Ευάγγελος Ψωμόπουλος

Γραμμική Άλγεβρα

Ι

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Πρόλογος

Η Γραμμική Άλγεβρα είναι ένα σημαντικό συστατικό στο πρόγραμμα σπουδών, όχι μόνο των Μαθηματικών, αλλά και άλλων τμημάτων, όπως είναι το τμήμα Φυσικής, Χημείας, των τμημάτων του Πολυτεχνείου, κλπ. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η Γραμμική Άλγεβρα καλείται να βοηθήσει πολλούς κλάδους επιστημών, ώστε να γίνουν περισσότερο κατανοητοί, και ευκολότερα διαχειρίσιμοι.

Οι ανάγκες, όμως, της κάθε επιστήμης δεν είναι ίδιες. Ένας φοιτητής του Πολυτεχνείου ενδιαφέρεται μόνο για το αποτέλεσμα, και τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να το πετύχει. Δεν ενδιαφέρεται σχεδόν ποτέ για το λόγο, για τον οποίο χρησιμοποιεί αυτή τη μεθοδολογία, και όχι κάποια άλλη. Δεν συμβαίνει, όμως, το ίδιο για τους φοιτητές του Μαθηματικού τμήματος, οι οποίοι, χωρίς να παραβλέπουν το υπολογιστικό μέρος των προβλημάτων, πρέπει να γνωρίζουν τι κρύβεται πίσω από τις διάφορες μεθοδολογίες.

Η Γραμμική Άλγεβρα, που αφορά ένα τμήμα Μαθηματικών, πρέπει να αποτελεί ταυτόχρονα και μια εισαγωγή σ' αυτό που ονομάζουμε μαθηματική αφαίρεση, με στόχο να βοηθήσει τους φοιτητές να εξοικειωθούν με τη μαθηματική σκέψη. Ο στόχος αυτός επιτυγχάνεται με τη λογική επιχειρηματολογία, και τη θεωρητική ανάπτυξη απλών εννοιών, προσιτών στους περισσότερους φοιτητές.

Το βιβλίο αυτό περιέχει τη διδακτέα ύλη που αντιστοιχεί στο υποχρεωτικό εξαμηνιαίο μάθημα Γραμμική Άλγεβρα Ι, που διδάσκεται στο Τμήμα Μαθηματικών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Στηρίζεται στις γνώσεις των μαθηματικών του Λυκείου, ενώ οι νέες έννοιες αναπτύσσονται σταδιακά με πολλά, αναλυτικά, και κατανοητά παραδείγματα.

Το βιβλίο «Γραμμική Άλγεβρα Ι» χωρίζεται σε έξι κεφάλαια. Το πρώτο περιλαμβάνει μια σύντομη εισαγωγή σε γνωστές και άλλες έννοιες, που είναι απαραίτητες για τη θεμελίωση του διανυσματικού χώρου. Από το δεύτερο κεφάλαιο και πέρα αρχίζει ουσιαστικά η μελέτη των διανυσματικών χώρων, που είναι το κύριο αντικείμενο της Γραμμικής Άλγεβρας. Στο δεύτερο κεφάλαιο ορίζεται η έννοια του διανυσματικού χώρου, και αναπτύσσονται τα βασικά εργαλεία για τη μελέτη τους. Στο τρίτο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια της γραμμικής συνάρτησης, η οποία βοηθά σημαντικά στη μελέτη και τη διαχείριση των διανυσματικών χώρων. Στη συνέχεια οι γραμμικές συναρτήσεις συσχετίζονται με τους πίνακες, με στόχο την ευκολότερη διαχείριση όχι μόνον των συναρτήσεων, αλλά και των διανυσματικών χώρων. Τέλος, εξετάζεται το θέμα της αλλαγής βάσης, και οι διάφορες μορφές πινάκων.

Η θεωρία εμπλουτίζεται με πολλά παραδείγματα, τα οποία αποσκοπούν στην καλύτερη κατανόηση των εννοιών της Γραμμικής Άλγεβρας. Κάθε παράγραφος συνοδεύεται από ασκήσεις, πολλές από τις οποίες είναι απλή εφαρμογή της θεωρίας, ενώ άλλες την επεκτείνουν.

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχει μια συλλογή ασκήσεων, οι οποίες στηρίζονται σε όλα τα θέματα που αναπτύσσονται στη θεωρία. Για κάθε μια απ' αυτές δίνεται αναλυτική υπόδειξη.

Θεσσαλονίκη – Δεκέμβριος 2003 Ευάγγελος Ψωμόπουλος

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1
Εισαγωγικές έννοιες

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε σε ορισμένες έννοιες, οι οποίες ίσως δεν έχουν άμεση σχέση με τους διανυσματικούς χώρους, όμως θα χρησιμοποιηθούν αρκετά κατά τη μελέτη τόσο των διανυσματικών χώρων, όσο και των γραμμικών συναρτήσεων. Αν και οι περισσότερες από τις έννοιες αυτές πρέπει να είναι γνωστές από τη μέση εκπαίδευση, εντούτοις θα πρέπει να μελετηθούν με προσοχή, ώστε να γίνει κατανοητή η χρήση τους στην περίπτωση των διανυσματικών χώρων.

1.1 Συμβολισμοί και συναρτήσεις

Τα παρακάτω σύνολα θα τα θεωρήσουμε γενικά γνωστά, αν και θα δούμε πολλές από τις ιδιότητές τους:

$\mathbb{N}$	το σύνολο των φυσικών αριθμών,
$\mathbb{Z}$	το σύνολο των ακεραίων αριθμών,
$\mathbb{Q}$	το σύνολο των ρητών αριθμών,
$\mathbb{R}$	το σύνολο των πραγματικών αριθμών, και
$\mathbb{C}$	το σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

Η σχέση που συνδέει τα παραπάνω σύνολα είναι γνωστή

$$\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R} \subsetneqq \mathbb{C}.$$

Η σχέση $A \subset B$ θα σημαίνει ότι κάθε στοιχείο του συνόλου A θα ανήκει και στο σύνολο B, χωρίς να αποκλείεται η ισότητα $A = B$. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι το σύνολο A είναι γνήσιο υποσύνολο του B, θα γράφουμε τη σχέση $A \subsetneqq B$.

