

Δ. Π. ΨΩΙΝΟΣ



ΔΕΥΤΕΡΗ ΕΚΔΟΣΗ

ΠΟΣΟΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΠΡΩΤΟΣ ΤΟΜΟΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Όσοι συμμετέχουμε σε κάποια οργάνωση καταλαβαίνουμε ότι αυτή χρειάζεται: να προετοιμάζει και να παίρνει αποφάσεις, να οργανώνει το περιβάλλον της και τις δραστηριότητές της, να διακινεί πληροφορίες και ιδέες και να αξιολογεί τα αποτελέσματα της δράσεώς της, δηλαδή χρειάζεται διοίκηση. Η διαδικασία με την οποία οι διοικήσεις εκτελούν τα παραπάνω στον τόπο μας, όπως ομολογούν όλοι όσοι έχουν άμεση ή έμμεση σχέση με αυτή, δεν είναι ικανοποιητικά αναπτυγμένη. Αυτό συμβαίνει, γιατί διατηρεί σε μεγάλη έκταση τις παραδοσιακές μεθόδους και εκμεταλλεύεται ελάχιστα την επιστημονική γνώση, που έχει αναπτυχθεί διεθνώς στο χώρο της Διοικητικής (Management). Αντίθετα, σε όλες τις αναπτυγμένες χώρες του κόσμου, η διοικητική πρακτική έχει μετασχηματιστεί στο μεγαλύτερο μέρος της και έχει περάσει από το στάδιο της εμπειρικής τακτικής στο στάδιο της επιστημονικής δεοντολογίας από αρκετές δεκαετίες. Η χρονική καθυστέρηση της εξέλιξής μας στον αναφερόμενο τομέα, που όπως είναι φυσικό έχει και οικονομικές αλλά και κοινωνικές και γενικότερα πολιτικές επιπτώσεις, οφείλεται κυρίως στην αντίληψη που επικρατεί στον τόπο μας ότι η άσκηση της διοικήσεως μπορεί να πραγματοποιείται επιτυχώς και χωρίς να χρησιμοποιούνται οι σύγχρονες επιστημονικές γνώσεις. Παράλληλα όμως, πρέπει να ομολογήσουμε πως τα τελευταία χρόνια, ολοένα και περισσότερο, συνειδητοποιούμε την ανάγκη βελτιώσεως της διοικητικής διαδικασίας σε όλα τα επίπεδα οργανώσεώς μας. Για να βελτιώσουμε όμως τη διοικητική μας πρακτική δεν είναι αρκετό να το θέλουμε· πρέπει πρώτα από όλα να αλλάξουμε τον τρόπο σκέψεως και δράσεώς μας αναφορικά με τα θέματα διοικήσεως. Το νέο τρόπο πρέπει να τον αναζητήσουμε —όπως έπραξαν άλλωστε όλες οι αναπτυγμένες χώρες κατά τις προηγούμενες δεκαετίες— μέσα στον τεράστιο σε έκταση και σε βάθος γνωστικό χώρο της σύγχρονης Διοικητικής. Μονάχα σ' αυτή την πολύτιμη γνώση είναι δυνατό να θεμελιώσουμε

συστά την κάθε προσπάθεια που αποσκοπεί στη βελτίωση της διοικητικής πρακτικής, άρα και της αποτελεσματικότητας: στην επιχείρηση, στον οργανισμό, σε κάθε τομέα της οικονομίας και γενικότερα σε ολόκληρο το φάσμα της εθνικής μας ζωής. Και λέμε μονάχα, γιατί είναι κοινός τόπος πια ότι η ανάπτυξη της τεχνολογίας της διοικήσεως και η ενσωμάτωσή της στις λειτουργικές δομές κάθε οργανώσεως δεν αποτελεί μια οποιαδήποτε δυνατότητα για την αύξηση της αποτελεσματικότητάς της, αλλά την προσφορότερη και την οικονομικότερη από αυτές που έχουμε στη διάθεσή μας.

Όπως προαναφέραμε, τη διοικητική πρακτική στην εποχή μας μπορούμε, αν όχι καθολικά τουλάχιστο στο μεγαλύτερο μέρος της, να τη θεμελιώσουμε σε συγκεκριμένη επιστημονική γνώση. Η δυνατότητα αυτή δημιουργήθηκε και εξακολουθητικά δημιουργείται με τη βοήθεια της επιστημονικής έρευνας στον αιώνα μας. Έτσι, οι αναζητήσεις για νέα γνώση στο χώρο της Διοικητικής κινήθηκαν προς τρεις βασικά κατευθύνσεις: την επιστημονική διοίκηση (*Scientific Management*), τις ανθρώπινες σχέσεις (*Human Relations*) και την ποσοτική ανάλυση (*Quantitative Analysis*).

Η κίνηση της επιστημονικής διοικήσεως άρχισε από ορισμένους πρωτόπóρους μηχανικούς και επιχειρηματίες στις Η.Π.Α. κατά το τελευταίο τέταρτο του περασμένου αιώνα, όταν φάνηκε καθαρά πως η εμπειρική διοίκηση δεν είχε τη δυνατότητα να ανταποκριθεί σε ό,τι αναμενόταν από αυτή. Ο F. Taylor θεωρείται ο πατέρας της εν λόγω προσπάθειας. Σ' αυτή την επιστημονική κινητοποίηση οφείλουμε κυρίως: την ανακάλυψη του τρόπου χρήσεως της επιστημονικής μεθοδολογίας στα προβλήματα διοικήσεως, τη διαφοροποίηση της εργασίας των διοικήσεων και των εργαζομένων, τις βασικές αρχές οργανώσεως, τις πρώτες συστηματικές μεθόδους με τις οποίες οι διοικήσεις μπορούν να αυξάνουν την παραγωγικότητα των οργανώσεών τους, και άλλα. Από τις τελευταίες ενδεικτικά αναφέρουμε τη μελέτη εργασίας, τα συστήματα αμοιβών, τον προγραμματισμό της παραγωγής, τη χωροταξία των εργοστασίων, κτλ.

