Ευάγγελος Ψωμόπουλος

Αλγεβρικές Δομές II

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Πρόλογος

Η σύγχρονη Άλγεβρα είναι ένα σημαντικό και ουσιαστικό κομμάτι της μαθηματικής εκπαίδευσης σε όλα τα πανεπιστήμια του κόσμου. Αυτό δεν οφείλεται μόνο στο γεγονός ότι πολλοί άλλοι κλάδοι των μαθηματικών, και όχι μόνον, χρειάζονται τα αποτελέσματα της Άλγεβρας, αλλά και διότι η Άλγεβρα προσφέρει κομψές και αποτελεσματικές τεχνικές στην επίλυση προβλημάτων. Αυτό επιτυγχάνεται μέσα από την αφηρημένη προσέγγιση, και την αξιωματική μεθοδολογία. Θα πρέπει, όμως, να έχουμε πάντοτε υπόψη ότι η αξιωματική μεθοδολογία έχει να κάνει περισσότερο με την οργάνωση, και όχι με την ουσία της Άλγεβρας.

Δεν υπάρχει αμφιβολία, ότι πολλοί φοιτητές συναντούν δυσκολίες από την πρώτη τους επαφή με την Άλγεβρα. Οι δυσκολίες αυτές έχουν πολλές αιτίες, αλλά οι κυριότερες είναι δύο. Πρώτη είναι η αλλαγή της έμφασης από την αλγοριθμική προσέγγιση της μέσης εκπαίδευσης, σε μια περισσότερο αυστηρή και αφηρημένη προσέγγιση. Η αφηρημένη προσέγγιση δεν γίνεται μόνο για λόγους γενικότητας, αλλά κυρίως διότι διαπιστώθηκε ότι αυτού του είδους η προσέγγιση προσφέρει τις κομψές και αποτελεσματικές τεχνικές επίλυσης προβλημάτων, που προαναφέρθηκαν. Μια δεύτερη αιτία είναι ο αυξημένος ρυθμός της παρουσίασης του αντικειμένου, που συναντά κανείς σε κάθε πανεπιστήμιο, σε σχέση με τον ρυθμό παρουσίασης στη μέση εκπαίδευση. Οποιαδήποτε και αν είναι η αιτία, οι δυσκολίες αυτές αποθαρρύνουν αρκετούς φοιτητές από την περαιτέρω ενασχόληση με την Άλγεβρα, με αποτέλεσμα, και αυτό είναι λυπηρό, να χάνουν μια από τις ομορφότερες περιοχές των μαθηματικών.

Ακριβώς για το λόγο αυτό, ίσως συγχωρεθούν κάποιες συμβουλές, όσον αφορά τη μελέτη της Άλγεβρας. Καταρχήν σηκωθείτε από την πολυθρόνα, πάρτε μολύβι και χαρτί, και καθίστε στο γραφείο σας. Τα μαθηματικά, και πολύ περισσότερο η Άλγεβρα, δεν διαβάζονται σαν μυθιστόρημα, απαιτούν τη συμμετοχή μας. Αν συναντήσετε μια δυσκολία, και σας φαίνεται ανυπέρβλητη, μη διστάσετε να προχωρήσετε παρακάτω. Μερικές φορές συνεχίζοντας τη μελέτη, τα πράγματα γίνονται περισσότερο ξεκάθαρα, και η κατανόηση είναι ευκολότερη. Αν όμως συναντήσετε περισσότερες δυσκολίες, τότε είναι βέβαιο ότι πρέπει να γυρίσετε πίσω, και να ξαναδιαβάσετε από την αρχή τα σημεία που σας προβληματίζουν. Αν σκέφτεστε ότι κάτι τέτοιο είναι κουραστικό, θυμηθείτε ότι η γνώση είναι μια προσωπική περιουσία, την οποία εσείς οι ίδιοι πρέπει να αποκτήσετε, και κανείς στον κόσμο δεν μπορεί να σας την αφαιρέσει.

Το βιβλίο «Αλγεβρικές Δομές ΙΙ» είναι μια εισαγωγή στη Θεωρία Δακτυλίων, αποτελεί συνέχεια του βιβλίου «Αλγεβρικές Δομές Ι», και απευθύνεται σε προπτυχιακούς φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος, και σε κάθε άλλο που θα ήθελε να εξοικειωθεί με τις αλγεβρικές έννοιες. Γράφτηκε για να καλύψει κυρίως τη διδακτέα ύλη του αντίστοιχου υποχρεωτικού εξαμηνιαίου μαθήματος, το οποίο διδάσκεται στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.

Το βιβλίο αυτό αποτελείται από έξι κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρονται οι έννοιες του δακτυλίου, και του ομομορφισμού δακτυλίων, καθώς και βασικές ιδιότητες αυτών. Επίσης, ορίζεται το ιδεώδες ενός δακτυλίου, και οι πράξεις ιδεωδών. Στο δεύτερο κεφάλαιο ορίζεται ο δακτύλιος πηλίκο, και αναφέρονται τα θεωρήματα ισομορφίας δακτυλίων. Επίσης, ορίζεται το σώμα κλασμάτων μιας ακεραίας περιοχής, και η έννοια του πρώτου σώματος. Το τρίτο κεφάλαιο αφορά δύο σημαντικές κατηγορίες ιδεωδών, τα πρώτα και τα μέγιστα ιδεώδη, ενώ το επόμενο κεφάλαιο διαπραγματεύεται έννοιες που αφορούν τους αντιμεταθετικούς δακτυλίους. Το πέμπτο κεφάλαιο αφορά τους δακτυλίους πολυωνύμων, και γίνεται εκτενής αναφορά στα ανάγωγα πολυώνυμα. Στο έκτο κεφάλαιο αναφέρεται η έννοια της επέκτασης ενός σώματος, και ορίζονται τα αλγεβρικά στοιχεία. Ιδιαίτερη προσπάθεια έγινε ώστε η παρουσίαση των θεμάτων να είναι κατά το δυνατόν απλούστερη, έτσι ώστε το περιεχόμενο του βιβλίου να είναι κατανοητό από το φοιτητή.

Σχεδόν κάθε παράγραφος συνοδεύεται από ασκήσεις, οι οποίες δίνουν την ευκαιρία στον φοιτητή να ελέγξει αφενός τις γνώσεις που αποκτά σταδιακά, αφετέρου την ικανότητά του να συνδυάζει θεωρήματα που μαθαίνει, με στόχο να πετύχει νέα αποτελέσματα. Στο τέλος του βιβλίου υπάρχει μια συλλογή ασκήσεων, η οποία καλύπτει όλα τα θέματα που αναπτύσσονται στο βιβλίο αυτό. Σε κάθε μια από αυτές, δίνεται αναλυτική υπόδειξη.

Θεσσαλονίκη – Σεπτέμβριος 2010 Ευάγγελος Ψωμόπουλος

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η μορφή και το περιεχόμενο της Άλγεβρας έχουν αλλάξει σημαντικά από την εποχή που πρωτοεμφανίστηκε μέχρι σήμερα. Στη συνέχεια θα δούμε τη σταδιακή αυτή αλλαγή του περιεχομένου της Άλγεβρας, κάνοντας μια σύντομη ιστορική αναδρομή στην εξέλιξή της.

Αρχικά το αντικείμενο της Άλγεβρας ήταν η επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων. Το πρόβλημα της εύρεσης των ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης είναι χωρίς αμφιβολία ένα από τα πιο σημαντικά στην ιστορία της Άλγεβρας. Υπάρχουν ενδείξεις ότι οι Κινέζοι γνώριζαν τη λύση εξισώσεων δευτέρου βαθμού κατά τον πρώτο π.Χ. αιώνα. Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποιούσαν γεωμετρικές κατασκευές για να βρουν τις ρίζες εξισώσεων δευτέρου και τρίτου βαθμού. Τέλος, οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν την επίλυση ορισμένων μορφών της εξίσωσης δευτέρου βαθμού. Όμως, οι πρώτες αλγεβρικές μέθοδοι επίλυσης εξισώσεων δευτέρου βαθμού άρχισαν να εμφανίζονται γύρω στα 100 μ.Χ.