Αν A και B είναι τυχόντα σύνολα, μια ***συνάρτηση*** ή ***απεικόνιση*** f από το σύνολο A στο σύνολο B, σχηματικά $f : A \longrightarrow B$, είναι μια αντιστοιχία των στοιχείων του συνόλου A στα στοιχεία του B τέτοια, ώστε σε κάθε στοιχείο $a \in A$ αντιστοιχεί ένα μοναδικό στοιχείο $b \in B$. Το στοιχείο αυτό b συμβολίζεται με $f(a)$. Αν ισχύει $f(a) = b$, θα λέμε ότι το b είναι η ***εικόνα*** του a δια της συνάρτησης f. Το σύνολο A λέγεται ***πεδίο ορισμού***, ενώ το σύνολο B λέγεται ***πεδίο τιμών*** της συνάρτησης f.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι μια συνάρτηση είναι τρία πράγματα μαζί: το πεδίο ορισμού A, το πεδίο τιμών B, και ο κανόνας αντιστοιχίας f. Οποιαδήποτε από τις τρεις αυτές οντότητες και αν αλλάξει θα έχουμε μια άλλη συνάρτηση. Αυτό σημαίνει ότι δύο συναρτήσεις

$$f : A \longrightarrow B \text{ και } g : \Gamma \longrightarrow \Delta,$$

θα είναι ***ίσες*** μόνον όταν ισχύουν $f = g$, $A = \Gamma$, και $B = \Delta$.

Μερικές φορές αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση χρησιμοποιώντας μόνο το γράμμα με το οποίο συμβολίζεται ο κανόνας αντιστοιχίας. Δηλαδή για συντομία, λέμε «η συνάρτηση f », χωρίς αυτό να είναι απόλυτα σωστό. Διότι, όπως είδαμε, μια συνάρτηση αποτελεί πακέτο τριών πραγμάτων. Συνήθως, όμως, χρησιμοποιούμε την ορολογία αυτή, όταν το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών είναι προφανή.

Από τον ορισμό της ισότητας συναρτήσεων προκύπτει ότι οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned} &\varphi_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ όπου } \varphi_1(x) = x^2, \text{ και} \\ &\varphi_2 : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty), \text{ όπου } \varphi_2(x) = x^2, \end{aligned}$$

δεν είναι ίσες, εφόσον δεν έχουν το ίδιο πεδίο τιμών.

Όπως είδαμε, μια συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$ απεικονίζει κάθε στοιχείο του A σε ένα και μοναδικό στοιχείο του συνόλου B. Επομένως, κάθε στοιχείο του A έχει κάποια εικόνα στο B, δεν είναι, όμως, απαραίτητο κάθε στοιχείο του B να είναι εικόνα κάποιου στοιχείου του συνόλου A. Για παράδειγμα, το στοιχείο -1 ανήκει στο πεδίο τιμών της συνάρτησης φ_1, που είδαμε προηγουμένως, αλλά δεν είναι εικόνα κανενός στοιχείου του A. Επίσης, δύο διαφορετικά στοιχεία του συνόλου A δεν είναι απαραίτητο να απεικονίζονται σε διαφορετικά στοιχεία του συνόλου B. Για παράδειγμα, τα στοιχεία 2 και -2 του πεδίου ορισμού της συνάρτησης φ_2 έχουν την ίδια εικόνα, εφόσον $\varphi_2(-2) = 4 = \varphi_2(2)$. Η παρατήρηση αυτή οδηγεί σε μεγαλύτερη εξειδίκευση του γενικού ορισμού της συνάρτησης.

Ο ρ ι σ μ ό ς 1.1.1 Μια συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$ θα λέγεται *αμφιμονότιμη* αν, για κάθε $a_1, a_2 \in A$, ισχύει

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2),$$

ή ισοδύναμα

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Με άλλα λόγια, μια αμφιμονότιμη συνάρτηση απεικονίζει διαφορετικά στοιχεία του πεδίου ορισμού σε διαφορετικά στοιχεία του πεδίου τιμών.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.1.2 Θεωρούμε τη συνάρτηση $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, που ορίζεται με τη σχέση $\psi(x) = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Εύκολα διαπιστώνεται ότι

$$\psi(a) = \psi(b) \Rightarrow e^a = e^b \Rightarrow a = b.$$

Επομένως η συνάρτηση ψ είναι αμφιμονότιμη.▲

Το παρακάτω παράδειγμα αφορά τη γνωστή συνάρτηση ημίτονο.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.1.3 Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [-2\pi, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, που ορίζεται με τη σχέση $g(x) = \text{ημ}x$, για κάθε $x \in [-2\pi, 2\pi]$. Είναι γνωστό ότι ισχύει

$$\text{ημ}(-\tfrac{\pi}{2}) = -\,\text{ημ}(\tfrac{\pi}{2}) = -1 = \text{ημ}(\tfrac{3\pi}{2}).$$

Άρα η συνάρτηση g δεν είναι αμφιμονότιμη, εφόσον διαφορετικές τιμές του πεδίου ορισμού έχουν την ίδια τιμή στο πεδίο τιμών.

Είναι προφανές ότι αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της g, τότε είναι δυνατόν να βρούμε μια αμφιμονότιμη συνάρτηση. Όμως, σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε μια άλλη συνάρτηση, και όχι τη συνάρτηση g, εφόσον θα αλλάξει το πεδίο ορισμού. Συγκεκριμένα, μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$g_1 : (0, \tfrac{\pi}{2}) \longrightarrow (-1, 1),$$

που ορίζεται με τη σχέση $g_1(x) = \text{ημ}x$, για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση g_1 είναι αμφιμονότιμη.▲

Ο ορισμός της αμφιμονότιμης συνάρτησης, θα μπορούσαμε να πούμε ότι κατά μία έννοια «διορθώνει» ένα λάθος του γενικού ορισμού της συνάρτησης. Ο επόμενος ορισμός «διορθώνει» ένα άλλο λάθος.

Ο ρ ι σ μ ό ς 1.1.4 Μια συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$ θα λέγεται *επί* αν για κάθε στοιχείο $b \in B$ υπάρχει κάποιο στοιχείο $a \in A$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f(a) = b$.

Δηλαδή, μια συνάρτηση είναι επί όταν κάθε στοιχείου του πεδίου τιμών της είναι εικόνα ενός τουλάχιστον στοιχείου του πεδίου ορισμού.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.1.5 Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ και } \varphi_2 : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty),$$

που είδαμε προηγουμένως, και ορίζονται με τις σχέσεις

$$\varphi_1(x) = x^2, \text{ και } \varphi_2(x) = x^2,$$

αντίστοιχα.

Η συνάρτηση φ_1 δεν είναι επί, διότι για το στοιχείο -2 του πεδίου τιμών της δεν υπάρχει κάποιο στοιχείο x στο πεδίο ορισμού, ώστε να ισχύει η σχέση $\varphi_1(x) = -2$. Αντίθετα, η συνάρτηση φ_2 είναι μια συνάρτηση επί, εφόσον για κάθε στοιχείο $a \in [0, \infty)$, υπάρχει ένα στοιχείο $x = \sqrt{a} \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $\varphi_2(x) = x^2 = a$.