Η κίνηση η σχετική με τις ανθρώπινες σχέσεις εμφανίστηκε στη δεκαετία του 1920 και αποδίδεται συνήθως στους καθηγητές-κοινωνιολόγους του Πανεπιστημίου του Harvard, E. Mayo και F. Roethlisberger. Πρέπει να σημειώσουμε εδώ, ότι είναι μεγάλη η απλοποίηση να αποδοθεί όλη αυτή η κίνηση σε έναν ή δυο ερευνητές, αφού είναι γεγονός ότι σχετικές έρευνες πραγματοποιήθηκαν από πολλούς επιστήμονες σε ολόκληρο τον κόσμο και κατά την ίδια περίπου περίοδο. Μέχρι αυτή την περίοδο, οι διοικήσεις θεμελιώναν την πρακτική τους στην υπόθεση ότι ο άνθρωπος ήταν «ο οικονομικός άνθρωπος». Σύμφωνα με αυτή την υπόθεση το βασικό κίνητρο του

ανθρώπου ήταν η επιθυμία του πλουτισμού, και συνεπώς ο άνθρωπος ως φορέας της εργασίας ακολουθούσε μηχανιστικά τους κανόνες της προσφοράς και της ζήτησεως. Με βάση όμως τις έρευνες αυτής της κατεύθυνσης αποδείχθηκε ότι το οικονομικό συμφέρον του ανθρώπου δεν μπορεί να ερμηνεύσει τη συνολική εργασιακή του συμπεριφορά. Η τελευταία —συνεπώς και η απόδοσή του— καθορίζεται κατά κύριο λόγο από συναισθηματικούς παράγοντες και κατά δεύτερο λόγο από παράγοντες, όπως είναι οι περιβαλλοντολογικές συνθήκες εργασίας, οι αμοιβές, κτλ. Οι διοικήσεις επομένως ωφείλουν να αναπτύξουν μια νέα έννοια εξουσίας, της οποίας η κεντρική ιδέα να είναι η πίστη ότι ο ανθρώπινος παράγοντας πρέπει να έχει ιδιαίτερη μεταχείριση στην εργασία, όχι μόνο από λόγους ηθικής, αλλά και από λόγους σκοπιμότητας. Γενικά, στην προσπάθεια αυτή οφείλουμε την κατανόηση: της ατομικής και ομαδικής ανθρώπινης συμπεριφοράς στην εργασία, της κοινωνικής διαστάσεως κάθε οργανώσεως, της ηθικής και κοινωνικής διαστάσεως της διοικήσεως, κ.ά.

Τέλος, η τρίτη ερευνητική κατεύθυνση για δημιουργία νέων γνώσεων γύρω από τα θέματα διοικήσεως, που όπως είπαμε παραπάνω, είναι γνωστή ως ποσοτική ανάλυση, μπορεί κατά κάποιο τρόπο να θεωρηθεί προέκταση της πρώτης, δηλαδή της επιστημονικής διοικήσεως. Προς την κατεύθυνση αυτή, διάφοροι οικονομολόγοι προσπάθησαν από τις αρχές του 1920, οπότε ο J. O. McKinsey ανέπτυξε την τεχνική διαμορφώσεως του προϋπολογισμού —ο οποίος μέχρι και σήμερα αποτελεί βασικό εργαλείο στα χέρια των διοικήσεων—, να αναπτύξουν τεχνικές και μεθόδους, που να εξασφαλίζουν ποσοτικά στοιχεία στις διοικήσεις για τη λήψη αποφάσεων. Ύστερα η στατιστική, και μετά την ανάπτυξη μάλιστα από τον W. A. Shewhart του ποιοτικού ελέγχου και την ωρίμασή της, εισέβαλε κυριολεκτικά στα θέματα διοικήσεως και υποβοήθησε με τις μεθόδους της τις διοικήσεις να αντιμετωπίζουν προβλήματα στοχαστικής φύσεως. Τα εφαρμοσμένα μαθηματικά αναζητούν ολοένα και συστηματικότερα λύσεις στα προβλήματα διοικήσεως. Την πιο σημαντική όμως προσφορά στην κατεύθυνση της ποσοτικής αναλύσεως τη χρωστάμε στην επιχειρησιακή έρευνα, που αναπτύχθηκε μετά το δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο. Η επιχειρησιακή έρευνα έχει διαμορφώσει ένα συγκεκριμένο μεθοδολογικό τρόπο αναζητήσεως λύσεως στα προβλήματα διοικήσεως. Θεμελιακό ακόμη χαρακτηριστικό της αποτελεί η αναζήτηση όχι μόνο οποιασδήποτε λύσεως, αλλά της βέλτιστης, πράγμα που δημιουργεί παράλληλα έναν εντελώς νέο τρόπο σκέψεως, επάνω στα προβλήματα που σχετίζονται με τη διοίκηση. Η επιχειρησιακή έρευνα τόσο ως τρόπος σκέψεως όσο και ως τεχνικές επιλύσεως περίπλοκων και δύσκολων προβλημάτων —κάτι τέτοιο άλλοτε ήταν αδιανόητο— έχει αναμφισβήτητα συμβάλλει αποφασιστικά στη βελτίωση της διοικητικής πρακτικής. Η επιτυχία της

