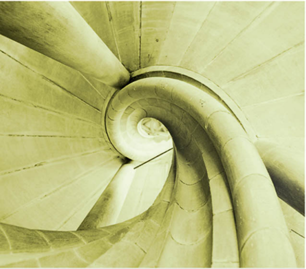
Ευάγγελος Ψωμόπουλος

Εισαγωγή στην Άλγεβρα



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Πρόλογος

Τα πρώτα μαθήματα, σχεδόν σε όλους τους κλάδους των μαθηματικών, περιέχουν, ή θεωρούν γνωστές, εισαγωγικές έννοιες που αφορούν σύνολα, συναρτήσεις, σχέσεις ισοδυναμίας, αλγεβρικές δομές, κλπ. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, ο φοιτητής να διαβάζει σε διαφορετικά μαθήματα παρόμοιες έννοιες. Το μάθημα «Εισαγωγή στην Άλγεβρα» περιέχει όλα αυτά τα κοινά στοιχεία, με στόχο να απαλλάξει τα υπόλοιπα μαθήματα, από ανάλογες εισαγωγές.

Ο δεύτερος στόχος του μαθήματος αυτού είναι να εφοδιάσει το φοιτητή με το κατάλληλο μαθηματικό υπόβαθρο, ώστε να αντιμετωπίσει με μεγαλύτερη ευκολία άλλα περισσότερο θεωρητικά μαθήματα. Έννοιες απλές, και συχνά γνωστές, γενικεύονται ώστε να γίνουν πιο εύχρηστες, και πιο αποτελεσματικές.

Οι αποδείξεις των προτάσεων δίνονται όχι τόσο για να πειστεί ο αναγνώστης για την αλήθεια της πρότασης, όσο για να διαπιστώσει τη λογική σειρά των επιχειρημάτων που οδηγούν βήμα-βήμα από την υπόθεση στο επιθυμητό συμπέρασμα. Η διαδικασία αυτή είναι εξαιρετικά σημαντική, και αποτελεί την ουσία των μαθηματικών. Η απόδειξη είναι εκείνη που θα εκπαιδεύσει τον αναγνώστη, και θα του δώσει το μαθηματικό υπόβαθρο που απαιτείται, ώστε να μπορεί να αναλύει ένα πρόβλημα, και να προσεγγίζει σιγά-σιγά τη λύση του χρησιμοποιώντας λογικά επιχειρήματα.

Το βιβλίο «Εισαγωγή στην Άλγεβρα» περιέχει τέσσερα κεφάλαια. Το πρώτο αφορά κυρίως τα σύνολα, τις συναρτήσεις, και τις σχέσεις ισοδυναμίας, και διάταξης. Το δεύτερο μελετά τους φυσικούς, και τους ακέραιους αριθμούς, επικεντρώνοντας το ενδιαφέρον στους πρώτους αριθμούς, και τη διαιρετότητα ακεραίων. Το τρίτο κεφάλαιο αποτελεί μια σύντομη εισαγωγή στις αλγεβρικές δομές, ενώ το τέταρτο εισάγει έννοιες από τη συνδυαστική.

Ιδιαίτερη προσπάθεια έγινε ώστε η παρουσίαση των θεμάτων να είναι κατά το δυνατόν απλούστερη, έτσι ώστε το περιεχόμενο του βιβλίου να είναι κατανοητό από τον αναγνώστη.

Σχεδόν κάθε παράγραφος συνοδεύεται από ασκήσεις, οι οποίες δίνουν την ευκαιρία στο φοιτητή να ελέγξει αφενός τις γνώσεις που αποκτά σταδιακά, αφετέρου την ικανότητά του να συνδυάζει θεωρήματα που μαθαίνει, με στόχο να πετύχει νέα αποτελέσματα. Στο τέλος του βιβλίου υπάρχει μια συλλογή ασκήσεων, η οποία καλύπτει όλα τα θέματα που αναπτύσσονται στο βιβλίο αυτό. Σε κάθε μια από αυτές, δίνεται αναλυτική υπόδειξη.

Θεσσαλονίκη – Δεκέμβριος 2003 Ευάγγελος Ψωμόπουλος

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1
Σύνολα - Συναρτήσεις - Σχέσεις

Τα τελευταία χρόνια έχουν εισαχθεί πολλά στοιχεία από τη θεωρία συνόλων στη μέση εκπαίδευση. Έτσι, ο αναγνώστης πρέπει να είναι εξοικειωμένος με τους όρους σύνολο και συνάρτηση. Στο κεφάλαιο αυτό θα ξεκινήσουμε με αυτά τα γνωστά στοιχεία, και θα επιμείνουμε σε έννοιες λιγότερο γνωστές.

1.1 Σύνολα

Μια διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του συνόλου δύσκολα αποφεύγει τη χρήση ίδιων ή έστω ταυτόσημων όρων. Θεωρούμε, λοιπόν, ότι σύνολο S είναι μια συλλογή αντικειμένων. Τα αντικείμενα αυτά λέγονται ***στοιχεία*** του συνόλου S. Για να δηλώσουμε ότι ένα στοιχείο a περιέχεται μεταξύ των στοιχείων του S, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $a \in S$, ο οποίος διαβάζεται «a ανήκει στο S». Αν το a δεν είναι στοιχείο του S, τότε χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $a \notin S$, ο οποίος διαβάζεται «a δεν ανήκει στο S». Έτσι, αν $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, τότε προφανώς θα ισχύει $2 \in S$, αλλά $10 \notin S$.

Στα μαθηματικά, τα πλέον γνωστά σύνολα είναι

$\mathbb{N}$:	Το σύνολο των φυσικών αριθμών
$\mathbb{Z}$:	Το σύνολο των ακεραίων αριθμών
$\mathbb{Q}$:	Το σύνολο των ρητών αριθμών
$\mathbb{R}$:	Το σύνολο των πραγματικών αριθμών
$\mathbb{C}$:	Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών

Ένα σύνολο προσδιορίζεται είτε αν γράψουμε όλα τα στοιχεία του, δηλαδή

$$A = \{2, 4, 6, \ldots\} \text{ ή } B = \{2, 4, 6, \ldots, 20\},$$

είτε αν περιγράψουμε τα στοιχεία του με μια ιδιότητα P, η οποία τα χαρακτηρίζει, δηλαδή

$$C = \{x/x \text{ έχει την ιδιότητα } P\},$$

για παράδειγμα, το σύνολο A μπορεί να γραφεί στη μορφή $A = \{x/x$ είναι θετικός άρτιος ακέραιος$\}$.