Επιπλέον, καμία από τις συναρτήσεις αυτές δεν είναι αμφιμονότιμη, διότι ισχύουν $\varphi_1(-2) = 4 = \varphi_1(-2)$ και $\varphi_2(-2) = 4 = \varphi_2(-2)$. Δηλαδή, διαφορετικά στοιχεία του πεδίου ορισμού τους έχουν την ίδια εικόνα.$\blacktriangle$

Η ***ταυτοτική συνάρτηση*** ενός συνόλου A είναι η συνάρτηση

$$I : A \longrightarrow A,$$

η οποία απεικονίζει κάθε στοιχείο του A στον εαυτό του, δηλαδή $I(a) = a$, για κάθε $a \in A$. Επειδή η ταυτοτική συνάρτηση εξαρτάται από το σύνολο πάνω στο οποίο ορίζεται, πολλές φορές χρησιμοποιείται ο συμβολισμός I_A για την ταυτοτική συνάρτηση του συνόλου A. Όταν χρησιμοποιείται ο απλούστερος συμβολισμός I, θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί ως προς το σύνολο πάνω στο οποίο ορίζεται η ταυτοτική συνάρτηση.

Θεωρούμε, τώρα, μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$, ένα υποσύνολο A του X, και ένα υποσύνολο B του Y. Η ***εικόνα*** του συνόλου A δια της f ορίζεται να είναι το σύνολο

$$f(A) = \{b \in Y/b = f(a), \text{για κάποιο } a \in A\} = \{f(a)/a \in A\}.$$

Η ***αντίστροφη εικόνα*** του συνόλου B δια της f ορίζεται να είναι το σύνολο

$$f^{-1}(B) = \{a \in X/f(a) \in B\}.$$

Όπως βλέπουμε, η εικόνα ενός συνόλου A περιέχει τις επιμέρους εικόνες των στοιχείων του A, και είναι υποσύνολο του πεδίου τιμών της συνάρτησης. Η αντίστροφη εικόνα ενός συνόλου B περιέχει εκείνα τα στοιχεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης, των οποίων οι εικόνες ανήκουν στο σύνολο B, και φυσικά είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.1.6 Ας πάρουμε τη συνάρτηση $\varphi_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, που είδαμε στο Παράδειγμα 1.1.5, και ορίζεται με τη σχέση $\varphi_1(x) = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Προφανώς, τα σύνολα $A = (-2, 3)$ και $B = (-3, 1)$ είναι υποσύνολα του πεδίου ορισμού και του πεδίου τιμών αντίστοιχα. Η εικόνα του συνόλου A δια της φ_1 θα είναι

$$\varphi_1(A) = \{\varphi_1(a)/a \in A\} = \{a^2/a \in A\} = [0, 9).$$

Η αντίστροφη εικόνα του B δια της φ_1 θα είναι

$$\varphi_1^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}/\varphi_1(x) \in B\} = \{x \in \mathbb{R}/x^2 \in (-3, 1)\} = (-1, 1).\blacktriangle$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι ο συμβολισμός $f^{-1}(B)$ παριστά ένα συγκεκριμένο υποσύνολο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f, το οποίο ονομάσαμε αντίστροφη εικόνα του συνόλου B. Δεν σημαίνει ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της f, την οποία άλλωστε δεν έχουμε ορίσει ακόμη. Επιπλέον, η συνάρτηση φ_1, που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως, δεν μπορεί να αντιστραφεί, εφόσον $\varphi_1^{-1}(\{2\}) = \{-2, 2\}$, το γεγονός όμως αυτό δεν μας εμπόδισε να βρούμε την αντίστροφη εικόνα του συνόλου B.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.1.7 Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, που ορίζεται με τη σχέση $g(n) = 2n$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Είναι προφανές ότι το σύνολο

$$A = \{-3, 0, 2, 6, 7\}$$

είναι υποσύνολο του $\mathbb{Z}$, ενώ το σύνολο $B = (-2, 2)$ είναι υποσύνολο του πεδίου τιμών της συνάρτησης g. Η εικόνα του A θα είναι

$$\begin{aligned} g(A) &= \{g(a)/a \in A\} = \{g(-3), g(0), g(2), g(6), g(7)\} = \\ &= \{-6, 0, 4, 12, 14\}, \end{aligned}$$

και φυσικά είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Η αντίστροφη εικόνα του B είναι

$$g^{-1}(B) = \{n \in \mathbb{Z}/g(n) \in B\} = \{0\}. \blacktriangle$$

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$, και ένα υποσύνολο A του X. Από τον ορισμό της εικόνας του A προκύπτει ότι το σύνολο $B = f(A)$ είναι υποσύνολο του Y. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να μιλάμε για την αντίστροφη εικόνα του B, δηλαδή το σύνολο $f^{-1}(B) = f^{-1}(f(A))$. Έτσι, ξεκινώντας από ένα υποσύνολο A του X, βρίσκουμε ένα άλλο υποσύνολο $f^{-1}(f(A))$ του X. Το ερώτημα, βέβαια, είναι η σχέση που συνδέει τα δύο αυτά σύνολα.

Θ ε ώ ρ η μ α 1.1.8 Για κάθε συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$, και κάθε υποσύνολο A του X ισχύει $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Α π ό δ ε ι ξ η. Από τη συνεπαγωγή

$$a \in A \Rightarrow f(a) \in f(A) \Rightarrow a \in f^{-1}(f(A)),$$

προκύπτει η ζητούμενη σχέση $A \subset f^{-1}(f(A))$. $\blacksquare$

Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει ότι γενικά δεν ισχύει η ισότητα

$$A = f^{-1}(f(A)).$$

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.1.9 Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, που ορίζεται με τη σχέση $\varphi_1(\alpha) = \alpha^2$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. Το σύνολο $A = (0, 1)$ είναι φυσικά υποσύνολο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Εύκολα υπολογίζεται η εικόνα του συνόλου A

$$\varphi_1(A) = \{\varphi_1(\alpha)/\alpha \in A\} = \{\alpha^2/\alpha \in A\} = (0, 1).$$

Η αντίστροφη εικόνα του $\varphi_1(A)$ θα είναι

$$\varphi_1^{-1}(\varphi_1(A)) = \varphi_1^{-1}(0,1) = \{\alpha \in \mathbb{R}/\varphi_1(\alpha) \in (0,1)\} =$$
$$= \{\alpha \in \mathbb{R}/\alpha^2 \in (0,1)\} = (-1,1).$$

Βλέπουμε, δηλαδή, ότι ισχύει $A = (0,1) \subsetneqq (-1,1) = \varphi_1^{-1}(\varphi_1(A))$.▲

Όσον αφορά την αντίστροφη εικόνα, μπορούμε να κάνουμε ανάλογες σκέψεις. Ας θεωρήσουμε πάλι μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$, και ένα υποσύνολο B του πεδίου τιμών Y της συνάρτησης. Από τον ορισμό της αντίστροφης εικόνας προκύπτει ότι το σύνολο $A = f^{-1}(B)$ είναι υποσύνολο του X. Επομένως, μπορούμε να βρούμε την εικόνα του A, δηλαδή το υποσύνολο $f(A) = f(f^{-1}(B))$ του Y. Ξαναγυρίζουμε, δηλαδή, πίσω στο πεδίο τιμών της συνάρτησης, από όπου ξεκινήσαμε. Το ερώτημα είναι και πάλι η σχέση που συνδέει τα σύνολα B και $f(f^{-1}(B))$.