επιχειρησιακής έρευνας είναι τόσο μεγάλη, ώστε να δημιουργηθεί νέος επιστημονικός κλάδος και οι επιχειρησιακοί ερευνητές να θεωρούνται απαραίτητοι σύμβουλοι των διοικήσεων. Γενικά, στο χώρο της ποσοτικής αναλύσεως αναπτύχθηκαν πολλά μεθοδολογικά εργαλεία τα οποία υποβοηθούν και στηρίζουν ολόκληρη σχεδόν τη διοικητική διαδικασία. Έτσι σήμερα έχουμε τη δυνατότητα, όχι μόνο να λύνουμε προβλήματα μέγιστης πολυπλοκότητας, αλλά και να δημιουργούμε – με τη βοήθεια των ηλεκτρονικών υπολογιστών – λειτουργικά συστήματα, στα οποία γίνονται αυτοματοποιημένα ποσοτικές αναλύσεις που υποστηρίζουν συνεχώς και άμεσα τις διοικήσεις στο έργο τους. Όλα αυτά έχουν δημιουργήσει σε διεθνή κλίμακα κυριολεκτικά επανάσταση στον τρόπο διοικήσεως των διαφόρων οργανώσεων.

Η σύγχρονη διοικητική πρακτική οφείλει να θεμελιώνεται στην επιστημονική γνώση, που έχει συσσωρευθεί και από τις τρεις παραπάνω περιοχές και όχι μόνο από αυτές, αφού είναι γεγονός ότι μπορεί να ωφεληθεί πολύ από έρευνες που έχουν διεξαχθεί και σε άλλους συναφείς επιστημονικούς τομείς.

Με αυτές τις σκέψεις και με την ελπίδα ότι βοηθώ τόσο τους φοιτητές για να διαμορφώσουν συστηματικά τις γνώσεις τους στον τομέα της Διοικητικής, όσο και τις διοικήσεις για να τις διευρύνουν και να εφαρμόσουν τις σύγχρονες ποσοτικές μεθόδους αναλύσεως στη διοικητική διαδικασία, αποφάσισα να αποδουθώ στην προσπάθεια συγγραφής αυτού του βιβλίου. Στους δυο τόμους του θα περιληφθεί το μεγαλύτερο μέρος των συγχρόνων μεθόδων και τεχνικών της ποσοτικής αναλύσεως.

Ο πρώτος τόμος του βιβλίου υποδιαιρείται σε τρία κεφάλαια, ενώ ο δεύτερος σε πέντε κεφάλαια. Στο πρώτο αναπτύσσεται η μεθοδολογία με την οποία αντιμετωπίζεται μια γενική κατηγορία προβλημάτων διοικήσεως, που μπορούν να εκφραστούν με μια γραμμική συνάρτηση η οποία πρέπει να βελτιστοποιηθεί στο χώρο που ορίζουν γραμμικοί περιορισμοί. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα προβλήματα της καλύτερης κατανομής περιορισμένων πόρων, εφόσον υπάρχουν εναλλακτικές δυνατότητες, τα προβλήματα διανομής, κτλ. Στο δεύτερο κεφάλαιο εξετάζονται οι μέθοδοι με τις οποίες μπορούμε να μελετούμε τα φαινόμενα αναμονής, που αποτελούν συνηθισμένες δυσλειτουργίες. Στο τρίτο, αναπτύσσονται οι μέθοδοι προβλέψεως που στηρίζονται κυρίως στην ανάλυση των χρονοσειρών. Στο τέταρτο, αναλύονται τα διάφορα συστήματα του προγραμματισμού και του ελέγχου των αποθεμάτων. Αν και ο βασικός προσανατολισμός αυτού του κεφαλαίου είναι προς τα αποθέματα των υλικών, τις σχετικές τεχνικές μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε για να αναπτύξουμε αντίστοιχα συστήματα και άλλων αγαθών. Αναφέρουμε ενδεικτικά, τα κεφάλαια κινήσεως μιας επιχειρήσεως, το εξειδικευμένο προσωπικό, κτλ. Στο πέμπτο κεφάλαιο εξετάζονται οι τεχνικές της δικτυο-

τής αναλύσεως με τις οποίες αντιμετωπίζεται το πρόβλημα του προγραμματισμού κάθε μεγάλης προσπάθειας που η εκτέλεσή της απαιτεί χρόνο, χρήμα, κτλ. Στο έκτο αναλύεται η μέθοδος καθορισμού μιας βέλτιστης αλληλουχίας αποφάσεων. Στο έβδομο κεφάλαιο, εξετάζονται, εισαγωγικά θα λέγαμε, τα προβλήματα της αξιοπιστίας των τεχνολογικών συστημάτων. Στο όγδοο τέλος κεφάλαιο εκτίθεται ο τρόπος με τον οποίον οι διοικήσεις μπορούν να λύνουν πειραματικά προβλήματα, που δεν επιδέχονται αναλυτική λύση. Η οργανωτική δομή όλων των κεφαλαίων είναι ίδια. Συγκεκριμένα, η θεωρητική ανάπτυξη κάθε θέματος συνοδεύεται από χαρακτηριστικά παραδείγματα. Το σύνολο σχεδόν των παραδειγμάτων αναφέρεται σε καθημερινά προβλήματα των διοικήσεων. Βιβλιογραφικές παραπομπές στο εσωτερικό των κεφαλαίων κάνουμε μόνο στις περιπτώσεις που θεωρείται χρήσιμη η προσφυγή του αναγνώστη σε ειδικές βιβλιογραφικές πηγές. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου μνημονεύουμε αντιπροσωπευτικά ξένα συγγράμματα και δίνουμε υποδειγματικές ασκήσεις. Τις ασκήσεις τις έχουμε επιλέξει κυρίως από θέματα που έχουμε δώσει τα τελευταία χρόνια σε τμηματικές εξετάσεις της Πολυτεχνικής Σχολής του Α.Π.Θ. Στο τέλος των τόμων δίνουμε τις απαντήσεις όλων των ασκήσεων.