Μερικές φορές, θέλουμε να μάθουμε ή να αποδείξουμε αν ένα σύνολο S είναι μέρος ενός άλλου συνόλου T. Θα λέμε ότι το S είναι ***υποσύνολο*** του T, και θα το συμβολίζουμε με $S \subset T$ (διαβάζεται «S υποσύνολο του T»), όταν κάθε στοιχείο του S είναι και στοιχείο του T. Χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τους συμβολισμούς που αναφέραμε, θα έχουμε την αμφίδρομη συνεπαγωγή

$$S \subset T \Longleftrightarrow (\text{αν } x \in S \Rightarrow x \in T).$$

Η σχέση $S \subset T$ μπορεί να γραφεί και με τη μορφή $T \supset S$, οπότε διαβάζεται «T ***υπερσύνολο*** του S». Είναι προφανές ότι, για οποιοδήποτε σύνολο S θα ισχύει η συνεπαγωγή

$$\text{αν } x \in S \Rightarrow x \in S,$$

γεγονός που δείχνει ότι θα ισχύει η σχέση $S \subset S$. Δηλαδή, κάθε σύνολο είναι υποσύνολο του εαυτού του.

Η σχέση $S \subset T$ δεν αποκλείει την περίπτωση της ισότητας $S = T$, δηλαδή την περίπτωση που τα δύο σύνολα S και T περιέχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Αν θέλουμε να δηλώσουμε ότι το σύνολο S είναι υποσύνολο του T, αλλά όχι ίσο με το T, τότε χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $S \subsetneqq T$, και θα λέμε ότι το S είναι ***γνήσιο υποσύνολο*** του T.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ένα συμβολισμό, ο οποίος χρησιμοποιείται συχνά. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύνολο X, και θέλουμε να αναφερθούμε σε ένα υποσύνολο A του X, του οποίου τα στοιχεία έχουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα P. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$A = \{a \in X/a \text{ ικανοποιεί την ιδιότητα } P\},$$

ο οποίος δηλώνει ταυτόχρονα ότι το a είναι στοιχείο του X, οπότε το A είναι υποσύνολο του X, και ότι το a ικανοποιεί την ιδιότητα P. Για παράδειγμα, το σύνολο $\{x \in \mathbb{Z} \,/\, |x| < 10\}$ είναι υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{Z}$ των ακεραίων, και ταυτόχρονα περιέχει τους ακεραίους με απόλυτη τιμή μικρότερη του 10, δηλαδή πρόκειται για το σύνολο

$$\{-9, -8, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}.$$

Συχνά θέλουμε να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο S είναι ίσο με ένα άλλο σύνολο T. Ο συνηθέστερος τρόπος για να πετύχουμε κάτι τέτοιο, είναι να αποδείξουμε ότι καθένα από αυτά είναι υποσύνολο του άλλου. Δηλαδή να χρησιμοποιήσουμε την αμφίδρομη συνεπαγωγή

$$S = T \Longleftrightarrow (S \subset T \text{ και } T \subset S).$$

Ας δούμε ένα παράδειγμα, που αφορά την προηγούμενη αμφίδρομη συνεπαγωγή.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α **1.1.1** Θεωρούμε το σύνολο S, το οποίο περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του -2, και μικρότεροι ή ίσοι του 2. Θεωρούμε, επίσης, το σύνολο T, το οποίο περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς, των οποίων το τετράγωνο είναι μικρότερο ή ίσο του 4. Δηλαδή έχουμε τα σύνολα

$$S = \{a \in \mathbb{R} \,/ -2 \leq a \leq 2\}, \text{ και}$$
$$T = \{a \in \mathbb{R} \,/ a^2 \leq 4\}.$$

Αν $x \in S$, τότε θα ισχύει $-2 \leq x \leq 2$, οπότε θα έχουμε $0 \leq x^2 \leq 4$. Παρατηρούμε ότι το στοιχείο x του S ικανοποιεί τη σχέση, η οποία ορίζει το σύνολο T, δηλαδή το x είναι ένα στοιχείο του T. Επειδή το γεγονός αυτό ισχύει για το τυχόν στοιχείο x του συνόλου S, ουσιαστικά αποδείξαμε τη συνεπαγωγή

$$\text{αν } x \in S \Rightarrow x \in T,$$

δηλαδή θα ισχύει η σχέση $S \subset T$.

Θεωρούμε, τώρα, ένα στοιχείο y του συνόλου T. Τότε προφανώς θα έχουμε τη σχέση $y^2 \leq 4$. Αυτό σημαίνει ότι το στοιχείο y θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $-2 \leq y \leq 2$, δηλαδή τη σχέση που ορίζει το σύνολο S. Επειδή το γεγονός αυτό ισχύει για το τυχόν στοιχείο y του συνόλου T, ουσιαστικά αποδείξαμε τη συνεπαγωγή

$$\text{αν } y \in T \Rightarrow y \in S,$$

δηλαδή θα ισχύει η σχέση $T \subset S$.

Τελικά, επειδή ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις

$$S \subset T \text{ και } T \subset S,$$

τα δύο σύνολα S και T είναι ίσα.$_\blacktriangle$

Ένα σύνολο λέγεται ***πεπερασμένο*** όταν περιέχει ένα πεπερασμένο αριθμό στοιχείων. Διαφορετικά, λέγεται ***άπειρο σύνολο***. Για παράδειγμα., το σύνολο

$$A = \{1, 7, 13, 27, 31\},$$

είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, ενώ το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων είναι ένα άπειρο σύνολο. Συνήθως χρησιμοποιούμε το συμβολισμός $|S|$, για να δηλώσουμε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου S. Έτσι, για το σύνολο $A = \{1, 7, 13, 27, 31\}$ ισχύει $|A| = 5$.

Είναι βολικό να επεκτείνουμε τη διαισθητική έννοια του συνόλου, σαν συλλογή αντικειμένων, και σε ένα σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Το σύνολο αυτό λέγεται ***κενό*** και συμβολίζεται με το σύμβολο $\varnothing$. Συμφωνούμε, επίσης, ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

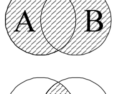
Υπάρχουν διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορεί κανείς να κατασκευάσει νέα σύνολα, από σύνολα τα οποία είναι γνωστά. Παρακάτω θα περιγράψουμε κάποιους από αυτούς.

Με τη βοήθεια δύο συνόλων A και B μπορούμε να ορίσουμε τις παρακάτω πράξεις συνόλων, οι οποίες ουσιαστικά οδηγούν σε νέα σύνολα.