Θ ε ώ ρ η μ α 1.1.10 Για κάθε συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$, και κάθε υποσύνολο B του Y ισχύει $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Α π ό δ ε ι ξ η. Θεωρούμε ένα στοιχείο α του συνόλου $f(f^{-1}(B))$. Από τον ορισμό της εικόνας ενός συνόλου προκύπτει ότι θα είναι $\alpha = f(\beta)$, για κάποιο στοιχείο $\beta \in f^{-1}(B)$. Τότε, όμως, από τον ορισμό της αντίστροφης εικόνας θα έχουμε $f(\beta) \in B$. Δηλαδή θα ισχύει $\alpha = f(\beta)$, όπου $f(\beta) \in B$, οπότε προκύπτει $\alpha \in B$. ■

Στην προηγούμενη σχέση, η ισότητα και πάλι δεν ισχύει γενικά. Η συνάρτηση φ_1 που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως μπορεί να μας δώσει ένα παράδειγμα.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.1.11 Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, που ορίζεται με τη σχέση $\varphi_1(a) = a^2$, και το υποσύνολο $B = (-1,1)$ του πεδίου τιμών της συνάρτησης. Η αντίστροφη εικόνα του B είναι

$$\varphi_1^{-1}(B) = \{a \in \mathbb{R}/\varphi_1(a) \in B\} = \{a \in \mathbb{R}/a^2 \in (-1,1)\} = (-1,1).$$

Η εικόνα του συνόλου $\varphi_1^{-1}(B)$ θα είναι

$$\varphi_1(\varphi_1^{-1}(B)) = \varphi_1(-1,1) = \{\varphi_1(a)/a \in (-1,1)\} =$$
$$= \{a^2/a \in (-1,1)\} = [0,1).$$

Επομένως, θα ισχύει $\varphi_1(\varphi_1^{-1}(B)) \subsetneqq B$.▲

Οι σχέσεις που είδαμε στα δύο παραπάνω θεωρήματα και ισχύουν για κάθε συνάρτηση, μπορούν να γίνουν ισότητες μόνον όταν οι συναρτήσεις έχουν επιπλέον ιδιότητες. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το εξής.

Θ ε ώ ρ η μ α 1.1.12 Μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$ είναι αμφιμονότιμη αν και μόνον αν ισχύει $A = f^{-1}(f(A))$, για κάθε υποσύνολο A του X. Μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$ είναι επί αν και μόνον αν ισχύει $f(f^{-1}(B)) = B$, για κάθε υποσύνολο B του Y.

Α π ό δ ε ι ξ η. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αμφιμονότιμη, και θα δείξουμε ότι ισχύει $A = f^{-1}(f(A))$, για κάθε υποσύνολο A του X. Επειδή για κάθε συνάρτηση ισχύει η σχέση $A \subset f^{-1}(f(A))$, είναι αρκετό να δείξουμε ότι ισχύει και η σχέση $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Αν $a \in f^{-1}(f(A))$, τότε προφανώς θα έχουμε $f(a) \in f(A)$. Δηλαδή πρέπει να ισχύει $f(a) = f(a')$, για κάποιο $a' \in A$. Από την υπόθεση η συνάρτηση f είναι αμφιμονότιμη, άρα προκύπτει $a = a'$, όπου $a' \in A$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση $A = f^{-1}(f(A))$, για κάθε υποσύνολο A του X. Θέλουμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι αμφιμονότιμη. Έστω ότι είναι $f(a_1) = f(a_2)$. Τότε θα έχουμε

$$f(a_1) \in f(\{a_2\}) \Rightarrow a_1 \in f^{-1}(f(\{a_2\})).$$

Από την υπόθεση ισχύει $f^{-1}(f(\{a_2\})) = \{a_2\}$, οπότε θα πρέπει $a_1 \in \{a_2\}$, δηλαδή θα είναι $a_1 = a_2$.

Υποθέτουμε, τώρα, ότι η συνάρτηση f είναι επί, και θα δείξουμε ότι ισχύει

$$f(f^{-1}(B)) = B, \text{ για κάθε υποσύνολο } B \text{ του } Y.$$

Επειδή για κάθε συνάρτηση ισχύει η σχέση $f(f^{-1}(B)) \subset B$, είναι αρκετό να δείξουμε ότι ισχύει και η σχέση $B \subset f(f^{-1}(B))$. Αν $b \in B$, τότε θα υπάρχει κάποιο στοιχείο $a \in X$ τέτοιο, ώστε να έχουμε $f(a) = b$, εφόσον η συνάρτηση είναι επί. Άρα προκύπτει

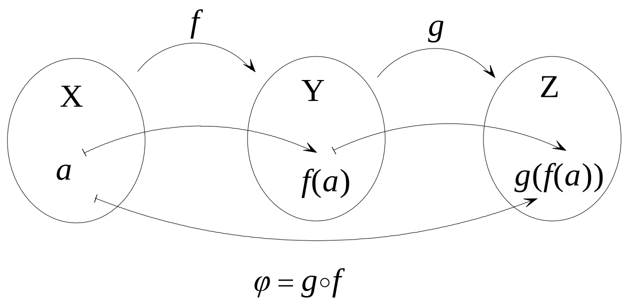
$$b = f(a) \in B \Rightarrow a \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(a) \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow b \in f(f^{-1}(B)),$$

δηλαδή θα έχουμε $B \subset f(f^{-1}(B))$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ισχύει $f(f^{-1}(B)) = B$, για κάθε υποσύνολο B του Y. Αν b είναι τυχόν στοιχείο του Y, τότε για το μονοσύνολο $\{b\}$ θα έχουμε

$f(f^{-1}(\{b\})) = \{b\}$. Επομένως, $b \in f(f^{-1}(\{b\}))$, δηλαδή θα πρέπει να είναι $b = f(a)$, για κάποιο στοιχείο $a \in f^{-1}(\{b\}) \subset X$. Επομένως για κάθε στοιχείο $b \in Y$ υπάρχει κάποιο στοιχείο $a \in X$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f(a) = b$, οπότε η συνάρτηση f είναι επί. ■

Θεωρούμε, τώρα, δύο συναρτήσεις $f : X \longrightarrow Y$, και $g : Y \longrightarrow Z$. Είναι προφανές ότι αν a είναι ένα στοιχείο του X, τότε το $f(a)$ είναι ένα στοιχείο του Y, οπότε με τη συνάρτηση g το στοιχείο $f(a)$ θα απεικονιστεί στο στοιχείο $g(f(a))$ του Z.



