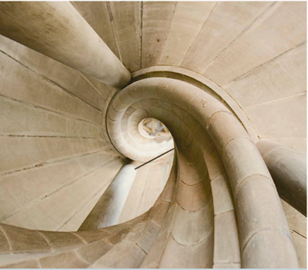
Ευάγγελος Ψωμόπουλος

Γραμμική Άλγεβρα II



3η έκδοση βελτιωμένη

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα

ISBN 978-960-456-314-2

© Copyright: Ψωμόπουλος Ευάγγελος, Εκδόσεις Ζήτη,
Γ′ έκδοση: Μάρτιος 2012, Θεσσαλονίκη

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις του Ελληνικού νόμου (Ν.2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής άδειας του εκδότη και συγγραφέα κατά οποιοδήποτε τρόπο ή μέσο αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή (ηλεκτρονική, μηχανική ή άλλη) και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18ο χλμ Θεσσαλονίκης - Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392 072.222 - Fax: 2392 072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη • Τηλ.: 2310 203.720 • Fax 2310 211.305
e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΕΝΩΣΗ ΕΚΔΟΤΩΝ ΒΙΒΛΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ:
Στοά του Βιβλίου (Πεσμαζόγλου 5) - 105 64 ΑΘΗΝΑ • Τηλ.-Fax: 210 3211.097

ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ - ΠΩΛΗΣΗ ΧΟΝΔΡΙΚΗ:
Ασκληπιού 60 - Εξάρχεια 114 71, Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210 3816.650 • e-mail: sales@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Πρόλογος

Η Γραμμική Άλγεβρα είναι ένα σημαντικό συστατικό στο πρόγραμμα σπουδών, όχι μόνο των Μαθηματικών, αλλά και άλλων τμημάτων, όπως είναι τα τμήματα Φυσικής, Χημείας, Πληροφορικής, των τμημάτων του Πολυτεχνείου, κλπ. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η Γραμμική Άλγεβρα καλείται να βοηθήσει πολλούς κλάδους επιστημών, ώστε να γίνουν περισσότερο κατανοητοί, και ευκολότερα διαχειρίσιμοι.

Οι ανάγκες, όμως, της κάθε επιστήμης δεν είναι ίδιες. Ένας φοιτητής του Πολυτεχνείου ενδιαφέρεται μόνο για το αποτέλεσμα, και τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να το πετύχει. Δεν ενδιαφέρεται σχεδόν ποτέ για το λόγο, για τον οποίο χρησιμοποιεί αυτή τη μεθοδολογία, και όχι κάποια άλλη. Δεν συμβαίνει, όμως, το ίδιο για τους φοιτητές του Μαθηματικού τμήματος, οι οποίοι, χωρίς να παραβλέπουν το υπολογιστικό μέρος των προβλημάτων, πρέπει να γνωρίζουν τι κρύβεται πίσω από τις διάφορες μεθοδολογίες.

Επιπλέον, η Γραμμική Άλγεβρα, που αφορά ένα τμήμα Μαθηματικών, πρέπει να αποτελεί ταυτόχρονα και μια εισαγωγή σε αυτό που ονομάζουμε μαθηματική αφαίρεση, με στόχο να βοηθήσει τους φοιτητές να εξοικειωθούν με τη μαθηματική σκέψη. Ο στόχος αυτός επιτυγχάνεται με τη λογική επιχειρηματολογία, και τη θεωρητική ανάπτυξη απλών, και μερικές φορές, γνωστών εννοιών, προσιτών σε όλους τους φοιτητές.

Το βιβλίο αυτό περιέχει τη διδακτέα ύλη που αντιστοιχεί στο υποχρεωτικό εξαμηνιαίο μάθημα Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ, που διδάσκεται στο Τμήμα Μαθηματικών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, και αποτελεί συνέχεια του βιβλίου «Γραμμική Άλγεβρα Ι».

Το βιβλίο «Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ» χωρίζεται σε τέσσερα κεφάλαια. Στο πρώτο αναπτύσσεται η μεθοδολογία επίλυσης γραμμικών συστημάτων. Στο δεύτερο συνεχίζεται η μελέτη των γραμμικών συναρτήσεων, και των πινάκων. Ο στόχος εδώ είναι να πάρουμε, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, απλούστερες μορφές συγκεκριμένων πινάκων. Στο τρίτο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια του μέτρου ενός διανύσματος, με αποτέλεσμα ο διανυσματικός χώρος να μοιάζει με τον γεωμετρικό διανυσματικό χώρο. Οι ομοιότητες με τη Γεωμετρία είναι πολλές, όμως η αντιμετώπιση των διανυσματικών χώρων εξακολουθεί να είναι αλγεβρική. Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο θα δούμε την έννοια της τετραγωνικής μορφής. Επίσης, με εφαρμογή της έννοιας αυτής, αναπτύσσεται η μεθοδολογία αναγνώρισης καμπύλων, και επιφανειών δευτέρου βαθμού.

Η θεωρία εμπλουτίζεται με πολλά παραδείγματα, τα οποία αποσκοπούν στην καλύτερη κατανόηση των εννοιών της Γραμμικής Άλγεβρας. Σχεδόν κάθε παράγραφος συνοδεύεται από ασκήσεις, πολλές από τις οποίες είναι απλή εφαρμογή της θεωρίας, ενώ άλλες την επεκτείνουν.

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχει μια συλλογή ασκήσεων, οι οποίες στηρίζονται σε όλα τα θέματα που αναπτύσσονται στη θεωρία. Για κάθε μια από αυτές δίνεται αναλυτική υπόδειξη.

Θεσσαλονίκη – Δεκέμβριος 2003 Ευάγγελος Ψωμόπουλος

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1
Γραμμικά Συστήματα

Τα γραμμικά συστήματα εμφανίζονται σχεδόν σε όλες τις θετικές επιστήμες, και ίσως όχι μόνον σε αυτές. Τα βλέπουμε σχεδόν πάντοτε σε περιπτώσεις πειραμάτων, όπου κανείς είναι αναγκασμένος να θεωρήσει πολλές παραμέτρους, και να κάνει διάφορες μετρήσεις.

Όπως και στην περίπτωση της «Γραμμικής Άλγεβρας I», το σώμα $\mathbb{K}$ θα είναι πάντοτε είτε το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών, είτε το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.

1.1 m εξισώσεις με n αγνώστους

Ένα γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους, και συντελεστές από ένα σώμα $\mathbb{K}$, έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1.1}$$

όπου οι συντελεστές a_{ij} των αγνώστων x_1, x_2, …, x_n, όπως επίσης και οι σταθεροί όροι b_i των εξισώσεων είναι όλα στοιχεία του σώματος $\mathbb{K}$. Στο σύστημα αυτό μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

το οποίο προκύπτει από το προηγούμενο, αν όλοι οι σταθεροί όροι αντικατασταθούν με μηδέν.