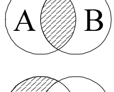
$$\begin{aligned} \text{ένωση συνόλων} \quad & A \cup B = \{x/x \in A \text{ ή } x \in B\}, \\ \text{τομή συνόλων} \quad & A \cap B = \{x/x \in A \text{ και } x \in B\}, \\ \text{διαφορά συνόλων} \quad & A - B = \{x/x \in A \text{ και } x \notin B\}. \end{aligned}$$

Σχηματικά οι πράξεις αυτές θα μπορούσαν να παρασταθούν ως εξής:

Η ένωση $A \cup B$ είναι το γραμμοσκιασμένο τμήμα



Η τομή $A \cap B$ είναι το γραμμοσκιασμένο τμήμα



Η διαφορά $A - B$ είναι το γραμμοσκιασμένο τμήμα

Η ένωση και η τομή συνόλων για περισσότερα από δύο σύνολα ορίζεται με ανάλογο τρόπο. Δηλαδή

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x/(\exists i = 1, 2, \ldots, n)(x \in A_i)\}, \text{ και}$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cup A_n = \{x/(\forall i = 1, 2, \ldots, n)(x \in A_i)\}.$$

Στις εφαρμογές, έχουμε συνήθως ένα συγκεκριμένο σύνολο X, και εκτελούμε πράξεις με υποσύνολα του συγκεκριμένου αυτού συνόλου, το οποίο μερικές φορές ονομάζουμε ***καθολικό σύνολο***. Στις περισσότερες, αν όχι όλες, περιπτώσεις, το καθολικό σύνολο εννοείται από τις προϋποθέσεις του προβλήματος, και δεν χρειάζεται να αναφερθεί ειδικότερα. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε το σύνολο A όλων των φοιτητών, οι οποίοι δήλωσαν το μάθημα Γραμμική Άλγεβρα Ι, και το σύνολο B όλων των φοιτητών, οι οποίοι δήλωσαν το μάθημα Διαφορικός Λογισμός ΙΙ, τότε το πιο πιθανό είναι να μιλάμε για το σύνολο όλων των φοιτητών του Τμήματος Μαθηματικών, που θα αποτελεί και το καθολικό σύνολο. Αν, όμως, θεωρήσουμε το σύνολο A όλων των φοιτητών, οι οποίοι δήλωσαν το μάθημα Άλγεβρα Ι, το σύνολο B όλων των φοιτητών, οι οποίοι δήλωσαν το μάθημα Σεισμολογία, και το σύνολο C όλων των φοιτητών, οι οποίοι δήλωσαν το μάθημα Χημεία Τροφίμων, τότε είναι πιθανότερο να μιλάμε για το σύνολο όλων των φοιτητών της Σχολής Θετικών Επιστημών, που θα αποτελεί το καθολικό σύνολο.

Αν, λοιπόν X είναι το καθολικό σύνολο, και A ένα υποσύνολο του X, η διαφορά $X - A$ λέγεται ειδικότερα ***συμπλήρωμα*** του A, και συμβολίζεται με $\complement A$. Δηλαδή ισχύει

$$\complement A = X - A.$$

Αν ένα σύνολο A είναι υποσύνολο ενός άλλου συνόλου B, τότε η διαφορά $B - A$ λέγεται συμπλήρωμα του Α στο Β και συμβολίζεται με $\complement_B A$, δηλαδή θα ισχύει $\complement_B A = B - A$. Τέλος, δύο σύνολα A και B θα λέγονται ***ξένα μεταξύ τους*** όταν ισχύει $A \cap B = \varnothing$.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.1.2 Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών, και τα υποσύνολα

$$A = \{1, 2, 4, 5, 7\} \text{ και } B = \{-1, 2, 3, 6, 8, 10\},$$

του $\mathbb{Z}$. Από τους προηγούμενους ορισμούς προκύπτει

$$A \cup B = \{-1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\},$$
$$A \cap B = \{2\},$$

$$\begin{aligned} A - B &= \{1, 4, 5, 7\}, \\ B - A &= \{-1, 3, 6, 8, 10\}, \text{ και} \\ \complement A &= \{\ldots, -2, -1, 0, 3, 6, 8, 9, 10, 11, \ldots\}. \end{aligned}$$

Τέλος, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα σύνολα $A \cap B$ και $A - B$ είναι ξένα μεταξύ τους.▲

Από τους ορισμούς της ένωσης, της τομής και της διαφοράς συνόλων, προκύπτει ότι για οποιαδήποτε σύνολα A και B θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{gathered} A \cup B = (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A), \\ (A \cap B) \cap (A - B) = \varnothing, \\ (A \cap B) \cap (B - A) = \varnothing, \\ (A - B) \cap (B - A) = \varnothing. \end{gathered}$$

Αν και οι σχέσεις αυτές είναι εμφανείς, και από τα προηγούμενα διαγράμματα, εντούτοις θα δούμε, στο επόμενο παράδειγμα, με ποιο τρόπο μπορεί κανείς να αντιμετωπίσει ισότητες που αφορούν σύνολα.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.1.3 Θέλουμε να αποδείξουμε την ισότητα

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A),$$

επομένως αρκεί να αποδείξουμε τις σχέσεις

$$(A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A) \subset A \cup B, \text{ και}$$

$$A \cup B \subset (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A).$$

Η πρώτη είναι σχετικά εύκολη, εφόσον από τις σχέσεις

$$A \cap B \subset A, \; A - B \subset A, \text{ και } B - A \subset B,$$

προκύπτει

$$(A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A) \subset A \cup A \cup B \subset A \cup B.$$

Όσον αφορά τη δεύτερη σχέση, έστω $x \in A \cup B$. Προφανώς, υπάρχουν οι εξής δυνατότητες:

$$\text{είτε } x \in A, \text{ και } x \in B, \text{ είτε } x \in A, \text{ και } x \notin B, \text{ είτε } x \notin A, \text{ και } x \in B.$$

Αν ισχύει η πρώτη περίπτωση, τότε θα έχουμε $x \in A \cap B$, οπότε θα ισχύει και

$$x \in (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A).$$

Αν ισχύει η δεύτερη περίπτωση, τότε θα έχουμε $x \in A - B$, οπότε θα ισχύει και

$$x \in (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A).$$

Αν ισχύει η τρίτη περίπτωση, τότε θα έχουμε $x \in B - A$, οπότε θα ισχύει και

$$x \in (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A).$$

Άρα σε κάθε περίπτωση θα έχουμε

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A),$$

δηλαδή θα ισχύει και η δεύτερη σχέση

$$A \cup B \subset (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A).\blacktriangle$$

Με τη βοήθεια δύο μαθηματικών αντικειμένων a και b, κατασκευάζουμε ένα άλλο αντικείμενο (a, b), το οποίο ονομάζουμε ***διατεταγμένο ζεύγος***, αν ικανοποιεί το αξίωμα:

$$(a, b) = (a', b') \Longleftrightarrow a = a' \text{ και } b = b'.$$

Ειδικότερα η ισότητα $(a, b) = (b, a)$ θα ισχύει τότε και μόνον τότε όταν έχουμε $a = b$. Αυτό σημαίνει ότι η διάταξη των στοιχείων a και b στο διατεταγμένο ζεύγος (a, b) είναι σημαντική.