Η θεωρία εξισώσεων, για πολλά χρόνια, ήταν ένα σύνολο μεμονωμένων περιπτώσεων και ειδικών μεθόδων. Δηλαδή κάθε εξίσωση ήταν ένα διαφορετικό πρόβλημα, και αναπτυσσόταν μέθοδος για την επίλυσή του. Η πρώτη προσπάθεια συστηματοποίησης και ομαδοποίησης ορισμένων μεθόδων έγινε από τον M. M. Al-Khwarizmi το 825 μ.Χ. περίπου. Ο M. M. Al-Khwarizmi έδωσε κανόνες για την επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού, και ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε την ονομασία Άλγεβρα. Η λέξη Άλγεβρα προέρχεται από μια αραβική λέξη που σημαίνει αναγωγή ή αποκατάσταση. Η μέθοδος που ανέπτυξε ο Al-Khwarizmi ήταν η εφαρμογή συγκεκριμένων βημάτων, και μετασχηματισμών με στόχο η προς επίλυση εξίσωση να μετασχηματιστεί σε κάποια μορφή, της οποίας η λύση ήταν γνωστή. Ακριβώς για αυτό το λόγο, το όνομά του έδωσε τη λέξη «αλγόριθμος», που περιγράφει τη διαδικασία εφαρμογής συγκεκριμένων βημάτων, με στόχο την επίλυση κάποιου προβλήματος. Χωρίς αμφιβολία, η συνεισφορά του Al-Khwarizmi ήταν σημαντική.

Το επόμενο σημαντικό βήμα έγινε στα 1545, όταν ο H. Cardano εξέδωσε το βιβλίο του γνωστό με τον τίτλο «Ars Magna». Στο βιβλίο αυτό περιγράφονται λύσεις των εξισώσεων τρίτου και τετάρτου βαθμού. Δεν είναι απόλυτα εξακριβωμένο αν οι λύσεις αυτές οφείλονται αποκλειστικά στον H. Cardano. Στην πραγματικότητα υπήρξε κάποια διαμάχη ως προς αυτό το θέμα. Η λύση της εξίσωσης τρίτου βαθμού βασίστηκε σε προηγούμενη εργασία του S. Del Ferro, ενώ ο N. Fontana ισχυρίστηκε ότι αυτός έδωσε στον H. Cardano τη λύση της εξίσωσης τρίτου βαθμού. Η λύση της εξίσωσης τετάρτου βαθμού οφείλεται στον L. Ferrari, ο οποίος ήταν μαθητής του Cardano. Ανεξάρτητα, όμως, από τις όποιες διαμάχες, που είναι αντικείμενο της ιστορίας, το βιβλίο «Ars Magna» ήταν ο δεύτερος σημαντικός σταθμός στην εξέλιξη της Άλγεβρας.

Με τις λύσεις των εξισώσεων δευτέρου, τρίτου και τετάρτου βαθμού να είναι ένα γεγονός, ήταν φυσικό, οι μαθηματικοί της εποχής να ασχοληθούν με το επόμενο βήμα, που ήταν η επίλυση της εξίσωσης πέμπτου βαθμού. Μάλιστα υπήρχε αρκετή αισιοδοξία για το εγχείρημα, λόγω των προηγούμενων επιτυχιών. Προσπάθειες, όμως, προς την κατεύθυνση αυτή παρέμεναν άκαρπες για πολλά χρόνια, και αυτό γιατί πολύ απλά η εξίσωση πέμπτου βαθμού γενικά δεν επιλύεται. Αυτό, όμως, ήταν άγνωστο την εποχή εκείνη, και έτσι οι επιστήμονες συνέχισαν τις προσπάθειες για την επίλυση της εξίσωσης πέμπτου βαθμού. Βέβαια η απάντηση στο πρόβλημα δεν ερχόταν, γεγονός που ανάγκασε πολλούς μαθηματικούς να ασχοληθούν με άλλες πλευρές του ίδιου προβλήματος. Αποτέλεσμα αυτής της προσπάθειας ήταν να αποδειχθούν θεωρήματα που αφορούσαν την κατανομή των ριζών των πολυωνυμικών εξισώσεων, και να βρεθούν μέθοδοι με τις οποίες μπορούσαν να προσεγγίσουν τις ρίζες.

Το 1746 ο D' Alembert διατύπωσε και απέδειξε το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας: «κάθε αλγεβρική εξίσωση n βαθμού έχει n ρίζες». Αν και η απόδειξη του D' Alembert ήταν λανθασμένη, το γεγονός αυτό δεν αναγνωρίστηκε πριν περάσουν αρκετά χρόνια. Την πρώτη σωστή απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος της Άλγεβρας έδωσε ο Gauss το 1799. Όπως ήταν επόμενο, η παρουσία του θεωρήματος αυτού άλλαξε τον τρόπο με τον οποίο έβλεπαν οι μαθηματικοί το πρόβλημα της επίλυσης εξισώσεων. Δεν είχε πλέον νόημα να αποδείξουν ότι μια εξίσωση έχει ρίζες γιατί αυτό ήταν γνωστό. Το πρόβλημα ήταν αν οι ρίζες αυτές μπορούσαν να εκφραστούν σαν συναρτήσεις των συντελεστών της εξίσωσης, χρησιμοποιώντας μόνον, και πεπερασμένου πλήθους φορές, την πρόσθεση, την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό, την διαίρεση και την εξαγωγή ρίζας. Δηλαδή, να υπάρχει μια ή περισσότερες παραστάσεις, από τον υπολογισμό των οποίων να προκύπτουν οι ρίζες της εξίσωσης. Ένα γνωστό παράδειγμα είναι η παράσταση που δίνει τις ρίζες μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού. Όταν οι ρίζες μιας εξίσωσης μπορούν να εκφραστούν με αυτόν τον τρόπο, λέμε ότι η εξίσωση είναι επιλύσιμη με ριζικά.

Τα πρώτα βήματα προς την κατεύθυνση αυτή έκανε ο Lagrange γύρω στα 1770-1771. Οι μέθοδοι που εισήγαγε χρησιμοποιούσαν στην πραγματικότητα θεωρία ομάδων, χωρίς όμως να εισάγει την έννοια αυτή. Ο Lagrange, μελετώντας τις γνωστές εξισώσεις δευτέρου, τρίτου και τετάρτου βαθμού, διαπίστωσε ότι κάποιες παραστάσεις των ριζών τους, για παράδειγμα $\rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1$, δεν αλλάζουν τιμή, αν οι ρίζες μετατεθούν με οποιοδήποτε τρόπο. Κατέληξε, έτσι, στο συμπέρασμα ότι το πρόβλημα ήταν να βρεθούν κάποιες συναρτήσεις των ριζών της εξίσωσης, οι οποίες να παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από ορισμένες μεταθέσεις. Εισήγαγε με τον τρόπο αυτό την έννοια της μετάθεσης, η οποία είναι ο πρόγονος της ομάδας. Ο Lagrange, όμως, δεν πρόλαβε να απαντήσει στο ερώτημα αν η εξίσωση πέμπτου βαθμού είναι επιλύσιμη με ριζικά ή όχι. Μόλις στα 1813 αποδείχθηκε, από τον P. Ruffini, ότι η γενική εξίσωση πέμπτου βαθμού δεν είναι επιλύσιμη με ριζικά. Η απόδειξή του, όμως, αν και ήταν σωστή είχε αρκετές ελλείψεις. Πλήρη και σωστή απόδειξη έδωσε ο N. H. Abel το 1826. Η εξαιρετική αυτή εργασία του Abel απάντησε σε ένα ερώτημα που βασάνισε τους μαθηματικούς για τρεις περίπου αιώνες, ενώ ταυτόχρονα έθετε ένα άλλο γενικότερο ερώτημα. Ποιες εξισώσεις, τελικά, είναι επιλύσιμες με ριζικά και ποιες δεν είναι.