Το πρόβλημα της επίλυσης του συστήματος (1.1) είναι η εύρεση συγκεκριμένων τιμών των αγνώστων x_1, x_2, …, x_n, έτσι ώστε όλες οι εξισώσεις του συστήματος να ικανοποιούνται ταυτόχρονα. Όπως θα δούμε σύντομα, δεν είναι βέβαιο ότι το σύστημα αυτό έχει πάντοτε λύση. Ακόμη και στην περίπτωση που υπάρχει μια λύση, δεν είναι βέβαιο ότι η λύση αυτή είναι μοναδική.

Αυτό σημαίνει ότι πρέπει πρώτα να εξετάσουμε αν υπάρχει λύση του συστήματος αυτού, και στη συνέχεια να βρούμε τη λύση εφόσον υπάρχει.

Είναι προφανές ότι οι συντελεστές a_{ij} του συστήματος σχηματίζουν ένα $m \times n$ πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

που είναι γνωστός σαν πίνακας του συστήματος. Επίσης, οι σταθεροί όροι του συστήματος σχηματίζουν ένα $m \times 1$ πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

που είναι γνωστός σαν πίνακας των σταθερών. Έτσι, αν συμβολίσουμε τους αγνώστους σαν ένα $n \times 1$ πίνακα

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

τότε το σύστημα (1.1) θα πάρει μια πολύ πιο σύντομη μορφή

$$A \cdot X = B$$

την οποία θα χρησιμοποιούμε συχνά, όταν αναφερόμαστε στο σύστημα (1.1). Η μορφή αυτή έχει ένα ακόμη πλεονέκτημα, διότι μετατρέπει το σύστημα αυτό σε μια εξίσωση πινάκων. Οι πίνακες θα μας οδηγήσουν στα πρώτα συμπεράσματα που αφορούν τα συστήματα. Πριν προχωρήσουμε, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, αν ο πίνακας

A είναι αντιστρέψιμος, τότε η λύση του συστήματος βρίσκεται με ένα απλό πολλαπλασιασμό. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.1.1 Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Φυσικά το σύστημα αυτό μπορεί να γραφεί στη μορφή $A \cdot X = B$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Επειδή $\det(A) = -1$, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, και ο αντίστροφός του είναι ο πίνακας

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Επομένως η λύση του συστήματος θα είναι

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 17 \\ 22 \end{pmatrix}$$

δηλαδή $x_1 = -3$, $x_2 = 17$, και $x_3 = 22$.▲

Είναι γνωστό ότι κάθε πίνακας παριστά μια γραμμική συνάρτηση και αντίστροφα. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο πίνακας A του συστήματος παριστά τη γραμμική συνάρτηση $f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$, ως προς τις συνήθεις βάσεις των χώρων αυτών. Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας στήλη X είναι το διάνυσμα $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ του διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}^n$, ενώ ο πίνακας B είναι το διάνυσμα $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$ του χώρου $\mathbb{K}^m$. Βλέπουμε λοιπόν ότι η επίλυση του συστήματος $A \cdot X = B$, ανάγεται στην εύρεση ενός διανύσματος $\boldsymbol{x}$ έτσι ώστε να ισχύει η σχέση $f_A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$.

Είναι προφανές ότι, αν το διάνυσμα $\boldsymbol{b}$ δεν ανήκει στην εικόνα $f_A(\mathbb{K}^n)$ της συνάρτησης f_A, τότε δεν υπάρχει διάνυσμα $\boldsymbol{x}$, το οποίο να ικανοποιεί τη σχέση $f_A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$. Άρα δεν υπάρχει λύση του συστήματος $A \cdot X = B$.

Αν το διάνυσμα $\boldsymbol{b}$ ανήκει στην εικόνα $f_A(\mathbb{K}^n)$ της συνάρτησης f_A, τότε ασφαλώς υπάρχει διάνυσμα $\boldsymbol{x}$, το οποίο να ικανοποιεί τη σχέση $f_A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$. Άρα υπάρχει λύση του συστήματος $A \cdot X = B$. Η λύση αυτή μπορεί να μην είναι μοναδική, διότι η συνάρτηση f_A μπορεί να μην είναι αμφιμονότιμη.

Ο ***επαυξημένος πίνακας*** του συστήματος $A \cdot X = B$ προκύπτει από τον πίνακα A, αν προσθέσουμε στο τέλος τον πίνακα στήλη B, και συμβολίζεται με $(A|B)$. Δηλαδή θα έχουμε

$$(A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Στο εξής κάθε φορά που θα αναφερόμαστε στο σύστημα $A \cdot X = B$, δηλαδή στο σύστημα (1.1), θα θεωρούμε ότι το σύστημα αυτό συνοδεύεται από τον πίνακα του συστήματος A, τον πίνακα των σταθερών όρων B, τον επαυξημένο πίνακα $(A|B)$, καθώς επίσης από τη συνάρτηση $f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$, με πίνακα A ως προς τις συνήθεις βάσεις των χώρων αυτών, και τέλος από το διάνυσμα $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$, με συντεταγμένες τους σταθερούς όρους του συστήματος αυτού.

Στο σημείο αυτό μπορούμε να έχουμε το πρώτο αποτέλεσμα, αν και με όσα είπαμε προηγουμένως, το αποτέλεσμα αυτό είναι σχεδόν αναμενόμενο.

Θ ε ώ ρ η μ α 1.1.2 Οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i). **Το σύστημα** $A \cdot X = B$ **έχει λύση.**

(ii). **Το διάνυσμα b ανήκει στην εικόνα** $f_A(\mathbb{K}^n)$ **της συνάρτησης** f_A**.**

(iii). **Το διάνυσμα b ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα** A**.**

(iv). **Ισχύει η σχέση** $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A|B)$**.**

Α π ό δ ε ι ξ η. $(i) \Rightarrow (ii)$. Αν το σύστημα $A \cdot X = B$ έχει λύση τις τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_n$, τότε το διάνυσμα $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ του χώρου $\mathbb{K}^n$ ικανοποιεί τη σχέση $f_A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$. Επομένως το διάνυσμα $\boldsymbol{b}$ ανήκει στην εικόνα της συνάρτησης f_A.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Έστω $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ και $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_m$ οι συνήθεις βάσεις των χώρων $\mathbb{K}^n$ και $\mathbb{K}^m$, αντίστοιχα. Αν το διάνυσμα $\boldsymbol{b}$ ανήκει στην εικόνα $f_A(\mathbb{K}^n)$ της γραμμικής συνάρτησης f_A, τότε θα υπάρχει κάποιο διάνυσμα