Το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ δύο συνόλων A και B ορίζεται να είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (a, b), όταν το a διατρέχει το σύνολο A και το b διατρέχει το σύνολο B. Δηλαδή

$$A \times B = \{(a, b)/a \in A \text{ και } b \in B\}.$$

Τα σύνολα A και B λέγονται ***παράγοντες*** ή ***συνιστώσες*** ή ***άξονες*** του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε και το καρτεσιανό γινόμενο n παραγόντων, δηλαδή θα έχουμε

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)/a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Παράδειγμα **1.1.4** Αν θεωρήσουμε τα σύνολα $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{a, b\}$, τότε το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ θα είναι

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}.$$

Ενώ το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{R}$ θα είναι

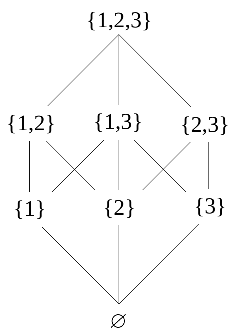
$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R} = \{(n, x)/n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}\}.\blacktriangle$$

Αν A είναι τυχόν σύνολο, δεχόμαστε ότι υπάρχει το ***δυναμοσύνολο*** του A, το οποίο περιέχει όλα τα υποσύνολα του A και μόνον αυτά. Ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται για το δυναμοσύνολο είναι $\wp(A)$. Επομένως θα έχουμε $\wp(A) = \{E/E \subset A\}$.

Ένας παραστατικός τρόπος που περιγράφει τη σχέση «$A \subset B$» μεταξύ των στοιχείων ενός δυναμοσυνόλου $\wp(X)$ είναι το ***διάγραμμα Hasse***. Σε ένα τέτοιο διάγραμμα, τα υποσύνολα του X συνδέονται μεταξύ τους με πολυγωνικές γραμμές, κατά τέτοιο τρόπο ώστε: όταν ένα υποσύνολο A συνδέεται με ένα υποσύνολο B με μια πολυγωνική γραμμή, της οποίας κάθε ευθύγραμμο τμήμα έχει κατεύθυνση από κάτω προς τα πάνω, αυτό θα σημαίνει ότι ισχύει $A \subset B$. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το σύνολο $X = \{1, 2, 3\}$. Εύκολα διαπιστώνεται ότι το δυναμοσύνολο του X θα είναι

$$\wp(X) = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \varnothing\}.$$

Οπότε το διάγραμμα Hasse για το $\wp(X)$ θα είναι το παρακάτω.



Το δυναμοσύνολο είναι ένα παράδειγμα συνόλου, του οποίου τα στοιχεία είναι σύνολα. Κάτι τέτοιο δεν πρέπει να θεωρείται περίεργο, εφόσον οποιοδήποτε αντικείμενο μπορεί να είναι στοιχείο ενός συνόλου. Όμως, δεν πρέπει να συγχέουμε το σύνολο $\{x\}$ με το ίδιο το x.

$\boxed{\textbf{Παράδειγμα}}$ **1.1.5** Με τη βοήθεια των δύο συνόλων $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{2, 4, 6\}$, σχηματίζουμε το σύνολο

$$X = \{1, 2, A, B, 6, 7\}.$$

Παρατηρούμε ότι το A είναι ένα στοιχείο του X, δηλαδή $A \in X$, ενώ το A δεν είναι υποσύνολο του X, εφόσον έχουμε

$$3 \in A \text{ αλλά } 3 \notin X.$$

Επίσης ισχύει

$$B \in X \text{ αλλά } B \not\subset X,$$

διότι το 4 είναι ένα στοιχείο του B, όμως δεν είναι στοιχείο του X.

Φυσικά, το κενό σύνολο $\varnothing$ δεν είναι στοιχείο του X, ενώ είναι υποσύνολο του X, εφόσον το κενό είναι υποσύνολο κάθε συνόλου. Δηλαδή έχουμε

$$\varnothing \notin X, \text{ αλλά } \varnothing \subset X.$$

Τέλος, θα έχουμε τις σχέσεις

$$\{1, 2, 6\} \subset X, \text{ αλλά } \{1, 2, 6\} \notin X. \blacktriangle$$

Ασφαλώς, οι πράξεις που ορίστηκαν για τα σύνολα μπορούν να χρησιμοποιηθούν και σε σύνολα με στοιχεία σύνολα.

$\boxed{\textbf{Παράδειγμα}}$ **1.1.6** Εύκολα διαπιστώνεται ότι για τα σύνολα

$$X = \{\{1, 2\}, \{1, 3, 5\}, \{6, 7\}\} \text{ και } Y = \{\{1, 3, 6\}, \{1, 2\}, \varnothing\},$$

ισχύουν

$$X \cup Y = \{\{1, 2\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 3, 6\}, \{6, 7\}, \varnothing\},$$

και

$$X \cap Y = \{\{1, 2\}\}. \blacktriangle$$

1.2 Ασκήσεις

Ά σ κ η σ η 1.2.1 Δείξτε ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις.