Πρόθεσή μου κατά τη δόμηση της ύλης ήταν να αποκαλύπτεται σταδιακά η πραγματική φύση των προβλημάτων διοικήσεως από τη μια μεριά και να διατηρούνται τα μαθηματικά σε επεξεργάσιμο άνετα επίπεδο από την άλλη. Παρόλα αυτά, η δεύτερη επιδίωξη ίσως δεν κατέστη δυνατή σε όλη την έκταση του κειμένου. Ο αναγνώστης όμως, που δεν είναι ιδιαίτερα εξοικεωμένος στη χρήση των μαθηματικών, έχει την ευχέρεια να παραλείπει ορισμένα μέρη τα οποία αναφέρονται σε προχωρημένα θέματα. Συγκεκριμένα, μπορεί να παραλείψει, χωρίς ουσιαστική ζημία, από το πρώτο κεφάλαιο την αναθεωρημένη μέθοδο Simplex και τη δυϊκή θεωρία. Από το δεύτερο κεφάλαιο ομοίως μπορεί να παραλείψει τις αποδείξεις όλων των σχέσεων, από το τέταρτο το βελτιωμένο σύστημα σταθερής ποσότητας παραγωγής και από το πέμπτο τις μαρκοβιανές διαδικασίες λήψεως αποφάσεων.

Το σύνολο της ύλης και των δυο τόμων έχει δοκιμαστεί για αρκετά χρόνια κατά τις παραδόσεις μου στους φοιτητές του Γ' έτους των τμημάτων Μηχανολόγων, Χημικών και Ηλεκτρολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Α.Π.Θ. Αυτό δεν σημαίνει πως πιστεύω στην τελειότητά του. Αντίθετα, έχω τη γνώμη ότι υπάρχουν ατέλειες και κάθε καλοπροαίρετη υπόδειξη προς αυτήν την κατεύθυνση θα είναι ευπρόσδεκτη. Κατά τη διάρκεια της συνθέσεως του συγγράμματος και μέχρι την τελική διαμόρφωση του, όλοι οι συνεργάτες μου στο Τομέα Βιομηχανικής Διοίκησης του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής με βοήθησαν με διάφορες χρήσιμες παρατηρήσεις. Για τη βοήθεια τους αυτή του ευχαριστώ θερμά.

Επιθυμώ να εκφράσω ακόμη ευχαριστίες προς την κ. Κατερίνα Ιωαννίδου-Τάτσιου για την πολύτιμη συμβολή της σ' αυτή την έκδοση. Με προθυμία, πίστη και συνέπεια σήκωσε το βαρύ φορτίο της γραμματειακής δουλειάς και δημιούργησε τις ευκαιρίες για να πραγματοποιηθούν οι συνεχείς βελτιώσεις στο κείμενο.

Τέλος, επιθυμώ να ευχαριστήσω το τυπογραφείο της κ. Π. Ζήτη, που με μεγάλη φροντίδα επιμελήθηκε και αυτήν την έκδοση.

Θεσσαλονίκη, Νοέμβριος 1985

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ Π. ΨΩΪΝΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

	Σελίδα
1.1. Εισαγωγή	1
1.1.1. Γενικά	1
1.1.2. Παραδείγματα	3
1.1.3. Μαθηματικό πρότυπο	7
1.2. Στοιχεία από τη θεωρία του γραμμικού προγραμματισμού	11
1.2.1. Γενικά	11
1.2.2. Γραφική λύση	12
1.2.3. Ιδιότητες του συνόλου των λύσεων του συστήματος των περιορισμών	16
1.2.4. Βέλτιστη λύση	26
1.3. Μέθοδος Simplex	28
1.3.1. Γενικά	28
1.3.2. Θεμελίωση της υπολογιστικής διαδικασίας	29
1.3.3. Διαδικασία υπολογισμού	53
1.3.4. Αρχική βασική δυνατή λύση	64
1.3.5. Το πρότυπο ελαχιστοποίησης	75
1.4. Αναθεωρημένη μέθοδος Simplex	79
1.4.1. Γενικά	79
1.4.2. Μητρική μορφή του πίνακα simplex	80
1.4.3. Υπολογιστική διαδικασία	83