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n,$$

τέτοιο ώστε να ισχύει $f_A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$. Αυτό σημαίνει ότι θα έχουμε

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b} = f_A(\boldsymbol{x}) &= f_A(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = \\ &= x_1 f_A(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f_A(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + x_n f_A(\boldsymbol{e}_n).\end{aligned}$$

Είναι γνωστό ότι τα διανύσματα $f_A(\boldsymbol{e}_1), f_A(\boldsymbol{e}_2), \cdots, f_A(\boldsymbol{e}_n)$ είναι ουσιαστικά οι στήλες του πίνακα A, άρα η τελευταία ισότητα δείχνει ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{b}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα A. Δηλαδή, το διάνυσμα $\boldsymbol{b}$ ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα A.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Αν το διάνυσμα $\boldsymbol{b}$ ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα A, τότε η στήλη B του πίνακα $(A|B)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα A. Αυτό σημαίνει ότι θα ισχύει

$$\text{χώρος στηλών του πίνακα } A = \text{χώρος στηλών του πίνακα } (A|B).$$

Η τελευταία αυτή ισότητα ουσιαστικά δείχνει ότι $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|B)$.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Υποθέτουμε, τώρα, ότι ισχύει $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|B)$. Αυτό σημαίνει ότι η στήλη B του πίνακα $(A|B)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα A, διότι διαφορετικά οι πίνακες A και $(A|B)$ δεν θα είχαν την ίδια βαθμίδα. Δηλαδή, υπάρχουν στοιχεία $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ του σώματος $\mathbb{K}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Είναι προφανές ότι η τελευταία σχέση οδηγεί στην ισότητα

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix},$$

δηλαδή το σύστημα $A \cdot X = B$ έχει σαν λύση τα στοιχεία $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$. ■

Το σημαντικότερο στοιχείο του προηγουμένου θεωρήματος είναι ότι συνδέει την ύπαρξη λύσης του συστήματος με τη βαθμίδα των πινάκων A και $(A|B)$. Πιο συγκεκριμένα

$$\text{Το σύστημα } A \cdot X = B \text{ έχει λύση} \iff \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|B).$$

Είναι προφανές ότι το αποτέλεσμα αυτό μας επιτρέπει να εξετάσουμε αν ένα σύστημα έχει λύση ή όχι. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.1.3 Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

του οποίου ο πίνακας A και ο επαυξημένος πίνακας $(A|B)$ είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ και } (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στους πίνακες αυτούς μπορούμε να βρούμε ότι $\text{rank}(A) = 2$, και $\text{rank}(A|B) = 3$. Άρα το σύστημα αυτό δεν έχει λύση.▲

Το επόμενο θεώρημα διερευνά την περίπτωση του ομογενούς συστήματος.

Θ ε ώ ρ η μ α 1.1.4 Έστω $A \cdot X = 0$ ένα ομογενές σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους, και συντελεστές από το σώμα $\mathbb{K}$. Το σύνολο S_0 όλων των λύσεων του συστήματος $A \cdot X = 0$, αποτελεί ένα διανυσματικό υποχώρο του $\mathbb{K}^n$ διάστασης $n - \text{rank}(A)$. Επομένως, αν ισχύει $n > m$, τότε το ομογενές σύστημα $A \cdot X = 0$ έχει μη μηδενικές λύσεις.

Α π ό δ ε ι ξ η. Το σύνολο των λύσεων του συστήματος $A \cdot X = 0$ είναι

$$S_0 = \{X / A \cdot X = 0\} = \{\boldsymbol{x} / f_A(\boldsymbol{x}) = 0\} = Ker f_A$$

Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο S_0 αποτελεί υποχώρο του $\mathbb{K}^n$, εφόσον είναι ο πυρήνας της συνάρτησης $f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$. Οπότε από την εξίσωση διάστασης προκύπτει

$$\dim S_0 = \dim \operatorname{Ker} f_A = n - \dim f_A(\mathbb{K}^n) = n - \text{rank}(A).$$

Επειδή η βαθμίδα του A δεν μπορεί να ξεπεράσει τον αριθμό m, όταν ισχύει $n > m$, τότε η διάσταση του S_0 είναι διάφορη του μηδενός, δηλαδή το σύστημα $A \cdot X = 0$ έχει μη μηδενικές λύσεις. ■

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, αν γνωρίζουμε μια βάση του χώρου S_0, τότε μπορούμε να βρούμε οποιοδήποτε στοιχείο του χώρου, δηλαδή οποιαδήποτε λύση του ομογενούς συστήματος.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α **1.1.5** Θεωρούμε το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{R}$. Εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

του συστήματος βρίσκουμε

$$\begin{array}{rrr|crrr|crrr|crrr} 1 & 2 & -1 & & 1 & 2 & -1 & & 1 & 2 & -1 & & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & \Rightarrow & 0 & -3 & 3 & \Rightarrow & 0 & -3 & 3 & \Rightarrow & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & & 0 & -3 & 3 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Επομένως η βαθμίδα του πίνακα A είναι $\text{rank}(A) = 2$, οπότε η διάσταση του χώρου S_0 των λύσεων του συστήματος είναι $\dim S_0 = 3 - 2 = 1$. Αυτό σημαίνει ότι μια βάση του χώρου αυτού είναι ένα οποιοδήποτε μη μηδενικό στοιχείο του, δηλαδή μια οποιαδήποτε μη μηδενική λύση του συστήματος.

Μια τέτοια λύση μπορεί να βρεθεί είτε από το αρχικό σύστημα, είτε από το ισοδύναμο με αυτό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

το οποίο προκύπτει από τις στοιχειώδεις πράξεις. Εύκολα βρίσκουμε ότι μια μη μηδενική λύση είναι $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 1$.

Άρα ο χώρος των λύσεων του συστήματος θα είναι

$$S_0 = \{(-1, 1, 1)t / t \in \mathbb{R}\}.$$

Δηλαδή όλες οι λύσεις του δοθέντος συστήματος θα είναι $x_1 = -t$, $x_2 = t$, $x_3 = t$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Στην πραγματικότητα, θεωρήσαμε τον άγνωστο x_3 σαν παράμετρο, την οποία ονομάσαμε t, και υπολογίσαμε τους δύο άλλους αγνώστους με τη βοήθεια της παραμέτρου αυτής.▲

Το επόμενο θεώρημα αναφέρεται στην επίλυση του μη ομογενούς συστήματος $A \cdot X = B$.