(i)	$A \cap B = B \cap A$	(ii)	$A \cup B = B \cup A$
(iii)	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	(iv)	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
(v)	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	(vi)	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

όπου A, B, C είναι τυχόντα σύνολα

Ά σ κ η σ η 1.2.2 Αν A και B είναι τυχόντα σύνολα δείξτε ότι οι παρακάτω σχέσεις είναι ισοδύναμες.

$$\text{(i)} \quad A \subset B, \quad \text{(ii)} \quad A \cap B = A, \quad \text{(iii)} \quad A \cup B = B, \quad \text{(iv)} \quad A - B = \varnothing.$$

Ά σ κ η σ η 1.2.3 Αν A, B, C είναι τυχόντα σύνολα δείξτε ότι ισχύουν οι παρακάτω ισότητες.

$$\begin{array}{ll}
\text{(i)} & A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C), \\
\text{(ii)} & A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C), \\
\text{(iii)} & (A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C), \\
\text{(iv)} & (A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C).
\end{array}$$

Ά σ κ η σ η 1.2.4 Αν A και B είναι υποσύνολα ενός συνόλου X, δείξτε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\text{(i)} \quad \complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B, \quad \text{(ii)} \quad \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B.$$

Ά σ κ η σ η 1.2.5 Να βρεθεί ο αριθμός των στοιχείων σε κάθε ένα από τα σύνολα: $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

Ά σ κ η σ η 1.2.6 Να βρεθούν όλα τα υποσύνολα του συνόλου

$$X = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}.$$

Ά σ κ η σ η 1.2.7 Να γραφούν αναλυτικά τα παρακάτω σύνολα:

$$\text{(i)} \quad \wp(\wp(\{1\})), \quad \text{(ii)} \quad \wp(\wp(\wp(\{1\}))).$$

Ά σ κ η σ η 1.2.8 Δείξτε ότι ισχύει $A \cup B = A \cap B \Longleftrightarrow A = B$.

Ά σ κ η σ η 1.2.9 Θεωρούμε τρία τυχόντα σύνολα A, B και C, τέτοια ώστε να ισχύουν οι σχέσεις $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ και $(A \times B) \cup (B \times A) = (C \times C)$. Δείξτε ότι αναγκαστικά ισχύει $A = B = C$.

Ά σ κ η σ η 1.2.10 Έστω A, B, C και D τυχόντα σύνολα τέτοια ώστε να ισχύουν οι σχέσεις $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ και $(A \times B) \cup (B \times A) = (C \times D) \cup (D \times C)$. Δείξτε ότι αναγκαστικά ισχύει $A = C$ και $B = D$ ή $A = D$ και $B = C$.

1.3 Συναρτήσεις

Δεν θα ήταν υπερβολή, αν λέγαμε ότι η έννοια της συνάρτησης ή απεικόνισης εμφανίζεται σε όλους τους κλάδους των μαθηματικών, και παίζει ένα σημαντικό ρόλο. Θα μπορούσαμε να δώσουμε με αυστηρότητα τον ορισμό της συνάρτησης από ένα σύνολο σ' ένα άλλο, χρησιμοποιώντας το καρτεσιανό γινόμενο των δύο αυτών συνόλων. Αποφεύγοντας, όμως, τον τυπικό ορισμό, θα μπορούσαμε να πούμε ότι μια ***συνάρτηση*** f, από ένα σύνολο A σ' ένα σύνολο B, είναι ένας νόμος, ένας κανόνας, με τον οποίο σε κάθε ένα στοιχείο a του συνόλου A αντιστοιχούμε ένα ***μοναδικό*** στοιχείο b του συνόλου B. Το στοιχείο $a \in A$ λέγεται ***πρότυπο***, ενώ το μοναδικό στοιχείο $b \in B$ λέγεται ***εικόνα*** του a. Για παράδειγμα, αν X είναι το σύνολο όλων των αντικειμένων ενός καταστήματος, τότε μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση f από το σύνολο X στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, αν απεικονίσουμε το κάθε αντικείμενο στην τιμή πώλησής του. Πρέπει, όμως, να προσέξουμε ότι αν αντιστοιχίσουμε σε κάθε πραγματικό αριθμό x ένα αντικείμενο του καταστήματος, του οποίου η τιμή είναι x, τότε η αντιστοιχία αυτή δεν είναι συνάρτηση, διότι στον αριθμό x δεν αντιστοιχεί απαραίτητα ένα μοναδικό αντικείμενο.

Συνήθως, λέμε ότι η f είναι μια συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B, και γράφουμε $f : A \longrightarrow B$ ή $A \xrightarrow{f} B$. Επίσης, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $b = f(a)$ για να δηλώσουμε ότι η εικόνα του στοιχείου $a \in A$ είναι το στοιχείο $b \in B$. Δηλαδή, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό αυτό, για να είναι η $f : A \longrightarrow B$ συνάρτηση, θα πρέπει να ισχύει

$$a_1 = a_2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_2), \text{ για κάθε } a_1, a_2 \in A.$$

Το σύνολο A λέγεται ***πεδίο ορισμού*** και το σύνολο B λέγεται ***πεδίο τιμών*** της συνάρτησης f.

Οι συναρτήσεις $f : A \longrightarrow B$ και $g : C \longrightarrow D$ θα λέγονται ***ίσες*** αν και μόνον αν ισχύουν $A = C$, $B = D$, και $f(a) = g(a)$, για κάθε $a \in A$.

Επειδή μια συνάρτηση μπορεί να απεικονίζει διαφορετικά στοιχεία του πεδίου ορισμού στο ίδιο στοιχείο του πεδίου τιμών, ή να υπάρχουν στοιχεία του πεδίου τιμών που δεν έχουν πρότυπο στο πεδίο ορισμού, προκύπτει η ανάγκη ταξινόμησης των συναρτήσεων. Έτσι, οδηγούμαστε στον παρακάτω ορισμό.

Ο ρ ι σ μ ό ς 1.3.1 Μια συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$ λέγεται *αμφιμονότιμη* ή *αμφιμονοσήμαντη* αν απεικονίζει διαφορετικά στοιχεία του A σε διαφορετικά στοιχεία του B, δηλαδή, αν ισχύει

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2) \text{ ή ισοδύναμα } f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2,$$

για κάθε $a_1, a_2 \in A$.

Μια συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$ θα λέγεται *επί* αν κάθε στοιχείο του B είναι εικόνα κάποιου στοιχείου του A. Δηλαδή, όταν για κάθε $b \in B$ υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο $a \in A$, τέτοιο ώστε να ισχύει $b = f(a)$.

Μια συνάρτηση που είναι ταυτόχρονα αμφιμονότιμη και επί θα λέγεται και συνάρτηση *ένα προς ένα*.

Η συνάρτηση $\varphi_1 : \{1, 2, 3, 4\} \longrightarrow \{a, b, c\}$, που ορίζεται με τις σχέσεις

$$\varphi_1(1) = a, \varphi_1(2) = a, \varphi_1(3) = a, \varphi_1(4) = a,$$

δεν είναι αμφιμονότιμη, εφόσον απεικονίζει διαφορετικά στοιχεία του πεδίου ορισμού, στο ίδιο στοιχείου του πεδίου τιμών.