Η διαδικασία αυτή ορίζει ασφαλώς μια νέα συνάρτηση $\varphi : X \longrightarrow Z$, που ορίζεται με τη σχέση $\varphi(a) = g(f(a))$, για κάθε $a \in X$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται ***σύνθεση των συναρτήσεων*** f, g, και συμβολίζεται με $g \circ f$.

Θ ε ώ ρ η μ α 1.1.13 Αν $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$, και $h : Z \longrightarrow W$ είναι τυχούσες συναρτήσεις, τότε θα ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Δηλαδή ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα στη σύνθεση συναρτήσεων.

Α π ό δ ε ι ξ η. Επειδή, για κάθε στοιχείο a του X ισχύει

$$[h \circ (g \circ f)](a) = [h(g \circ f)](a) = h(g(f(a))), \text{ και}$$
$$[(h \circ g) \circ f](a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))),$$

προκύπτει αμέσως η ισότητα $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. ■

Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει ότι η σύνθεση συναρτήσεων δεν έχει την αντιμεταθετική ιδιότητα, ούτε μπορούν να εφαρμοστούν οι νόμοι της απλοποίησης.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.1.14 Έστω f, g και h οι συναρτήσεις με πεδίο ορισμού και τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, που ορίζονται με τις σχέσεις:

$$f(x) = -x, \ g(x) = |x|, \text{ και } h(x) = x^2$$

αντίστοιχα. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα έχουμε:

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(|x|) = |x|^2 = x^2,$$

και

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(-x) = (-x)^2 = x^2.$$

Δηλαδή ισχύει $(h \circ g)(x) = (h \circ f)(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι ενώ ισχύει $h \circ g = h \circ f$, έχουμε $g \neq f$. Άρα οι κανόνες απαλοιφής για τη σύνθεση συναρτήσεων δεν ισχύουν. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(-x) = |-x| = |x|,$$

και

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(|x|) = -|x|.$$

Αυτό σημαίνει ότι $f \circ g \neq g \circ f$, δηλαδή η αντιμεταθετική ιδιότητα για τη σύνθεση συναρτήσεων δεν ισχύει γενικά.▲

Έστω $f : X \longrightarrow Y$ τυχούσα συνάρτηση, και $I_X : X \longrightarrow X$ η ταυτοτική συνάρτηση του X. Από τη σχέση $(f \circ I_X)(x) = f(I_X(x)) = f(x)$, για κάθε $x \in X$, προκύπτει ότι οι συναρτήσεις $f \circ I_X$ και f έχουν τον ίδιο κανόνα αντιστοιχίας. Επειδή προφανώς έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και το ίδιο πεδίο τιμών, συμπεραίνουμε ότι οι δύο αυτές συναρτήσεις είναι ίσες, δηλαδή $f \circ I_X = f$. Ασφαλώς ανάλογη ισότητα ισχύει και για την ταυτοτική συνάρτηση του Y. Συγκεκριμένα θα έχουμε $I_Y \circ f = f$, όπου I_Y η ταυτοτική συνάρτηση του Y. Έτσι, θα έχουμε την ισότητα

$$f \circ I_X = f = I_Y \circ f.$$

Θ ε ώ ρ η μ α 1.1.15 Αν $f : X \longrightarrow Y$ και $g : Y \longrightarrow Z$ είναι δύο αμφιμονότιμες συναρτήσεις, τότε και η σύνθεση $g \circ f : X \longrightarrow Z$, είναι επίσης αμφιμονότιμη συνάρτηση.

Α π ό δ ε ι ξ η. Έστω x_1 και x_2 τυχόντα στοιχεία του X. Υποθέτουμε ότι ισχύει $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Τότε θα έχουμε $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, και επειδή η g είναι αμφιμονότιμη προκύπτει $f(x_1) = f(x_2)$. Όμως, η συνάρτηση f είναι επίσης αμφιμονότιμη, οπότε θα είναι $x_1 = x_2$. Δηλαδή η σύνθεση $g \circ f$ είναι μια αμφιμονότιμη συνάρτηση. ∎

Θ ε ώ ρ η μ α 1.1.16 Αν $f : X \longrightarrow Y$ και $g : Y \longrightarrow Z$ είναι δύο επί συναρτήσεις, τότε και η σύνθεση των συναρτήσεων $g \circ f : X \longrightarrow Z$ είναι επίσης επί συνάρτηση.

Α π ό δ ε ι ξ η. Επειδή η συνάρτηση g είναι επί, για κάθε $z \in Z$ θα υπάρχει κάποιο στοιχείο $y \in Y$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $g(y) = z$. Όμως, και η συνάρτηση f είναι επί, άρα για το στοιχείο y του Y θα υπάρχει κάποιο στοιχείο x του X τέτοιο, ώστε να ισχύει $f(x) = y$. Επομένως, για κάθε στοιχείο z του Z υπάρχει ένα στοιχείο $x \in X$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z.$$

Αυτό σημαίνει ότι η σύνθεση των συναρτήσεων είναι μια επί συνάρτηση. ∎

Θεωρούμε, τώρα, μια αμφιμονότιμη και επί συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$. Εφόσον η συνάρτηση είναι επί, για κάθε στοιχείο $y \in Y$ θα υπάρχει κάποιο στοιχείο $x \in X$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f(x) = y$. Το στοιχείο αυτό x είναι μοναδικό. Πράγματι, αν x' είναι ένα άλλο στοιχείο του X για το οποίο ισχύει $f(x') = y$, τότε από την ισότητα $f(x) = y = f(x')$ και το γεγονός ότι η συνάρτηση f είναι αμφιμονότιμη, προκύπτει ότι θα είναι $x = x'$. Επομένως, σε κάθε στοιχείο $y \in Y$ αντιστοιχεί ένα μοναδικό στοιχείο $x \in X$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f(x) = y$. Η διαδικασία αυτή ορίζει μια νέα συνάρτηση από το σύνολο Y στο σύνολο X. Η συνάρτηση αυτή λέγεται ***αντίστροφη*** της f, και συμβολίζεται με f^{-1}. Άρα μπορούμε να πούμε ότι:

Θ ε ώ ρ η μ α 1.1.17 Σε κάθε συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$ που είναι αμφιμονότιμη και επί αντιστοιχεί η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : Y \longrightarrow X$, η οποία ορίζεται με τη σχέση

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι για να υπάρχει η αντίστροφη μιας συνάρτησης πρέπει η συνάρτηση αυτή να είναι αμφιμονότιμη και επί. Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι:

Θ ε ώ ρ η μ α 1.1.18 Αν $f : X \longrightarrow Y$ είναι μια αμφιμονότιμη και επί συνάρτηση, τότε η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ είναι και αυτή αμφιμονότιμη και επί, και επιπλέον ισχύουν

$$f \circ f^{-1} = I_Y \text{ και } f^{-1} \circ f = I_X.$$

Α π ό δ ε ι ξ η. Αν x είναι τυχόν στοιχείο του X, τότε το στοιχείο $y = f(x)$ ανήκει στο Y. Από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης προκύπτει ότι θα είναι $f^{-1}(y) = x$. Άρα για κάθε $x \in X$ υπάρχει κάποιο στοιχείο $y \in Y$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f^{-1}(y) = x$, δηλαδή η αντίστροφη συνάρτηση είναι επί.