Θ ε ώ ρ η μ α 1.1.6 Έστω S το σύνολο όλων των λύσεων του συστήματος $A \cdot X = B$, και S_0 το σύνολο των λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος. Αν s είναι μια οποιαδήποτε λύση του συστήματος $A \cdot X = B$, τότε ισχύει

$$S = \{s\} + S_0 = \{s + \xi / \xi \in S_0\}.$$

Α π ό δ ε ι ξ η. Αρχικά θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι, σε αντίθεση με το σύνολο S_0, το σύνολο S δεν μπορεί να είναι διανυσματικός χώρος, εφόσον δεν μπορεί να περιέχει τη μηδενική λύση.

Αν $u \in S$, δηλαδή αν u είναι μια λύση του συστήματος $A \cdot X = B$, τότε θα έχουμε $A \cdot u = B$, οπότε προκύπτει

$$A \cdot (u - s) = A \cdot u - A \cdot s = B - B = 0.$$

Επομένως θα έχουμε $u - s \in S_0$, δηλαδή υπάρχει κάποιο στοιχείο $\xi \in S_0$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $u - s = \xi$. Αυτό σημαίνει ότι $u = s + \xi$, γεγονός που αποδεικνύει τη σχέση $S \subset \{s + \xi / \xi \in S_0\}$.

Αντίστροφα, έστω ότι $w \in \{s + \xi / \xi \in S_0\}$, δηλαδή $w = s + \zeta$, για κάποιο στοιχείο $\zeta \in S_0$ Τότε θα έχουμε

$$A \cdot w = A \cdot (s + \zeta) = A \cdot s + A \cdot \zeta = B + 0 = B.$$

Άρα προκύπτει ότι $w \in S$, δηλαδή έχουμε και τη σχέση $\{s + \xi / \xi \in S_0\} \subset S$, γεγονός που αποδεικνύει την ισότητα που θέλουμε. ■

Η σημασία του θεωρήματος αυτού προκύπτει από την ισότητα

$$S = \{s\} + S_0 = \{s + \xi / \xi \in S_0\}.$$

η οποία δείχνει ότι η γενική λύση ενός γραμμικού συστήματος $A \cdot X = B$, m εξισώσεων με n αγνώστους, είναι το άθροισμα της γενικής λύσης του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος $A \cdot X = 0$, και μιας οποιασδήποτε λύσης του συστήματος $A \cdot X = B$.

Παράδειγμα 1.1.7 Θεωρούμε το μη ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 - 4x_4 &= 9 \\ -x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= -6 \end{aligned}$$

Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του συστήματος αυτού.

$$\left.\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & 1 & -4 & 9 \\ -1 & -4 & -2 & 5 & -6 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{rrrrr} 1 & 4 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι η βαθμίδα του πίνακα A, και του επαυξημένου πίνακα $(A|B)$ του συστήματος είναι 2, επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα 1.1.2(iv) το σύστημα που δόθηκε έχει λύση. Επίσης, επειδή $\operatorname{rank}(A) = 2$ η διάσταση του χώρου των λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος θα είναι $\dim S_0 = 4 - 2 = 2$. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να βρούμε δύο ανεξάρτητες λύσεις του ομογενούς συστήματος, οι οποίες θα αποτελέσουν τη βάση του χώρου S_0.

Από τις στοιχειώδεις πράξεις προκύπτει ότι το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

είναι ισοδύναμο με το αντίστοιχο ομογενές του δοθέντος συστήματος. Από τις δύο αυτές εξισώσεις έχουμε

$$\begin{aligned} -x_3 + x_4 &= x_1 + 4x_2 \\ x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

οπότε δύο ανεξάρτητες λύσεις του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος θα είναι

$$\begin{aligned} x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 1 \\ x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -8, x_4 = -4 \end{aligned}$$

Επομένως ο χώρος των λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος είναι

$$S_0 = \{(1,0,2,1)k + (0,1,-8,-4)\lambda / k, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Τώρα πρέπει να βρούμε μια λύση του αρχικού συστήματος. Από τις παραπάνω στοιχειώδεις πράξεις προκύπτει ότι το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\ x_3 - 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

είναι ισοδύναμο με το αρχικό σύστημα. Από τις εξισώσεις αυτές θα έχουμε

$$-x_3 = 7 - 8x_2 - 2x_1 \text{ και } -x_4 = 4 + 4x_2 - x_1.$$

Άρα μια λύση του δοθέντος συστήματος θα είναι

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = -7, \text{ και } x_4 = -4.$$

Επομένως, η γενική λύση του συστήματος θα είναι

$$\begin{aligned} S &= \{(0,0,-7,-4)\} + S_0 = \\ &= \{(0,0,-7,-4) + (1,0,2,1)k + (0,1,-8,-4)\lambda / k, \lambda \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Πιο συγκεκριμένα η γενική λύση είναι

$$x_1 = k, x_2 = \lambda, x_3 = -7 + 2k - 8\lambda, \text{ και } x_4 = -4 + k - 4\lambda. \blacktriangle$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι είναι δυνατόν να βρεθεί η γενική λύση ενός συστήματος με τα υπάρχοντα θεωρήματα.

Συνήθως, όμως, χρησιμοποιούνται διάφορες άλλες τεχνικές, οι οποίες είναι περισσότερο σύντομες, και αποτελεσματικές. Αν και βασίζονται στις στοιχειώδεις πράξεις, τις οποίες ήδη χρησιμοποιήσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα, οι τεχνικές αυτές θα αναπτυχθούν στην επόμενη παράγραφο.

1.2 Ασκήσεις

Ά σ κ η σ η 1.2.1 Απαντήστε με σωστό ή λάθος στις παρακάτω προτάσεις.

(i) Κάθε σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει τουλάχιστον μια λύση.

(ii) Κάθε σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει το πολύ μια λύση.

(iii) Κάθε σύστημα n γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους έχει τουλάχιστον μια λύση.

(iv) Κάθε σύστημα n γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους έχει το πολύ μια λύση.

(v) Κάθε ομογενές σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει τουλάχιστον μια λύση.

(vi) Κάθε ομογενές σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει το πολύ μια λύση.

(vii) Αν το αντίστοιχο ομογενές σύστημα ενός γραμμικού συστήματος έχει μια λύση, τότε το αρχικό σύστημα έχει μια λύση.

(viii) Αν ο πίνακας ενός ομογενούς συστήματος n εξισώσεων με n αγνώστους είναι αντιστρέψιμος, τότε το σύστημα έχει μια μη μηδενική λύση.

(ix) Το σύνολο των λύσεων ενός γραμμικού συστήματος m εξισώσεων με n αγνώστους είναι υποχώρος του $\mathbb{K}^n$.