1.5. Δυϊκή θεωρία	88
1.5.1. Γενικά	88
1.5.2. Το δυϊκό θεώρημα	88
1.5.3. Διαμόρφωση και λύση του δυϊκού προτύπου	91
1.5.4. Οικονομική ερμηνεία του δυϊκού προτύπου	100
1.5.5. Δυϊκή μέθοδος Simplex	105
1.6. Ανάλυση ευαισθησίας	109
1.6.1. Γενικά	109
1.6.2. Επίδραση από τις αλλαγές στα c_j	111
1.6.3. Επίδραση από τις αλλαγές στα b_i	114
1.6.4. Επίδραση από τις αλλαγές στα a_{ij}	115
1.6.5. Επίδραση από την προσθήκη ή την αφαίρεση μεταβλητών ή περιορισμών	115
1.7. Πρότυπο μεταφοράς	121
1.7.1. Γενικά	121
1.7.2. Διαμόρφωση και ιδιότητες	122
1.7.3. Λύση του προτύπου μεταφοράς με τη μέθοδο Simplex	127
1.7.4. Αρχική βασική δυνατή λύση	129
1.7.5. Δυϊκό πρότυπο του προτύπου μεταφοράς	137
1.7.6. Προσδιορισμός βέλτιστης λύσεως	138
1.7.7. Άνισες ανάγκες και δυνατότητες	144
1.7.8. Το πρότυπο μεταφοράς ως πρότυπο μεγιστοποίησης	145
Βιβλιογραφία	145
Ασκήσεις	146
2. ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ	
2.1. Εισαγωγή	155
2.2. Κατηγορίες φαινομένων αναμονής	157
2.3. Συναρτήσεις κατανομών	160
2.4. Μια ουρά – μια θέση εξυπηρέτησεως– άπειρο μήκος	163
2.4.1. Γενικά	163
2.4.2. Πιθανότητα να υπάρχουν n μονάδες στο σύστημα	164
2.4.3. Χαρακτηριστικά λειτουργίας	167
2.4.4. Χρόνος εξυπηρέτησεως με οποιαδήποτε συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	173
2.5. Μια ουρά – μια θέση εξυπηρέτησεως– περιορισμένο μήκος	176
2.5.1. Γενικά	176
2.5.2. Πιθανότητα να υπάρχουν n μονάδες στο σύστημα	176
2.5.3. Χαρακτηριστικά λειτουργίας	178

2.6. Μια ουρά –πολλές θέσεις εξυπηρέτησεως– άπειρο μήκος	181
2.6.1. Γενικά	181
2.6.2. Πιθανότητα να υπάρχουν n μονάδες στο σύστημα	182
2.6.3. Χαρακτηριστικά λειτουργίας	186
2.7. Μια ουρά –μια θέση εξυπηρέτησεως– περιορισμένος πλη- θυσμός	191
2.7.1. Γενικά	191
2.7.2. Πιθανότητα να υπάρχουν n μονάδες στο σύστημα	192
2.7.3. Χαρακτηριστικά λειτουργίας	194
2.8. Προτεραιότητα στη σειρά εξυπηρέτησεως	197
2.9. Βελτιστοποίηση φαινομένων αναμονής	198
2.9.1. Γενικά	198
2.9.2. Βέλτιστος ρυθμός εξυπηρέτησεως	199
2.9.3. Βέλτιστος αριθμός θέσεων εξυπηρέτησεως	202
2.10. Φαινόμενα αναμονής σε σειρά	203
2.11. Σύνοψη τύπων συνήθων φαινομένων αναμονής	207
2.11.1. Γενικά	207
2.11.2. Συμβολισμός	207
Βιβλιογραφία	212
Ασκήσεις	212

3. ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΒΛΕΨΕΩΣ

3.1. Γενικά	217
3.2. Είδη μαθηματικών προτύπων	220
3.2.1. Γενικά	220
3.2.2. Σταθερά πρότυπα	221
3.2.3. Γραμμικά πρότυπα	221
3.2.4. Πολυωνυμικά πρότυπα	224
3.2.5. Πρότυπα εποχικών μεταβολών	225
3.3. Πρόβλεψη με σταθερά πρότυπα	226
3.3.1. Γενικά	226
3.3.2. Απλός κινούμενος μέσος όρος	227
3.3.3. Απλή εκθετική εξομάλυνση	229
3.4. Πρόβλεψη με γραμμικά πρότυπα	236
3.4.1. Γενικά	236
3.4.2. Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων	237

3.4.3. Διπλός κινούμενος μέσος όρος	240
3.4.4. Διπλή εκθετική εξομάλυνση	246
3.5. Πρόβλεψη με πολυωνμικά πρότυπα	250
3.6. Πρόβλεψη με πρότυπα εποχικών μεταβολών	253
3.6.1. Γενικά	253
3.6.2. Εποχικοί συντελεστές	254
3.6.3. Μέθοδος Winters	258
3.7. Ειδικά θέματα	261
3.7.1. Γενικά	261
3.7.2. Καμπύλη Gompertz	262
3.7.3. Πρόβλεψη συναρτήσεως πιθανότητας	266
Βιβλιογραφία	270
Ασκήσεις	271
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ	
ΕΦΑΡΜΟΓΗ I	275
ΕΦΑΡΜΟΓΗ II	283
ΕΦΑΡΜΟΓΗ III	290
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Χρήσιμοι πίνακες στη Θεωρία Αναμονής	
Πίνακας 1. Τιμές του P_0	299
Πίνακας 2. Τιμές του Π_0	304
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ	309
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ	319

1

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

1.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1.1. Γενικά

Το πρόβλημα της καλύτερης κατανομής περιορισμένων πόρων, εφόσον υπάρχουν εναλλακτικές δυνατότητες, δεν είναι ούτε νέο ούτε επουσιώδες. Παρόλα αυτά όμως αποτελεσματική μέθοδος για τη λύση του δεν είχε προταθεί έως το 1947. Τότε ο *George B. Dantzig* διαμόρφωσε και έλυσε το μαθηματικό πρότυπο του Γραμμικού Προγραμματισμού, με το οποίο εκφράζεται μαθηματικά αυτό το πρόβλημα*.