Επίσης, δεν είναι ούτε επί, διότι τα στοιχεία b και c του πεδίου τιμών δεν έχουν πρότυπο στο πεδίου ορισμού.

Η συνάρτηση $\varphi_2 : \{1, 2, 3, 4\} \longrightarrow \{a, b, c\}$, που ορίζεται με τις σχέσεις

$$\varphi_2(1) = a, \varphi_2(2) = a, \varphi_2(3) = b, \varphi_2(4) = c,$$

δεν είναι αμφιμονότιμη, εφόσον τα στοιχεία 1 και 2 απεικονίζονται στο ίδιο στοιχείο a, αλλά είναι επί, διότι κάθε στοιχείο του πεδίου τιμών έχει ένα πρότυπο στο πεδίο ορισμού.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α **1.3.2** Η συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, που ορίζεται με τη σχέση $f(m) = 2m$, για κάθε ακέραιο m, είναι αμφιμονότιμη, όπως προκύπτει από τις σχέσεις

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y,$$

και τον Ορισμό 1.3.1. Δεν είναι όμως επί, διότι το στοιχείο 3, για παράδειγμα, του πεδίου τιμών, δεν έχει πρότυπο στο πεδίο ορισμού. Δηλαδή δεν υπάρχει ακέραιος t για τον οποίο να ισχύει $2t = f(t) = 3$.▲

Ένα τετριμμένο παράδειγμα αμφιμονότιμης και επί συνάρτησης είναι η συνάρτηση $I_X : X \longrightarrow X$, που ορίζεται με τη σχέση $I_X(x) = x$, για κάθε $x \in X$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται ***ταυτοτική συνάρτηση*** του συνόλου X, και ορίζεται για κάθε μη κενό σύνολο X. Συχνά, όταν δεν υπάρχει κίνδυνος παρερμηνείας, χρησιμοποιείται ο συμβολισμός I αντί του I_X.

Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μια τυχαία συνάρτηση, και A, B υποσύνολα των X και Y αντίστοιχα. Ορίζουμε την ***εικόνα*** του A δια της f να είναι το σύνολο

$$f(A) = \{y \in Y/(\exists a \in A)(y = f(a))\}.$$

Δηλαδή η εικόνα του συνόλου A περιέχει όλες τις επιμέρους εικόνες των στοιχείων του A.

Επίσης, ορίζουμε την ***αντίστροφη εικόνα*** του B δια της f να είναι το σύνολο

$$f^{-1}(B) = \{x \in X/f(x) \in B\}.$$

Δηλαδή η αντίστροφη εικόνα του B περιέχει όλα τα στοιχεία του πεδίου ορισμού της f, των οποίων οι εικόνες ανήκουν στο σύνολο B.

Αν θεωρήσουμε, για παράδειγμα τα σύνολα $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$, και τη συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$, που ορίζεται με τις σχέσεις

$$f(1) = a,\ f(2) = a,\ \text{και}\ f(3) = b,$$

τότε θα έχουμε

$$f(\{1, 2\}) = \{a\}\ \text{και}\ f^{-1}(\{a, c\}) = \{1, 2\}.$$

Την εικόνα του πεδίου ορισμού X της f συμβολίζουμε ειδικότερα με $\operatorname{Im} f$, δηλαδή ισχύει $\operatorname{Im} f = f(X)$. Είναι προφανές ότι μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$ είναι επί τότε και μόνο τότε όταν $\operatorname{Im} f = Y$. Στο σημείο αυτό θα πρέπει ιδιαίτερα να τονίσουμε ότι η αντίστροφη εικόνα ενός υποσυνόλου B του Y ορίστηκε για τυχαία συνάρτηση f. Επομένως ο συμβολισμός $f^{-1}(B)$ δεν συνεπάγεται την ύπαρξη της αντίστροφης συνάρτησης, έννοιας που θα οριστεί παρακάτω.

Παράδειγμα 1.3.3 Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, το σύνολο $\mathbb{R}^+$ όλων των θετικών πραγματικών αριθμών και τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, που ορίζονται με τις σχέσεις

$$f(x) = e^x \text{ και } g(x) = e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Οι συναρτήσεις αυτές δεν είναι ίσες γιατί δεν έχουν το ίδιο πεδίο τιμών. Είναι γνωστό ότι οι συναρτήσεις f και g είναι αμφιμονότιμες. Επίσης η g είναι επί, ενώ η f δεν είναι. Αυτό σημαίνει ότι η g είναι συνάρτηση ένα προς ένα, ενώ η f δεν είναι.▲

Συναρτήσεις μπορούμε να ορίσουμε σε οποιαδήποτε σύνολα, όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.3.4 Ας θεωρήσουμε το σύνολο $M_2(\mathbb{R})$ όλων των 2×2 πινάκων με στοιχεία από το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, με τη σχέση $f(A) = \det A$, όπου $\det A$ είναι η ορίζουσα του πίνακα A. Η συνάρτηση αυτή είναι επί. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, μπορούμε να βρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

για τον οποίο ισχύει $f(A) = \det A = x$. Η συνάρτηση f δεν είναι αμφιμονότιμη, διότι αν θεωρήσουμε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

τότε ασφαλώς θα ισχύει $A \neq B$, ενώ αντίθετα έχουμε $f(A) = a = f(B)$.▲

Ας δούμε και μερικά παραδείγματα που αφορούν την εικόνα και την αντίστροφη εικόνα συνόλων.

Παράδειγμα 1.3.5 Ας πάρουμε τη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, που ορίζεται με τη σχέση $\varphi(x) = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Είναι προφανές ότι τα διαστήματα $A =$

$(-2,3)$ και $B=(-3,1)$ είναι υποσύνολα του πεδίου ορισμού και του πεδίου τιμών αντίστοιχα. Η εικόνα του συνόλου A δια της φ θα είναι

$$\begin{aligned}\varphi(A) &= \{y\in\mathbb{R}\,/y=\varphi(a), \text{για κάποιο } a\in A\} = \\ &= \{y\in\mathbb{R}\,/y=a^2, a\in A\} = \{a^2/a\in A\} = [0,9).\end{aligned}$$

Η αντίστροφη εικόνα του B δια της φ θα είναι

$$\varphi^{-1}(B)=\{x\in\mathbb{R}\,/\varphi(x)\in B\}=\{x\in\mathbb{R}\,/x^2\in(-3,1)\}=(-1,1).\blacktriangle$$