Ά σ κ η σ η 1.2.2 Αποδείξτε ή δώστε αντιπαράδειγμα στην παρακάτω πρόταση. Αν ο πίνακας A ενός γραμμικού συστήματος $A \cdot X = B$, m εξισώσεων με n αγνώστους, έχει βαθμίδα m, τότε το σύστημα έχει μια τουλάχιστον λύση. Υπόδειξη: Η συνάρτηση $f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ είναι μια συνάρτηση επί.

Ά σ κ η σ η 1.2.3 Έστω $A \cdot X = B$ ένα γραμμικό σύστημα, n εξισώσεων με n αγνώστους. Δείξτε ότι το σύστημα αυτό έχει ακριβώς μια λύση αν και μόνον αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. ***Υπόδειξη***: Αν w είναι η μοναδική λύση του συστήματος, τότε θα ισχύει $\{w\} = \{w\} + S_0$. Επομένως $S_0 = 0$, οπότε ο ενδομορφισμός f_A θα είναι επιμορφισμός.

Ά σ κ η σ η 1.2.4 Να προσδιοριστεί η διάσταση και μια βάση του χώρου των λύσεων των συστημάτων.

$$(a) \left\{ \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned} \right. \quad \text{και} \quad (b) \left\{ \begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned} \right.$$

Ά σ κ η σ η 1.2.5 Αν $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ είναι η γραμμική συνάρτηση που ορίζεται με τη σχέση $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_3)$, να προσδιοριστεί επακριβώς το σύνολο

$$A = f^{-1}(1, 11).$$

Ά σ κ η σ η 1.2.6 Αν $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ είναι ο ενδομορφισμός που ορίζεται με τη σχέση

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - 2x_3, x_1 + 2x_3)$$

να προσδιοριστούν τα δύο παρακάτω σύνολα $f^{-1}(1, 3, -2)$, και $f^{-1}(2, 1, 1)$.

Ά σ κ η σ η 1.2.7 Να προσδιοριστεί η διάσταση και μια βάση του χώρου των λύσεων των συστημάτων.

$$(a) \left\{ \begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned} \right. \quad \text{και} \quad (b) \left\{ \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned} \right.$$

1.3 Τεχνικές επίλυσης συστήματος

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με την εύρεση της λύσης του γραμμικού συστήματος $A \cdot X = B$, m εξισώσεων με n αγνώστους, επομένως σχεδόν πάντα θα θεωρούμε ότι το σύστημα έχει λύση, δηλαδή ικανοποιείται η σχέση $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|B)$.

Η απλούστερη περίπτωση είναι το ***σύστημα Cramer*** , δηλαδή το σύστημα $A \cdot X = B$, n εξισώσεων με n αγνώστους, όπου ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Όπως είδαμε, η λύση ενός τέτοιου συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Αν θυμηθούμε ότι ο αντίστροφος ενός πίνακα δίνεται από την ισότητα

$$A^{-1} = \tfrac{\text{adj}(A)}{\det(A)},$$

τότε η προηγούμενη σχέση θα πάρει τη μορφή

$$\det(A) \cdot X = \text{adj}(A) \cdot B.$$

Τέλος, αν ισχύει $a = 2$, τότε από τη σχέση (1.2) θα έχουμε

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}$$

επομένως το σύστημα δεν έχει λύση, διότι ο επαυξημένος πίνακας έχει μεγαλύτερη βαθμίδα από τον πίνακα του συστήματος.▲

1.4 Ασκήσεις

Ά σ κ η σ η 1.4.1 Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x - 3w &= -3 \end{aligned}$$

Ά σ κ η σ η 1.4.2 Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= -15 \\ 5x + 3y + 2z &= 0 \\ 3x + y + 3z &= 11 \\ 11x + 7y &= -30 \end{aligned}$$

Ά σ κ η σ η 1.4.3 Να βρεθούν οι γενικές λύσεις των παρακάτω συστημάτων

$$(\alpha) \left\{ \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= -1 \end{aligned} \right. \quad (\beta) \left\{ \begin{aligned} x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 8x_2 + x_3 - 4x_4 &= 9 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= -6 \end{aligned} \right.$$

Ά σ κ η σ η 1.4.4 Να βρεθούν οι γενικές λύσεις των συστημάτων

$$(\alpha) \left\{ \begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 6x_4 - 2x_5 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 &= 2 \\ 4x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 - x_5 &= 6 \end{aligned} \right.$$

$$(\beta)\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 4x_5 = -5 \\ 7x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$$

Άσκηση 1.4.5 Να βρεθούν, εφόσον υπάρχουν, οι λύσεις των συστημάτων

$$(\alpha)\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_5 = -1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = -1 \end{cases}$$

$$(\beta)\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 3 \\ x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_4 - 3x_5 = 2 \end{cases}$$

Άσκηση 1.4.6 Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα, όταν οι παράμετροι α και β διατρέχουν το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

$$(\alpha)\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases} \quad (\beta)\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Άσκηση 1.4.7 Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα, όταν οι παράμετροι a και b διατρέχουν το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

$$(\alpha)\begin{cases} (a+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = a \\ ax_1 + (a-1)x_2 + x_3 = 2a \\ 3(a+1)x_1 + ax_2 + (a+3)x_3 = 3 \end{cases}$$

$$(\beta)\begin{cases} ax_1 + bx_2 + 2x_3 = 1 \\ ax_1 + (2b-1)x_2 + 3x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + (b+3)x_3 = 2b-1 \end{cases}$$

Άσκηση 1.4.8 Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα, όταν οι παράμετροι a, b, c, k, λ και μ διατρέχουν το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

$$(\alpha)\begin{cases} \gamma x_2 - bx_3 = k \\ -\gamma x_1 + ax_3 = \lambda \\ bx_1 - ax_2 = \mu \end{cases} \quad (\beta)\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = a \\ x_1 + kx_2 + x_3 = b \\ 3x_1 + x_2 - kx_3 = c \end{cases}$$

Κεφάλαιο 5

Κανονικές μορφές Jordan

Όπως είδαμε ένας ενδομορφισμός ενός n-διάστατου $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου ή ένας $n \times n$ πίνακας δεν μπορεί να διαγωνιοποιηθεί πάντοτε, ενώ μπορεί να τριγωνοποιηθεί μόνον όταν όλες οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ανήκουν στο σώμα $\mathbb{K}$.