Από τότε, και η θεωρητική έρευνα για το Γραμμικό Προγραμματισμό, και οι εφαρμογές του παρουσίασαν μια εκρηκτική στην κυριολεξία ανάπτυξη. Πολλοί ειδικοί θεωρούν –και υπάρχουν πειστικοί λόγοι που μας υποχρεώνουν να δεχτούμε τη γνώμη τους– ότι η ανάπτυξη του Γραμμικού Προγραμματισμού εντάσσεται ανάμεσα στις πιο σημαντικές

* *Dantzig, G. B.*, «Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities», in *T. C. Koopmans, ed.*, «Activity Analysis of Production and Allocation», pp. 339-347, *J. Wiley, N. Y.*, 1951. Πρόκειται για τα πρακτικά του Συνεδρίου που έγινε στο Σικάγο το 1949 από της 20 έως της 24 Ιουνίου από την *Cowles Commission for Research in Economics*.

επιστημονικές επιτεύξεις που σημειώθηκαν στα μέσα του αιώνα μας*. Ακόμη κι αν αυτό θεωρηθεί υπερβολικός ισχυρισμός των ειδικών, παραμένει αναμφισβήτητο ότι η ανάπτυξη του Γραμμικού Προγραμματισμού βοήθησε τόσο πολύ την τεχνολογία σε θέματα διοικήσεως, ώστε σήμερα να αναγνωρίζεται ότι σημαντικό μέρος των επιτευγμάτων της οφείλεται σ' αυτόν. Τη διαπίστωση αυτή την αποδεχόμαστε αναμφισβήτητη, αφού ο Γραμμικός Προγραμματισμός χρησιμοποιείται καθημερινά ως εργαλείο στις διαδικασίες λήψεως αποφάσεων. Οι βιομηχανίες, οι εταιρίες μεταφορών, οι τραπεζικοί οργανισμοί κτλ., καθημερινά παίρνουν αποφάσεις που θεμελιώνονται σε αποτελέσματα που προκύπτουν από τη χρήση του Γραμμικού Προγραμματισμού. Χαρακτηριστικά μνημονεύουμε ότι η Ομοσπονδιακή Διοίκηση Ενέργειας των Η.Π.Α. (*The Federal Energy Administration*) χρησιμοποιεί το Γραμμικό Προγραμματισμό για να αξιολογεί εναλλακτικά ενεργειακά σχέδια και να επιλέγει το πιο καλό από αυτά.**

Τι ακριβώς είναι ο Γραμμικός Προγραμματισμός θα φανεί, μόνο όταν ολοκληρωθεί το κεφάλαιο αυτό. Γενικά όμως μπορούμε να πούμε από τώρα ότι ο Γραμμικός Προγραμματισμός είναι η μαθηματική διαδικασία με την οποία μπορούμε να λύσουμε προβλήματα που εκφράζονται με μια γραμμική συνάρτηση, που πρέπει να βελτιστοποιηθεί —δηλαδή να μεγιστοποιηθεί ή να ελαχιστοποιηθεί— στο χώρο που διαγράφουν ορισμένοι περιορισμοί, που επίσης εκφράζονται ως γραμμικές σχέσεις. Η γραμμική συνάρτηση, που τη λέμε και συνάρτηση αποτελεσματικότητας, μπορεί να εκφράζει, παραδείγματος χάρη, κόστος, χρόνο, κέρδος, κτλ.

Αν για οποιοδήποτε λόγο η συνάρτηση αποτελεσματικότητας δεν είναι γραμμική, ο Προγραμματισμός λέγεται μη Γραμμικός· αυτό σημαίνει ότι όλα τα προβλήματα βελτιστοποίησης δεν είναι κατ' ανάγκην προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού.

Η προσέγγιση του Γραμμικού Προγραμματισμού που επιχειρούμε σ' αυτό το κεφάλαιο αποβλέπει στο να παρουσιάσουμε τις αρχές της θεωρίας του. Αυτές τις αποσαφηνίζουμε, όταν χρειάζεται, με παραδείγματα. Τις αυστηρές μαθηματικές αποδείξεις τις παραλείπουμε, όσο αυτό δεν δημιουργεί κενά στον αναγνώστη και δεν εμποδίζει την επιτυχή εφαρμογή του Γραμμικού Προγραμματισμού στην πράξη.

* Το 1977 απονεμήθηκε στον *G. B. Dantzig* το *National Medal of Science*, που είναι η πιο υψηλή επιστημονική διάκριση στις Η.Π.Α., για την επινόηση του Γραμμικού Προγραμματισμού και τη διαμόρφωση μεθόδων, που οδήγησαν σε μεγάλης κλίμακας επιστημονικές και τεχνικές εφαρμογές του.

** *OR/MS TODAY*, Vol. 1, No 1, 1977, p. 22.

1.1.2. Παραδείγματα

Είπαμε παραπάνω ότι με το Γραμμικό Προγραμματισμό επιδιώκουμε να βελτιστοποιήσουμε μια γραμμική συνάρτηση αποτελεσματικότητας στο χώρο που διαγράφουν ορισμένοι περιορισμοί που εκφράζονται ως γραμμικές σχέσεις. Για να απαντήσουμε αμέσως στην ερώτηση του αναγνώστη αν υπάρχουν πραγματικά προβλήματα που μπορούν να εκφραστούν με μια γραμμική συνάρτηση, που χρειάζεται να βελτιστοποιηθεί στο χώρο που διαγράφουν ορισμένοι γραμμικοί περιορισμοί, θα σχολιάσουμε δύο προβλήματα.