Υποθέτουμε, τώρα, ότι ισχύει $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$, και θα δείξουμε ότι $y_1 = y_2$. Αν ισχύει $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = a$, από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης προκύπτει ότι θα έχουμε $y_1 = f(a) = y_2$, δηλαδή η συνάρτηση f^{-1} είναι αμφιμονότιμη. Τέλος, από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1})(y) &= f(f^{-1}(y)) = f(x) = y = I_Y(y), \text{ για κάθε } y \in Y, \text{ και} \\ (f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x = I_X(x), \text{ για κάθε } x \in X, \end{aligned}$$

προκύπτουν οι ισότητες $f \circ f^{-1} = I_Y$ και $f^{-1} \circ f = I_X$. ■

Θ ε ώ ρ η μ α 1.1.19 Αν για τη συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$ υπάρχει συνάρτηση $g : B \longrightarrow A$ τέτοια, ώστε $f \circ g = I_B$ και $g \circ f = I_A$, τότε η συνάρτηση f είναι αμφιμονότιμη και επί, και ισχύει $g = f^{-1}$.

Α π ό δ ε ι ξ η. Αν a, $a' \in A$, τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} f(a) = f(a') \Rightarrow g(f(a)) = g(f(a') \Rightarrow (g \circ f)(a) = (g \circ f)(a') \Rightarrow \\ \Rightarrow I_A(a) = I_A(a') \Rightarrow a = a'. \end{aligned}$$

Δηλαδή η συνάρτηση f είναι αμφιμονότιμη. Επιπλέον, για κάθε στοιχείο b του B, υπάρχει στοιχείο $a = g(b) \in A$, τέτοιο ώστε να ισχύει η σχέση

$$f(a) = f(g(b)) = (f \circ g)(b) = I_B(b) = b.$$

Άρα η f είναι και συνάρτηση επί, οπότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f, και ισχύει

$$g = I_A \circ g = (f^{-1} \circ f) \circ g = f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ I_B = f^{-1},$$

δηλαδή έχουμε $g = f^{-1}$. ■

Θεωρούμε, τώρα, μια αμφιμονότιμη και επί συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$. Όπως είδαμε, για τη συνάρτηση αυτή θα υπάρχει η αντίστροφη $f^{-1} : Y \longrightarrow X$. Επειδή η συνάρτηση $g = f^{-1}$ είναι επίσης αμφιμονότιμη και επί, θα υπάρχει και η αντίστροφή της $g^{-1} : X \longrightarrow Y$, η οποία θα ορίζεται με τη σχέση $g^{-1}(x) = y \Longleftrightarrow g(y) = x$. Δηλαδή θα έχουμε

$$g^{-1}(x) = y \Longleftrightarrow g(y) = x \Longleftrightarrow f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y,$$

οπότε οι συναρτήσεις g^{-1} και f έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τιμών, και τον ίδιο κανόνα αντιστοιχίας. Άρα θα είναι ίσες, δηλαδή θα έχουμε

$$(f^{-1})^{-1} = g^{-1} = f.$$

Θ ε ώ ρ η μ α 1.1.20 Αν $f : X \longrightarrow Y$ και $g : Y \longrightarrow X$ είναι δύο αμφιμονότιμες και επί συναρτήσεις, τότε και η σύνθεση $g \circ f : X \longrightarrow Z$ είναι μια αμφιμονότιμη και επί συνάρτηση, και επιπλέον ισχύει

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Α π ό δ ε ι ξ η. Αρχικά παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με τα Θεωρήματα 1.1.15 και 1.1.16 η σύνθεση $g \circ f$ είναι μια αμφιμονότιμη και επί συνάρτηση, εφόσον οι επιμέρους συναρτήσεις είναι αμφιμονότιμες και επί. Άρα η αντίστροφη συνάρτηση $(g \circ f)^{-1} : Z \longrightarrow X$ ορίζεται. Επίσης, παρατηρούμε ότι ισχύουν

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ (I_Y \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = I_Z,$$

και

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ (I_Y \circ f) = f^{-1} \circ f = I_X.$$

Επομένως θα έχουμε $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. ■

1.2 Ασκήσεις

Ά σ κ η σ η 1.2.1 Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, και $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, που ορίζονται με τις σχέσεις $\varphi(x) =$ημx, και $\psi(x) = 2x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η σύνθεση $\varphi \circ \psi$, όπως επίσης και η σύνθεση $\psi \circ \varphi$.

Ά σ κ η σ η 1.2.2 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, που ορίζεται με τη σχέση $f(x) = |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και τα υποσύνολα $A = (-4, 7)$, και $B = (-10, 5)$. Να βρεθεί η εικόνα $f(A)$, καθώς και η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(B)$ των συνόλων A και B αντίστοιχα.

Ά σ κ η σ η 1.2.3 Θεωρούμε το σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4\}$, και τις συναρτήσεις $f : A \longrightarrow A$ και $g : A \longrightarrow A$ που ορίζονται με τις σχέσεις

$$f(1) = 3,\ f(2) = 2,\ f(3) = 1,\ f(4) = 4, \text{ και}$$
$$g(1) = 4,\ g(2) = 1,\ g(3) = 2,\ g(4) = 3.$$

Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

Ά σ κ η σ η 1.2.4 Δίνεται μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$, και τα υποσύνολα A και B του πεδίου ορισμού X της f. Δείξτε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$(\alpha)\ f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B), \text{ και } (\beta)\ f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι η ισότητα δεν ισχύει γενικά στη σχέση (α).

Ά σ κ η σ η 1.2.5 Δίνεται μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$, και τα υποσύνολα A και B του πεδίου τιμών Y της f. Δείξτε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$(\alpha)\ f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B), \text{ και } (\beta)\ f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Ά σ κ η σ η 1.2.6 Έστω $f : A \longrightarrow B$ και $g : B \longrightarrow C$ τυχούσες συναρτήσεις. Δείξτε ότι

(i) αν η συνάρτηση $g \circ f$ είναι αμφιμονότιμη, τότε η f είναι αμφιμονότιμη,

(ii) αν η συνάρτηση $g \circ f$ είναι επί, τότε η g είναι επί.