Ασφαλώς η απλότητα της διαγώνιας μορφής ενός πίνακα είναι πάντοτε επιθυμητή, όμως αυτό επιτυγχάνεται μόνον όταν όλες οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ανήκουν στο σώμα $\mathbb{K}$, και επιπλέον η πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής ταυτίζεται με τη διάσταση του αντίστοιχου ιδιοχώρου.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με ενδομορφισμούς (ή πίνακες), για τους οποίους το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει όλες τις ρίζες στο σώμα $\mathbb{K}$, όμως δεν διαγωνιοποιείται. Αυτό σημαίνει ότι η πολλαπλότητα κάποιας ιδιοτιμής δεν είναι ίση με τη διάσταση του αντίστοιχου ιδιοχώρου. Έτσι, προκύπτει η ανάγκη διαχωρισμού των δύο αυτών αριθμών, της πολλαπλότητας μιας ιδιοτιμής, και της διάστασης του ιδιοχώρου της ιδιοτιμής. Η πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής λ, δηλαδή το πόσες φορές είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, λέγεται ***αλγεβρική πολλαπλότητα*** της ιδιοτιμής λ, ενώ η διάσταση του αντίστοιχου ιδιοχώρου λέγεται ***γεωμετρική πολλαπλότητα*** της ιδιοτιμής λ. Είδαμε ότι ισχύει η σχέση

$$1 \leq \dim E(\lambda) \leq \text{ πολλαπλότητα } \lambda,$$

δηλαδή

$$1 \leq \textit{ γεωμετρική πολλαπλότητα } \lambda \ \leq \ \textit{αλγεβρική πολλαπλότητα } \lambda.$$

Ο στόχος είναι να αναπτύξουμε μια μέθοδο με την οποία, ένας μη διαγωνιοποιήσιμος πίνακας A, θα μπορεί να παρασταθεί στη μορφή

$$A' = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{pmatrix},$$

όπου J_t είναι ένας τετραγωνικός 1×1 πίνακας της μορφής (λ_t), ή της μορφής

$$J_t = \begin{pmatrix} \lambda_t & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_t & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_t \end{pmatrix},$$

όπου λ_t είναι κάποια ιδιοτιμή του πίνακα A. Τέτοιοι πίνακες, όπως ο J_t, λέγονται ***μπλοκ Jordan*** (***Jordan block***) που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_t του πίνακα A. Ο πίνακας A', που λέγεται ***κανονική μορφή Jordan*** του A, όπως φαίνεται, είναι σχεδόν διαγώνιος, και σίγουρα άνω τριγωνικός. Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$A = \left(\begin{array}{ccc:c:cc:cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

είναι η κανονική μορφή Jordan κάποιου 8×8 πίνακα. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι $(x-1)^3 (x-2) (x-3)^2 (x-4)^2$, οπότε η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής δείχνει πόσες φορές θα εμφανιστεί η αντίστοιχη ιδιοτιμή πάνω στην κύρια διαγώνιο της κανονικής μορφής Jordan, όπως ακριβώς και στην περίπτωση της διαγωνιοποίησης.

5.1 Ελάχιστο πολυώνυμο

Το Θεώρημα Cayley-Hamilton δείχνει ότι, για κάθε τετραγωνικό πίνακα A, υπάρχουν πολυώνυμα $p(x)$ για τα οποία ισχύει $p(A) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο

$$\mathcal{F} = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] / p(A) = 0\},$$

όλων των πολυωνύμων που μηδενίζονται από τον πίνακα A είναι μη κενό, οπότε και το σύνολο

$$M = \{n \in \mathbb{N} / n = \deg p(x), p(x) \in \mathcal{F}\},$$

των βαθμών των πολυωνύμων που μηδενίζονται από τον πίνακα A είναι επίσης μη κενό. Επειδή το M είναι ένα μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών, θα έχει ελάχιστο στοιχείο, δηλαδή υπάρχει ένα πολυώνυμο ελαχίστου βαθμού, το οποίο μηδενίζεται από τον πίνακα A. Το πολυώνυμο αυτό μπορεί να θεωρηθεί κανονικό, δηλαδή μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο συντελεστής της μεγαλύτερης δύναμης είναι 1. Πράγματι, αν ισχύει

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0 \text{ και } f(A) = 0,$$

τότε θα ισχύει επίσης

$$f_0(x) = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n}, \text{ και } f_0(A) = 0.$$

Οπότε το πολυώνυμο $f_0(x)$ έχει τον ίδιο βαθμό με το $f(x)$, είναι κανονικό, και μηδενίζεται από τον πίνακα A.

Ο ρ ι σ μ ό ς 5.1.1 ***Ελάχιστο πολυώνυμο*** **ενός $n \times n$ πίνακα A με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ είναι το ελαχίστου βαθμού κανονικό πολυώνυμο $m_A(x)$, που ικανοποιεί τη σχέση $m_A(A) = 0$. Φυσικά, ανάλογος ορισμός ισχύει και για τους ενδομορφισμούς, αρκεί να αντικαταστήσουμε τον πίνακα A με τον πίνακα του ενδομορφισμού.**

Ας δούμε κάποιες ιδιότητες του ελαχίστου πολυωνύμου ενός τετραγωνικού πίνακα.

Θ ε ώ ρ η μ α 5.1.2 Το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x)$ ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{K})$ διαιρεί κάθε πολυώνυμο $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ που ικανοποιεί τη σχέση $f(A) = 0$. Επομένως, το ελάχιστο πολυώνυμο διαιρεί και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\mathcal{X}_A(x)$ του πίνακα A.

Α π ό δ ε ι ξ η. Από την Ευκλείδια διαίρεση θα έχουμε

$$f(x) = m_A(x)\, h(x) + \upsilon(x)\,, \text{ όπου } 0 \leq \deg \upsilon(x) < \deg m_A(x)\,.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\upsilon(x) = 0$, οπότε θα ισχύει $m_A(x) \mid f(x)$. Έστω ότι ισχύει $\upsilon(x) \neq 0$, οπότε το $\upsilon(x)$ είναι ένα θετικού βαθμού πολυώνυμο, το οποίο ικανοποιεί τη σχέση

$$\upsilon(A) = f(A) - m_A(A)\, h(A) = 0,$$

που έρχεται σε αντίθεση με τον ορισμό του ελαχίστου πολυωνύμου, εφόσον

$$\deg \upsilon(x) < \deg m_A(x)\,.$$

Επομένως θα έχουμε $\upsilon(x) = 0$. ■

Θ ε ώ ρ η μ α 5.1.3 Το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x)$ ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{K})$ είναι μοναδικό.