α) Μια επιχείρηση κατασκευάζει τα προϊόντα Α, Β, Γ και τα πουλάει αντίστοιχα με 14, 15 και 22 δραχμές. Τις τιμές αυτές τις θεωρούμε σταθερές και ανεξάρτητες από την κατάσταση της αγοράς στην οποία διατίθενται, που τη θεωρούμε επίσης ότι μπορεί να απορροφήσει οποιεσδήποτε ποσότητες. Για την κατασκευή των προϊόντων χρειάζονται τέσσερα είδη πρώτων υλών. Η αξία της μονάδας κάθε πρώτης ύλης, οι αναγκαίες μονάδες πρώτων υλών για κάθε τύπο προϊόντος και οι ποσότητες των πρώτων υλών που συνολικά διαθέτει η επιχείρηση σημειώνονται στον πιά κάτω πίνακα. Η επιχείρηση θέλει να βρει ποιές ποσότητες από κάθε προϊόν πρέπει να παράγει, ώστε να έχει το μεγαλύτερο κέρδος.

Πρώτες ύλες	Τιμή μονάδας	Προϊόντα			Διαθέσιμες πρώτες ύλες
		Α	Β	Γ	
1	3	0	2	3	50
2	2	5	2	1	200
3	0,5	4	4	6	200
4	1	0	0	2	100

Επειδή ο στόχος της επιχειρήσεως είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους, θα υπολογίσουμε το κέρδος της μονάδας καθενός από τα τρία προϊόντα. Το κέρδος της επιχειρήσεως από την πώληση του κάθε προϊόντος είναι η διαφορά που προκύπτει αν αφαιρέσουμε το ποσό, που η επιχείρηση δαπανά για να το κατασκευάσει και να το διαθέσει στην αγορά, από την τιμή πώλησεως. Για να απλουστεύσουμε το πρόβλημα, θα θεω-

ρήσουμε ότι η επιχείρηση δαπανά μόνο για την αγορά των πρώτων υλών, αφού είναι φανερό ότι μεθοδολογικά δεν έχει σημασία για το παράδειγμά μας αν στην αξία των πρώτων υλών προσθέσουμε και άλλα στοιχεία κόστους για το κάθε προϊόν, παραδείγματος χάρη την αμοιβή εργασίας. Με βάση αυτή την απλούστευση το κόστος παραγωγής της μονάδας του προϊόντος A είναι $2 \cdot 5 + 4 \cdot 0,5 = 12$ δρχ. Εφόσον η τιμή πωλήσεως είναι 14 δρχ., το κέρδος θα είναι 2 δρχ. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι το κέρδος από το προϊόν B είναι 3 δρχ. και από το Γ 6 δρχ. Αν οι ποσότητες που πρέπει να παραχθούν από το A , B και Γ προϊόν είναι οι x_A , x_B και x_Γ αντίστοιχα, το συνολικό κέρδος το δίνει η συνάρτηση

$$f(X) = 2 x_A + 3 x_B + 6 x_\Gamma$$

Πρέπει λοιπόν να αναζητήσουμε εκείνες τις τιμές των μεταβλητών x_A , x_B και x_Γ που εξασφαλίζουν μέγιστη τιμή στη $f(X)$. Από τη μορφή της συναρτήσεως διαπιστώνουμε εύκολα ότι οι τιμές των μεταβλητών x_A , x_B και x_Γ είναι σκόπιμο να αυξηθούν όσο το δυνατό περισσότερο. Όμως το μέγεθός τους, δηλαδή το ύψος της παραγωγής, περιορίζεται από τις ποσότητες των διαθέσιμων πρώτων υλών. Αν πάρουμε υπόψη τις ποσότητες των πρώτων υλών που είναι αναγκαίες για την παραγωγή κάθε προϊόντος, εύκολα διαπιστώνουμε ότι πρέπει να ικανοποιούνται οι σχέσεις

$$2 x_B + 3 x_\Gamma \leq 50, \quad 5 x_A + 2 x_B + x_\Gamma \leq 200, \quad 4 x_A + 4 x_B + 6 x_\Gamma \leq 200,$$

και

$$2 x_\Gamma \leq 100.$$

Ακόμη είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι οι μεταβλητές x_A , x_B και x_Γ δεν μπορούν να πάρουν αρνητικές τιμές, αφού εκφράζουν ποσότητες παραγωγής. Επομένως, πρέπει να είναι

$$x_A \geq 0, \quad x_B \geq 0 \quad \text{και} \quad x_\Gamma \geq 0.$$

Άρα, το παραπάνω πρόβλημα του προγραμματισμού παραγωγής, μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: ζητούμε να βρούμε τις τιμές των x_A , x_B και x_Γ που μεγιστοποιούν τη συνάρτηση

$$f(X) = 2 x_A + 3 x_B + 6 x_\Gamma$$

με τους περιορισμούς

$$2 x_B + 3 x_\Gamma \leq 50$$

$$5 x_A + 2 x_B + x_\Gamma \leq 200$$

$$4 x_A + 4 x_B + 6 x_\Gamma \leq 200$$

$$2 x_\Gamma \leq 100,$$

και

$$x_A, x_B, x_\Gamma \geq 0.$$

Είναι φανερό λοιπόν ότι το πρόβλημα του παραδείγματος το εκφράσαμε με μια γραμμική συνάρτηση που πρέπει να μεγιστοποιηθεί στο χώρο που ορίζουν οι γραμμικοί περιορισμοί.