Απάντηση στο ερώτημα αυτό έδωσε το 1832 ένας μεγαλοφυής μαθηματικός, ο Evariste Galois. Ο Galois αντιστοίχισε σε κάθε αλγεβρική εξίσωση ένα σύστημα μεταθέσεων των ριζών της, το οποίο ονόμασε ομάδα. Στη συνέχεια, απέδειξε ότι η εξίσωση αυτή είναι επιλύσιμη με ριζικά όταν η αντίστοιχη ομάδα έχει κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα, και αντίστροφα. Έτσι, το πρόβλημα της επίλυσης αλγεβρικών εξισώσεων έγινε πλέον πρόβλημα της θεωρίας ομάδων. Δυστυχώς, ο Galois πέθανε πριν να γίνει απόλυτα κατανοητή η θεωρία του. Το γεγονός αυτό είχε σαν αποτέλεσμα να μείνει αναξιοποίητη η σημαντική αυτή εργασία για αρκετά χρόνια. Όταν αργότερα άρχισαν να ασχολούνται με το θέμα αυτό, διαπίστωσαν ότι έπρεπε να διευκρινίσουν προηγουμένως ορισμένα αποτελέσματα που αφορούσαν τη θεωρία ομάδων. Θα μπορούσαμε, λοιπόν, να πούμε ότι η ανάπτυξη της θεωρίας ομάδων οφείλεται κατά ένα μέρος στην προσπάθεια να γίνει περισσότερο κατανοητή η θεωρία που άφησε ο

Galois. Έτσι, από την κλασσική Άλγεβρα, της οποίας το αντικείμενο ήταν η επίλυση εξισώσεων, φθάσαμε στη σύγχρονη (abstract) Άλγεβρα, η οποία ελάχιστα ασχολείται με εξισώσεις.

Τα τελευταία χρόνια, έννοιες και αποτελέσματα από την Άλγεβρα χρησιμοποιούνται όχι μόνο σε άλλους κλάδους των μαθηματικών, αλλά και σε άλλες επιστήμες, όπως στη Φυσική, στη Χημεία, στους Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές κ.α. Το γεγονός αυτό είχε σαν αποτέλεσμα την αύξηση του ενδιαφέροντος για την ίδια την Άλγεβρα, η οποία πολλές φορές είχε να απαντήσει σε ερωτήματα που τέθηκαν από άλλες επιστήμες. Επιπλέον, η χρησιμότητά της αυτή έκανε την Άλγεβρα να γίνει μέρος της βασικής εκπαίδευσης των μαθηματικών σχεδόν σε όλα τα πανεπιστήμια. Δυστυχώς, όμως, για να μπορέσει κανείς να δει εφαρμογές της Άλγεβρας σε άλλες επιστήμες, π.χ. στη Χημεία, δεν αρκεί να γνωρίζει μόνο Χημεία, αλλά πολλές φορές είναι απαραίτητο να προχωρήσει στην Άλγεβρα περισσότερο από ό,τι συνήθως δίνεται στο αντίστοιχο μάθημα των προπτυχιακών σπουδών.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στη Θεωρία Δακτυλίων

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε αλγεβρικές δομές στις οποίες έχουν οριστεί δύο πράξεις, που συνήθως ονομάζουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, και πληρούν ορισμένες ιδιότητες. Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων, όπως επίσης και το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών, με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αριθμών είναι τέτοιες αλγεβρικές δομές.

1.1 Οι πρώτοι ορισμοί και βασικά αποτελέσματα

Από τη μέση εκπαίδευση είμαστε περισσότερο εξοικειωμένοι με συστήματα, τα οποία έχουν δύο πράξεις. Από την άποψη αυτή, η έννοια του δακτυλίου είναι λιγότερο ξένη με αυτά που έχουμε συνηθίσει, χρησιμοποιώντας τα γνωστά σύνολα των ακεραίων, των ρητών και των πραγματικών αριθμών.

Ορισμός 1.1.1 ***Δακτύλιος*** **είναι ένα μη κενό σύνολο R με δύο πράξεις, την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, οι οποίες ικανοποιούν τα αξιώματα:**

Δ_1 : $a + (b + c) = (a + b) + c$,

Δ_2 : **υπάρχει** 0 **στο** R **τέτοιο ώστε** $a + 0 = a = 0 + a$,

Δ_3 : **για κάθε** $a \in R$ **υπάρχει** $-a \in R$ **έτσι ώστε** $a + (-a) = 0 = (-a) + a$,

Δ_4 : $a + b = b + a$,

Δ_5 : $a(bc) = (ab)c$,

Δ_6 : $a(b + c) = ab + ac$ **και** $(a + b)c = ac + bc$,

για όλα τα στοιχεία a, b, c **του** R.

Αν επιπλέον ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό, δηλαδή αν ισχύει $ab = ba$, για κάθε $a, b \in R$, τότε ο δακτύλιος R λέγεται ***αντιμεταθετικός***.

Επίσης, αν ο δακτύλιος R περιέχει μοναδιαίο στοιχείο για τον πολλαπλασιασμό, δηλαδή, αν υπάρχει ένα στοιχείο $1 \in R$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$, για κάθε $a \in R$, τότε ο δακτύλιος R λέγεται ***δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο***. Αν σε κάποιο δακτύλιο ικανοποιείται μόνον η ισότητα $1 \cdot a = a$ για όλα τα στοιχεία a, τότε μιλάμε για ***αριστερό μοναδιαίο*** στοιχείο. Ανάλογα, αν ισχύει μόνον η σχέση $a \cdot 1 = a$ για όλα τα στοιχεία a, τότε έχουμε ***δεξιό μοναδιαίο*** στοιχείο.

Οι ιδιότητες $\Delta_1 - \Delta_4$ δείχνουν απλά ότι το σύνολο R είναι μια προσθετική αντιμεταθετική ομάδα. Την ομάδα αυτή ονομάζουμε ***προσθετική ομάδα του δακτυλίου*** R. Αφού κάθε δακτύλιος R είναι ταυτόχρονα και προσθετική αντιμεταθετική ομάδα, ισχύουν όλες οι ιδιότητες που αναφέρονται στις ομάδες αυτές. Έτσι σε ένα δακτύλιο R ισχύουν

$$-0 = 0, -(-a) = a, \text{ και } -(a+b) = (-a) + (-b)$$

για κάθε $a, b \in R$. Καθώς επίσης και

$$na = \begin{cases} a + a + \cdots + a & (n \text{ φορές}) & \text{όταν } n > 0 \\ 0 & & \text{όταν } n = 0 \\ (-a) + (-a) + \cdots + (-a) & (-n \text{ φορές}) & \text{όταν } n < 0 \end{cases}$$

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α **1.1.2** Τα σύνολα $\mathbb{Z}$ των ακεραίων, $\mathbb{Q}$ των ρητών, $\mathbb{R}$ των πραγματικών και $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι αντιμεταθετικοί δακτύλιοι με μοναδιαίο στοιχείο με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αριθμών.

Το σύνολο $2\mathbb{Z} = \{2k/k \in \mathbb{Z}\}$ με τις συνήθεις πράξεις είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος χωρίς μοναδιαίο στοιχείο.

Είναι γνωστό ότι το σύνολο $M_n(\mathbb{R})$ όλων των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, όπως επίσης και το σύνολο $\mathbb{R}[x]$ όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές είναι δακτύλιοι με μοναδιαίο στοιχείο. Ο δακτύλιος $\mathbb{R}[x]$ είναι αντιμεταθετικός, ενώ ο δακτύλιος $M_n(\mathbb{R})$ δεν είναι.