Α π ό δ ε ι ξ η. Έστω $m_A(x)$ και $m'_A(x)$ ελαχίστου βαθμού κανονικά πολυώνυμα που ικανοποιούν τις σχέσεις $m_A(A) = 0$ και $m'_A(A) = 0$. Τότε από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει $m_A(x) \mid m'_A(x)$, αν το $m_A(x)$ θεωρηθεί ως το ελάχιστο πολυώνυμο του A, και $m'_A(x) \mid m_A(x)$, αν το $m'_A(x)$ θεωρηθεί σαν το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A. Άρα προκύπτει

$$\begin{aligned} m_A(x) \mid m'_A(x) &\Rightarrow \deg m_A(x) \leq \deg m'_A(x)\,, \text{ και} \\ m'_A(x) \mid m_A(x) &\Rightarrow \deg m'_A(x) \leq \deg m_A(x)\,, \end{aligned}$$

δηλαδή $\deg m_A(x) = \deg m'_A(x)$. Επομένως θα έχουμε

$$\begin{aligned} m_A(x) \mid m'_A(x) \Rightarrow\ & m'_A(x) = m_A(x)\, h(x) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \deg m'_A(x) = \deg m_A(x) + \deg h(x) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \deg h(x) = 0 \Rightarrow h(x) = k \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Έτσι καταλήγουμε στην ισότητα $m'_A(x) = k \cdot m_A(x)$, $k \in \mathbb{K}$, και επειδή τα πολυώνυμα $m_A(x)$ και $m'_A(x)$ είναι κανονικά προκύπτει $k = 1$, δηλαδή $m'_A(x) = m_A(x)$, οπότε το ελάχιστο πολυώνυμο είναι μοναδικό. ■

Θ ε ώ ρ η μ α 5.1.4 Το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x)$ και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\mathcal{X}_A(x)$ ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{K})$ έχουν το ίδιο σύνολο ριζών, με την προϋπόθεση ότι όλες οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ανήκουν στο σώμα $\mathbb{K}$.

Α π ό δ ε ι ξ η. Ότι κάθε ρίζα του ελαχίστου πολυωνύμου είναι και ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου προκύπτει από το Θεώρημα 5.1.2, δηλαδή από τη σχέση $m_A(x) \mid \mathcal{X}_A(x)$.

Έστω $\lambda \in \mathbb{K}$ μια ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, δηλαδή μια ιδιοτιμή του A. Τότε θα υπάρχει $X \neq 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει $AX = \lambda X$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει $A^2X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X$. Άρα χρησιμοποιώντας τη μαθηματική επαγωγή, μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύει

$$A^k X = \lambda^k X, \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

Επομένως, αν $m_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}
0 = m_A(A) = m_A(A)X &= \left(A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n\right) X = \\
&= A^n X + a_{n-1}A^{n-1}X + \cdots + a_1 AX + a_0 X = \\
&= \lambda^n X + a_{n-1}\lambda^{n-1}X + \cdots + a_1 \lambda X + a_0 X = \\
&= \left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\right) X = m_A(\lambda) X,
\end{aligned}$$

δηλαδή $m_A(\lambda) = 0$, εφόσον $X \neq 0$. Οπότε το στοιχείο λ είναι ρίζα του ελαχίστου πολυωνύμου. ■

Π α ρ α τ ή ρ η σ η 5.1.5 ***(i)*** Αν δύο πολυώνυμα έχουν το ίδιο σύνολο ριζών, δεν σημαίνει ότι ταυτίζονται. Για παράδειγμα, τα πολυώνυμα

$$(x-1)^2(x-2)^3(x-3) \text{ και } (x-1)(x-2)(x-3)$$

έχουν το ίδιο σύνολο ριζών, χωρίς όμως να ταυτίζονται.

(ii) Επίσης, το ελάχιστο και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα A δεν ταυτίζονται απαραίτητα. Για παράδειγμα, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

είναι $\mathcal{X}_A(x) = -(x-4)^3$, ενώ το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι $m_A(x) = x-4$, εφόσον ισχύει $m_A(A) = A - 4I_3 = 0$.

(iii) Τέλος, αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\mathcal{X}_A(t) = (t-\lambda_1)^{k_1}(t-\lambda_2)^{k_2}\cdots(t-\lambda_t)^{k_t},$$

τότε το ελάχιστο πολυώνυμο του A θα είναι της μορφής

$$m_A(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\cdots(t-\lambda_t)^{m_t},$$

όπου $1 \le m_i \le k_i$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, t$.▲

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α **5.1.6** Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 1 \\ 2 & 4-x & 2 \\ 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = -x^3+10x^2-28x+24 = -(x-6)(x-2)^2.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1.4, το ελάχιστο πολυώνυμο του A πρέπει να είναι ένα από τα πολυώνυμα

$$(x-6)(x-2)^2 \text{ και } (x-6)(x-2),$$

εφόσον πρέπει να είναι κανονικό, και να έχει το ίδιο σύνολο ριζών με το $\mathcal{X}_A(x)$. Επειδή

$$(A-6I_3)(A-2I_3) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

προκύπτει ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι $m_A(A) = (x-6)(x-2)$.▲

Θα κλείσουμε αυτή την παράγραφο με μια ικανή και αναγκαία συνθήκη που αφορά το ελάχιστο πολυώνυμο.

Τέλος, να υπενθυμίσουμε ότι, αν φ είναι ένας ενδομορφισμός, τότε ο ενδομορφισμός φ^k ορίζεται με τη σχέση

$$\varphi^0 = I, \text{ και } \varphi^k = \varphi \circ \varphi^{k-1}, \text{ για κάθε } k = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Θ ε ώ ρ η μ α 5.1.7 Έστω V ένας n-διάστατος $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος, και $f : V \longrightarrow V$ ένας ενδομορφισμός του V. Ο ενδομορφισμός f διαγωνιοποιείται αν και μόνον αν το ελάχιστο πολυώνυμο του f γράφεται στη μορφή

$$m_f(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_r),$$

όπου τα στοιχεία $\lambda_i \in \mathbb{K}$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Είναι προφανές ότι τα λ_i είναι οι ιδιοτιμές του f.

Α π ό δ ε ι ξ η. Υποθέτουμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του ενδομορφισμού f γράφεται στη μορφή

$$m_f(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_r),$$

όπου τα στοιχεία $\lambda_i \in \mathbb{K}$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Θεωρούμε τα πολυώνυμα

$$\varphi_i(t) = \frac{m_f(t)}{t-\lambda_i} = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_{i-1})(t-\lambda_{i+1})\cdots(t-\lambda_r),$$

για κάθε δείκτη $i = 1, 2, \ldots, r$. Επειδή τα στοιχεία λ_i είναι διαφορετικά μεταξύ τους, τα πολυώνυμα φ_1, φ_2, …, φ_r δεν έχουν κανένα κοινό παράγοντα, επομένως θα είναι πρώτα μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχουν πολυώνυμα $a_1(t)$, $a_2(t)$, …, $a_r(t)$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση

$$a_1(t)\,\varphi_1(t) + a_2(t)\,\varphi_2(t) + \cdots + a_r(t)\,\varphi_r(t) = 1.$$