β) Για να μη νομίσει κανείς ότι το Γραμμικό Προγραμματισμό μπορούμε να τον χρησιμοποιήσουμε μόνο σε περιπτώσεις που είναι ανάγκη να μεγιστοποιηθούν ή ελαχιστοποιηθούν οικονομικά μεγέθη, θα εξετάσουμε ένα ακόμη παράδειγμα, στο οποίο δεν χρειάζεται να βελτιστοποιηθεί οικονομικό μέγεθος. Έστω λοιπόν ότι μια βιομηχανία κατασκευάζει τους τύπους I και II ηλεκτρικά ψυγεία. Ολόκληρη η παραγωγή είναι χωρισμένη στο τμήμα μορφοποίησεως, που διαμορφώνονται οι διάφορες μεταλλικές επιφάνειες, ας το πούμε A , στο τμήμα συναρμολογήσεως, το B , και στο τμήμα Γ όπου γίνονται τα τελειώματα και η βαφή. Ο κάθε τύπος ψυγείου χρειάζεται διαφορετικό αριθμό εργατοώρες σε κάθε τμήμα. Υποθέτουμε ότι ένα ψυγείο του τύπου I χρειάζεται 60, 80 και 20 εργατοώρες στα τμήματα A , B και Γ αντίστοιχα, και ο τύπος II 70, 85 και 10 αντίστοιχα· και ακόμη ότι η επάνδρωση των τμημάτων A , B και Γ είναι τέτοια ώστε οι εργατοώρες που υπάρχουν εβδομαδιαία σε καθένα από αυτά είναι 2400, 3000 και 6000 αντίστοιχα. Με βάση τα προηγούμενα θέλουμε να εκπονήσουμε ένα εβδομαδιαίο πρόγραμμα παραγωγής, που να ελαχιστοποιεί σ' όλα τα τμήματα το νεκρό χρόνο του προσωπικού.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι το πρόγραμμα πρέπει να προβλέπει την παραγωγή x_I ψυγείων του τύπου I και x_{II} του τύπου II. Επειδή στο τμήμα A διαθέτουμε 2400 εργατοώρες εβδομαδιαία, αν παραχθούν x_I του τύπου I, που απαιτεί το καθένα 60 εργατοώρες σ' αυτό το τμήμα και x_{II} του τύπου II, που απαιτεί το καθένα 70 εργατοώρες, θα πρέπει τα x_I και x_{II} να είναι τέτοια που να ικανοποιούν τη σχέση:

$$60 x_I + 70 x_{II} \leq 2400.$$

Όμοια προκύπτουν αντίστοιχες σχέσεις και για τα άλλα τμήματα. Συγκεκριμένα,

$$80 x_I + 85 x_{II} \leq 3000$$

και

$$20 x_I + 10 x_{II} \leq 6000.$$

Βέβαια, επειδή τα x_I και x_{II} παριστάνουν αριθμό ψυγείων, πρέπει

$$x_I, x_{II} \geq 0.$$

Τώρα πρέπει να σημειώσουμε ότι ο νεκρός χρόνος κάθε τμήματος με εβδομαδιαίο πρόγραμμα παραγωγής x_I του I τύπου και x_{II} του II τύπου — αν βέβαια υπάρχει νεκρός χρόνος — θα είναι οι διαφορές των

δύο μελών των ανισοτήτων που σχηματίστηκαν πιο πάνω. Έστω λοιπόν x_A , x_B και x_Γ αυτές οι διαφορές στα τμήματα A , B και Γ αντίστοιχα. Με βάση αυτά οι παραπάνω σχέσεις γράφονται ως εξής:

$$60 x_I + 70 x_{II} + x_A = 2400$$

$$80 x_I + 85 x_{II} + x_B = 3000$$

$$20 x_I + 10 x_{II} + x_\Gamma = 6000$$

και ακόμη

$$x_i \geq 0 \quad \text{για} \quad i = I, II, A, B, \Gamma.$$

Η τελευταία σχέση είναι φανερή, αφού και ο νεκρός χρόνος των τμημάτων δεν μπορεί να έχει αρνητική τιμή.

Σύμφωνα με τα παραπάνω είναι φανερό ότι ο συνολικός νεκρός χρόνος εκφράζεται από τη σχέση

$$f(X) = x_A + x_B + x_\Gamma.$$

Το πρόβλημα λοιπόν μπορούμε να το διατυπώσουμε ως εξής:

Ζητούμε να βρούμε τις τιμές των x_I και x_{II} , που ελαχιστοποιούν τη συνάρτηση

$$f(X) = 0 x_I + 0 x_{II} + x_A + x_B + x_\Gamma$$

με τους περιορισμούς

$$60 x_I + 70 x_{II} + x_A = 2400$$

$$80 x_I + 85 x_{II} + x_B = 3000$$

$$20 x_I + 10 x_{II} + x_\Gamma = 6000$$

και

$$x_j \geq 0 \quad \text{για} \quad j = I, II, A, B, \Gamma.$$

Τα πιο πάνω προβλήματα δεν είναι τα μόνα, ούτε καλύπτουν όλες τις μεγάλες περιοχές, που πράγματι είναι πολλές, όπου έχει εφαρμογή ο Γραμμικός Προγραμματισμός. Αυτές θα αποκαλύπτονται, όσο είναι δυνατό σ' ένα κείμενο εισαγωγικό στο Γραμμικό Προγραμματισμό, καθώς θα παρουσιάζονται και άλλα παραδείγματα. Αλλά από τώρα πρέπει να πούμε, ότι το κείμενο που ακολουθεί καλύπτει κυρίως τη βασική μεθοδολογία του Γραμμικού Προγραμματισμού, επειδή αυτός είναι ο σκοπός του.* Οι τελευταίες, που αναφέρονται ειδικά στο βιομηχανικό τομέα

* Στον αναγνώστη που ενδιαφέρετε να ενημερωθεί συστηματικά για τις εφαρμογές του Γραμμικού Προγραμματισμού συνιστούμε το βιβλίο: *D a n o, S., Linear Programming in Industry, Springer Verlag, N. Y., 1974, pp. 15-75.*