίνακα του δευτέρου μέλους.

Θα δούμε τη διαδιακασία αυτή αποδεικνύοντας την ιδιότητα (iv), και θα αφήσουμε τις υπόλοιπες σαν άσκηση.

(iv). Πρώτα θα θεωρήσουμε το μέγεθος των πινάκων, έτσι ώστε να ορίζονται οι πράξεις. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι ο πίνακας $A = (a_{ij})$ είναι τύπου $m \times n$, ο πίνακας $B = (b_{ij})$ είναι τύπου $n \times k$, και ο πίνακας $C = (c_{ij})$ είναι τύπου $n \times k$.

Με τις προϋποθέσεις αυτές, βλέπουμε ότι ο πίνακας $B + C$ είναι τύπου $n \times k$, οπότε το γινόμενο $A(B + C)$ θα είναι τύπου $m \times k$. Όσον αφορά το δεύτερο μέρος, οι πίνακες AB και AC είναι τύπου $m \times k$, οπότε και το άθροισμα $AB + AC$ θα είναι τύπου $m \times k$.

Εφόσον οι πράξεις που περιέχονται στην ισότητα αυτή ορίζονται, μπορούμε να βρούμε τον πίνακα $D = (d_{ij})$, όπου $D = B + C$. Από τον ορισμό του αθροίσματος προκύπτει ότι

$$d_{ij} = b_{ij} + c_{ij}, \text{ για κάθε } i = 1, 2, \ldots, n \text{ και } j = 1, 2, \ldots, k.$$

Θα βρούμε, τώρα, το στοιχείο του $A(B + C) = AD$, το οποίο βρίσκεται στη θέση $\square_{rs}$. Όπως γνωρίζουμε, θα δίνεται από τη σχέση (1.8), δηλαδή

$$\square_{rs} = \sum_{t=1}^{n} a_{rt} d_{ts} = \sum_{t=1}^{n} a_{rt}(b_{ts} + c_{ts}) = \sum_{t=1}^{n} a_{rt} b_{ts} + \sum_{t=1}^{n} a_{rt} c_{ts}. \tag{1.9}$$

Υποθέτουμε, τώρα, ότι είναι $P = AB$, και έστω ότι $P = (p_{ij})$. Γνωρίζουμε ότι ο πίνακας P είναι τύπου $m \times k$, και τα στοιχεία του δίνονται από τη σχέση (1.8), δηλαδή

$$p_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} b_{tj}, \text{ για κάθε } i = 1, 2, \ldots, m \text{ και } j = 1, 2, \ldots, k.$$

Με ανάλογο τρόπο, υποθέτουμε ότι είναι $Q = AC$, και έστω ότι $Q = (q_{ij})$, όπου

$$q_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} c_{tj}, \text{ για κάθε } i = 1, 2, \ldots, m \text{ και } j = 1, 2, \ldots, k.$$

Θα υπολογίσουμε, τώρα, το στοιχείο του $AB+AC$, το οποίο βρίσκεται στη θέση $\square_{rs}$. Από τον ορισμό του αθροίσματος πινάκων προκύπτει

$$\square_{rs} = p_{rs} + q_{rs} = \sum_{t=1}^{n} a_{rt}b_{ts} + \sum_{t=1}^{n} a_{rt}c_{ts}. \tag{1.10}$$

Από τις σχέσεις (1.9) και (1.10) προκύπτει ότι οι πίνακες των δύο μελών της ισότητας (iv) έχουν τα αντίστοιχα στοιχεία ίσα, άρα θα ισχύει η ιδιότητα αυτή. ■

Ένας πίνακας, οποιουδήποτε τύπου, του οποίου όλα τα στοιχεία είναι μηδέν λέγεται ***μηδενικός πίνακας***, και συμβολίζεται με O ή $O_{m\times n}$, αν θέλουμε να δείξουμε το μέγεθός του.

Στο Θεώρημα 1.5.2 είδαμε ότι πολλές από τις ιδιότητες που ισχύουν στους πραγματικούς αριθμούς, ισχύουν και στους πίνακες. Δεν ισχύουν όμως όλες. Για παράδειγμα, αν A, B, C, και D είναι πίνακες κατάλληλου μεγέθους, ώστε να ορίζονται οι πράξεις, τότε γενικά έχουμε

$$\begin{aligned} &AB = AC \text{ και } A \neq O \not\Rightarrow B = C, \text{ και}\\ &AD = O \not\Rightarrow A = O \text{ ή } D = O. \end{aligned}$$

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.5.3 Θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \text{ και } D = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ισχύουν

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & -6 \end{pmatrix} = AC \text{ και } A \neq O,$$

αλλά δεν ισχύει η ισότητα $B = C$. Επίσης, μπορούμε να βρούμε ότι

$$AD = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

αλλά δεν έχουμε $A = O$ ή $D = O$.▲