Ά σ κ η σ η 1.2.7 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$h_1 : A \longrightarrow B, h_2 : A \longrightarrow B, f : B \longrightarrow \Gamma, g_1 : \Gamma \longrightarrow \Delta, \text{ και } g_2 : \Gamma \longrightarrow \Delta.$$

(i) Αν ισχύει $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ και η συνάρτηση f είναι επί, δείξτε ότι θα πρέπει να ισχύει $g_1 = g_2$.

(ii) Αν ισχύει $f \circ h_1 = f \circ h_2$ και η συνάρτηση f είναι αμφιμονότιμη, δείξτε ότι θα πρέπει να ισχύει $h_1 = h_2$.

Ά σ κ η σ η 1.2.8 Έστω X και Y δύο πεπερασμένα σύνολα με m και n στοιχεία αντίστοιχα. Να υπολογιστεί ο αριθμός όλων των διαφορετικών συναρτήσεων $\varphi : X \longrightarrow Y$.

Ά σ κ η σ η 1.2.9 Έστω X και Y δύο πεπερασμένα σύνολα με m και n στοιχεία αντίστοιχα. Αν $m < n$, να υπολογιστεί ο αριθμός όλων των διαφορετικών αμφιμονότιμων συναρτήσεων $\varphi : X \longrightarrow Y$.

Ά σ κ η σ η 1.2.10 Έστω X και Y δύο πεπερασμένα σύνολα με m και n στοιχεία αντίστοιχα. Αν υπάρχει μια αμφιμονότιμη συνάρτηση $\varphi : X \longrightarrow Y$, δείξτε ότι ισχύει $m < n$. Αν υπάρχει μια επί συνάρτηση $\psi : X \longrightarrow Y$, δείξτε ότι πρέπει να ισχύει $m > n$.

1.3 Νόμοι σύνθεσης ή πράξεις

Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο A, και το καρτεσιανό γινόμενο

$$A \times A = \{(a_1, a_2)/a_1, a_2 \in A\},$$

το οποίο αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (a_1, a_2), καθώς τα στοιχεία a_1, a_2 διατρέχουν το σύνολο A.

Κάθε συνάρτηση $f : A \times A \longrightarrow A$ λέγεται ***εσωτερικός νόμος σύνθεσης*** ή ***πράξη*** του A. Ο όρος πράξη του συνόλου A προκύπτει από το γεγονός ότι η συνάρτηση f αντιστοιχεί κάθε διατεταγμένο ζεύγος στοιχείων του A σε ένα στοιχείο του συνόλου A. Δηλαδή η f χρησιμοποιεί δύο στοιχεία του A και αποδίδει ένα άλλο. Το ίδιο ακριβώς κάνει και η πρόσθεση πραγματικών αριθμών. Σε κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών αντιστοιχεί ένας άλλος πραγματικός αριθμός, που είναι το άθροισμα των δύο πρώτων.

Ένα μη κενό σύνολο A εφοδιασμένο με μια τουλάχιστον πράξη λέγεται ***αλγεβρική δομή*** ή ***αλγεβρικό σύστημα***. Συνήθως, αν έχουμε μια πράξη $*$ πάνω σε ένα σύνολο A, δηλαδή μια συνάρτηση $* : A \times A \longrightarrow A$, αντί του συμβολισμού $*(a, b)$, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $a*b$, για να συμβολίσουμε την εικόνα του $(a, b) \in A \times A$ δια της συνάρτησης $*$. Φυσικά, η εικόνα $a * b$ είναι ένα στοιχείο του A και λέγεται ***αποτέλεσμα*** της πράξης $*$ στο ζεύγος (a, b).

Ας δούμε κάποιους γνωστούς ορισμούς που αφορούν γενικά τις πράξεις. Θεωρούμε μια πράξη $*$ σε ένα μη κενό σύνολο A. Η πράξη $*$ θα λέγεται ***αντιμεταθετική***, όταν ισχύει $a * b = b * a$, για όλα τα στοιχεία $a, b \in A$. Η πράξη $*$ θα λέγεται ***προσεταιριστική***, όταν ισχύει $a * (b * c) = (a * b) * c$, για όλα τα στοιχεία a, b, c του A. Αν υπάρχει κάποιο στοιχείο e στο σύνολο A τέτοιο, ώστε να ισχύει $e * a = a = a * e$, για κάθε στοιχείο $a \in A$, τότε το στοιχείο e θα λέγεται ***ουδέτερο στοιχείο*** της πράξης αυτής. Ένα στοιχείο a' του A θα λέγεται ***συμμετρικό*** του $a \in A$, όταν ισχύει η σχέση

$$a * a' = e = a' * a.$$

$\boxed{\textbf{Π α ρ ά δ ε ι γ μ α}}$ **1.3.1** Έστω A τυχόν σύνολο με περισσότερα από ένα στοιχεία. Στο σύνολο αυτό ορίζουμε την πράξη $*$ με τη σχέση

$$a * b = a, \text{ για κάθε } a, b \in A.$$

Αν a, b, c είναι τυχόντα στοιχεία του A, από τις σχέσεις

$$a * (b * c) = a * b = a \text{ και } (a * b) * c = a * c = a,$$

προκύπτει ότι η πράξη αυτή είναι προσεταιριστική.

Επειδή το σύνολο A έχει περισσότερα από ένα στοιχεία, θα υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαφορετικά στοιχεία a_1 και a_2 του A. Τότε θα ισχύει

$$a_1 * a_2 = a_1 \neq a_2 = a_2 * a_1.$$

Αυτό σημαίνει ότι η πράξη $*$ δεν είναι αντιμεταθετική.

Η πράξη αυτή δεν έχει ουδέτερο στοιχείο, εφόσον δεν υπάρχει κανένα στοιχείο e του A τέτοιο, ώστε να ισχύει $e*a = a$, για κάθε $a \in A$. Φυσικά, η απουσία ουδετέρου στοιχείου δείχνει ότι δεν μπορούμε να περιμένουμε ούτε συμμετρικό στοιχείο ως προς την πράξη αυτή.▲

Το επόμενο παράδειγμα δίνει μια νέα πράξη στο σύνολο $\mathbb{Z}^+$ των θετικών ακεραίων.