Είναι γνωστό ότι στο σύνολο $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{m-1}\}$ των ακεραίων $\bmod m$, μπορούμε να ορίσουμε δύο πράξεις με τις σχέσεις:

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} \text{ και } \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$$

Είναι, επίσης, γνωστό ότι το σύνολο $\mathbb{Z}_m$ αποτελεί μια προσθετική αντιμεταθετική ομάδα. Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι οι προηγούμενες πράξεις ικανοποιούν και τις σχέσεις

$$\overline{a} \cdot (\overline{b} \cdot \overline{c}) = (\overline{a} \cdot \overline{b}) \cdot \overline{c}, \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}, \overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}.$$

Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο $\mathbb{Z}_m$ αποτελεί ένα δακτύλιο, και μάλιστα αντιμεταθετικό με μοναδιαίο στοιχείο.$\blacktriangle$

Στο παρακάτω παράδειγμα κατασκευάζεται ένας νέος δακτύλιος με τη βοήθεια δύο γνωστών δακτυλίων. Αν και στην κατασκευή χρησιμοποιούνται οι δακτύλιοι $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{R}$, εντούτοις μπορούν να χρησιμοποιηθούν τυχόντες δακτύλιοι R και S.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.1.3 Στο καρτεσιανό γινόμενο $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, ορίζουμε την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με τον εξής τρόπο

$$(n, x) + (m, y) = (n + m, x + y) \text{ και } (n, x) \cdot (m, y) = (nm, xy),$$

για όλους τους ακέραιους m, n και όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, y. Επειδή οι ακέραιοι και οι πραγματικοί αριθμοί ικανοποιούν τις ιδιότητες του Ορισμού 1.1.1, είναι εύκολο να αποδείξει κανείς ότι το σύνολο A με τις παραπάνω πράξεις είναι δακτύλιος, και μάλιστα αντιμεταθετικός, με μοναδιαίο στοιχείο $(1, 1)$.

Θεωρούμε τα υποσύνολα

$$\begin{aligned} B &= \{(2k, x)/k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}\} = 2\mathbb{Z} \times \mathbb{R}, \text{ και} \\ C &= \{(0, x)/x \in \mathbb{R}\} = \{0\} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

του συνόλου A. Είναι θέμα απλών πράξεων να διαπιστώσει κανείς ότι τα σύνολα B και C με τις πράξεις που ορίστηκαν παραπάνω είναι δακτύλιοι. Ο δακτύλιος B δεν έχει μοναδιαίο στοιχείο, ενώ το $(0, 1)$ είναι μοναδιαίο στοιχείο για το δακτύλιο C.$\blacktriangle$

Πολύ σύντομα θα ασχοληθούμε με δακτυλίους, οι οποίοι θα περιέχουν μοναδιαίο στοιχείο. Το παρακάτω θεώρημα αφορά το στοιχείο αυτό.

Θ ε ώ ρ η μ α 1.1.4 Αν ένας δακτύλιος R έχει μοναδικό αριστερό μοναδιαίο στοιχείο, τότε έχει μοναδιαίο στοιχείο. Φυσικά, αν ο δακτύλιος R έχει μοναδικό δεξιό μοναδιαίο στοιχείο, τότε θα έχει επίσης μοναδιαίο στοιχείο.

Α π ό δ ε ι ξ η. Υποθέτουμε ότι $e \in R$ είναι το μοναδικό αριστερό μοναδιαίο στοιχείο του δακτυλίου R. Υποθέτουμε δηλαδή ότι ισχύει $ea = a$, για κάθε $a \in R$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι είναι και δεξιό μοναδιαίο στοιχείο, δηλαδή ότι ισχύει $be = b$, για κάθε $b \in R$.

Έστω b τυχόν στοιχείο του R. Θεωρούμε το στοιχείο $e + be - b$. Τότε για κάθε $c \in R$, θα έχουμε

$$(e + be - b)c = ec + (be)c - bc = c + b(ec) - bc = c + bc - bc = c,$$

δηλαδή το στοιχείο $e + be - b$ είναι επίσης αριστερό μοναδιαίο στοιχείο, για κάθε $b \in R$. Όμως, από την υπόθεση το στοιχείο e είναι το μοναδικό αριστερό μοναδιαίο στοιχείο. Άρα, για κάθε $b \in R$, θα πρέπει να έχουμε την ισότητα $e + be - b = e$. Δηλαδή, για κάθε $b \in R$, θα ισχύει $be = b$. Επομένως το e είναι και δεξιό μοναδιαίο στοιχείο, δηλαδή είναι μοναδιαίο στοιχείο.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι αν ο δακτύλιος έχει μοναδικό δεξιό μοναδιαίο στοιχείο, τότε έχει μοναδιαίο στοιχείο. ■

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.1.5 Στο σύνολο

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

θεωρούμε τις συνήθεις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης πινάκων. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι το άθροισμα και το γινόμενο δύο στοιχείων του S είναι επίσης στοιχείο του S. Επομένως το S είναι ένας δακτύλιος, αφού οι πράξεις των πινάκων ικανοποιούν τις ιδιότητες του Ορισμού 1.1.1. Ο δακτύλιος S είναι μη αντιμεταθετικός και στερείται μοναδιαίου στοιχείου. Πράγματι, παρατηρούμε ότι

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ενώ } \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή το στοιχείο $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ του δακτυλίου S είναι αριστερό μοναδιαίο στοιχείο αλλά όχι μοναδιαίο στοιχείο. Εύκολα διαπιστώνεται ότι κάθε στοιχείο της μορφής $\left(\begin{smallmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, για οποιοδήποτε $k \in \mathbb{Z}$, είναι αριστερό μοναδιαίο στοιχείο του δακτυλίου S. Επομένως ο δακτύλιος S έχει άπειρα διαφορετικά μεταξύ τους αριστερά μοναδιαία στοιχεία. Η τελευταία αυτή παρατήρηση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο δακτύλιος S δεν μπορεί να έχει μοναδιαίο στοιχείο, γιατί τότε θα ήταν μοναδικό. ▲

Το παρακάτω θεώρημα αφορά, ουσιαστικά, κάποιες ιδιότητες των πράξεων ενός δακτυλίου, και η απόδειξή του είναι σχεδόν προφανής.

Θ ε ώ ρ η μ α 1.1.6 **Έστω R τυχαίος δακτύλιος. Για οποιαδήποτε στοιχεία a, b, c, a_i, b_j του δακτυλίου R ισχύουν οι σχέσεις**

(i) $0a = a0 = 0$, **(ii)** $(-a)b = a(-b) = -(ab)$, **(iii)** $(-a)(-b) = ab$,

(iv) $a(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = ab_1 + ab_2 + \cdots + ab_n$**, για κάθε** $n \in \mathbb{N}$,

(v) $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)b = a_1b + a_2b + \cdots + a_nb$**, για κάθε** $n \in \mathbb{N}$,

(vi) $(na)b = a(nb) = n(ab)$**, για κάθε** $n \in \mathbb{Z}$,

(vii) $(a - b)c = ac - bc$ **και** $a(b - c) = ab - ac$.

Α π ό δ ε ι ξ η. (i). Αν στην ισότητα $0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$, προσθέσουμε το αντίθετο του στοιχείου $0a$, και στα δύο μέλη, θα πάρουμε $0 = 0a$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και η σχέση $a0 = 0$.

(ii). Επειδή $ab + (-a)b = [a + (-a)]b = 0b = 0$, προκύπτει ότι το αντίθετο του στοιχείου ab είναι το στοιχείο $(-a)b$. Δηλαδή ισχύει $(-a)b = -(ab)$. Όμοια αποδεικνύεται η σχέση $a(-b) = -(ab)$.

(iii). Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (ii) θα έχουμε

$$(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = ab.$$

(iv). Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο n. Για $n = 2$ ισχύει, σύμφωνα με τον Ορισμό 1.1.1(Δ6). Υποθέτουμε ότι ισχύει

$$a(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) = ab_1 + ab_2 + \cdots + ab_{n-1}.$$

Τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} a(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n) &= a[(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) + b_n] = \\ &= a(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) + ab_n = \\ &= ab_1 + ab_2 + \cdots + ab_{n-1} + ab_n. \end{aligned}$$

(v). Όμοια με την προηγούμενη.

(vi). Αν $n = 0$, τότε προφανώς ισχύει από την (i). Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε από τη σχέση (iv), και για $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = b$, προκύπτει $a(nb) = n(ab)$, ενώ από τη σχέση (v), και για $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$, θα έχουμε $(na)b = n(ab)$. Τέλος, αν υποθέσουμε ότι $n \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$, τότε $-n \in \mathbb{N}$, επομένως θα ισχύει

$$(-na)b = a(-nb) = (-n)ab.$$

Άρα για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει η σχέση $(na)b = a(nb) = n(ab)$.