Αντικαθιστώντας το t με τον ενδομορφισμό f καταλήγουμε στη σχέση

$$a_1(f)\,\varphi_1(f) + a_2(f)\,\varphi_2(f) + \cdots + a_r(f)\,\varphi_r(f) = I,$$

όπου $I : V \longrightarrow V$ ο ταυτοτικός ενδομορφισμός. Άρα, για κάθε διάνυσμα $\boldsymbol{v} \in V$, θα έχουμε

$$a_1(f)\,\varphi_1(f)(\boldsymbol{v}) + a_2(f)\,\varphi_2(f)(\boldsymbol{v}) + \cdots + a_r(f)\,\varphi_r(f)(\boldsymbol{v}) = I(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}. \quad (5.1)$$

Θεωρούμε το διάνυσμα $\boldsymbol{y} = a_1(f)\,\varphi_1(f)(\boldsymbol{v})$, για το οποίο ισχύει

$$\begin{aligned}(f - \lambda_1 I)(\boldsymbol{y}) &= (f - \lambda_1 I)\,a_1(f)\,\varphi_1(f)(\boldsymbol{v}) = a_1(f)\,(f - \lambda_1 I)\,\varphi_1(f)(\boldsymbol{v}) = \\ &= a_1(f)\,m_f(f)(\boldsymbol{v}) = a_1(f)\,0(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0},\end{aligned}$$

εφόσον το ελάχιστο πολυώνυμο μηδενίζεται από τον ενδομορφισμό f, σύμφωνα με τον Ορισμό 5.1.1. Επομένως το διάνυσμα $\boldsymbol{y}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$(f - \lambda_1 I)(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0} \Rightarrow f(\boldsymbol{y}) - \lambda_1 I(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0} \Rightarrow f(\boldsymbol{y}) = \lambda_1 \boldsymbol{y},$$

δηλαδή ανήκει στον ιδιοχώρο $E(\lambda_1)$, που αντιστοιχεί στην διοτιμή λ_1. Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να δείξουμε ότι τα διανύσματα

$$a_2(f)\,\varphi_2(f)(\boldsymbol{v}),\, a_3(f)\,\varphi_3(f)(\boldsymbol{v}),\, \ldots,\, a_r(f)\,\varphi_r(f)(\boldsymbol{v})$$

ανήκουν στους ιδιοχώρους $E(\lambda_2)$, $E(\lambda_3)$, …, $E(\lambda_r)$, αντίστοιχα. Επομένως, από τη σχέση (5.1) που ισχύει για κάθε $\boldsymbol{v} \in V$, προκύπτει η ισότητα

$$V = E(\lambda_1) + E(\lambda_2) + \cdots + E(\lambda_r).$$

Επειδή σε διαφορετικές ιδιοτιμές αντιστοιχούν γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, το προηγούμενο άθροισμα πρέπει να είναι ευθύ. Δηλαδή ισχύει

$$V = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_r),$$

οπότε ο χώρος V δέχεται μια βάση ιδιοδιανυσμάτων του f, άρα ο ενδομορφισμός διαγωνιοποιείται.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο ενδομορφισμός f διαγωνιοποιείται, οπότε ο χώρος V δέχεται μια βάση $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ ιδιοδιανυσμάτων του f. Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ όλες οι διαφορετικές ιδιοτιμές του f. Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο έχει τις ίδιες ρίζες με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του ενδομορφισμού, προκύπτει ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του f πρέπει να διαιρείται από το πολυώνυμο

$$\psi(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_r).$$

Για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$, το διάνυσμα ε_k θα αντιστοιχεί σε κάποια ιδιοτιμή λ_s, οπότε θα έχουμε

$$(f - \lambda_s I)(\varepsilon_k) = f(\varepsilon_k) - \lambda_s I(\varepsilon_k) = f(\varepsilon_k) - \lambda_s \varepsilon_k = \mathbf{0}.$$

Αυτό σημαίνει ότι θα ισχύει

$$\psi(f)(\varepsilon_k) = (f - \lambda_1 I)(f - \lambda_2 I) \cdots (f - \lambda_r I)(\varepsilon_k) = \mathbf{0},$$

για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$. Δηλαδή, ο ενδομορφισμός $\psi(f)$ μηδενίζει όλα τα διανύσματα μιας βάσης του V, οπότε πρέπει να είναι ο μηδενικός ενδομορφισμός $\psi(f) = 0$. Άρα, από το Θεώρημα 5.1.2, θα έχουμε $m_f(t) \mid \psi(t)$, επομένως προκύπτει

$$m_f(t) = \psi(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_r),$$

δηλαδή το ελάχιστο πολυώνυμο έχει τη μορφή που θέλουμε. ■

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 5.1.8 Θεωρούμε τον 3×3 πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του οποίου είναι

$$\mathcal{X}_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & -1 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 \\ 1 & -1 & 2-t \end{vmatrix} = -t^3 + 7t^2 - 16t + 12 = -(t-3)(t-2)^2.$$

Αυτό σημαίνει ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του A μπορεί να είναι $(t-2)(t-3)$ ή $(t-2)^2(t-3)$, εφόσον πρέπει να έχει το ίδιο σύνολο ριζών με το $\mathcal{X}_A(t)$. Επειδή

$$(A - 2I_3)(A - 3I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

προκύπτει ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A είναι $m_A(t) = (t-2)(t-3)$.

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος. Πράγματι, ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στη διπλή ιδιοτιμή 2 είναι

$$\begin{aligned}
E(2) &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / AX = 2X \right\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 3x-y \\ 2y \\ x-y+2z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x = y \right\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} / x, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} z / x, z \in \mathbb{R} \right\},
\end{aligned}$$

και όπως βλέπουμε έχει διάσταση 2, επομένως ο πίνακας A διαγωνιοποιείται.▲

5.2 Ασκήσεις

Ά σ κ η σ η 5.2.1 Έστω V ένας n-διάστατος $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος, $f : V \longrightarrow V$ ένας ενδομορφισμός του V, και A ο πίνακας του f σε κάποια βάση του V. Δείξτε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του f ταυτίζεται με το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

Ά σ κ η σ η 5.2.2 Σε κάθε ένα από τους παρακάτω ενδομορφισμούς να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο, και να διαπιστωθεί αν ο αντίστοιχος ενδομορφισμός διαγωνιοποιείται.

(i) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, όπου $f(x,y,z) = (x+y-z, z, -2y-3z)$, για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(ii) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, όπου $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (a,b,a,b)$, για κάθε $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, και $a = x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4$, $b = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4$.

(iii) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, όπου $f(x,y,z) = (2x+y+z, x+2y+z, x+y+2z)$, για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$.