$\boxed{\textbf{Παράδειγμα}}$ **1.3.2** Στο σύνολο $\mathbb{Z}^+$ όλων των θετικών ακεραίων ορίζουμε την πράξη $\circ$ με τον εξής τρόπο:

$$m \circ n = m^n, \text{ για κάθε } m, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Είναι προφανές ότι η $\circ$ είναι μια πράξη στο σύνολο $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$, εφόσον συνδυάζει δύο θετικούς ακεραίους, και αποδίδει ένα άλλο. Όμως, η πράξη αυτή δεν είναι ούτε προσεταιριστική, ούτε αντιμεταθετική. Είναι πολύ εύκολο να διαπιστωθεί το γεγονός αυτό. Για παράδειγμα οι σχέσεις

$$\begin{aligned}(2 \circ 1) \circ 3 &= 2^1 \circ 3 = 2 \circ 3 = 2^3 = 8, \text{ και}\\ 2 \circ (1 \circ 3) &= 2 \circ 1^3 = 2 \circ 1 = 2^1 = 2,\end{aligned}$$

δείχνουν ότι δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, ενώ η σχέση

$$4 \circ 1 = 4^1 = 4 \neq 1 = 1^4 = 1 \circ 4,$$

αποδεικνύει ότι δεν ισχύει ούτε η αντιμεταθετική ιδιότητα.

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι η πράξη αυτή δεν έχει ούτε ουδέτερο στοιχείο.▲

Θεωρούμε, τώρα, ένα μη κενό σύνολο A, και μια πράξη $*$ πάνω σ' αυτό. Η πράξη αυτή θεωρείται γνωστή, οπότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί, μόνον όταν είναι γνωστό το αποτέλεσμα $a * b$, για όλα τα στοιχεία $a, b \in A$. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους: είτε να ορίσουμε το αποτέλεσμα $a * b$, για όλα τα ζεύγη στοιχείων a, b του A, είτε να είναι γνωστός ένας «κανόνας» με βάση τον οποίο μπορεί να βρεθεί το αποτέλεσμα που μας ενδιαφέρει.

Όταν το σύνολο A είναι πεπερασμένο, μπορούμε σχετικά εύκολα να ορίσουμε το αποτέλεσμα για κάθε ένα ζεύγος στοιχείων του συνόλου αυτού. Για το σκοπό αυτό σχηματίζουμε ένα πίνακα, στην πρώτη γραμμή και πρώτη στήλη του οποίου αναγράφουμε όλα τα στοιχεία του συνόλου A με την ίδια σειρά. Στη διασταύρωση της γραμμής, που ορίζεται από ένα στοιχείο a, και της στήλης, που ορίζεται από ένα στοιχείο

b, τοποθετούμε το αποτέλεσμα $a * b$. Στον παρακάτω πίνακα

$$\begin{array}{c|ccccc}
\circ & \cdots & x & \cdots & y & \cdots \\
\hline
\vdots & & \vdots & & \vdots & \\
x & \cdots & \cdots & \cdots & w & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \\
y & \cdots & z & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

βλέπουμε τον πίνακα της πράξης $\circ$ πάνω σε κάποιο σύνολο, το οποίο περιέχει, μεταξύ άλλων, και τα στοιχεία x και y. Από τον πίνακα αυτό προκύπτει ότι ισχύει $x \circ y = w$ και $y \circ x = z$. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να ορίσουμε οποιαδήποτε πράξη σ' ένα πεπερασμένο σύνολο. Το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε είναι να συμπληρώσουμε όλες τις θέσεις του πίνακα με στοιχεία του συνόλου αυτού.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α **1.3.3** Θεωρούμε το σύνολο $X = \{e, a, b, c, d\}$, το οποίο αποτελείται από πέντε διαφορετικά τυχαία στοιχεία. Στο σύνολο αυτό ορίζουμε την πράξη $*$ με τον παρακάτω πίνακα

$$\begin{array}{c|ccccc}
* & e & a & b & c & d \\
\hline
e & e & a & b & c & d \\
a & a & b & c & d & e \\
b & b & c & d & e & a \\
c & c & d & e & a & b \\
d & d & e & a & b & c
\end{array}$$

Παρατηρούμε ότι το στοιχείο e είναι ένα ουδέτερο στοιχείο της πράξης αυτής, εφόσον αφήνει αμετάβλητα όλα τα στοιχεία του X. Για παράδειγμα, έχουμε $e*b = b = b*e$.

Επίσης, η πράξη είναι αντιμεταθετική, δηλαδή ισχύει $x * y = y * x$ για όλα τα στοιχεία $x, y \in X$. Το γεγονός αυτό ελέγχεται εύκολα με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα. Το ίδιο εύκολα μπορούμε να ελέγξουμε και την προσεταιριστική ιδιότητα, η οποία επίσης ισχύει.

Τέλος, κάθε στοιχείο του συνόλου X έχει συμμετρικό ως προς την πράξη αυτή. Για παράδειγμα, το συμμετρικό του a είναι το στοιχείο d, εφόσον ισχύει $a * d = e = d * a$, ενώ το συμμετρικό του στοιχείο b είναι το c, διότι $b * c = e = c * b$.▲

Συνήθως, όταν σε ένα σύνολο έχουμε κάποια πράξη, δίνουμε σ' αυτή συγκεκριμένο όνομα για λόγους ευκολίας. Αυτό είναι περισσότερο κατανοητό όταν στο ίδιο σύνολο έχουμε δύο πράξεις. Έτσι, θα χρησιμοποιούμε το όνομα της πρόσθεσης ή του πολλαπλασιασμού, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι πρόκειται για τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αριθμών. Ασφαλώς μαζί με το όνομα θα χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς και την αντίστοιχη ορολογία.

Αν μια πράξη την ονομάσουμε πρόσθεση, τότε θα χρησιμοποιούμε τους εξής συμβολισμούς:

(i) $a + b$ για να συμβολίζουμε το αποτέλεσμα (άθροισμα) της πράξης,

(ii) $-a$ για να συμβολίζουμε το συμμετρικό στοιχείο του a, το οποίο θα ονομάζουμε αντίθετο του a, και

(iii) 0 για να συμβολίζουμε το ουδέτερο στοιχείο, το οποίο θα ονομάζουμε ***μηδενικό στοιχείο*** ή ***μηδέν***.

Αν μια πράξη την ονομάσουμε πολλαπλασιασμό, τότε θα χρησιμοποιούμε τους εξής συμβολισμούς:

(i) ab ή $a \cdot b$ για να συμβολίζουμε το αποτέλεσμα (γινόμενο) της πράξης,

(ii) a^{-1} για να συμβολίζουμε το συμμετρικό στοιχείο του a, το οποίο θα ονομάζουμε ***αντίστροφο*** του a, και

(iii) 1 για να συμβολίζουμε το ουδέτερο στοιχείο, το οποίο θα ονομάζουμε ***μοναδιαίο στοιχείο***.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.3.4 Θεωρούμε το σύνολο $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Στο σύνολο αυτό ορίζουμε μια πράξη , την οποία ονομάζουμε πρόσθεση, με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα.

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3