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι στο προηγούμενο παράδειγμα ισχύει

$$\varphi(-2)=4=\varphi(2).$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση φ δεν είναι αμφιμονότιμη. Το γεγονός, όμως, αυτό δεν μας εμπόδισε να υπολογίσουμε την αντίστροφη εικόνα του συνόλου B, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση φ. Επομένως η αντίστροφη εικόνα ορίζεται ακόμη και όταν η αντίστοιχη συνάρτηση δεν είναι αντιστρέψιμη.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.3.6 Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{R}$, που ορίζεται με τη σχέση $g(n)=2n$, για κάθε $n\in\mathbb{Z}$. Είναι προφανές ότι το σύνολο

$$A=\{-3,0,2,6,7\}$$

είναι υποσύνολο του $\mathbb{Z}$, ενώ το διάστημα $B=(-2,2)$ είναι υποσύνολο του πεδίου τιμών της συνάρτησης g. Η εικόνα του A θα είναι

$$\begin{aligned}g(A) &= \{y\in\mathbb{R}\,/y=g(a), a\in A\} = \\ &= \{y\in\mathbb{R}\,/y=g(-3) \text{ ή } g(0) \text{ ή } g(2) \text{ ή } g(6) \text{ ή } g(7)\} = \\ &= \{y\in\mathbb{R}\,/y=-6 \text{ ή } 0 \text{ ή } 4 \text{ ή } 12 \text{ ή } 14\} = \\ &= \{-6,0,4,12,14\},\end{aligned}$$

και φυσικά είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Η αντίστροφη εικόνα του B είναι

$$g^{-1}(B)=\{n\in\mathbb{Z}\,/g(n)\in B\}=\{0\},$$

εφόσον δεν υπάρχει μη μηδενικός ακέραιος, του οποίου το διπλάσιο να βρίσκεται στο διάστημα $(-2,2)$.$\blacktriangle$

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$, και ένα υποσύνολο A του X. Από τον ορισμό της εικόνας του A προκύπτει ότι το σύνολο $B = f(A)$ είναι υποσύνολο του Y. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να μιλάμε για την αντίστροφη εικόνα του B, δηλαδή για το σύνολο $f^{-1}(B) = f^{-1}(f(A))$. Έτσι, ξεκινώντας από ένα τυχαίο υποσύνολο A του X, βρίσκουμε ένα άλλο υποσύνολο του X, και συγκεκριμένα το υποσύνολο $f^{-1}(f(A))$. Το ερώτημα, βέβαια, είναι η σχέση που συνδέει τα δύο αυτά σύνολα.

Όσον αφορά την αντίστροφη εικόνα, μπορούμε να κάνουμε ανάλογες σκέψεις. Ας θεωρήσουμε πάλι μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$, και ένα υποσύνολο B του πεδίου τιμών Y της συνάρτησης. Από τον ορισμό της αντίστροφης εικόνας προκύπτει ότι το σύνολο $A = f^{-1}(B)$ είναι υποσύνολο του X. Επομένως, μπορούμε να βρούμε την εικόνα του A, δηλαδή το υποσύνολο $f(A) = f(f^{-1}(B))$ του Y. Ξαναγυρίζουμε, δηλαδή, πίσω στο πεδίο τιμών της συνάρτησης, από όπου ξεκινήσαμε. Το ερώτημα είναι και πάλι η σχέση που συνδέει τα σύνολα B και $f(f^{-1}(B))$.

Θ ε ώ ρ η μ α 1.3.7 Αν $f : X \longrightarrow Y$ είναι τυχούσα συνάρτηση, τότε θα ισχύουν

(i) $A \subset f^{-1}(f(A))$**, για κάθε υποσύνολο A του X, και**

(ii) $f(f^{-1}(B)) \subset B$**, για κάθε υποσύνολο B του Y.**

Α π ό δ ε ι ξ η. (i) Αν a είναι τυχόν στοιχείο του A, τότε προφανώς θα ισχύει

$$a \in A \Rightarrow f(a) \in f(A).$$

Άρα από τον ορισμό της αντίστροφης εικόνας προκύπτει η σχέση $a \in f^{-1}(f(A))$.

(ii) Θεωρούμε ένα στοιχείο a του συνόλου $f(f^{-1}(B))$. Από τον ορισμό της εικόνας ενός συνόλου προκύπτει ότι θα ισχύει

$$a = f(b), \text{ για κάποιο } b \in f^{-1}(B).$$

Τότε, όμως, από τον ορισμό της αντίστροφης εικόνας θα έχουμε

$$b \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(b) \in B.$$

Δηλαδή θα ισχύει $a = f(b)$, όπου $f(b) \in B$, οπότε ασφαλώς προκύπτει $a \in B$. ■

Το παράδειγμα που ακολουθεί αποδεικνύει ότι γενικά δεν μπορούν να ισχύουν οι ισότητες $A = f^{-1}(f(A))$ και $f(f^{-1}(B)) = B$.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.3.8 Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, που ορίζεται με τη σχέση $\varphi(a) = a^2$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Το διάστημα $A = (0,1)$ είναι φυσικά υποσύνολο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Εύκολα υπολογίζεται η εικόνα του συνόλου A

$$\varphi(A) = \{\varphi(a)/a \in A\} = \{a^2/a \in A\} = (0,1).$$

Η αντίστροφη εικόνα του $\varphi(A)$ θα είναι

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(\varphi(A)) &= \varphi^{-1}((0,1)) = \{a \in \mathbb{R}\ /\varphi(a) \in (0,1)\} = \\ &= \{a \in \mathbb{R}\ /a^2 \in (0,1)\} = (-1,1).\end{aligned}$$

Βλέπουμε, δηλαδή, ότι ισχύει $A = (0,1) \subsetneqq (-1,1) = \varphi^{-1}(\varphi(A))$.

Θεωρούμε τώρα το υποσύνολο $B = (-1,1)$ του πεδίου τιμών της συνάρτησης. Η αντίστροφη εικόνα του B είναι

$$\varphi^{-1}(B) = \{a \in \mathbb{R}\ /\varphi(a) \in B\} = \{a \in \mathbb{R}\ /a^2 \in (-1,1)\} = (-1,1).$$

Η εικόνα του συνόλου $\varphi^{-1}(B)$ θα είναι

$$\begin{aligned}\varphi(\varphi^{-1}(B)) &= \varphi((-1,1)) = \{\varphi(a)/a \in (-1,1)\} = \\ &= \{a^2/a \in (-1,1)\} = (0,1).\end{aligned}$$

Επομένως, θα ισχύει $\varphi(\varphi^{-1}(B)) = (0,1) \subsetneqq (-1,1) = B$.▲

Οι σχέσεις που είδαμε στο παραπάνω θεώρημα και ισχύουν για κάθε συνάρτηση, μπορούν να γίνουν ισότητες μόνον όταν οι συναρτήσεις έχουν επιπλέον ιδιότητες. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το εξής.