(vii). Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις που ήδη αποδείξαμε, θα έχουμε τις ισότητες

$$(a-b)c = [a+(-b)]c = ac + (-b)c = ac - bc, \text{ και}$$
$$a(b-c) = a[b+(-c)] = ab + a(-c) = ab - ac,$$

που ολοκληρώνουν την απόδειξη. ■

Ο ρ ι σ μ ό ς 1.1.7 Ένα μη κενό υποσύνολο S ενός δακτυλίου R λέγεται *υποδακτύλιος* του R, αν το S είναι ένας δακτύλιος ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού του δακτυλίου R.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.1.8 Κάθε δακτύλιος R περιέχει δύο προφανείς υποδακτυλίους, τον ***τετριμμένο υποδακτύλιο*** $\{0\}$, και τον ίδιο το δακτύλιο R.

Είναι γνωστό ότι οι δακτύλιοι $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$, των ακεραίων και των ρητών αντίστοιχα, είναι υποδακτύλιοι του δακτυλίου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Επίσης, στο Παράδειγμα 1.1.3, οι δακτύλιοι B και C είναι υποδακτύλιοι του δακτυλίου A.▲

Αν ένας δακτύλιος R έχει μοναδιαίο στοιχείο 1, και αυτό ανήκει στον υποδακτύλιο S του R, τότε φυσικά το 1 είναι μοναδιαίο στοιχείο και του S. Είναι, όμως, δυνατόν ο δακτύλιος R να έχει μοναδιαίο στοιχείο, και ο υποδακτύλιος S να μην έχει. Στο Παράδειγμα 1.1.3 έχουμε δύο τέτοιους δακτυλίους, τον A και τον B. Επίσης, είναι δυνατόν ο δακτύλιος R να μην έχει μοναδιαίο στοιχείο και να έχει ο υποδακτύλιος S. Στο ίδιο παράδειγμα, ο υποδακτύλιος C του δακτυλίου B έχει μοναδιαίο στοιχείο, ενώ ο B δεν έχει. Τέλος, είναι δυνατόν ο R να έχει μοναδιαίο στοιχείο 1_R, ο υποδακτύλιος S να έχει μοναδιαίο στοιχείο 1_S, και να ισχύει $1_R \neq 1_S$. Πράγματι, ο δακτύλιος A του Παραδείγματος 1.1.3 έχει μοναδιαίο στοιχείο $(1,1)$, ενώ ο υποδακτύλιός του C έχει μοναδιαίο στοιχείο $(0,1)$.

Θ ε ώ ρ η μ α 1.1.9 Ένα μη κενό υποσύνολο S ενός δακτυλίου R είναι υποδακτύλιος του R αν και μόνον αν ισχύουν οι σχέσεις

$$a - b \in S \textbf{ και } a \cdot b \in S,$$

για όλα τα στοιχεία a, b του S.

Α π ό δ ε ι ξ η. Προφανώς, αν S είναι ένας υποδακτύλιος του R, τότε οι σχέσεις $a-b \in S$ και $a \cdot b \in S$ ισχύουν για όλα τα a, b του S, εφόσον ο S είναι ένας δακτύλιος.

Αντίστροφα, η σχέση $a - b \in S$ βεβαιώνει ότι το S είναι υποομάδα της προσθετικής ομάδας του R. Η σχέση $a \cdot b \in S$ δείχνει απλά ότι το σύνολο S είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό. Άρα οι ιδιότητες Δ_5 και Δ_6 του Ορισμού 1.1.1 ικανοποιούνται στο S, αφού ικανοποιούνται στο R, και το S είναι υποσύνολο του R. Επομένως το S είναι δακτύλιος ως προς τις πράξεις του δακτυλίου R. ∎

Αν υποθέσουμε ότι σε κάποιο δακτύλιο R ισχύει η σχέση $1 = 0$, δηλαδή το μοναδιαίο στοιχείο ταυτίζεται με το μηδενικό, τότε, για κάθε στοιχείο a του R, θα έχουμε $a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0$. Δηλαδή ο δακτύλιος R περιέχει ένα μόνο στοιχείο το 0. Για να αποφύγουμε αυτήν την τετριμμένη περίπτωση, θα θεωρούμε στο εξής ότι το μοναδιαίο στοιχείο ενός δακτυλίου (αν υπάρχει) είναι διάφορο του 0.

Όπως και στην περίπτωση των ομάδων, οποιαδήποτε τομή υποδακτυλίων είναι υποδακτύλιος.

Θ ε ώ ρ η μ α 1.1.10 Έστω R τυχαίος δακτύλιος. Αν $(S_i, i \in I)$ είναι μια οικογένεια υποδακτυλίων του R, τότε η τομή $S = \bigcap_{i \in I} S_i$ είναι υποδακτύλιος του R.

Α π ό δ ε ι ξ η. Το μηδενικό στοιχείο του R ανήκει σε κάθε υποδακτύλιό του, επομένως $0 \in S_i$, για κάθε $i \in I$. Άρα η τομή S είναι μη κενό υποσύνολο του R.

Αν a και b είναι τυχόντα στοιχεία του S, τότε τα στοιχεία a και b θα ανήκουν σε κάθε υποδακτύλιο S_i, για κάθε $i \in I$. Αυτό σημαίνει ότι θα ισχύουν

$$a - b \in S_i, \text{ και } a \cdot b \in S_i, \text{ για κάθε } i \in I.$$

Επομένως θα έχουμε $a - b \in S$, και $a \cdot b \in S$, οπότε η τομή S θα είναι υποδακτύλιος του R, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα. ∎

Είναι γνωστό ότι, στους δακτυλίους $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ η σχέση $ab = 0$, για οποιαδήποτε στοιχεία a, b των δακτυλίων αυτών, συνεπάγεται $a = 0$ ή $b = 0$. Η ιδιότητα, όμως, αυτή δεν ισχύει σε τυχόντα δακτύλιο. Γνωρίζουμε άλλωστε ότι είναι δυνατόν το γινόμενο δύο πινάκων να είναι μηδέν, ενώ και οι δύο πίνακες να είναι διάφοροι του μηδενός. Για παράδειγμα, στο δακτύλιο $M_2(\mathbb{Z})$, των 2×2 πινάκων με στοιχεία ακέραιους αριθμούς, έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επίσης στο δακτύλιο $\mathbb{Z}_6$ ισχύει $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{0}$, ενώ $\overline{2} \neq \overline{0}$ και $\overline{3} \neq \overline{0}$. Οδηγούμαστε έτσι στον παρακάτω ορισμό.

Ο ρ ι σ μ ό ς 1.1.11 Ένα στοιχείο a ενός δακτυλίου R θα λέγεται *διαιρέτης του μηδενός*, αν υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο $b \in R$ έτσι, ώστε να ισχύει $ab = 0$, ή μη μηδενικό στοιχείο $c \in R$ έτσι, ώστε να ισχύει $ca = 0$.

Βέβαια, το μηδενικό στοιχείο ικανοποιεί τη σχέση $0 \cdot a = 0$, για κάθε μη μηδενικό στοιχείο a του R. Αυτό σημαίνει ότι το 0 είναι ένας διαιρέτης του μηδενός. Όμως, όπως είναι φυσικό, το ενδιαφέρον εντοπίζεται στους μη μηδενικούς διαιρέτες του μηδενός, για αυτό πολλές φορές στη συνέχεια θα αναφερόμαστε στον όρο διαιρέτες του μηδενός, και θα εννοούμε τους μη μηδενικούς διαιρέτες του μηδενός.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.1.12 Έστω R τυχαίος δακτύλιος και S ένας υποδακτύλιος του R. Όπως, ήδη, έχουμε αναφέρει είναι δυνατόν οι δακτύλιοι R και S να έχουν μοναδιαίο στοιχείο 1_R και 1_S, αντίστοιχα, χωρίς τα δύο αυτά στοιχεία να ταυτίζονται. Θα δείξουμε ότι στην περίπτωση αυτή, το μοναδιαίο στοιχείο 1_S του δακτυλίου S είναι διαιρέτης του μηδενός στο δακτύλιο R.