Θ ε ώ ρ η μ α 1.3.9 Μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$ είναι αμφιμονότιμη αν και μόνον αν ισχύει $A = f^{-1}(f(A))$, για κάθε υποσύνολο A του X.

Μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$ είναι επί αν και μόνον αν ισχύει $f(f^{-1}(B)) = B$, για κάθε υποσύνολο B του Y.

Α π ό δ ε ι ξ η. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αμφιμονότιμη, και θα δείξουμε ότι ισχύει $A = f^{-1}(f(A))$, για κάθε υποσύνολο A του X. Επειδή για κάθε συνάρτηση ισχύει η σχέση $A \subset f^{-1}(f(A))$, είναι αρκετό να δείξουμε ότι ισχύει και η σχέση $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Αν $a \in f^{-1}(f(A))$, τότε προφανώς θα έχουμε $f(a) \in f(A)$.

Δηλαδή πρέπει να ισχύει $f(a) = f(a')$, για κάποιο $a' \in A$. Από την υπόθεση η συνάρτηση f είναι αμφιμονότιμη, άρα προκύπτει $a = a'$, όπου $a' \in A$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση $A = f^{-1}(f(A))$, για κάθε υποσύνολο A του X. Θέλουμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι αμφιμονότιμη. Έστω ότι είναι $f(a_1) = f(a_2)$. Τότε θα έχουμε

$$f(a_1) \in f(\{a_2\}) \Rightarrow a_1 \in f^{-1}(f(\{a_2\})).$$

Από την υπόθεση ισχύει $f^{-1}(f(\{a_2\})) = \{a_2\}$, οπότε θα πρέπει $a_1 \in \{a_2\}$, δηλαδή $a_1 = a_2$. Επομένως, η συνάρτηση f είναι αμφιμονότιμη.

Υποθέτουμε, τώρα, ότι η συνάρτηση f είναι επί, και θα δείξουμε ότι ισχύει

$$f(f^{-1}(B)) = B,$$

για κάθε υποσύνολο B του Y. Επειδή για κάθε συνάρτηση ισχύει η σχέση

$$f(f^{-1}(B)) \subset B,$$

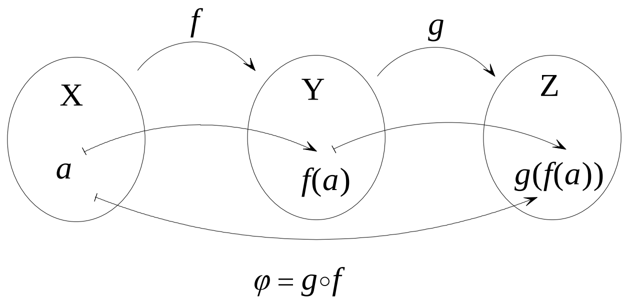
είναι αρκετό να δείξουμε ότι πρέπει να ισχύει και η σχέση $B \subset f(f^{-1}(B))$. Αν $b \in B$, τότε θα υπάρχει κάποιο στοιχείο $a \in X$ τέτοιο, ώστε να έχουμε $f(a) = b$, εφόσον η συνάρτηση είναι επί. Άρα προκύπτει

$$f(a) = b \in B \Rightarrow a \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(a) \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow b \in f(f^{-1}(B)),$$

δηλαδή θα έχουμε $B \subset f(f^{-1}(B))$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ισχύει $f(f^{-1}(B)) = B$, για κάθε υποσύνολο B του Y, και θα δείξουμε ότι η συνάρτηση είναι επί. Αν b είναι τυχόν στοιχείο του Y, τότε, από την υπόθεση, για το μονοσύνολο $\{b\}$ θα έχουμε $f(f^{-1}(\{b\})) = \{b\}$. Επομένως, $b \in \{b\} = f(f^{-1}(\{b\}))$, δηλαδή θα πρέπει να είναι $b = f(a)$, για κάποιο στοιχείο $a \in f^{-1}(\{b\}) \subset X$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε στοιχείο $b \in Y$ υπάρχει κάποιο στοιχείο $a \in X$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f(a) = b$, οπότε η συνάρτηση f είναι επί. ■

Θεωρούμε, τώρα, δύο συναρτήσεις $f : X \longrightarrow Y$, και $g : Y \longrightarrow Z$. Είναι προφανές ότι αν a είναι ένα στοιχείο του X, τότε το $f(a)$ είναι ένα στοιχείο του Y, οπότε με



τη συνάρτηση g το στοιχείο $f(a)$ θα απεικονιστεί στο στοιχείο $g(f(a))$ του Z. Η διαδικασία αυτή ορίζει ασφαλώς μια νέα συνάρτηση $\varphi : X \longrightarrow Z$, που ορίζεται με τη σχέση $\varphi(a) = g(f(a))$, για κάθε $a \in X$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται ***σύνθεση των συναρτήσεων*** f, g, και συμβολίζεται με $g \circ f$.

Θ ε ώ ρ η μ α 1.3.10 Αν $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$, και $h : Z \longrightarrow W$ είναι τυχούσες συναρτήσεις, τότε θα ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Δηλαδή η σύνθεση συναρτήσεων ικανοποιεί την προσεταιριστική ιδιότητα.

Α π ό δ ε ι ξ η. Επειδή, για κάθε στοιχείο a του X ισχύει

$$[h \circ (g \circ f)](a) = [h(g \circ f)](a) = h(g(f(a))), \text{ και}$$
$$[(h \circ g) \circ f](a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))),$$

προκύπτει αμέσως η ισότητα $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. ■

Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει ότι η σύνθεση συναρτήσεων δεν έχει την αντιμεταθετική ιδιότητα, ούτε μπορούν να εφαρμοστούν οι νόμοι της απλοποίησης.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.3.11 Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g και h, οι οποίες έχουν πεδίο ορισμού και τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, και ορίζονται με τις σχέσεις:

$$f(x) = -x,\ g(x) = |x|, \text{ και } h(x) = x^2,$$

αντίστοιχα. Από τον ορισμό της σύνθεσης συναρτήσεων, είναι προφανές ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θα έχουμε:

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(|x|) = |x|^2 = x^2, \text{ και}$$
$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(-x) = x^2.$$