Πράγματι, αφού $1_R \neq 1_S$, δηλαδή το στοιχείο 1_S δεν είναι μοναδιαίο στοιχείο του R, θα υπάρχει ένα στοιχείο $a \in R$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $a \cdot 1_S \neq a$. Τότε θα έχουμε $b = a \cdot 1_S - a \neq 0$, ενώ ταυτόχρονα θα ισχύει

$$b \cdot 1_S = (a \cdot 1_S - a) \cdot 1_S = a \cdot 1_S - a \cdot 1_S = 0.$$

Δηλαδή το μοναδιαίο στοιχείο 1_S του υποδακτυλίου S είναι διαιρέτης του μηδενός στο δακτύλιο R.▲

Οι διαιρέτες του μηδενός συνδέονται άμεσα με την απλοποίηση στην πράξη του πολλαπλασιασμού. Αυτό φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θ ε ώ ρ η μ α 1.1.13 Ένας δακτύλιος R δεν έχει διαιρέτες του μηδενός αν και μόνον αν οι νόμοι απαλοιφής ως προς τον πολλαπλασιασμό ισχύουν στον R, δηλαδή για κάθε a, b, $c \in R$ με $a \neq 0$ ισχύουν

$$ab = ac \Rightarrow b = c \textbf{ και } ba = ca \Rightarrow b = c.$$

Α π ό δ ε ι ξ η. Υποθέτουμε ότι ο δακτύλιος R δεν έχει διαιρέτες του μηδενός. Τότε θα έχουμε

$$ab = ac \Rightarrow ab - ac = 0 \Rightarrow a(b - c) = 0 \Rightarrow b - c = 0,$$

διότι αν $b - c \neq 0$, τότε το μη μηδενικό στοιχείο a του R θα ήταν διαιρέτης του μηδενός.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι, για $a \neq 0$, ισχύουν οι σχέσεις

$$ab = ac \Rightarrow b = c \text{ και } ba = ca \Rightarrow b = c, \text{ για κάθε } a, b, c \in R.$$

Αν ο δακτύλιος R είχε ένα διαιρέτη του μηδενός $x \neq 0$, τότε θα είχαμε $xy = 0$ ή $yx = 0$, για κάποιο μη μηδενικό στοιχείο $y \in R$. Οπότε θα έπρεπε να ισχύει

$$xy = 0 = x0 \text{ ή } yx = 0 = 0x.$$

Σε κάθε περίπτωση, όμως, από την υπόθεση προκύπτει ότι $y = 0$, πράγμα που είναι άτοπο, διότι $y \neq 0$. ■

Ο ρ ι σ μ ό ς 1.1.14 *Ακεραία περιοχή* είναι ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος, με μοναδιαίο στοιχείο και χωρίς μη μηδενικούς διαιρέτες του μηδενός.

Ένα τυπικό παράδειγμα ακεραίας περιοχής είναι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών. Αντίθετα, ο αντιμεταθετικός δακτύλιος $2\mathbb{Z}$ του Παραδείγματος 1.1.2, ενώ δεν έχει διαιρέτες του μηδενός, δεν είναι ακεραία περιοχή, γιατί στερείται μοναδιαίου στοιχείου. Επίσης, ο αντιμεταθετικός δακτύλιος $\mathbb{Z}_6$, ενώ έχει μοναδιαίο στοιχείο, δεν είναι ακεραία περιοχή, γιατί όπως είδαμε στο δακτύλιο αυτό ισχύει η σχέση $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{0}$, δηλαδή ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_6$ έχει διαιρέτες του μηδενός.

Είναι γνωστό ότι κάθε πίνακας με ορίζουσα διάφορη του μηδενός είναι αντιστρέψιμος. Δηλαδή, ο δακτύλιος $M_2(\mathbb{R})$ περιέχει στοιχεία, τα οποία δέχονται αντίστροφο, και στοιχεία που δεν έχουν αντίστροφο. Επίσης, τα μόνα στοιχεία του δακτυλίου $\mathbb{Z}_6$, που έχουν αντίστροφο στοιχείο είναι $\overline{1}$ και $\overline{5}$, εφόσον ισχύει

$$\overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1} \text{ και } \overline{5} \cdot \overline{5} = \overline{25} = \overline{1}.$$

Ο ρ ι σ μ ό ς 1.1.15 Ένα στοιχείο a ενός δακτυλίου R με μοναδιαίο στοιχείο λέγεται *αντιστρέψιμο* ή *μονάδα*, αν υπάρχει στοιχείο b του R τέτοιο ώστε να ισχύει $ab = 1 = ba$. Το στοιχείο b λέγεται *αντίστροφο* του a, και συμβολίζεται με a^{-1}.

Ένα αντιστρέψιμο στοιχείο δεν είναι ποτέ διαιρέτης του μηδενός. Πράγματι, αν a είναι αντιστρέψιμο, και υπάρχει στοιχείο $x \neq 0$ ώστε να ισχύει $ax = 0$, τότε θα έχουμε $x = a^{-1}(ax) = a^{-1}0 = 0$, άτοπο.

Ο ρ ι σ μ ό ς 1.1.16 Ένας δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο λέγεται *δακτύλιος με διαίρεση*, αν κάθε μη μηδενικό στοιχείο του είναι αντιστρέψιμο. Ειδικότερα, ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με διαίρεση λέγεται *σώμα*.

Από τον ορισμό του σώματος προκύπτει ότι κάθε σώμα R περιέχει δύο τουλάχιστον στοιχεία, το μηδενικό στοιχείο 0, που πρέπει να υπάρχει στην προσθετική ομάδα του δακτυλίου R, και το μοναδιαίο στοιχείο 1, που πρέπει να υπάρχει στο δακτύλιο με διαίρεση R.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.1.17 Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}$ των ακεραίων δεν είναι δακτύλιος με διαίρεση, γιατί τα μόνα αντιστρέψιμα στοιχεία του $\mathbb{Z}$ είναι τα στοιχεία 1 και -1. Αντίθετα, οι δακτύλιοι $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ είναι δακτύλιοι με διαίρεση, και ειδικότερα σώματα. Τέλος, είναι γνωστό, ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_p$, των ακεραίων $\bmod p$, θα είναι σώμα τότε και μόνον τότε όταν p είναι πρώτος αριθμός.▲

Το παράδειγμα που ακολουθεί μας δίνει ένα δακτύλιο με διαίρεση, ο οποίος δεν είναι σώμα.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1.1.18 Θεωρούμε το δακτύλιο $M_2(\mathbb{C})$, όλων των 2×2 πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{C}$. Θεωρούμε επίσης, το σύνολο

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{C} \right\},$$

όπου $\overline{a}$, $\overline{b}$ είναι οι συζυγείς των a και b αντίστοιχα. Είναι προφανές ότι το Q είναι υποσύνολο του δακτυλίου $M_2(\mathbb{C})$. Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ -\overline{d} & \overline{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ -(\overline{b-d}) & \overline{a-c} \end{pmatrix}, \text{ και}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -\overline{d} & \overline{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-b\overline{d} & ad+b\overline{c} \\ -(\overline{ad+b\overline{c}}) & \overline{ac-b\overline{d}} \end{pmatrix}.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.1.9, το Q είναι υποδακτύλιος του $M_2(\mathbb{C})$. Εύκολα διαπιστώνεται ότι ο δακτύλιος Q είναι μη αντιμεταθετικός και έχει μοναδιαίο στοιχείο. Αν

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

είναι ένα στοιχείο του δακτυλίου Q, τότε $\det A = |a|^2 + |b|^2$, δηλαδή όταν $A \neq 0$, τότε $\det A \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε μη μηδενικός πίνακας A του δακτυλίου Q είναι αντιστρέψιμος. Αποδεικνύεται ότι το αντίστροφο του A είναι ο πίνακας

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\overline{a}}{d} & -\frac{b}{d} \\ \frac{\overline{b}}{d} & \frac{a}{d} \end{pmatrix},$$

όπου $d = |a|^2 + |b|^2 = \det A$. Άρα ο πίνακας A^{-1} είναι επίσης ένα στοιχείο του Q. Δηλαδή κάθε μη μηδενικό στοιχείο του Q είναι αντιστρέψιμο. Επομένως ο δακτύλιος Q είναι ένας δακτύλιος με διαίρεση. Ο δακτύλιος Q δεν είναι σώμα, γιατί δεν ισχύει η αντιμετάθεση πινάκων.

Ο Q είναι γνωστός σαν ***δακτύλιος των Quaternions***.▲

Όπως βλέπουμε στο παρακάτω θεώρημα, ένας δακτύλιος με διαίρεση περιέχει δύο ομάδες: μια προσθετική, και μια πολλαπλασιαστική.

Θ ε ώ ρ η μ α 1.1.19 Ένας δακτύλιος R είναι δακτύλιος με διαίρεση τότε και μόνον τότε όταν το σύνολο $R^* = R - \{0\}$ είναι πολλαπλασιαστική ομάδα.

Α π ό δ ε ι ξ η. Υποθέτουμε ότι ο R είναι ένας δακτύλιος με διαίρεση. Τότε ο δακτύλιος R έχει μοναδιαίο στοιχείο $1 \neq 0$, επομένως θα ισχύουν οι σχέσεις

$$1 \in R^* \text{ και } 1 \cdot a = a = 1 \cdot a,$$

για κάθε στοιχείο $a \in R^*$. Η προσεταιριστική ιδιότητα ως προς τον πολλαπλασιασμό ισχύει στο R^*, αφού ισχύει στο R. Τέλος, από τον Ορισμό 1.1.16 προκύπτει ότι κάθε μη μηδενικό στοιχείο του R, δηλαδή κάθε στοιχείο του R^*, είναι αντιστρέψιμο. Άρα το σύνολο $R^* = R - \{0\}$ είναι πολλαπλασιαστική ομάδα.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το σύνολο $R^* = R - \{0\}$ είναι μια πολλαπλασιαστική ομάδα. Τότε το R^* έχει ουδέτερο στοιχείο. Δηλαδή, υπάρχει ένα στοιχείο $1 \in R^*$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $1 \cdot a = a = 1 \cdot a$, για κάθε $a \in R^*$. Οπότε θα ισχύει $1 \cdot a = a = 1 \cdot a$, για όλα τα στοιχεία $a \in R$. Άρα, ο δακτύλιος R έχει μοναδιαίο στοιχείο. Μένει να δείξουμε ότι κάθε μη μηδενικό στοιχείο του R είναι αντιστρέψιμο. Αυτό όμως είναι προφανές, γιατί κάθε μη μηδενικό στοιχείο του R είναι ένα στοιχείο της πολλαπλασιαστικής ομάδας R^* και επομένως έχει αντίστροφο στοιχείο στο R^*, το οποίο είναι υποσύνολο του R. ■

Θ ε ώ ρ η μ α 1.1.20 Κάθε πεπερασμένος δακτύλιος R με περισσότερα από ένα στοιχεία και χωρίς διαιρέτες του μηδενός είναι δακτύλιος με διαίρεση. Ειδικότερα, κάθε πεπερασμένη ακεραία περιοχή είναι σώμα.

Α π ό δ ε ι ξ η. Αφού ο δακτύλιος R είναι πεπερασμένος μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι

$$R = \{0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, είναι αρκετό να δείξουμε ότι το σύνολο $R^* = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, των μη μηδενικών στοιχείων του R, είναι πολλαπλασιαστική ομάδα. Είναι φανερό ότι το σύνολο R^* είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό. Αν a είναι τυχόν στοιχείο του R^*, τότε τα στοιχεία ax_1, ax_2, ..., ax_n του R^* είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Πράγματι, αν ήταν $ax_i = ax_j$, τότε θα είχαμε $a(x_i - x_j) = 0$. Επειδή όμως $a \neq 0$ και ο δακτύλιος R δεν έχει διαιρέτες του μηδενός, θα έπρεπε να ισχύει $x_i = x_j$, πράγμα που είναι άτοπο. Άρα, αναγκαστικά θα ισχύει $R^* = \{ax_1, ax_2, \ldots, ax_n\}$, για το τυχόν στοιχείο a του R^*. Αυτό σημαίνει ότι, κάθε στοιχείο $b \in R^*$ είναι της μορφής ax_λ, για κάποιο στοιχείο $x_\lambda \in R^*$. Άρα, για κάθε $a, b \in R^*$ υπάρχει $x_k \in R^*$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $ax_k = b$. Δηλαδή, βλέπουμε ότι η εξίσωση $ax = b$ έχει λύση στο R^*.

Αν, τώρα, χρησιμοποιήσουμε τα στοιχεία x_1a, x_2a, ..., x_na, μπορούμε με ανάλογο τρόπο να δείξουμε ότι, και η εξίσωση $ya = b$ έχει λύση στο R^*. Επομένως το σύνολο R^* είναι μια πολλαπλασιαστική ομάδα. ■

Ακολουθώντας τον Ορισμό 1.1.7, ένα μη κενό υποσύνολο K του σώματος F θα λέγεται ***υπόσωμα*** του F όταν το K είναι ένα σώμα με τις πράξεις του F.

Θ ε ώ ρ η μ α 1.1.21 Ένα μη κενό υποσύνολο K ενός σώματος F είναι υπόσωμα του F όταν ισχύουν $a - b \in K$ και $ab^{-1} \in K$, για όλα τα στοιχεία $a, b \in K$, όπου $b \neq 0$.

Α π ό δ ε ι ξ η. Είναι γνωστό ότι το σύνολο $F^* = F - \{0\}$ είναι μια πολλαπλασιαστική ομάδα. Η συνθήκη $ab^{-1} \in K$, για κάθε $a, b \in K$, όπου $b \neq 0$, δείχνει ότι το σύνολο $K^* = K - \{0\}$ είναι μια υποομάδα της F^*. Δηλαδή, το σύνολο K^* είναι μια πολλαπλασιαστική ομάδα. Αν, τώρα, θεωρήσουμε τα στοιχεία a και b^{-1} του K, τότε από τη συνθήκη $ab^{-1} \in K$ του θεωρήματος, προκύπτει $ab = a(b^{-1})^{-1} \in K$. Οπότε θα έχουμε

$$a - b \in K \text{ και } ab \in K,$$

για κάθε $a, b \in K$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.1.9, το K είναι υποδακτύλιος του F. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι το K είναι ένας δακτύλιος με διαίρεση. Ο δακτύλιος K είναι και αντιμεταθετικός, γιατί $K \subset F$. Δηλαδή το K είναι ένα σώμα. ■

1.2 Ασκήσεις

Ά σ κ η σ η 1.2.1 Θεωρούμε μια προσθετική αβελιανή ομάδα G. Στο σύνολο G ορίζουμε τον πολλαπλασιασμό με τον εξής τρόπο: $ab = 0$, για κάθε $a, b \in G$. Δείξτε ότι το σύνολο G γίνεται ένας δακτύλιος.

Ά σ κ η σ η 1.2.2 Αν R είναι ένα σύστημα με μοναδιαίο στοιχείο, που ικανοποιεί όλα τα αξιώματα του δακτυλίου εκτός του $a + b = b + a$, δείξτε ότι θα είναι οπωσδήποτε δακτύλιος. (***Υπόδειξη***: Αν $a, b \in R$, χρησιμοποιείστε το γινόμενο $(a+b)(1+1)$.)

Ά σ κ η σ η 1.2.3 Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο X και το δυναμοσύνολό του $\mathcal{P}(X)$. Στο $\mathcal{P}(X)$ ορίζουμε την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ως εξής:

$$A + B = (A - B) \cup (B - A) \text{ και } AB = A \cap B,$$

για κάθε $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Δείξτε ότι το σύνολο $\mathcal{P}(X)$ είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.

Ά σ κ η σ η 1.2.4 Ένας δακτύλιος R στον οποίο ισχύει η σχέση $a^2 = a$, για όλα τα στοιχεία $a \in R$ λέγεται ***δακτύλιος Boole***. Δείξε ότι κάθε δακτύλιος Boole R είναι αντιμεταθετικός και ότι ισχύει $a+a = 0$, για κάθε $a \in R$. (***Υπόδειξη***: $(a+a)^2 = a+a$, και $(a+b)^2 = a+b$.) Ο δακτύλιος της προηγούμενης άσκησης είναι δακτύλιος Boole, διότι ισχύει

$$A^2 = AA = A \cap A = A.$$

Ά σ κ η σ η 1.2.5 Αν a και b είναι στοιχεία ενός δακτυλίου R, τα οποία ικανοποιούν τη σχέση $ab = ba$, δείξτε ότι αν $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, τότε ισχύει

$$(a+b)^n = a^n + \tbinom{n}{1} a^{n-1} b + \tbinom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \tbinom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Ά σ κ η σ η 1.2.6 Έστω R ένας δακτύλιος. Δείξτε ότι το σύνολο

$$C(R) = \{a \in R / ax = xa, \text{ για κάθε } x \in R\}$$

είναι υποδακτύλιος του R, και λέγεται ***κέντρο του δακτυλίου*** R.

Ά σ κ η σ η 1.2.7 Αν R είναι ένας δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο, με περισσότερα από ένα στοιχείο, και χωρίς διαιρέτες του μηδενός, δείξτε ότι ισχύει $ab = 1$ αν και μόνον αν $ba = 1$. (***Υπόδειξη***. Προφανώς $a \neq 0$ και $b \neq 0$. Αν $ab = 1$, τότε $(ba)(ba) = b(ab)a = ba \Rightarrow ba(ba-1) = 0$. Όμως $ba \neq 0$, διότι διαφορετικά θα ήταν $a = 1 \cdot a = (ab)a = a(ba) = 0$.)

Ά σ κ η σ η 1.2.8 Αν A είναι ένα μη κενό υποσύνολο του δακτυλίου R, δείξτε ότι το σύνολο

$$\langle A \rangle = \cap \{S / A \subset S \text{ και } S \text{ υποδακτύλιος του } R\}$$

είναι ο μικρότερος υποδακτύλιος του R που περιέχει το A. Μικρότερος με την έννοια ότι κάθε άλλος υποδακτύλιος του R, που περιέχει το A, θα περιέχει και τον $\langle A \rangle$. Ο $\langle A \rangle$ λέγεται ***υποδακτύλιος του*** R ***που παράγεται από το σύνολο*** A.

Ά σ κ η σ η 1.2.9 Ένας δακτύλιος R είναι αντιμεταθετικός τότε και μόνον τότε όταν για οποιαδήποτε στοιχεία a και b του R ισχύει

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Ά σ κ η σ η 1.2.10 Να βρεθούν οι διαιρέτες του μηδενός και τα αντιστρέψιμα στοιχεία των δακτυλίων $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_{12}$ και $\mathbb{Z}_7$.

Ά σ κ η σ η 1.2.11 Δείξτε ότι ένας δακτύλιος R με μοναδιαίο στοιχείο είναι αντιμεταθετικός αν και μόνον αν ισχύει $(ab)^2 = a^2b^2$, για κάθε $a, b \in R$.

Ά σ κ η σ η 1.2.12 Ένα στοιχείο a του δακτυλίου R λέγεται ***ταυτοδύναμο*** (idempotent) όταν ικανοποιεί τη σχέση $a^2 = a$, και ***μηδενοδύναμο*** (nilpotent) όταν ισχύει $a^n = 0$, για κάποιο φυσικό αριθμό $n > 1$. Δείξτε ότι:

(i) ένα μη μηδενικό ταυτοδύναμο στοιχείο δεν μπορεί να είναι μηδενοδύναμο.

(ii) κάθε μη μηδενικό μηδενοδύναμο στοιχείο είναι διαιρέτης του μηδενός.

(iii) αν a είναι ένα μηδενοδύναμο στοιχείο του δακτυλίου R με μοναδιαίο στοιχείο, τότε το στοιχείο $1 + a$ είναι αντιστρέψιμο.

Ά σ κ η σ η 1.2.13 Αν R είναι ένας δακτύλιος, δείξτε ότι οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) Ο R δεν έχει μη μηδενικά μηδενοδύναμα (βλ. άσκηση 1.2.12) στοιχεία.

(ii) Αν $a \in R$ και $a^2 = 0$, τότε θα είναι $a = 0$.

(***Υπόδειξη***: Έστω m ο ελάχιστος φυσικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $a^m = 0$. Αν $m > 2$, τότε θα έχουμε $2(m-1) > m$, οπότε θα ισχύει $(a^{m-1})^2 = 0$.)

Ά σ κ η σ η 1.2.14 Υποθέτουμε ότι ο δακτύλιος R με περισσότερα από ένα στοιχεία έχει την ιδιότητα: για κάθε μη μηδενικό στοιχείο a του R, υπάρχει μοναδικό στοιχείο b του R τέτοιο ώστε να ισχύει $aba = a$. Δείξτε ότι:

(i) ο R δεν έχει μη μηδενικούς διαιρέτες του μηδενός.
(ii) ισχύει $bab = b$.
(iii) ο R έχει μοναδιαίο στοιχείο.
(iv) ο R είναι δακτύλιος με διαίρεση.

Ά σ κ η σ η 1.2.15 Δείξτε ότι, για κάθε ελεύθερου τετραγώνου ακέραιο n, το σύνολο $\mathbb{Z}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n}/a, b \in \mathbb{Z}\}$ είναι μια ακεραία περιοχή. Είναι υποδακτύλιος του δακτυλίου $\mathbb{R}$, όταν ο n είναι θετικός, και υποδακτύλιος του δακτυλίου $\mathbb{C}$, όταν ο n είναι αρνητικός αριθμός.

Ά σ κ η σ η 1.2.16 Δείξτε ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ έχει άπειρα αντιστρέψιμα στοιχεία. (***Υπόδειξη***: Παρατηρείστε ότι $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$, και θεωρείστε, για κάθε φυσικό αριθμό n, τις δυνάμεις $(2+\sqrt{3})^n$.)

Ά σ κ η σ η 1.2.17 Δείξτε ότι ένας δακτύλιος R με μοναδιαίο στοιχείο, που περιέχει υποδακτύλιο S με μοναδιαίο στοιχείο διάφορο από αυτό του R, δεν είναι ποτέ ακεραία περιοχή.

Ά σ κ η σ η 1.2.18 Δείξτε ότι, για κάθε ελεύθερου τετραγώνου ακέραιο n, το σύνολο

$$\mathbb{Q}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n}/a, b \in \mathbb{Q}\},$$

είναι υπόσωμα του $\mathbb{R}$, όταν $n > 0$, ή υπόσωμα του $\mathbb{C}$, όταν $n < 0$. Να εξεταστεί αν το σύνολο $\{a + b\sqrt[3]{2}/a, b \in \mathbb{Q}\}$ είναι υπόσωμα του $\mathbb{R}$.

Ά σ κ η σ η 1.2.19 Αν $i = \sqrt{-1}$, δείξτε ότι το σύνολο

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi/a, b \in \mathbb{Z}\}$$

είναι υποδακτύλιος του $\mathbb{C}$. Να εξεταστεί αν ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[i]$ είναι ακεραία περιοχή. Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[i]$ λέγεται ***δακτύλιος του Gauss***.

Ά σ κ η σ η 1.2.20 Η τετραγωνική ρίζα ενός στοιχείο a του δακτυλίου R ορίζεται να είναι ένα στοιχείο $b \in R$, για το οποίο ισχύει $a = b^2$. Να βρεθεί η τετραγωνική ρίζα του στοιχείου $2i$ στο δακτύλιο $\mathbb{Z}[i]$.

Ά σ κ η σ η 1.2.21 Δείξτε ότι σε ένα πεπερασμένο δακτύλιο R με n στοιχεία ισχύει η σχέση $na = 0$, για κάθε $a \in R$.

Ά σ κ η σ η 1.2.22 Αν R είναι ένας δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο, δείξτε ότι το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων του R αποτελεί μια πολλαπλασιαστική ομάδα.

Ά σ κ η σ η 1.2.23 Έστω a τυχόν στοιχείο ενός δακτυλίου R. Δείξτε ότι το σύνολο $C(a) = \{r \in R/ra = ar\}$ είναι υποδακτύλιος του R.